



Università degli studi di Cagliari

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica

Corso di

Macchine a fluido 2

ESERCITAZIONE 1

Progettazione di un ugello supersonico

Dial Sarbjot Singh Mattar Sunny

Introduzione

Lo scopo della seguente esercitazione è la progettazione di un condotto convergente-divergente *adattato*, ossia progettato in modo tale che non si verifichino urti all'esterno o all'interno dell'ugello stesso.

Per evitare che vi sia un'onda di espansione (shock) si realizza la parete in modo che essa abbia la stessa direzione del flusso.

Il condotto verrà progettato come un ugello di "minima lunghezza", ossia un ugello avente una variazione brusca della parete.

Cenni sui moti supersonici

A differenza dei moti subsonici, per i quali ogni punto del campo influenza tutti gli altri dovunque situati, in un moto supersonico il disturbo generato in un punto (ad esempio una piccola deviazione della corrente fluida) si potrà risentire soltanto in una zona limitata (zona di influenza). Questa zona è confinata in un cono (cono di Mach) con un angolo di semi-apertura pari all'angolo di Mach:

$$\mu = \arcsin \left(\frac{1}{M} \right)$$

Il fatto fisico che giustifica la differenza fra le due fenomenologie è che i disturbi generati in seno ad una corrente fluida si propagano in ogni caso (cioè sia in moti subsonici sia in moti supersonici) in tutte le direzioni con una velocità relativa pari alla velocità del suono. Se la velocità relativa al corpo che genera il disturbo (in pratica la deviazione delle traiettorie delle particelle dell'aria che lambiscono il corpo) è minore di quella del suono allora la presenza del corpo si risente in tutto il campo in quanto il disturbo può risalire a monte con una velocità pari alla differenza tra la velocità del suono (a) e la velocità della corrente (V_∞).

Se il moto è supersonico ($V_\infty > a$) questo disturbo non potrà risalire, ma resterà confinato nel cono di Mach.

Dal punto di vista matematico la descrizione del campo di moto di velocità è fornita da equazioni ellittiche, per il moto subsonico, e da equazioni iperboliche per il moto supersonico.

Si consideri una corrente supersonica uniforme che subisce una deviazione dovuta ad uno spigolo bidimensionale piano (convesso o concavo) e si supponga che la deviazione $d\theta$ imposta dallo spigolo

alla corrente sia infinitesima (è dimostrato che tale processo è isoentropico).

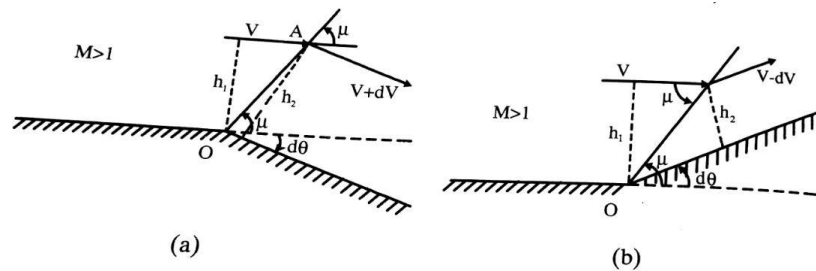


Figura 1: Deviazione infinitesima di una corrente supersonica uniforme

A differenza di quanto avviene in un moto subsonico, il disturbo provocato dallo spigolo O si risentirà solo a valle della discontinuità di Mach che parte dallo spigolo ed è inclinata dell'angolo di Mach (μ) rispetto alla direzione della velocità V (regione di influenza del punto O). La corrente rimarrà imperturbata a monte della discontinuità (regione del silenzio) e subirà attraverso di essa la deviazione $d\theta$ imposta dalla presenza del corpo. E' facile convincersi del fatto che, nel caso di uno spigolo convesso (caso a) la corrente supersonica subirà un'espansione (cioè un aumento della velocità ed una diminuzione della pressione, della densità e della temperatura); al contrario, per uno spigolo concavo (caso b) la corrente subirà una compressione (cioè una diminuzione della velocità ed un aumento della pressione, della densità e della temperatura). Ciò deriva dal fatto che, nel caso di uno spigolo convesso, la deviazione verso il basso comporta un aumento della sezione trasversale fra due linee di corrente; ad esempio:

