Matematika pro Fyziky 2: DÚ 3

Michal Grňo

6. júna 2020

1 Příklad 5

1.1 Zadání

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\,\mathrm{d}x, \qquad |a| < \pi,\ a \in \mathbb{R}$$

1.2 Řešení

Jde o sudou funkci, proto můžeme integrál rozšířit na interval $(-\infty, \infty)$:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\,\mathrm{d}x.$$

Výraz si přepíšeme pomocí vzorce $\cosh x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ a přejdeme do $\mathbb{C}$:

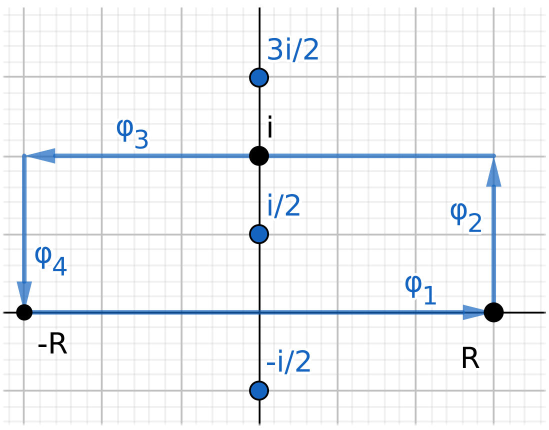
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{az}+\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z}+\mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z}+\mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z}+\mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z}_{I_2}\Bigg).$$

$$f_1(z) = \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z}+\mathrm{e}^{-\pi z}}, \qquad f_2(z) = \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z}+\mathrm{e}^{-\pi z}}.$$

Funkce mají singularity v bodech:

$$\mathrm{e}^{\pi z}+\mathrm{e}^{-\pi z} = 0 \ \Leftrightarrow\ z = \mathrm{i}(n+\frac{1}{2}).$$

Integrál I vypočteme pomocí křivkového integrálu v komplexní rovině:



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= t \mapsto Rt,\ t \in [-1,1],\\
\varphi_2 &= t \mapsto R + \mathrm{i}t,\ t \in [0,1],\\
\varphi_3 &= t \mapsto -Rt,\ t \in [-1,1]\\
\varphi_4 &= t \mapsto -R + \mathrm{i}(1-t),\ t \in [0,1]
\end{aligned}$$

$$\int_{\varphi} f_1 \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1, \qquad \int_{\varphi} f_2 \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2,$$

$$\int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \int_{\varphi_3} f_1 \,\mathrm{d}z, \qquad \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} \int_{\varphi_3} f_2 \,\mathrm{d}z.$$

Budeme zkoumat vývoj při $R \to \infty$. Vidíme, že integrály přes φ_2 a φ_4 vymizí:

$$z \to +\infty : \frac{\mathrm{e}^{az} + \mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} \sim \mathrm{e}^{(|a|-\pi)z} \to 0$$
$$z \to -\infty : \frac{\mathrm{e}^{az} + \mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} \sim \mathrm{e}^{-(|a|-\pi)z} \to 0$$

Naopak integrály přes φ_1 a φ_3 zkonvergují k násobku I. Vypočteme nyní rezidua.

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1 = \mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2}}{\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + \pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2}$$

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2 = \mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}}{\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + \pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}$$

Nyní už víme všechno potřebné pro výpočet výsledku:

$$\int_{\varphi} f_1 \,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f_1 \,\mathrm{d}z \qquad \int_{\varphi} f_2 \,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f_2 \,\mathrm{d}z$$

$$2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1 = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}) \int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z \qquad 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2 = (1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}) \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z$$

$$\int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}} \qquad \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}$$

$$2I = 2I_1 + 2I_2 = \int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}}{2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}} = \frac{1}{\cos\frac{a}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}.$$

1.3 Obecnejšia úloha

Ukázali sme riešenie zadaného príkladu v 1.1, avšak naše ciele sú dokázať riešenie integrálu v obecnejšom tvare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \beta x}{(\cosh \alpha x)^{\gamma}} \,\mathrm{d}x = \frac{2^{\gamma-1}}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma(\gamma)} \qquad \mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\beta)/\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0. \tag{1}$$

1.4 Riešenie obecnejšej úlohy

Prvý krok bude v zavedení substitúcie, tak aby sme sa zbavili multiplikačnej konštanty α v menovateli integrálu.

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \beta x}{(\cosh \alpha x)^{\gamma}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \delta x}{(\cosh x)^{\gamma}} \,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

kde $\delta = \frac{\beta}{\alpha}$. V nasledovnom, kroku sa zbavíme nepohodlných exponenciál

$$\alpha I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\cosh \delta x}{(2\cosh x)^{\gamma}} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\delta x} + e^{-\delta x}}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^{\gamma}} \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{\delta} + x^{-\delta}}{\left(x + x^{-1}\right)^{\gamma}} \frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{3}$$

Zavedieme kľúčovú substitúciu $x = \sin(u)/\cos(u)$ v integráli αI

$$\alpha I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)^{\delta} + \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)^{\delta}}{\left(\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\cos u}{\sin u}\right)^{\gamma}} \frac{\mathrm{d}u}{\sin u \cdot \cos u}, \tag{4}$$

ďalej prepíšeme menovateľ integrálu do použiteľnejšieho tvaru

$$\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\sin u \cdot \cos u} = \frac{1}{\sin u \cdot \cos u}. \tag{5}$$

Dostávame integrál v nasledovnej forme

$$\begin{aligned}
\alpha I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u \cdot \cos u)^{\gamma-1} \left(\left(\frac{\sin u}{\cos u} \right)^{\delta} + \left(\frac{\cos u}{\sin u} \right)^{\delta} \right) \,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{\gamma+\delta-1} (\cos u)^{\gamma-\delta-1} \,\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{\gamma-\delta-1} (\cos u)^{\gamma+\delta-1} \,\mathrm{d}u \qquad (6) \\
&= B\left(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\gamma-\delta}{2} \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)},
\end{aligned}$$

následne spätnou substitúciou dostaneme výsledok, ktorý sme chceli overiť. Výsledok príkladu v 1.1 plynie triviálne.

