

# Romática & Autobótica

Jesús Manuel Gómez de Gabriel  
Aníbal Ollero Baturone  
Alfonso José García Cerezo

## Teleoperación y Telerrobótica

PEARSON  
Prentice  
Hall



En Ollero (2001) se emplea Matlab para la obtención del modelo dinámico del manipulador de forma simbólica y Simulink para la simulación del comportamiento dinámico del manipulador, empleando para ello la herramienta que se presenta en Maza y Ollero (2000).

Por último, cabe mencionar que la principal dificultad del empleo del modelo dinámico consiste en la obtención de los parámetros. Existen parámetros, tales como los de las fricciones, que son difíciles de determinar y que además suelen variar de forma significativa con las condiciones de trabajo, o incluso con el propio envejecimiento del robot.

## 2.5 Cinemática y dinámica de robots móviles

La cinemática de los vehículos robóticos con ruedas puede estudiarse a partir de una formulación mediante un modelo Jacobiano tal como el que se consideraba en los robots manipuladores. Supóngase que el robot se mueve por una superficie plana, que los ejes de guiado son perpendiculares al suelo, que las ruedas se mueven con rodadura pura (deslizamiento despreciable en el periodo de control), que durante un periodo de tiempo suficientemente pequeño en el que se mantiene constante la consigna de dirección el vehículo se mueve de un punto al siguiente describiendo un arco de circunferencia, y que dicho robot se comporta como un sólido rígido, de forma que si existen partes móviles (ruedas de dirección), éstas se situarán en la posición adecuada mediante el sistema de control. Teniendo en cuenta estas hipótesis, el estudio de las condiciones de rodadura que se ilustra en la Figura 2.5, proyectando la velocidad del punto de contacto en el plano, paralela y perpendicularmente al disco, permite obtener las siguientes ecuaciones:

$$-\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi = \dot{\theta} c \quad (2.26)$$

$$\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi = 0 \quad (2.27)$$

Estas dos ecuaciones no son integrables y constituyen dos restricciones no holónomas del movimiento del robot.

Asimismo, teniendo en cuenta las condiciones anteriores se demuestra (véase Ollero, 2001) que si  $p = [x \ y \ \phi]^T$  es el vector con las coordenadas globales del punto de guía del vehículo y la orientación, y  $q' = [v \ \omega]^T$  es un vector con la velocidad lineal y angular del vehículo, puede escribirse:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 \\ \cos \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{q}' \quad (2.28)$$



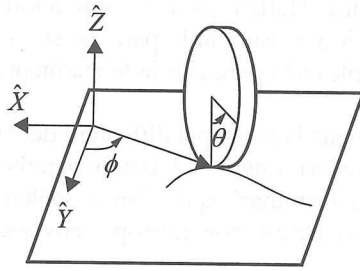


Figura 2.5: Movimiento de una rueda en un plano.

o lo que es lo mismo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 \\ \cos \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Este modelo puede particularizarse para distintas expresiones de las velocidades lineales y angulares correspondientes a distintas configuraciones del sistema de locomoción. De esta forma, si se tiene un vehículo con locomoción diferencial en el cual las ruedas izquierda y derecha giran con diferentes velocidades de control  $\omega_i$  y  $\omega_d$ , (si el radio de la rueda es  $c$ , las velocidades lineales correspondientes son  $v_i = \omega_i c$  y  $v_d = \omega_d c$ ) y las velocidades lineales y angulares del robot son:

$$v = \frac{v_d + v_i}{2} = \frac{(\omega_d + \omega_i)c}{2} \quad (2.30)$$

$$\omega = \frac{v_d - v_i}{b} = \frac{(\omega_d - \omega_i)c}{b} \quad (2.31)$$

siendo  $b$  la vía del vehículo (distancia que separa las dos ruedas). Por tanto, si se especifican la velocidad lineal  $v$  y angular  $\omega$  del vehículo, las velocidades de giro que hay que aplicar a las ruedas izquierda y derecha son:

$$\omega_i = \frac{v - (b/2)\omega}{c} \quad (2.32)$$

$$\omega_d = \frac{v + (b/2)\omega}{c} \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.30) y (2.31) en el modelo (2.29) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(c \sin \phi)/2 \\ (c \cos \phi)/2 \\ -c/b \end{bmatrix} \omega_i + \begin{bmatrix} -(c \sin \phi)/2 \\ (c \cos \phi)/2 \\ c/b \end{bmatrix} \omega_d \quad (2.34)$$

$$= \begin{bmatrix} -(c \sin \phi)/2 & -(c \sin \phi)/2 \\ (c \cos \phi)/2 & (c \cos \phi)/2 \\ -c/b & c/b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_d \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

que corresponde al modelo de locomoción diferencial.