$$h_2/h_1 = \sin(\mu + d\theta) / \sin\mu$$

Al contrario, nel caso di uno spigolo concavo, la deviazione verso l'alto imposta alla corrente comporta una diminuzione della sezione trasversale:

$$h_2/h_1 = \sin(\mu - d\theta) / \sin\mu$$

Se l'angolo di deviazione è finito, l'espansione della corrente supersonica attorno ad uno spigolo convesso (flusso di Prandtl-Meyer) si realizza attraverso un ventaglio, compreso fra le onde di Mach relative allo stato iniziale (1) ed a quello finale (2) e formato da un numero infinito di discontinuità deboli (isoentropiche), ciascuna delle quali contribuisce all'espansione con una variazione infinitesima dello stato termofluidodinamico della corrente. Per contro, la deviazione finita (verso

l'alto) dovuta ad uno spigolo concavo, si realizza mediante un'onda d'urto attraverso la quale si ha una brusca compressione ed una produzione di entropia.

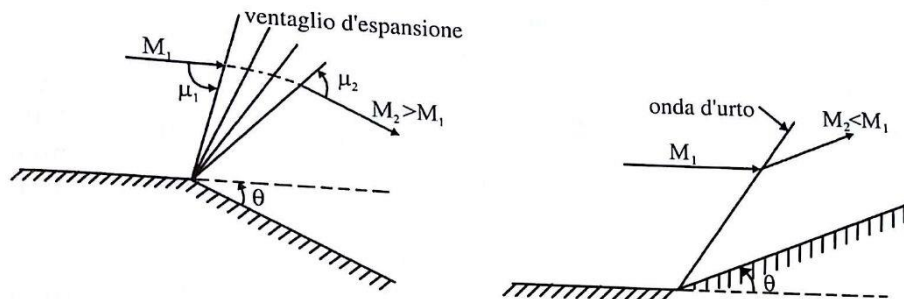


Figura 2: Ventaglio di espansione (a sinistra) ed onda d'urto (a destra)

Progettazione dell'ugello

Mediante la progettazione di minima lunghezza dell'ugello si ha un'espansione concentrata in un unico punto (A).

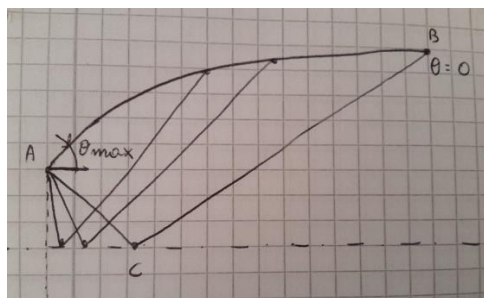


Figura 3

Si considerano le onde come riflesse dall'asse di simmetria (anche se non si tratta di una vera e propria riflessione), in modo tale da studiare solo metà del problema.

Per la realizzazione dell'ugello si utilizza il *metodo delle caratteristiche*, per il quale vale la seguente relazione:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\vartheta \pm \mu)$$

Si conosce, inoltre, la funzione di Prandtl-Meyer:

$$v = \int_1^M \sqrt{M^2 - 1} \frac{du}{u}$$

La variazione dell'angolo ϑ è legata alla funzione di Prandtl-Meyer nel seguente modo:

$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = v(M_2) - v(M_1)$$

L'angolo μ è legato al numero di Mach dalla seguente relazione:

$$\tan(\mu) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Per una caratteristica positiva, C^+ , valgono, dunque, le seguenti relazioni:

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta + \mu \rightarrow d\vartheta = dv \rightarrow \vartheta - v = \text{cost}$$

Per una caratteristica negativa, C^- , si ha, invece:

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta - \mu \rightarrow d\vartheta = -dv \rightarrow \vartheta + v = \text{cost}$$

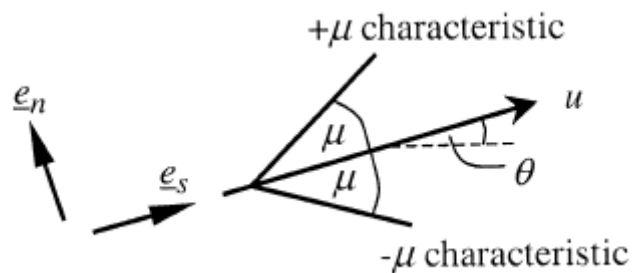


Figura 4

Si procede analizzando la figura 3 e, relativamente alle caratteristiche unenti i punti A, C e B risultano valide le seguenti relazioni:

Caratteristica CB (positiva):

$$\vartheta_C - v_C = \vartheta_B - v_B$$

Caratteristica AC (negativa):

$$\vartheta_A + v_A = \vartheta_C + v_C$$

I punti sull'asse sono tutti caratterizzati da un valore di ϑ nullo, così come il punto B di fine profilo, in quanto in uscita si ha un flusso parallelo all'asse.

