

Matematika pro Fyziky 2: DÚ 3

Michal Grňo

6. júna 2020

1 Příklad 5

1.1 Zadání

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x} dx, \quad |a| < \pi, a \in \mathbb{R}$$

1.2 Řešení

Jde o sudou funkci, proto můžeme integrál rozšířit na interval $(-\infty, \infty)$:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x} dx.$$

Výraz si přepíšeme pomocí vzorce $\cosh x = e^x + e^{-x}$ a přejdeme do \mathbb{C} :

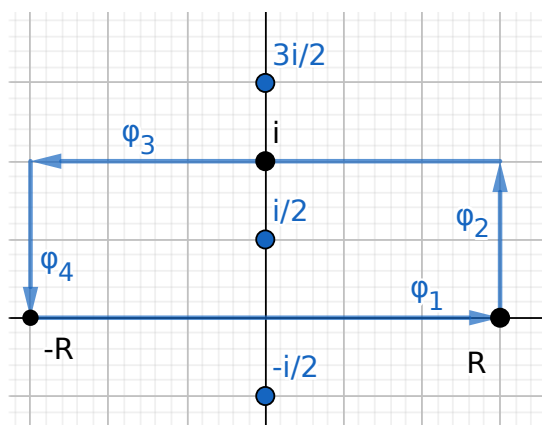
$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{az} + e^{-az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} dz = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} dz}_{I_2} \right).$$

$$f_1(z) = \frac{e^{az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}, \quad f_2(z) = \frac{e^{-az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}.$$

Funkce mají singularity v bodech:

$$e^{\pi z} + e^{-\pi z} = 0 \Leftrightarrow z = i\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Integrál I vypočteme pomocí křivkového integrálu v komplexní rovině:



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\varphi_1 = t \mapsto Rt, t \in [-1, 1],$$

$$\varphi_2 = t \mapsto R + it, t \in [0, 1],$$

$$\varphi_3 = t \mapsto -Rt, t \in [-1, 1]$$

$$\varphi_4 = t \mapsto -R + i(1 - t), t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} f_1 dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{i/2} f_1, & \int_{\varphi} f_2 dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{i/2} f_2, \\ \int_{\varphi_1} f_1 dz &= e^{ia} \int_{\varphi_3} f_1 dz, & \int_{\varphi_1} f_2 dz &= e^{-ia} \int_{\varphi_3} f_2 dz.\end{aligned}$$

Budeme zkoumat vývoj při $R \rightarrow \infty$. Vidíme, že integrály přes φ_2 a φ_4 vymizí:

$$\begin{aligned}z \rightarrow +\infty : \frac{e^{az} + e^{-az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} &\sim e^{(|a|-\pi)z} \rightarrow 0 \\ z \rightarrow -\infty : \frac{e^{az} + e^{-az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} &\sim e^{-(|a|-\pi)z} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Naopak integrály přes φ_1 a φ_3 zkonvergují k násobku I . Vypočteme nyní rezidua.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{i/2} f_1 &= \operatorname{Res}_{i/2} \frac{e^{az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} = \frac{e^{ia/2}}{\pi e^{i\pi/2} + \pi e^{-i\pi/2}} = \frac{1}{2\pi i} e^{ia/2} \\ \operatorname{Res}_{i/2} f_2 &= \operatorname{Res}_{i/2} \frac{e^{-az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} = \frac{e^{-ia/2}}{\pi e^{i\pi/2} + \pi e^{-i\pi/2}} = \frac{1}{2\pi i} e^{-ia/2}\end{aligned}$$

