Matematika pro Fyziky 2:
Doplňující úkol – Fourierova transformace

Michal Grňo

8. června 2020

1 Zadání

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$$
$$\hat{f}(\xi) = ?$$

2 Řešení

Funkce f je z $L^2(\mathbb{R})$, proto se její Fourierova transformace rovná tomuto integrálu (ve smyslu rovnosti na L^2):

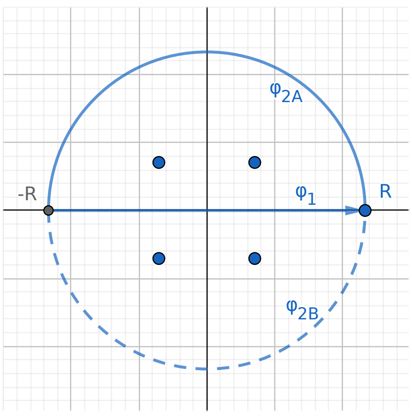
$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \underbrace{\frac{x^3}{x^4+1}\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}}_{F(x)}\, \mathrm{d}x$$

Budeme tedy integrovat funkci $F(x)$. Přejdeme ke komplexní proměnné a nalezneme singularity integrované funkce.

$$F(z) = \frac{z^3}{z^4+1}\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z\xi}$$

$$\begin{aligned} z^4 = -1 \;&\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2\pi k)} \\ &\Leftrightarrow\; \phi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \\ &\Leftrightarrow\; z \in \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\} \end{aligned}$$

Integrál vypočteme pomocí integrace podél křivky v komplexní rovině:



$$\varphi_A = \varphi_1 \oplus \varphi_{2A}$$
$$\varphi_B = \varphi_1 \oplus \varphi_{2B}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= t \mapsto Rt, \qquad t \in [-1,1] \\ \varphi_{2A} &= t \mapsto R\mathrm{e}^{+\mathrm{i}t},\ t \in [0,\pi] \\ \varphi_{2B} &= t \mapsto R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t},\ t \in [0,\pi]\end{aligned}$$

Provedeme limitní přechod $R \to \infty$. Funkce F je ve tvaru $R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}$, kde R je racionální funkce, z Jordanova lemmatu pro $\alpha > 0$ (tj. $\xi < 0$) vymizí integrál přes φ_{2A}, proto budeme integrovat přes φ_A; pro $\alpha < 0$ (tj. $\xi > 0$) vymizí φ_{2B}, budeme proto integrovat přes φ_B. Protože se jedná o rovnost na L^2, hodnotu pro $\xi = 0$ můžeme libovolně doplnit.

$$\hat{f}(\xi < 0) = \int_{\varphi_1} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_A} F(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{i\pi/4}} F + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}} F\right),$$

$$\hat{f}(\xi > 0) = \int_{\varphi_1} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_B} F(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{-i\pi/4}} F + \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}} F\right).$$

V přepisu jsme využili reziduové věty. Všechny póly F jsou jednonásobné, proto můžeme rezidua vypočítat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} F &= \lim_{z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} \left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right) F(z) = \left.\frac{z^3\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z\xi}}{(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} \\ &= \left.\frac{z^3\exp(-2\pi\mathrm{i}\xi|z|\operatorname{cis}\arg z)}{z^3 + z^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} = \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}\ \exp\left(-2\mathrm{i}\pi\xi(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})\right)}{(-1+\mathrm{i})\sqrt{2} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi}\end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}} F = \lim_{z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} \left(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}\right) F(z) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi}$$

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}} F = \lim_{z\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}} \left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}\right) F(z) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi}$$

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} F = \lim_{z\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} \left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right) F(z) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi}$$

Nyní máme výsledek:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi < 0) &= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi}\right) = \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi} + \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi}\right), \\ \hat{f}(\xi > 0) &= -2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi}\right) = -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi} + \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})\sqrt{2}\pi\xi}\right).\end{aligned}$$