Dalla prima relazione risulta:

$$v_C = v_B = v_{\text{esterno}}$$

Dalla seconda relazione si ha che:

$$\Delta\vartheta = \Delta v = \vartheta_A - 0 = v_A - v(M=1) = \vartheta_A = v_A$$

dove $\vartheta_A = \vartheta_{MAX}$.

Si ricorda che la funzione di Prandtl-Meyer è nulla in condizioni soniche, ossia per un valore del numero di Mach unitario.

Si trova che:

$$\vartheta_A = v_A = \frac{1}{2}v_C = \frac{1}{2}v_B = \frac{1}{2}v(M_e)$$

Dove M_e è il numero di Mach in uscita, mentre $v_A = \vartheta_{max}$.

Risulta, quindi, che la soluzione del problema dato dipende principalmente dal valore del numero di Mach in uscita, essendo la v stessa funzione di quest'ultimo; Il numero di Mach è facilmente calcolabile date le condizioni di pressione in camera di calma, quelle ambiente e il valore di gamma mediante la seguente relazione:

$$Me = \sqrt{\left(\frac{P_c}{P_{amb}}\right)^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} - 1} \frac{2}{\Gamma-1}$$

Dal valore del Mach d'uscita si ricava il valore del v d'uscita e quindi di ϑ_{max} , mediante la seguente formula:

$$v_e = \sqrt{\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1}} \operatorname{atan}\left[\sqrt{\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1}}(M_e^2-1)\right] - \operatorname{atan}\left[\sqrt{M_e^2-1}\right]$$

Si focalizza l'attenzione, dunque, alla ricerca dei valori di v ed ϑ per ogni punto della mesh, calcolo a cascata triviale una volta effettuata la discretizzazione del fan ϑ_{\max} e noti, quindi, i suddetti valori nel punto iniziale dell'intera cassa dell'ugello. In via semplificativa, inoltre, note le generiche caratteristiche geometriche del componente in questione, si concentra il problema della determinazione del profilo su metà della cassa dell'ugello, essendo l'altra assialsimmetrica.

In figura seguente si riporta in via illustrativa la scelta concernente la numerazione dei punti nodali, la quale coinciderà con la mappatura indiciale presente nelle matrici contenenti i valori dei parametri v ed ϑ per ognuno di essi.

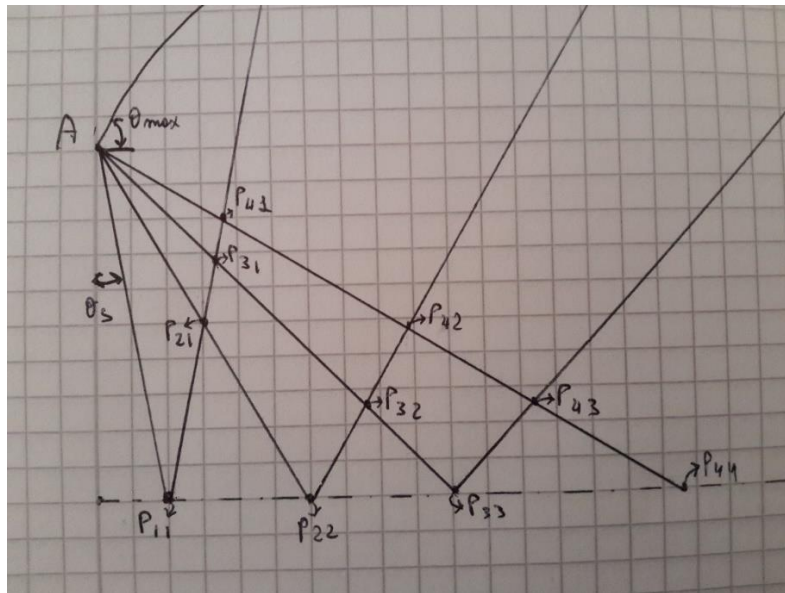


Figura 5

In relazione alla ricerca dei valori effettivi ϑ e v , si osserva come questi risultino ottenibili semplicemente impostando per ogni nodo un sistema di due equazioni riguardanti rispettivamente la caratteristica negativa e quella positiva passante per i punti in questione.