2 Příklad 13

2.1 Zadání

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad p \in (-1,2)$$

2.2 Řešení

Nejprve provedeme v integrálu substituci:

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = \frac{x}{1-x},\ x = \frac{z}{1+z} \\ \mathrm{d}x = (1-x)^2\,\mathrm{d}z \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{z\left(\frac{z}{z+1}\right)^{-p}\left(1-\frac{z}{z+1}\right)^p}{(z+1)(2z^2+2z+1)}\,\mathrm{d}z \overset{*}{=} \int_0^{+\infty} \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)}\,\mathrm{d}z$$

V poslední rovnosti $(*)$ předpokládáme, že $p \neq 0$ a $p \neq 1$. V případě, že by p těchto hodnot nabývalo, má integrál triviální řešení:

$$I|_{p=0} = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2,$$

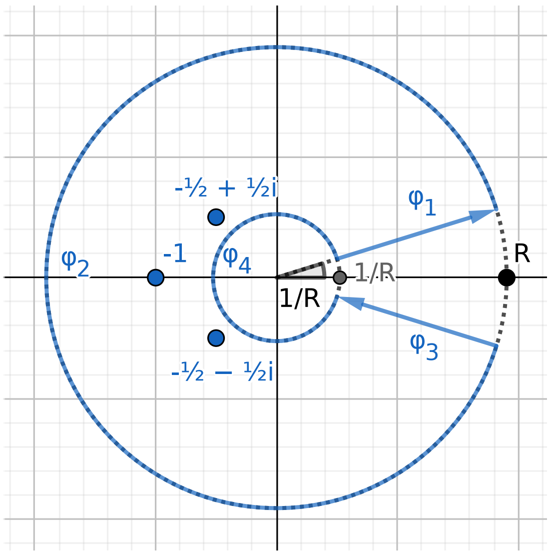
$$I|_{p=1} = \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{atg} x]_0^1 - I|_{p=0} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Pro zbylé hodnoty p máme:

$$I = \int_0^{+\infty} f\,\mathrm{d}z, \qquad f(z) = \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)}.$$

Funkci f rozšíříme na $\mathbb{C}$, vidíme, že je holomorfní až na izolované singularity v bodech -1 a $-1/2 \pm 1/2\mathrm{i}$.

Integrál I spočteme pomocí křivkového integrálu přes „Pac-Mana“ v komplexní rovině.



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\varphi_1 = t \mapsto t\mathrm{e}^{\mathrm{i}R^{-1}},\ t \in [R^{-1}, R]$$
$$\varphi_2 = t \mapsto R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [R^{-1}, 2\pi - R^{-1}]$$
$$\varphi_3 = t \mapsto (R-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R^{-1}},\ t \in [0, R - R^{-1}]$$
$$\varphi_4 = t \mapsto R^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t},\ t \in [R^{-1}, 2\pi - R^{-1}]$$

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}_{-1} f + \operatorname{Res}_{-1/2+1/2\mathrm{i}} f + \operatorname{Res}_{-1/2-1/2\mathrm{i}} f\right)$$

Nyní opět učiníme limitní přechod $R \to \infty$:

$$\int_{\varphi} f \,\mathrm{d}z = \text{konst.}$$
$$\int_{\varphi_1} f \,\mathrm{d}z \to I$$
$$\int_{\varphi_2} f \,\mathrm{d}z \sim R^{-1-p} \to 0 \text{ pro } p > -1$$
$$\int_{\varphi_3} f \,\mathrm{d}z \to -\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p} I$$
$$\int_{\varphi_4} f \,\mathrm{d}z \leq \int_0^{2\pi} \frac{(R^{-1})^{2-p}}{(1-R^{-1})^3} \,\mathrm{d}\phi \leq \frac{(R^{-1})^{2-p}}{\text{konst.}} \to 0 \text{ pro } p < 2$$

Máme tedy:

$$\int_{\varphi} f \,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f \,\mathrm{d}z$$
$$2\pi\mathrm{i}\Big(\mathrm{Res}_{-1} f + \mathrm{Res}_{-1/2+1/2\mathrm{i}} f + \mathrm{Res}_{-1/2-1/2\mathrm{i}} f\Big) = (1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p}) I$$
$$\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p}}\Big(\mathrm{Res}_{-1} f + \mathrm{Res}_{-1/2+1/2\mathrm{i}} f + \mathrm{Res}_{-1/2-1/2\mathrm{i}} f\Big) = I$$

Zbývá spočítat rezidua:

$$f = \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)} = \frac{z^{1-p}}{2(z+1)(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i})}$$

$$\mathrm{Res}_{-1} f = -\frac{2}{5}(-1)^{-p} = -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi p}$$
$$\mathrm{Res}_{-1/2+1/2\mathrm{i}} f = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-p}$$
$$\mathrm{Res}_{-1/2-1/2\mathrm{i}} f = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-p}$$

Pro $p \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$ tedy máme:

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}p}}\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-p} + \left(-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-p} - \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi p}\right).$$