

Matematika pro Fyziky 2: DÚ 2

Michal Grňo

3. června 2020

1 Příklad 6

1.1 Zadání

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

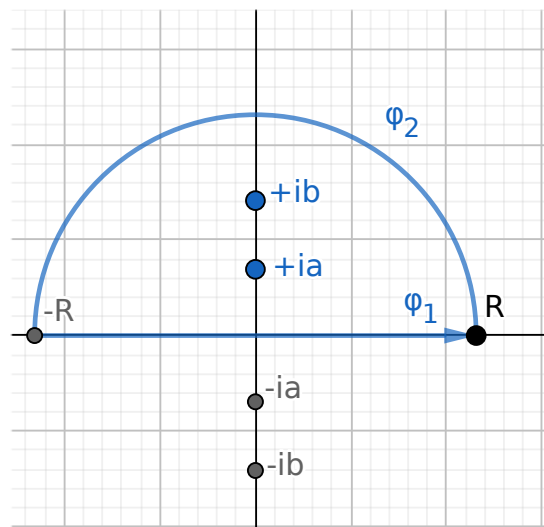
1.2 Řešení

Integrovanou funkci si rozšíříme na \mathbb{C} . Vidíme, že je holomorfní až na konečný počet singularit. Rozkladem jmenovatele nalezneme, kde leží její singularity:

$$(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2 = (x + ia)(x - ia)(x + ib)^2(x - ib)^2$$

Máme tedy jednonásobné kořeny $\pm ia$ a dvojnásobné kořeny $\pm ib$.

Hodnotu integrálu I vypočteme pomocí křivkového integrálu v komplexní rovině. Budeme integrovat po křivce $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$:



$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)^2}, \quad \int_{\varphi} f \, dz = \int_{\varphi_1} f \, dz + \int_{\varphi_2} f \, dz$$
$$\varphi_1 = t \mapsto Rt, t \in [-1, 1], \quad \varphi_2 = t \mapsto Re^{it}, t \in [0, \pi]$$

Pro dostatečně velkou počáteční volbu R budou obě singularity uvnitř integrované oblasti. Nyní vypočteme $\int_{\varphi} f \, dz$

pomocí reziduové věty, nejprve za předpokladu, že $a \neq b$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi} f \, dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}_{ia} f + \operatorname{Res}_{ib} f) \\
 &= 2\pi i \left(\frac{1}{2ai} \frac{1}{(b^2 - a^2)} + \lim_{z \rightarrow ib} \frac{d}{dz} \frac{(z - ib)^2}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)^2} \right) \\
 &= 2\pi i \left(-\frac{i}{2a(b^2 - a^2)} + \frac{i(3b^2 - a^2)}{4b^3(a^2 - b^2)} \right) \\
 &= \frac{\pi}{(b^2 - a^2)} \left(\frac{1}{a} + \frac{3b^2 - a^2}{2b^3} \right) = \pi \frac{2b^3 + 3ab^2 - a^3}{2ab^3(b^2 - a^2)}.
 \end{aligned}$$

Nyní vyšetříme případ $a = b$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi} f \, dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} f = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(z - ia)^3}{(z^2 + a^2)^3} \\
 &= \pi i \lim_{z \rightarrow ia} -3 \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + ia)^4} = 3\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{4}{(z + ia)^5} = \frac{3\pi}{8a^5}.
 \end{aligned}$$

Nyní učiníme limitní přechod $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi} f \, dz &= \text{konst.} \\
 \int_{\varphi_1} f \, dz &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f \, dz \\
 \int_{\varphi_2} f \, dz &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Že jde integrál přes φ_2 skutečně do nuly nám říká Jordanovo lemma, protože $RM_R \sim R^{-5}$. Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi} f \, dz &= \int_{\varphi_1} f \, dz + \int_{\varphi_2} f \, dz \\
 \int_{\varphi} f \, dz &= I + 0 \\
 I &= \begin{cases} a = b : \frac{3\pi}{8a^5} \\ a \neq b : \pi \frac{2b^3 + 3ab^2 - a^3}{2ab^3(b^2 - a^2)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

2 Příklad 16

2.1 Zadání

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^3} dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

