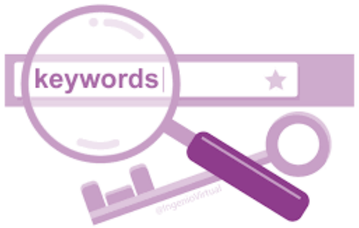
Unidad 2: Introducción a la Modelización

Glosario (algunos conceptos importantes)

- Parámetros
- Variables
- Función objetivo
- Restricciones
- Solución factible
- Solución óptima
- Modelo lineal (LP)
- Análisis de sensibilidad
- Coste reducido
- Precio Dual
- Precio Sombra
- Restricción redundante
- Restricción vinculante
- Holgura
- Modelo entero
- Binaria
- Modelo no lineal
- Método Simplex
- Modelo multiobjetivo
- Programación por Metas



Contenidos

Ejemplo 1

Un taller produce dos tipos de productos: *A* y *B*. Producir una unidad de *A* requiere 30 minutos de montaje y 40 minutos de pintura. Producir una unidad de *B* requiere 40 minutos de montaje y 30 minutos de pintura. No se pueden dedicar más de 10 horas para el montaje ni más de 11 horas para pintar al día. Cada unidad de *A* proporciona 40 euros de beneficio, y cada unidad de *B* 35 euros

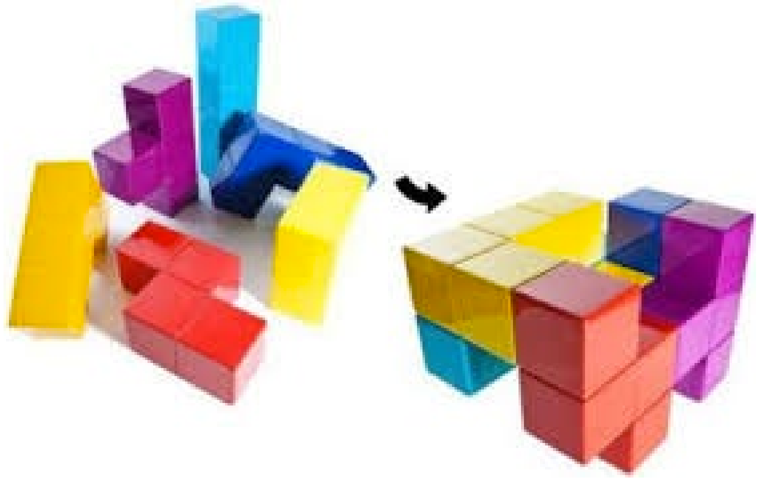
Diseñar un plan de producción diario para este taller

2.1 Componentes de un modelo

"Modelos" son una imagen (simplificación) de la realidad (normalmente, no incluyen todos los elementos de la realidad)

Los modelos están formados por:

- **Parámetros** (datos de entrada, números que conocemos)
- **Variables** (números que no conocemos)
- **Función objetivo** (lo que queremos optimizar)
- **Restricciones** (lo que debemos cumplir)



Parámetros/datos de entrada

Los datos de entrada son conocidos y necesarios para el problema (costes, demandas, localizaciones, distancias, disponibilidad de recursos, datos técnicos, etc.)

Muchas veces es necesario estimar los parámetros

Si los parámetros pueden ser estimados con certeza, construiremos modelos deterministas. Cuando los parámetros varían empleamos otro tipo de modelos (programación estocástica, por ejemplo)

Normalmente, los parámetros no pueden ser controlados

Variables

Suponiendo que disponemos de los datos de entrada:

- ✓ Necesitamos definir las **variables**
- ✓ Los valores de las variables deberían responder la pregunta inicial del problema
- ✓ Normalmente las variables se identifican con las últimas letras del alfabeto: *u, v, x, y, z (U, V, X, Y, Z)*
- ✓ La naturaleza de la variable (continua, entera, …) tiene un importante impacto sobre el modelo, las técnicas de modelización y su resolución

Variables

Las variables son esos aspectos de la realidad que el decisor puede controlar

Los aspectos sobre los que puedes decidir

Los valores concretos de las variables no son conocidos a priori y se conocen cuando se resuelve el modelo

También se denominan “actividades” y a sus valores “niveles de actividad”