Nyní už víme všechno potřebné pro výpočet výsledku:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} f_1 dz &= \int_{\varphi_1} f_1 dz + \int_{\varphi_3} f_1 dz & \int_{\varphi} f_2 dz &= \int_{\varphi_1} f_2 dz + \int_{\varphi_3} f_2 dz \\ 2\pi i \operatorname{Res}_{i/2} f_1 &= (1 + e^{ia}) \int_{\varphi_1} f_1 dz & 2\pi i \operatorname{Res}_{i/2} f_2 &= (1 + e^{-ia}) \int_{\varphi_1} f_2 dz \\ \int_{\varphi_1} f_1 dz &= \frac{e^{ia}}{1 + e^{ia}} & \int_{\varphi_1} f_2 dz &= \frac{e^{-ia}}{1 + e^{-ia}} \\ 2I = 2I_1 + 2I_2 &= \int_{\varphi_1} f_1 dz + \int_{\varphi_1} f_2 dz = \frac{e^{ia}}{1 + e^{ia}} + \frac{e^{-ia}}{1 + e^{-ia}} = \frac{2e^{ia/2} + 2e^{-ia/2}}{2 + e^{ia} + e^{-ia}} = \frac{1}{\cos \frac{a}{2}} \\ & \int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x} dx = \frac{1}{2 \cos \frac{a}{2}}.\end{aligned}$$

1.3 Obecnější úloha

Ukázali sme riešenie zadaného príkladu v ??, avšak naše ciele sú dokázať riešenie integrálu v obecnjšom tvare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \beta x}{(\cosh \alpha x)^{\gamma}} dx = \frac{2^{\gamma-1}}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma(\gamma)} \quad \operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\beta)/\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0. \quad (1)$$

1.4 Riešenie obecnšej úlohy

Prý krok bude v zavedení substitúcie, tak aby sme sa zbavili multiplikačnej konštanty α v menovateli integrálu.

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \beta x}{(\cosh \alpha x)^{\gamma}} dx = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \delta x}{(\cosh x)^{\gamma}} dx, \quad (2)$$

kde $\delta = \frac{\beta}{\alpha}$. V nasledovnom, kroku sa zbavíme nepohodlných exponenciál

$$\alpha I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \cosh \delta x}{(2 \cosh x)^{\gamma}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\delta x} + e^{-\delta x}}{(e^x + e^{-x})^{\gamma}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\delta} + x^{-\delta}}{(x + x^{-1})^{\gamma}} \frac{dx}{x}. \quad (3)$$

Zavedieme klúčovú substitúciu $x = \sin(u)/\cos(u)$ v integráli αI

$$\alpha I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)^{\delta} + \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)^{\delta}}{\left(\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\cos u}{\sin u}\right)^{\gamma}} \frac{du}{\sin u \cdot \cos u}, \quad (4)$$

ďalej prepíšeme menovateľ integrálu do použiteľnejšieho tvaru

$$\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\sin u \cdot \cos u} = \frac{1}{\sin u \cdot \cos u}. \quad (5)$$

Dostávame integrál v nasledovnej forme

$$\begin{aligned}
 \alpha I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u \cdot \cos u)^{\gamma-1} \left(\left(\frac{\sin u}{\cos u} \right)^{\delta} + \left(\frac{\cos u}{\sin u} \right)^{\delta} \right) du \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{\gamma+\delta-1} (\cos u)^{\gamma-\delta-1} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{\gamma-\delta-1} (\cos u)^{\gamma+\delta-1} du \\
 &= B\left(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\gamma-\delta}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)},
 \end{aligned} \tag{6}$$

následne spätnou substitúciou dostaneme výsledok, ktorý sme chceli overiť. Výsledok príkladu v ?? plyní triviálne.

2 Příklad 13

2.1 Zadání

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1} dx, \quad p \in (-1, 2)$$

2.2 Řešení

Nejprve provedeme v integrálu substituci:

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1} dx = \left| \begin{array}{l} z = \frac{x}{1-x}, x = \frac{z}{1+z} \\ dx = (1-x)^2 dz \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{z \left(\frac{z}{z+1}\right)^{-p} \left(1 - \frac{z}{z+1}\right)^p}{(z+1)(2z^2+2z+1)} dz = \int_0^{+\infty} \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)} dz$$