2.2 Řešení

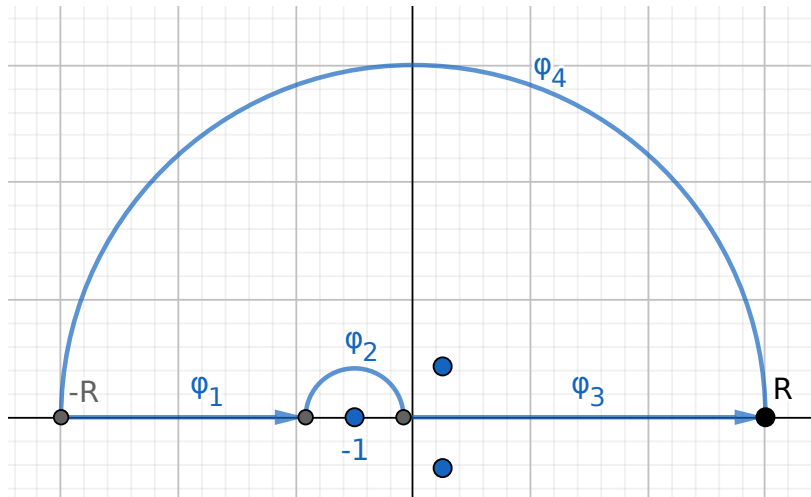
Nejprve přejdeme ke komplexní proměnné:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^3} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{itx}}{1+x^3} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itz}}{1+z^3} dz \equiv \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f dz.$$

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^3}$$

Původní funkce je zřejmě sudá v parametru t , proto se u f omezíme pouze na $t \geq 0$. Funkce má singularitu v bodě -1 , který leží na intervalu, přes který integrujeme, budeme tedy řešit integrál ve smyslu hlavní hodnoty. Kromě této singularity má f ještě dvě další: $e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}$.

K výpočtu integrálu opět použijeme křivkový integrál v komplexní rovině:



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\varphi_1 = t \mapsto t, t \in [-R, -1 - 1/R]$$

$$\varphi_2 = t \mapsto -1 + R^{-1}e^{it} \in [\pi, 0]$$

$$\varphi_3 = t \mapsto t, t \in [-1 + 1/R, R]$$

$$\varphi_4 = t \mapsto Re^{it} \in [0, \pi]$$

$$\int_{\varphi} f dz = \int_{\varphi_1} f dz + \int_{\varphi_2} f dz + \int_{\varphi_3} f dz + \int_{\varphi_4} f dz$$

Nyní použijeme limitní přechod $R \rightarrow \infty$ a dostaneme:

$$\int_{\varphi} f dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{\pi i/3}} f = \text{konst.} \quad (1)$$

$$\int_{\varphi_1} f dz + \int_{\varphi_3} f dz \rightarrow \text{p. v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f dz \quad (2)$$

$$\int_{\varphi_2} f dz \rightarrow -\pi i \operatorname{Res}_{-1} f \quad (3)$$

$$\int_{\varphi_4} f dz \rightarrow 0 \quad (4)$$

Zatímco (1) vyplývá z reziduové věty, (3) vyplývá z tvrzení o obíhání části kružnice a (4) plyne z Jordanovy věty, protože $RM_R \sim R^{-3}$ pro $t > 0$ a $\sim R^{-2}$ pro $t = 0$.

Stačí nám tedy vypočíst hodnoty reziduí v bodech -1 a $e^{\pi i/3}$:

$$\operatorname{Res}_{-1} f = \operatorname{Res}_{-1} \frac{e^{itz}}{1+z^3} = \frac{e^{itz}}{\frac{d}{dz}(1+z^3)} \Big|_{z=-1} = \frac{e^{-it}}{3}$$

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/3}} f = \operatorname{Res}_{e^{\pi i/3}} \frac{e^{itz}}{1+z^3} = \frac{e^{itz}}{\frac{d}{dz}(1+z^3)} \Big|_{z=e^{\pi i/3}} = \frac{e^{it \exp \pi i/3}}{3e^{2\pi i/3}} = \frac{1}{3} \exp \left(i \left(\frac{t}{2} - \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} t \right).$$

Dostáváme tedy (pro $t \geq 0$):

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \int_{\varphi} f \, dz - \operatorname{Re} \int_{\varphi_2} f \, dz = \operatorname{Re} 2\pi i \exp \left(i \left(\frac{t}{2} - \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \operatorname{Re} \pi i \frac{e^{-it}}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\sin t - 2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \sin \left(\frac{t}{2} - \frac{2}{3} \pi \right) \right) \end{aligned}$$

Nakonec se zbavíme omezení $t \geq 0$ a funkci sudě rozšíříme:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^3} \, dx = \frac{\pi}{3} \left(\sin |t| - 2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|t|} \sin \left(\frac{|t|}{2} - \frac{2}{3} \pi \right) \right).$$