Función objetivo

Asumiendo que los datos de entrada (parámetros) y las variables ya están definidas:

- ✓ Necesitas definir el **objetivo**
- ✓ Es una función (expresión matemática) de variables y parámetros
- ✓ Defines qué quieres optimizar (típicamente maximizar beneficios o minimizar costes)
- ✓ Las funciones objetivo lineales son más fáciles de tratar que las no lineales

Restricciones

Tras definir los parámetros, variables y objetivo :

- ✓ Necesitas definir las **restricciones**
- ✓ Son inecuaciones que implican funciones de las variables y los parámetros
- ✓ Definen qué necesitas satisfacer o cumplir (normalmente la limitación que hay sobre algún recurso como dinero, horas/hombre…)
- ✓ Las restricciones modelan (expresan matemáticamente) las obligaciones en cuanto a limitaciones del problema
- ✓ Las restricciones lineales son más fáciles de abordad que las no lineales

2.2 Modelos lineales (LP)

Función objetivo y restricciones lineales → *Linear Programming (LP)*

LP es la técnica más utilizada de la **IO**

LP fue introducido por vez primera por George B. Dantzig alrededor de 1947

Leonid Vitaliyevich Kantorovich trabajó en problemas similares alrededor de 1939, sin embargo su trabajo permaneció desconocido hasta 1959

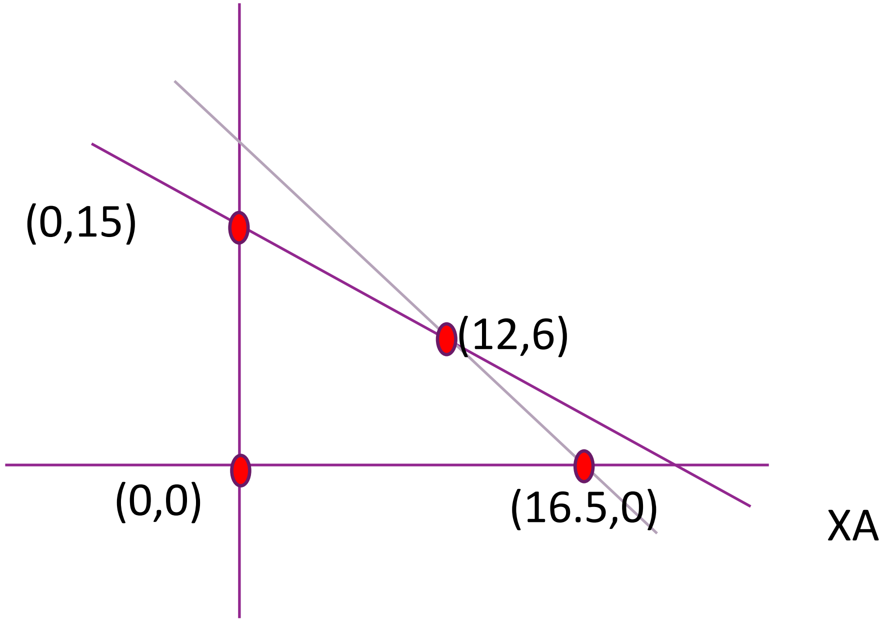
El algoritmo más utilizado para resolver los problemas LP es el Método Simplex

Ejemplo 1 (Solución)

Un taller produce dos tipos de productos: *A* y *B*. Producir una unidad de *A* requiere 30 minutos de montaje y 40 minutos de pintura. Producir una unidad de *B* requiere 40 minutos de montaje y 30 minutos de pintura. No se pueden dedicar más de 10 horas para el montaje ni más de 11 horas para pintar al día. Cada unidad de *A* proporciona 40 euros de beneficio, y cada unidad de *B* 35 euros

Diseñar un plan de producción diario para este taller

Ejemplo 1 (Solución)



F.O. Max $40\ X_A + 35\ X_B$

XA	XB	**F.O**
0	0	**0**
0	15	**525**
16,5	0	**660**
12	6	**690**

Resolvética

Un ejemplo

Una compañía produce tres productos distintos, P1, P2 y P3, los cuáles están compuestos por tres recursos diferentes R1, R2 y R3.