Seguendo tale principio risulta, in particolare, che per la caratteristica passante per i punti A e P₁₁ si ha:

$$\vartheta_A + v_A = \vartheta_{11} + v_{11}$$

Poiché $\vartheta_{11} = 0$, risulta che:

$$v_{11} = \vartheta_A + v_A = 2 \vartheta_{\text{start}}$$

in cui $\vartheta_{\text{start}}=0.03$ è l'angolo iniziale (non nullo) scelto nella discretizzazione del fan d'espansione, quest'ultima effettuata nella seguente maniera:

```
for i=1:num
    theta_s(i)=( (theta_max-theta_start) / (num-1) ) * (i-1) + theta_start;
    nu_s(i)=theta_s(i);
end
```

con la variabile "num" rappresentante il numero di caratteristiche scelto.

Definiti i valori di ϑ e v nel punto P_{11} si può procedere al calcolo delle medesime per il punto P_{21} giungendo alle seguenti relazioni:

Caratteristica $P_{11} P_{21}$:

$$\vartheta_{11} - v_{11} = \vartheta_{21} - v_{21}$$

Caratteristica $A P_{21}$:

$$\vartheta_A + v_A = \vartheta_{21} + v_{21}$$

Come facilmente osservabile le relazioni si sostanzializzano in un sistema di due equazioni in due incognite, rappresentate in questo caso dai soli termini ϑ_{21} e v_{21} ; essendo gli altri termini precedentemente già calcolati ed utilizzando per i valori di ϑ_A e v_A quelli incrementali derivanti dalla suddivisione del fan ϑ_{max} , la soluzione risulta semplice: si sommano e si sottraggono membro a membro le due equazioni.

In particolare la somma porta a:

$$\vartheta_{21} = 0.5[(\vartheta_{11} - v_{11}) + (\vartheta_A + v_A)]$$

Dalla sottrazione si ottiene:

$$v_{21} = 0.5[(\vartheta_A + v_A) - (\vartheta_{11} - v_{11})]$$

In maniera simile è possibile risolvere a cascata il problema per tutti i punti della mesh, calcolo implementato in matlab nella seguente maniera:

```
theta(1,1)=theta_start;
nu(1,1)=2*theta_start;

for i=2:num
    for j=1:i
        if (j==1)
```



```

        theta(i,j)=[theta_s(i)+nu_s(i) + theta(i-1,j)-nu(i-1,j)]/2;
        nu(i,j)=[theta_s(i)+nu_s(i) - theta(i-1,j)+nu(i-1,j)]/2;

elseif (j==i)
    theta(i,j)=0;
    nu(i,j)=theta(i,j-1)+nu(i,j-1);

elseif (j~=i)
    theta(i,j)=[theta(i,j-1)+nu(i,j-1) + theta(i-1,j)-nu(i-1,j)]/2;
    nu(i,j)=[theta(i,j-1)+nu(i,j-1) - theta(i-1,j)+nu(i-1,j)]/2;

end
end
end

```

Una volta calcolati i valori ϑ e v per ogni punto si procede tramite convergenza al calcolo del valore del numero di Mach corrispondente ai dati valori di v per ogni punto, finalizzato all'ottenimento del valore μ .

Nota preliminarmente la relazione che lega il v al Mach, il valore di μ è dato semplicemente dalla seguente relazione:

$$\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{Mach}\right)$$

Il calcolo dei valori di μ viene implementato nella seguente maniera, basata in primis sulla ricerca del valore del Mach mediante semplice convergenza in funzione ad un threshold d'errore imposto a seconda della precisione che si vuole ottenere, seguita quindi dal calcolo del valore di μ :

```

nu_2=0.0;
error=100;
MM_1=0.0;
MM=0.0;
mach=zeros(num);
mi=zeros(num);
error=100;
nu_1=0.0;
aa=sqrt((gamma+1)/(gamma-1));
bb=(gamma-1)/(gamma+1);

for i=1:num
    nu_is=(pi/180)*nu_s(i);

while (error>delta_err)
    nu_2=aa*atan(sqrt(bb*(MM_1^2-1)))-atan(sqrt(MM_1^2-1));
    error=nu_is-nu_2;
    MM_1=MM_1+delta_M;
end
mi_s(i)=(180/pi)*asin(1/MM_1);
error=100;