El modelo (2.29) no permite considerar vehículos con ruedas direccionables. Si se considera un ángulo de direccionamiento  $\alpha$  entre el eje longitudinal del vehículo y la rueda direccionable tal como se ilustra en la Figura 2.6, se obtiene el denominado modelo de la bicicleta que viene dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -v \sin \phi \\ \dot{y} &= v \cos \phi \\ \dot{\phi} &= v\gamma \end{aligned} \quad (2.36)$$

siendo  $\gamma$  la curvatura, que puede obtenerse en función del ángulo de direccionamiento mediante  $\gamma = (\tan \alpha)/l$ .



Figura 2.6: Modelo de la bicicleta.  $R_d$  rueda delantera,  $R_r$  rueda trasera.

Otra configuración es la de los robots móviles RAM-1 (Ollero y otros, 1993a) y AURORA (Mandow y otros, 1996) cuya teleoperación se tratará en el último capítulo de este libro. Estos robots tienen una configuración, a la que se ha denominado rómbica, tal como se muestra en la Figura 2.7.

La configuración rómbica tiene cuatro ruedas situadas en los vértices de un rombo imaginario cuya diagonal principal coincide con el sentido de la marcha. El punto de

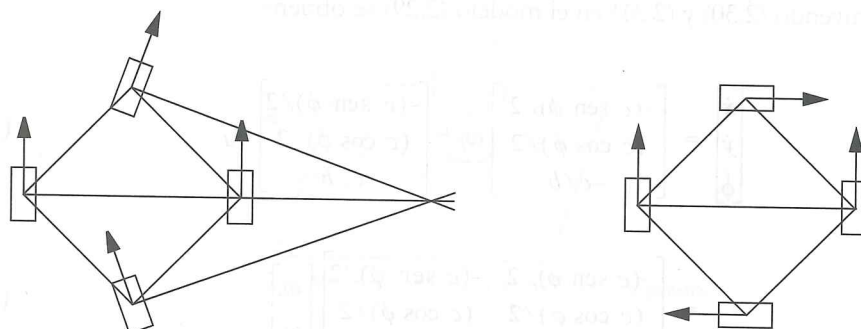


Figura 2.7: Locomoción con configuración en rombo.

guiado se elige en el centro del vehículo. Las dos ruedas centrales, situadas en el eje transversal, son motrices, y cada una de ellas está movida por un motor independiente. Girando los motores en distinto sentido se consigue que el vehículo pueda girar sobre su propio centro geométrico minimizando el espacio necesario. Para girar en esta situación límite, las ruedas delantera y trasera deben estar giradas  $90^\circ$ . Las ruedas delantera y trasera son las de direccionamiento, y se accionan conjuntamente mediante un tercer motor. Las dos ruedas de dirección giran el mismo ángulo, pero en distinto sentido. Por consiguiente, se pueden orientar hacia el centro de la trayectoria requerida.

AURORA tiene dos modos de locomoción. El primero de ellos emplea las ruedas laterales de forma análoga al modelo de locomoción diferencial mencionado anteriormente. El segundo es el modo maniobra. En este segundo caso se emplea la cinemática inversa para determinar el valor de las variables de control (ángulo de dirección  $\alpha$  o velocidad angular de las ruedas laterales  $\omega_i$  y  $\omega_d$ ) que hacen que la posición y orientación del robot sea la deseada. Si se pretende que el robot tenga una curvatura deseada  $\gamma$ , el ángulo de direccionamiento deberá ser (véase Figura 2.8):

$$\alpha = \arctg\left(\frac{l}{2} \gamma\right) \quad (2.37)$$

Para que el movimiento se ejecute de forma apropiada y la curvatura sea  $\gamma$ , es necesario que las velocidades de las ruedas laterales sean:

$$v_i = \omega\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{b}{2}\right) = v\left(1 - \gamma \frac{b}{2}\right) \quad (2.38)$$

$$v_d = \omega\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{b}{2}\right) = v\left(1 + \gamma \frac{b}{2}\right) \quad (2.39)$$

siendo  $\omega$  la  
vehículo vie

y la velocidad

Sustituye

que constituy

En gener  
considerar ta  
involucrándo  
sometidos a v  
tiene en cuen  
más simple,  
direccionamie