Cada unidad de cada producto necesita cierta cantidad de cada recurso. Todas las unidades se consideran divisibles infinitamente. Estas cantidades y los beneficios obtenidos por cada unidad en el mercado se recogen en la siguiente tabla:

	P1	P2	P3	Disponibilidad
R1	2	9	3,5	430
R2	6	4	9	410
R3	8	9	7	570
Beneficio	2,5	5	4	--

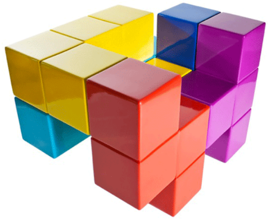
La pregunta

Gerencia quiere responder una pregunta muy simple

¿Cuál es el máximo beneficio que puedo obtener, y cuánto se debería producir de cada producto para alcanzar dicho beneficio?

EL MODELO:

Variables, Función objetivo y restricciones



VARIABLES: ¿cómo podemos responder a la pregunta?

Unidades a producir del producto 1: X_1

Unidades a producir del producto 2: X_2

Unidades a producir del producto 3: X_3

PRIMERA HIPÓTESIS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

DIVISIBILIDAD

Todas las variables pueden tomar cualquier valor real

SEGUNDA HIPÓTESIS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

NO NEGATIVIDAD

Todas las variables son no negativas

FUNCIÓN OBJETIVO (FO)

PRODUCTO	1	2	3
Unidades	X_1	X_2	X_3
Beneficio por unidad	2,5	5	4

- Queremos MAXIMIZAR el beneficio total:

MAXIMIZAR $Z = 2{,}5 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3$ es el objetivo

TERCERA HIPÓTESIS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

LINEALIDAD

Todas las relaciones entre las variables son lineales, esto implica:

1. Las contribuciones son proporcionales. La contribución de cada variable a la FO es proporcional a su valor y constante para todo el rango de valores

2. Las contribuciones son aditivas. Todas las contribuciones sumadas son iguales a la suma de todas las contribuciones individuales, cualquiera que sea el valor de las variables.

Restricción 1

No podemos utilizar más de 430 unidades del recurso 1

Por cada unidad de	Unidades para P1	Unidades para P2	Unidades para P3	Disponilidad
R1	2	9	3,5	430

Por lo tanto debe cumplirse que:

$$2 \cdot X_1 + 9 \cdot X_2 + 3{,}5 \cdot X_3 \leq 430$$

Restricciones 2 y 3

410 de recurso 2 y 570 de recurso 3

Por cada unidad de	Unidades para P1	Unidades para P2	Unidades para P3	Disponibilidad
R2	6	4	9	410
R3	8	9	7	570

Por tanto, debe cumplirse:

$$6 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 9 \cdot X_3 \leq 410$$

$$8 \cdot X_1 + 9 \cdot X_2 + 7 \cdot X_3 \leq 570$$

FORMULACIÓN COMPLETA DEL PROBLEMA

Determinar los valores de las **variables**:

$$X_1 \geq 0 \text{ , } X_2 \geq 0 \text{ y } X_3 \geq 0$$

Para optimizar la **función**:

$$\text{MAX } Z = 2{,}5 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3$$

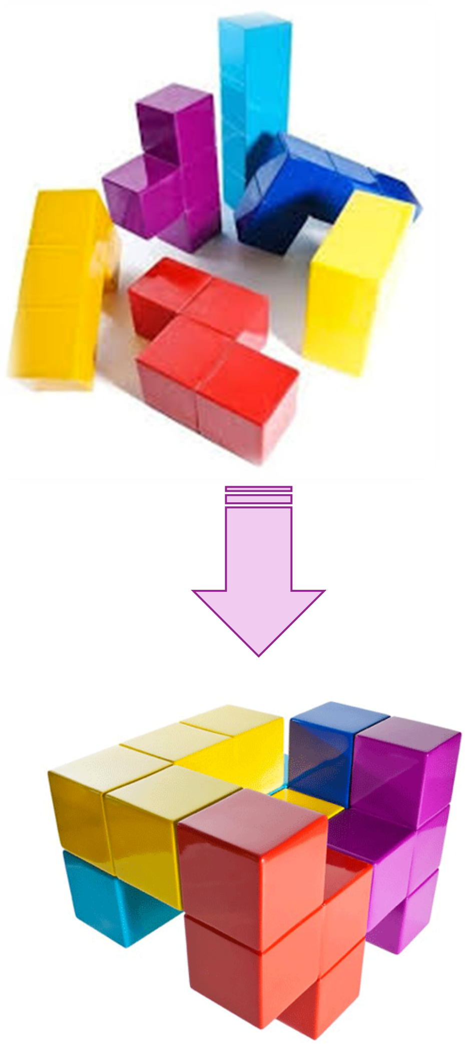
Sujeto a las **restricciones**:

