Matematika pro Fyziky 2: DÚ 3

Michal Grňo

3. června 2020

1 Příklad 5

1.1 Zadání

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\,\mathrm{d}x, \qquad |a| < \pi,\ a \in \mathbb{R}$$

1.2 Řešení

Jde o sudou funkci, proto můžeme integrál rozšířit na interval $(-\infty, \infty)$:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\,\mathrm{d}x.$$

Výraz si přepíšeme pomocí vzorce $\cosh x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ a přejdeme do $\mathbb{C}$:

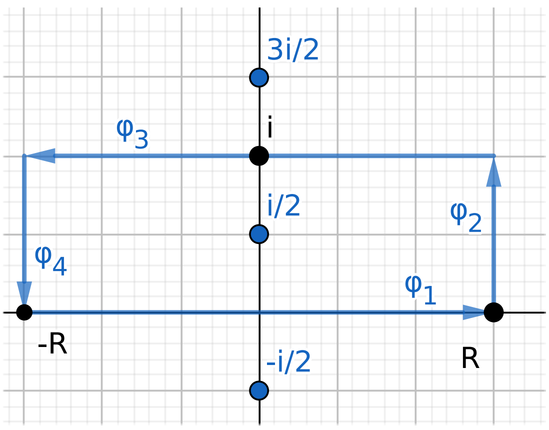
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{az} + \mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z}_{I_2}\Bigg).$$

$$f_1(z) = \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}, \qquad f_2(z) = \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}.$$

Funkce mají singularity v bodech:

$$\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z} = 0 \ \Leftrightarrow\ z = \mathrm{i}(n + \frac{1}{2}).$$

Integrál I vypočteme pomocí křivkového integrálu v komplexní rovině:



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= t \mapsto Rt,\ t \in [-1, 1],\\
\varphi_2 &= t \mapsto R + \mathrm{i}t,\ t \in [0, 1],\\
\varphi_3 &= t \mapsto -Rt,\ t \in [-1, 1]\\
\varphi_4 &= t \mapsto -R + \mathrm{i}(1 - t),\ t \in [0, 1]
\end{aligned}$$

$$\int_\varphi f_1\ \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1, \qquad \int_\varphi f_2\ \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2,$$

$$\int_{\varphi_1} f_1\ \mathrm{d}z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\int_{\varphi_3} f_1\ \mathrm{d}z, \qquad \int_{\varphi_1} f_2\ \mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\int_{\varphi_3} f_2\ \mathrm{d}z.$$

Budeme zkoumat vývoj při $R \to \infty$. Vidíme, že integrály přes φ_2 a φ_4 vymizí:

$$z \to +\infty: \frac{\mathrm{e}^{az} + \mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} \sim \mathrm{e}^{(|a|-\pi)z} \to 0$$
$$z \to -\infty: \frac{\mathrm{e}^{az} + \mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} \sim \mathrm{e}^{-(|a|-\pi)z} \to 0$$

Naopak integrály přes φ_1 a φ_3 zkonvergují k násobku I. Vypočteme nyní rezidua.

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1 = \mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2}}{\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + \pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2}$$

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2 = \mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}}{\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + \pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}$$

Nyní už víme všechno potřebné pro výpočet výsledku:

$$\int_\varphi f_1\ \mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f_1\ \mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f_1\ \mathrm{d}z \qquad \int_\varphi f_2\ \mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f_2\ \mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f_2\ \mathrm{d}z$$

$$2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1 = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a})\int_{\varphi_1} f_1\ \mathrm{d}z \qquad 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2 = (1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a})\int_{\varphi_1} f_2\ \mathrm{d}z$$

$$\int_{\varphi_1} f_1\ \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}} \qquad \int_{\varphi_1} f_2\ \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}$$

$$2I = 2I_1 + 2I_2 = \int_{\varphi_1} f_1\ \mathrm{d}z + \int_{\varphi_1} f_2\ \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}}{2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}} = \frac{1}{\cos\frac{a}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}.$$

2 Příklad 13

2.1 Zadání

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad p \in (-1, 2)$$