```

```

for j=1:i
    nu_ii=(pi/180)*nu(i,j);
    while(error>delta_err)
        nu_l=aa*atan(sqrt(bb*(MM^2-1)))-atan(sqrt(MM^2-1));
        error=nu_ii-nu_l;
        MM=MM+delta_M;
    end
    mach(i,j)=MM;
    mi(i,j)=(180/pi)*asin(1/MM);
    MM=0.0;
    MM_l=0.0;
    error=100;
end
end

```

Noti i valori di ϑ e μ risulta che da ogni punto della mesh dipartiranno rette inclinate rispettivamente del valore $(\vartheta+\mu)$ in caso di caratteristica positiva, viceversa $(\vartheta-\mu)$ in caso di caratteristica negativa, l'intersezione fra queste rette permette l'attribuzione delle coordinate spaziali dei punti nodali.

Il problema della ricerca delle intersezioni, per scelta personale prevede un'implementazione di tipo funzionale, come di seguito riportato:

```

function [ P ] = intersez( m1,P1,m2,P2 )
A=zeros(2);
B=zeros(2,1);
A=[1,-m1;1,-m2];
B=[P1(2)-m1*P1(1);P2(2)-m2*P2(1)];
x=A\B;

P(1)=x(2);
P(2)=x(1);
end

```

nella quale si passano come argomenti i due coefficienti angolari m1, m2 delle rette nonché i punti per le quali queste partono.

Impostata la funzione per la ricerca delle intersezioni, il calcolo effettivo di queste si sostanzializza nella seguente implementazione:

```

angular_plus=theta+mi;
angular_minus=theta-mi;
theta_m=theta_max;
P(1,1,:)=intersez(tan((pi/180)*((theta_s(1)-mi_s(1)))),[0 altezza],0,[0 0]);

for i=2:num
P(i,1,:)=intersez(tan((pi/180)*((theta_s(i)-mi_s(i)))),
[0 altezza],tan(pi/180)*(angular_plus(i-1,1)),P(i-1,1,:));
end

for car=2:num
P(car,car,:)=intersez(tan((pi/180)*angular_minus(car,car-1)),
P(car,car-1,:),0,[0 0]);
end

```

```

for i=(car+1):num
    P(i,car,:)=intersez(tan((pi/180)*angular_minus(i,car-1)),
        P(i,car-1,:),tan((pi/180)*angular_plus(i-1,car)),P(i-1,car,:));
end
end

```

nella quale, indicando con N il numero di caratteristiche scelte, la matrice P ha dimensione $N \times N \times 2$, essendo $P(:, :, 1)$ i valori delle ascisse mentre $P(:, :, 2)$ i valori delle ordinate dei punti nodali.

Note queste si procede con la determinazione dei punti propri del profilo: questi saranno dati, come prima, semplicemente dall'intersezione di segmenti rettilinei delle caratteristiche, inclinate di angoli ϑ dipartenti dai punti nodali più esterni della mesh:

```

P_c(1,1)=0;
P_c(1,2)=altezza;
m=theta_max;

for i=2:num+1
    P_c(i,:)=intersez(tan((pi/180)*m),P_c(i-1,:),tan((pi/180)*angular_plus(num,i-1)),P(num,i-1,:));
    m=theta(num,i-1);
end

```

la matrice P_c conterrà a questo punto tutti i punti del profilo.

Risultati

Si può in definitiva procedere con la parte di plottaggio dei risultati ottenuti, effettuata mediante lo script seguente:

```

for i=1:num
    xx(i)=P(i,i,1);
    yy(i)=P(i,i,2);
end
P(:, :, 1)=P(:, :, 1)+transpose(P(:, :, 1));
P(:, :, 2)=P(:, :, 2)+transpose(-P(:, :, 2));
for i=1:num
    P(i,i,1)=xx(i);
    P(i,i,2)=yy(i);
end
l=1;
k=1;
for i=1:num
    for j=1:num
        PP(j,i,1)=P(j,i,1);
        PP(j,i,2)=P(j,i,2);
    end
end