$$2 \cdot X_1 + 9 \cdot X_2 + 3{,}5 \cdot X_3 \leq 430 \qquad \text{(R1)}$$

$$6 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 9 \cdot X_3 \leq 410 \qquad \text{(R2)}$$

$$8 \cdot X_1 + 9 \cdot X_2 + 7 \cdot X_3 \leq 570 \qquad \text{(R3)}$$

Lo resolveremos con Excel (instalando el complemento “Solver”)



Microsoft Excel Answer Report

Worksheet: [Class1PresentationExamples.xls]LP Example

Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.
Solver Engine

Engine: Simplex LP

Solution Time: 0.016 Seconds.

Iterations: 2 Subproblems: 0
Solver Options

Max Time 100 sec, Iterations 100, Precision 0,000001

Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 0%, Assume NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$12	Benefit Units P1	299,3283582	299,3283582

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$B$10	Units P1	0	0	Contin
$C$10	Units P2	36,34328358	36,34328358	Contin
$D$10	Units P3	29,40298507	29,40298507	Contin

FORMULACIÓN GENERAL DE UN PROGRAMA LINEAL

- Determinar los valores de las variables:

$$X_j\text{, donde } j=1,\ldots,n$$

- Con la finalidad de optimizar (maximizar o minimizar)

$$\text{MAX/MIN } Z = \Sigma\, C_j \cdot X_j$$

- Cumpliendo las restricciones:

$$\Sigma\, a_{ij} \cdot X_j \;\leq, = \text{ ó } \geq b_i \quad \text{para } i=1,2,\ldots,m$$

Resolvética

FORMULACIÓN GENERAL DE UN PROGRAMA LINEAL

- n variables
- m restricciones
- C_j son los coeficientes de la función objetivo
- a_{ij} son los denominados coeficientes técnicos
- b_i son los denominados coeficientes de los recursos

CUARTA HIPÓTESIS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

CERTEZA/CERTIDUMBRE

Todos los coeficientes (C_j, a_{ij}, b_i) del modelo son conocidos y deterministas

TIPOS DE RESULTADOS

- Una única solución
- Infinitas soluciones
- Ninguna solución
- Solución no acotada

Tarea: Modeliza el ejemplo 1, especificando claramente las variables, el objetivo y las restricciones

VARIABLES DE HOLGURA

Para cada solución, la diferencia entre el valor real de la restricción y el correspodiente b_i es denominado HOLGURA ($\leq$) o EXCESO ($\geq$)

Podemos introducir una variable artificial denominada variable de holgura para cuantificar esta diferencia

Dada una solución, las variables de holgura pueden interpretarse como la cantidad de recursos o de capacidad no utilizados

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En programación lineal: Los parámetros y coeficientes del modelo son datos de entrada (parámetros fijados del modelo)

En los problemas reales:

- Los coeficientes de los modelos, generalmente, no están perfectamente fijados ya que dependen de factores no controlables y, por tanto, no pueden ser estimados con exactitud
- Por tanto, es interesante estudiar cómo cambia la solución óptima si dado un parámetro cambia

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS **COEFICIENTES** DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

La pendiente de la función objetivo determina qué punto en la región factible sería la solución óptima

La pendiente de la función objetivo depende de sus coeficientes (C_j)

¿Qué ocurre si cambiamos estos coeficientes?