V poslední rovnosti (*) předpokládáme, že $p \neq 0$ a $p \neq 1$. V případě, že by p těchto hodnot nabývalo, má integrál triviální řešení:

$$I|_{p=0} = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2,$$

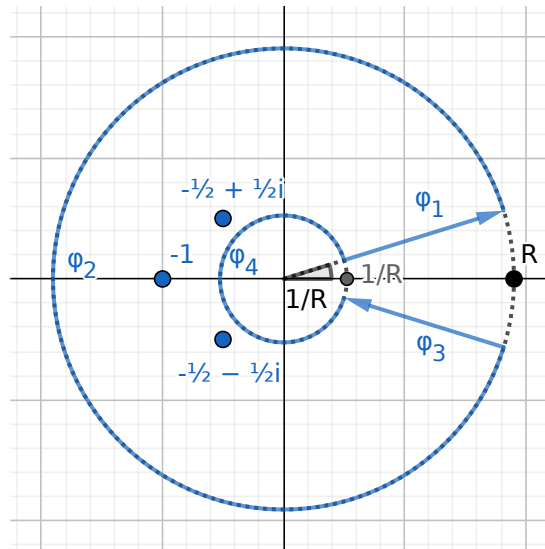
$$I|_{p=1} = \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = [\operatorname{atg} x]_0^1 - I|_{p=0} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Pro zbylé hodnoty p máme:

$$I = \int_0^{+\infty} f dz, \quad f(z) = \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)}.$$

Funkci f rozšíříme na \mathbb{C} , vidíme, že je holomorfní až na izolované singularity v bodech -1 a $-1/2 \pm 1/2i$.

Integrál I spočteme pomocí křivkového integrálu přes „Pac-Mana“ v komplexní rovině.



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\varphi_1 = t \mapsto te^{iR^{-1}}, \quad t \in [R^{-1}, R]$$

$$\varphi_2 = t \mapsto Re^{it}, \quad t \in [R^{-1}, 2\pi - R^{-1}]$$

$$\varphi_3 = t \mapsto (R-t)e^{-iR^{-1}}, \quad t \in [0, R - R^{-1}]$$

$$\varphi_4 = t \mapsto R^{-1}e^{-it}, \quad t \in [R^{-1}, 2\pi - R^{-1}]$$

$$\int_{\varphi} f dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{-1} f + \operatorname{Res}_{-1/2+1/2i} f + \operatorname{Res}_{-1/2-1/2i} f \right)$$

Nyní opět učiníme limitní přechod $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi} f \, dz &= \text{konst.} \\
\int_{\varphi_1} f \, dz &\rightarrow I \\
\int_{\varphi_2} f \, dz &\sim R^{-1-p} \rightarrow 0 \text{ pro } p > -1 \\
\int_{\varphi_3} f \, dz &\rightarrow -e^{-2\pi i p} I \\
\int_{\varphi_4} f \, dz &\leq \int_0^{2\pi} \frac{(R^{-1})^{2-p}}{(1-R^{-1})^3} \, d\phi \leq \frac{(R^{-1})^{2-p}}{\text{konst.}} \rightarrow 0 \text{ pro } p < 2
\end{aligned}$$

Máme tedy:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi} f \, dz &= \int_{\varphi_1} f \, dz + \int_{\varphi_3} f \, dz \\
2\pi i \left(\text{Res}_{-1} f + \text{Res}_{-1/2+1/2i} f + \text{Res}_{-1/2-1/2i} f \right) &= (1 - e^{-2\pi i p}) I \\
\frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i p}} \left(\text{Res}_{-1} f + \text{Res}_{-1/2+1/2i} f + \text{Res}_{-1/2-1/2i} f \right) &= I
\end{aligned}$$

Zbývá spočítat rezidua:

$$f = \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)} = \frac{z^{1-p}}{2(z+1)(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)}$$

$$\text{Res}_{-1} f = -\frac{2}{5}(-1)^{-p} = -\frac{2}{5}e^{-i\pi p}$$

$$\text{Res}_{-1/2+1/2i} f = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^{-p}$$

$$\text{Res}_{-1/2-1/2i} f = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^{-p}$$

Pro $p \in (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ tedy máme:

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1} \, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i p}} \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^{-p} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^{-p} - \frac{2}{5}e^{-i\pi p} \right).$$