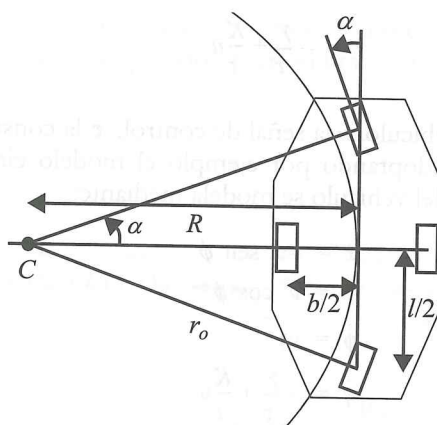


Figura 2.8: Configuración cinemática del robot móvil Aurora.

siendo  $\omega$  la velocidad angular y  $b$  la vía del vehículo. La velocidad lineal del centro del vehículo viene dada por

$$v = \frac{v_i + v_d}{2} \quad (2.40)$$

y la velocidad angular de dicho centro

$$\omega = \frac{v_d - v_i}{b} \quad (2.41)$$

Sustituyendo en (2.29) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \phi' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\sin \phi)/2 \\ (\cos \phi)/2 \\ -1/b \\ 0 \end{bmatrix} v_i + \begin{bmatrix} -(\sin \phi)/2 \\ (\cos \phi)/2 \\ 1/b \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_\alpha \quad (2.42)$$

que constituye el modelo Jacobiano del vehículo.

En general, el estudio de la dinámica de los vehículos con ruedas hace necesario considerar tanto la dinámica del chasis del vehículo como la interacción con el terreno, involucrándose la masa, inercias y rozamientos con parámetros difíciles de determinar y sometidos a variaciones. Alternativamente se emplean modelos simples en los que sólo se tiene en cuenta la dinámica del sistema de direccionamiento y de tracción. Así, en el caso más simple, se emplea un sistema lineal de primer orden para modelar el sistema direccionamiento como:

$$\dot{\gamma} = -\frac{\gamma}{\tau} + \frac{K}{\tau}u \quad (2.43)$$

siendo  $\gamma$  la curvatura del vehículo,  $u$  la señal de control,  $\tau$  la constante de tiempo y  $K$  una ganancia. De esta forma, adoptando por ejemplo el modelo cinemático de la bicicleta (2.36), el comportamiento del vehículo se modela mediante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -v \sin \phi \\ \dot{y} &= v \cos \phi \\ \dot{\phi} &= v\gamma \\ \dot{\gamma} &= -\frac{\gamma}{\tau} + \frac{K}{\tau}u \end{aligned} \quad (2.44)$$

Estas ecuaciones, con velocidad lineal constante, se han empleado para generar actuaciones de control  $u$  (control de direccionamiento) que permiten que el vehículo siga de forma autónoma un camino.

Si se pretende controlar también la velocidad  $v$ , es necesario tener en cuenta la dinámica del dispositivo de impulsión, que en el caso más simple puede aproximarse también mediante un sistema lineal de primer orden:

$$\dot{v} = -\frac{v}{\tau_v} + \frac{K_v}{\tau_v}v_d \quad (2.45)$$

siendo  $v$  la velocidad del vehículo,  $v_d$  la velocidad ordenada,  $\tau_v$  la constante de tiempo y  $K_v$  una constante.

## 2.6 Sistemas bilaterales

En los primeros días de la teleoperación de manipuladores, el dispositivo de entrada (llamado brazo maestro) era una réplica del brazo esclavo y ambos estaban conectados mecánicamente. Posteriormente se desarrollaron sistemas con acoplamiento puramente eléctrico entre los dos brazos, permitiendo así el control remoto a mayores distancias empleando un sistema de televisión para transmitir imágenes desde el lugar del robot esclavo hasta la estación de control remoto en la que dichas imágenes eran observadas por el operador. Un ejemplo de este concepto de control de posición bilateral puede verse en la Figura 2.9 (Hirzinger y otros, 1991a). A la izquierda, el sistema de control de las articulaciones del brazo esclavo es forzado a seguir las articulaciones del brazo maestro  $q_m$  tan cerca como le sea posible usando un tipo de servo-controlador PD con la matriz de

ganancia prop  
derivativa del



Figura 2.9: Siste  
a partir del erro

La matriz  
obtenerse a p  
teniendo en c  
cartesianas, ap

La ecuació  
esclavo con e  
rigidez cartesi  
incrementos a  
La conside  
las considerac