MAX Z = **2,5**$\cdot X_1$ + **5**$\cdot X_2$ + **4**$\cdot X_3$

El informe de sensibilidad nos ayudará a responder estas cuestiones

Resolvética

Microsoft Excel Informe de Sensibilidad

Worksheet: [Class1PresentationExamples.xls]LP Example

Celdas de las Variables

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$10	Units P1	0	-0,02238806	2,5	0,02238806	1E+30
$C$10	Units P2	36,34328358	0	5	0,5	3,222222222
$D$10	Units P3	29,40298507	0	4	7,25	0,032608696

Restricciones

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$14	Units of R1 Units P1	430	0,432835821	430	46,88679245	270,5555556
$B$15	Units of R2 Units P1	410	0,276119403	410	78,88888889	218,8888889
$B$16	Units of R3 Units P1	532,9104478	0	570	1E+30	37,08955224

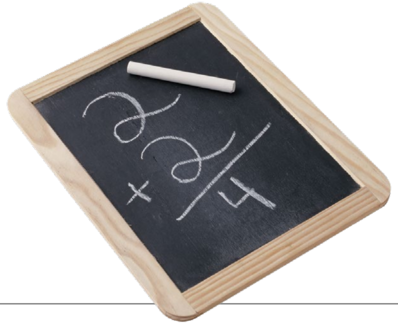
COSTE REDUCIDO

La cantidad que tendría que mejorar el coeficiente de la función objetivo (C_i) de una variable asociada al mismo, para que su valor fuese diferente de cero en la solución óptima

Una definición simétrica podría ser: *el deterioro que sufriría el valor de la función objetivo por unidad adicional de la variable que forzamos en la solución*

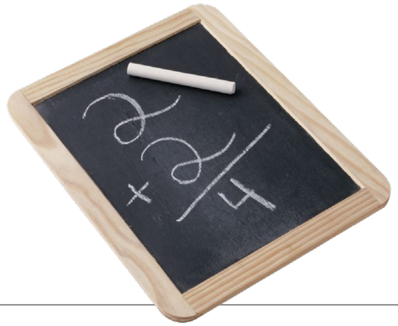
- El incremento/decremento permitido es la cantidad máxima que podemos añadir/reducir a un coeficiente de la función objetivo tal que el valor óptimo de las variables no cambia (cuidado, el valor de la función objetivo cambia porque los coeficientes cambian)

Ejemplo



1. ¿Qué ocurre si el beneficio por unidad de P1 incrementa en 0,01 unidades?
2. ¿Y qué pasaría si el incremento fuese 0,03 unidades?
3. ¿Qué pasaría si forzásemos a que se produjese una unidad de P1, con el beneficio unitario actual, debería ser fabricado?
4. Sin resolver de nuevo el problema, ¿cuál sería la solución si el beneficio unitario para P2 fuese de 5,3? ¿y si fuese de 6?

Ejemplo



1. *¿Qué ocurre si el beneficio por unidad de P1 incrementa en 0,01 unidades?* Nada porque su coste reducido es 0,02238806 por tanto, el valor de su correspondiente variable continuará valiendo cero
2. *¿Y qué pasaría si el incremento fuese 0,03 unidades?* Produciremos algunas unidades de P1 en la solución óptima, pero no sabemos cuántas
3. *¿Qué pasaría si forzásemos a que se produjese una unidad de P1, con el beneficio unitario actual, debería ser fabricado?* El valor de la función objetivo empeorará en 0,02238806 unidades
4. *Sin resolver de nuevo el problema, ¿cuál sería la solución si el beneficio unitario para P2 fuese de 5,3?* Se sigue produciendo lo mismo pero mejora el valor de la F.O. *¿y si fuese de 6?* Hay que volver a resolver el modelo con el nuevo valor del coeficiente

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS COEFICIENTES DE RECURSOS

¿Qué sucede si cambiamos un b_i?

Ejemplo: nosotros podemos comprar 10 unidades extras de R1

La nueva restricción sería
$2 \cdot X_1 + 9 \cdot X_2 + 3{,}5 \cdot X_3 \leq$ **440** (R1)

¿Cuánto beneficio extra conseguiríamos por esas 10 unidades extras?

La respuesta viene dada por el precio sombra de esta restricción (ver el informe de sensibilidad)
Beneficio extra= $10 \cdot 0{,}432835821 = 4{,}32835821$

¿Qué tal tener unidades extras de R2 y R3?