```

```

        if j==num
            PP(j+1,i,1)=P_c(i+1,1);
            PP(j+1,i,2)=P_c(i+1,2);
        end
    end

end

for i=1:num

    fan(i,1,1)=PP(i,1,1);
    fan(i,1,2)=PP(i,1,2);
    fan(i,2,1)=0;
    fan(i,2,2)=altezza;
end

figure(1)
hold on
plot(0,altezza,'*')
plot(transpose(fan(:, :, 1)), transpose(fan(:, :, 2)), 'red')
plot(PP(:, :, 1), PP(:, :, 2), 'red')
plot(P_c(:, 1), P_c(:, 2), '*')
plot(P_c(:, 1), P_c(:, 2))
plot(0, -altezza, '*')
plot(transpose(fan(:, :, 1)), -transpose(fan(:, :, 2)), 'red')
plot(PP(:, :, 1), -PP(:, :, 2), 'red')
plot(P_c(:, 1), -P_c(:, 2), '*')
plot(P_c(:, 1), -P_c(:, 2))

```

Si ottiene il seguente risultato, espresso in metri, in caso di un numero di caratteristiche pari ad 10:

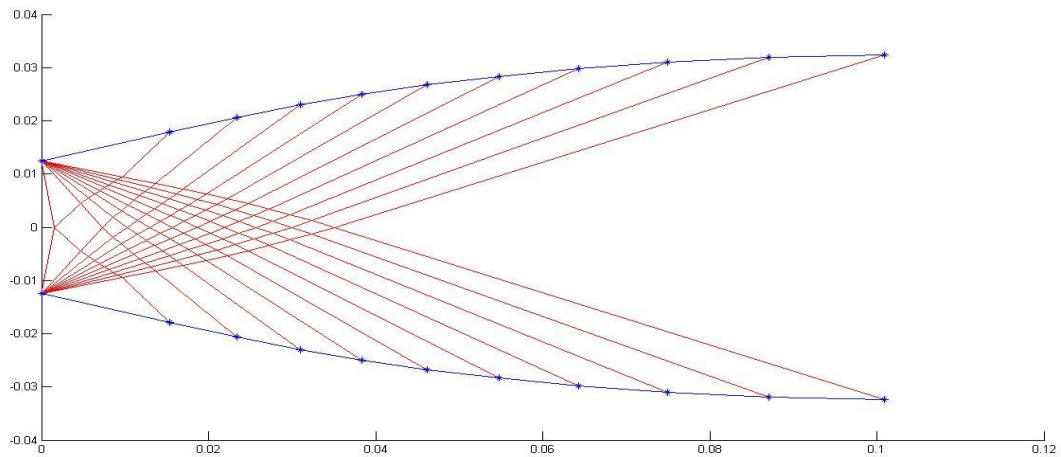


Figura 6

Nel caso di un numero di caratteristiche pari a 20 il risultato, sempre espresso in metri, è il seguente:

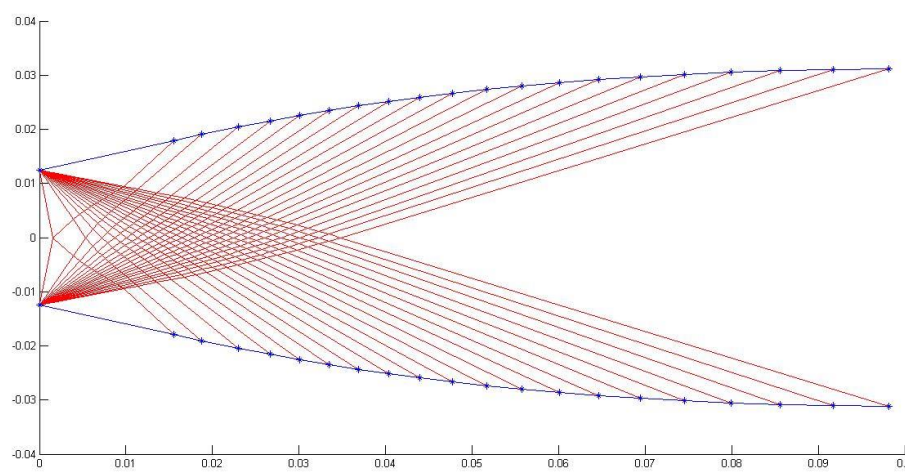


Figura 7