PRECIO DUAL /PRECIO SOMBRA

Es la mejora en el valor óptimo de la función objetivo por cada unidad de coeficiente de recurso (b_i) que se añade

- Así pues, en un problema de maximización, si incrementamos el valor del coeficiente de recurso, el nuevo valor de la función objetivo sería :

$$\text{New } Z = Z + \Delta\, b_i \cdot (\text{Precio Dual de la restricción } i)$$

En restricciones no vinculantes el precio sombra (dual) es 0

Si la holgura de una restricción es estrictamente mayor que cero (restricción no vinculante) el precio sombra siempre es 0, si la holgura es cero (restricción vinculante) el precio sombra podría ser no negativo

Las restricciones vinculantes también se denominan *cuellos de botella*

INCREMENTO/DECREMENTO PERMITIDO

Si cambiamos el valor del lado derecho (Right Hand Sides -RHS-) de una restricción dentro de los rangos permisibles, el valor de la función objetivo cambia proporcionalmente al valor de los precios sombra

¡Fuera de estos rangos o límites, no sabemos qué ocurrirá!

RESUMIENDO (I)

La programación lineal nos permite resolver problemas con una función objetivo lineal y una o más restricciones lineales

Para ello necesitamos definir variables, función objetivo y restricciones

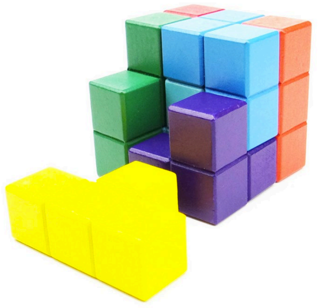
Cada combinación de valores para las variables que cumpla todas las restricciones es una **Solución Factible**. Todas las posibles soluciones factibles forman la **Región Factible**

RESUMIENDO (II)

Una solución factible con el mejor valor de la función objetivo se denomina **Solución Óptima**

Hemos aprendido cómo resolver estos problemas y analizar sus soluciones mediante un software informático

2.3 Modelos enteros



Cuando la hipótesis de divisibilidad no es aceptable recurrimos a la **Programación Entera**

El modelo matemático en programación entera es el mismo que el que utilizarías en programación lineal pero con la restricción adicional de que las variables tienen que tomar valores enteros

Tipos de modelos enteros

- Programación Entera Pura : Todas las variables son enteras
- Programación Entera Mixta : Una o más variables son enteras (pero no todas)
- Programación Binaria: Todas las variables son de tipo cero-uno

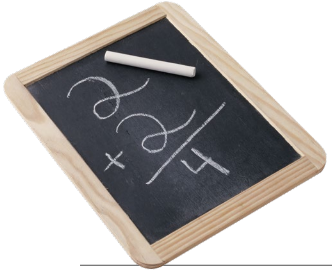
La programación entera requiere de un esfuerzo computacional mayor que la programación lineal

¿Por qué no redondear simplemente los valores de las variables?

Si en una solución óptima tienes que producir 1.234.567,33 productos, es obvio que puedas redondear a la baja a 1.234.567 puesto que el efecto de 0,33 sobre 1,2 millones es inapreciable

Sin embargo, ¿qué hacemos si en una solución óptima el valor de una variable es producir 1,5 productos. ¿Produces sólo 1? ¿o dos?

Las soluciones redondeadas suelen ser infactibles o subóptimas



Ejemplo para desconfiar del redondeo

Objetivo de optimización:

$$MAX\ Z = 100 \cdot X_1 + 150 \cdot X_2$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$8000 \cdot X_1 + 4000 \cdot X_2 \leq 40000 \qquad (R1)$$

$$15 \cdot X_1 + 30 \cdot X_2 \leq 200 \qquad (R2)$$

X_1 , $X_2 \geq 0$ y **enteras**

Microsoft Excel Answer Report
Worksheet: [Book1]Sheet1

Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.
Solver Engine
Engine: Simplex LP
Solution Time: 0,015 Seconds.
Iterations: 2 Subproblems: 0
Solver Options
Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0,000001
Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$1(	X1	1055,555556	1055,555556

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$B$4	X1	2,222222222	2,222222222	Contin
$C$4	X2	5,555555556	5,555555556	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$6		40000	$D$6<=$E$6	Binding	0
$D$7		200	$D$7<=$E$7	Binding	0

Redondeo (I)

En la solución óptima X_1=2,222 y X_2 = 5,556, el valor de FO= 1055,6

Redondeando **X_1=2 y X_2 = 6**

(R1) $8000 \cdot X_1 + 4000 \cdot X_2 \leq 40000$ -----> 40000=40000 

(R2) $15 \cdot X_1 + 30 \cdot X_2 \leq 200$ --------> **210 > 200** 

¡¡SOLUCIÓN INFACTIBLE!! 

Redondeo (II)

En la solución óptima X_1=2.222 y X_2 = 5.556, el valor de FO= 1055.6

Redondeando X_1=2 y X_2 = 5

(R1) $8000 \cdot X_1 + 4000 \cdot X_2 \leq 40000$ -----> $36000 < 40000$

(R2) $15 \cdot X_1 + 30 \cdot X_2 \leq 200$ --------> $180 < 200$

Valor de FO ahora es 950, ha disminuido un 10%

¿SOLUCIÓN SUBÓPTIMA?

Redondeo (III)

En la solución ENTERA óptima $X_1 = 1$ y $X_2 = 6$, y el valor de FO = 1000

Esta solución entera óptima no es alcanzable a través del redondeo. Normalmente el redondeo proporciona soluciones infactibles/subóptimas

Puede que tengas suerte (en algunos casos) y que un modelo lineal proporcione una solución entera óptima directamente

Microsoft Excel Answer Report
Worksheet: [Book1]Sheet1

Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.
Solver Engine
Engine: Simplex LP
Solution Time: 0,015 Seconds.
Iterations: 2 Subproblems: 8
Solver Options
Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0,000001
Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$10	X1	1000	1000

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$B$4	X1	1	1	Integer
$C$4	X2	6	6	Integer

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$6		32000	$D$6<=$E$6	Not Binding	8000
$D$7		195	$D$7<=$E$7	Not Binding	5
$B$4:$C$4=Integer					

Ejemplo

Resolver el ejemplo de producción lineal con que se introdujo la programación lineal, suponiendo que las unidades de cada producto no son infinitamente divisibles (por ejemplo, el producto 1 son mesas, producto 2 sillas, y producto 3 armarios)

¿Es lógico pensar que el valor de la nueva función objetivo sea menor que para el caso continuo? ¿Por qué?

Proporciona una solución redondeando la solución continua y explica las diferencias entre esta solución y la solución óptima entera

2.4 Modelos no lineales

Los problemas lineales en muchos casos no coinciden con la realidad y son aproximaciones de la misma

Por ejemplo, en planificación de la producción, cuando se minimizan los costes variables, normalmente consideramos costes unitarios constantes independientemente de las cantidades producidas pero

- ¿Qué pasa con las economías de escala?
- ¿Y sobre el incremento marginal de costes?

La programación entera permite modelizar algunas características no lineales pero, en realidad, la programación no lineal acaba siendo necesaria

2.4 Modelos no lineales

Programación no lineal

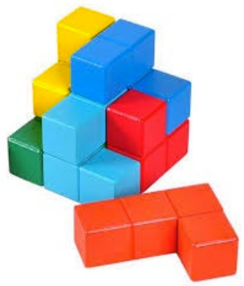
- Función objetivo no lineal Y/O Restricciones no lineales (al menos una)

No existe, por ahora, un único método que resuelva la programación no lineal (ningún simplex no lineal o branch and bound no lineal)

Algunos problemas son realmente no lineales y la programación no lineal es necesaria

La programación no lineal es MUCHO más compleja que la programación lineal continua y la programación entera

2.4 Modelos no lineales



Ahora el método simplex no puede aplicarse ya que:

- La región factible podría no ser convexa
- ¡La solución óptima podría no estar ubicada en los puntos extremos de la región factible, ni siquiera en su frontera!

Los algoritmos disponibles garantizan la optimilidad local, pero no la optimalidad global como lo hace Simplex en la programación lineal

Ejemplo modelo no lineal

Una compañía fabrica tres productos

El volumen de ventas depende del precio

Conocemos que la relación entre las ventas mensuales, en miles de unidades (X_j), y el precio unitario (P_j) para los primeros dos productos:

$$X_1=10-P_1, \qquad X_2=16-P_2$$

Para el tercer producto, el volumen de ventas también depende del precio del segundo (dependencia de ventas)

$$X_3=6-0{,}5P_3+0{,}25P_2$$

Los costes variables por cada unidad de producto son 6, 7 y 10 €/unidad, respectivamente

Ejemplo de modelo no lineal

Producción limitada por el tiempo disponible de máquina y por el tiempo para mano de obra

Tenemos disponibles mensualmente 1000 horas/máquina y 2000 horas/hombre

Recurso	**Producto**		
	P_1	P_2	P_3
Máquina horas/unidad	0,4	0,2	0,1
Trabajador horas/unidad	0,2	0,4	0,1

Ejemplo de modelo no lineal

El margen bruto es el ingreso menos el coste variable

Producto 1:

- Ingreso: $I_1 = P_1 \cdot X_1$. Ya que $X_1=10-P_1$ tenemos que $P_1=10-X_1$ y $I_1=(10-X_1)\cdot X_1 = 10X_1-X_1^2$
- Coste de la variable de P_1 es $C_1=6X_1$
- Entonces, el beneficio para el producto 1 es $B_1=I_1-C_1 = 10X_1-X_1^2-6X_1= -X_1^2+4X_1$

De forma similar, para el **producto 2**: $B_2=-X_2^2+9X_2$

Para el **producto 3**

- $I_3=P_3\cdot X_3$ -> $20X_3-2X_3^2-1/2X_3\cdot X_2$
- $B_3=-2X_3^2+10X_3-1/2X_3\cdot X_2$

Ejemplo de modelo no lineal

Queremos maximizar el beneficio total:

$$\text{MAX } -X_1^2+4X_1-X_2^2+9X_2-2X_3^2+10X_3-1/2X_3\cdot X_2$$

Restricciones:

$$4X_1+2X_2+X_3 \leq 10$$

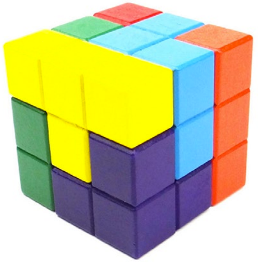
$$2X_1+4X_2+X_3 \leq 20$$

¡Vamos a resolverlo con Excel!

Otra formulación

$$
\begin{aligned}
\max \quad & (6 - P_1)X_1 + (7 - P_2)X_2 + (10 - P3)X_3 \\
\text{s.a.} \quad & X_1 = 10 - P_1 \\
& X_2 = 16 - P_2 \\
& X_3 = 6 - 0.5P_3 + 0.25P_2 \\
& 0.4X_1 + 0.2X_2 + 0.1X_3 \leq 1 \\
& 0.2X_1 + 0.4X_2 + 0.1X_3 \leq 2 \\
& P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

2.5 Modelos multiobjetivo y programación por metas



Todos los problemas introducimos anteriormente comparten una características: todos ellos tienen un único objetivo

Algunas veces, dos (o más) objetivos diferentes tienen que ser considerados simultáneamente

Ejemplos: maximizar beneficios y minimizar contaminación; minimizar costes y maximizar comfort o satisfación de los clientes …

En estos casos, tenemos un problema de programación multiobjetivo (lineal) (MultiObjective (Linear) Programming problem **MOLP**)
→múltiples objetivos e infinita cantidad de posibles decisiones

Programación por metas

Algunas restricciones en un problema lineal pueden ser “relajadas”

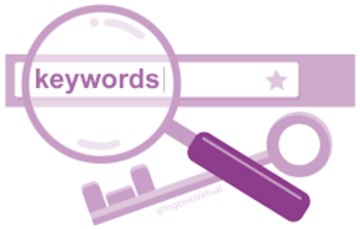
Tenemos valores objetivo (o niveles de aspiración) para cada una de estas restricciones relajadas

Las diferencias entre los valores objetivo y los valores actuales contribuye de alguna manera a la función objetivo

Los problemas multiobjetivo y la programación por metas serán abordados con más detalle en la Unidad 5

Glossary (some important concepts)

- Parameters
- Variables
- Objective function
- Constraints
- Feasible solution
- Optimal solution
- Linear model
- Sensitivity analysis
- Reduced Cost
- Dual Price
- Shadow Price
- Redundant constraint
- Binding constraint
- Slack
- Integer model
- Binary
- Non-linear model
- Simplex method
- Multiobjective model
- Goal programming



Bibliografía

H.A. Eiselt and Carl-Louis Sandblom (2012). “Operations Research: A model based approach” 2nd edition. Springer

R. A. Sarker and C. S. Newton (2008). “Optimization Modelling: A Practical Approach”. CRC Press

Resolvética