

Aníbal Ollero Baturone



ROBÓTICA

Manipuladores y robots móviles



marcombo
BOIXAREU EDITORES



Finalmente en la tabla 4.4 se comparan el número de operaciones requeridas con el método de propagación de velocidades y las necesarias empleando la función `jacobn`, correspondiente al método de Paul (1981), en cada uno de los manipuladores considerados en los ejemplos.

Se observa como la complejidad computacional del método de Paul (1981) aplicado mediante `jacobn` es menor que la del método de propagación de velocidades aplicando `velprop`.

4.7 MODELOS CINEMÁTICOS DE ROBOTS MÓVILES

4.7.1 Hipótesis básicas

En el capítulo 2 se presentaron diversas configuraciones posibles de los robots móviles o vehículos robóticos que en su acepción más amplia incluyen vehículos aéreos, marinos, o robots terrestres con patas o pistas de deslizamiento. Se consideran aquí exclusivamente robots móviles con ruedas. Asimismo, se adoptan las siguientes hipótesis simplificadoras:

- a) El robot se mueve sobre una superficie plana.
- b) Los ejes de guiado son perpendiculares al suelo.
- c) Se supone que las ruedas se mueven con rodadura pura; es decir, el deslizamiento es despreciable en el periodo de control.
- d) El robot no tiene partes flexibles.
- e) Durante un periodo de tiempo suficientemente pequeño en el que se mantiene constante la consigna de dirección, el vehículo se moverá de un punto al siguiente a lo largo de un arco de circunferencia.
- f) El robot se comporta como un sólido rígido, de forma que si existen partes móviles (ruedas de dirección), éstas se situarán en la posición adecuada mediante el sistema de control.

4.7.2 Restricciones cinemáticas

Sea $p = [p_1 \dots p_r]^T$ un vector de las variables necesarias para determinar completamente la posición y orientación de todas las partes de un sistema físico (robot). Cuando se utilizan estas variables para describir un movimiento, es necesario tener en cuenta que las variables pueden no ser independientes. Así, por ejemplo, en el movimiento del péndulo simple con una varilla que se ilustra en la figura 4.12, existe un único grado de libertad y las coordenadas (x, y) de la masa del extremo de la varilla deben cumplir la restricción

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad (4.81)$$

siendo l la longitud de la varilla del péndulo. Nótese que en el modelo geométrico de los robots manipuladores se involucraban restricciones análogas.

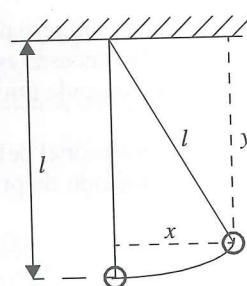


Figura 4.12: Péndulo simple.

En general (Rañada, 1994), es posible formular restricciones del tipo:

$$G_k(p, p', t) = 0; \quad k = 1, \dots, s;$$

es decir, se deben satisfacer s restricciones o ecuaciones en las variables p , sus derivadas p' y, posiblemente, el tiempo t .

Para que se cumpla una restricción debe haber una fuerza que obligue a ello, tal como la tensión de la varilla del péndulo. En general estas fuerzas pueden plantear problemas complejos ya que no son conocidas previamente y dependen del movimiento. En algunos casos el problema se resuelve eliminando las variables redundantes, quedándose con un conjunto mínimo de variables $p = [p_1 \dots p_n]^T$, $n < r$ y prescindiendo de las fuerzas. Sin embargo, esto no es siempre posible o deseable.

Las restricciones pueden ser holónomas o no holónomas. Las *holónomas* son aquellas en las que no intervienen las velocidades; es decir, tienen la forma:

$$G_k(p, t) = 0; \quad k = 1, \dots, s; \quad (4.82)$$

Las *no holónomas* dependen de las velocidades. Para que una restricción sea no holónoma se exige además que no sea integrable; es decir, que no se deduzca por derivación total con respecto al tiempo de una holónoma.

Los modelos cinemáticos de los robots manipuladores con base fija se caracterizan porque las restricciones del movimiento son holónomas. Sin embargo, este no es el caso de numerosos robots móviles en los cuales existen relaciones no holónomas entre las coordenadas en el espacio de los actuadores y las coordenadas en el espacio cartesiano.

Considérese el movimiento de la rueda de radio r en una dimensión tal como el que se ilustra en la figura 4.13a. La variable del actuador podría ser el giro θ y la variable en el espacio cartesiano la x que indica el espacio recorrido. Las dos variables obedecen a la condición de rodadura

$$x' = c\theta' \quad (4.83)$$

que depende de las velocidades, pero puede deducirse por derivación de la restricción holónoma

$$x - c\theta = \text{constante} \quad (4.84)$$

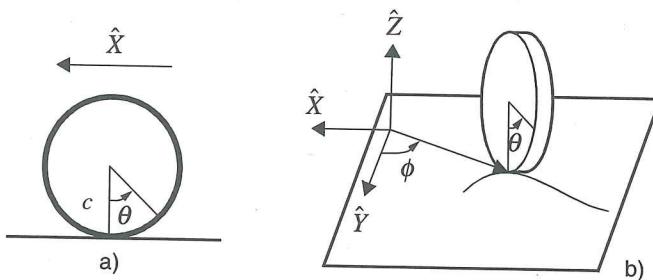


Figura 4.13: Restricciones no holónomas. a) Movimiento de rueda en una dirección; b) movimiento de rueda en plano.

Por consiguiente, en este caso, no existen restricciones no holónomas. Nótese que se necesita una única coordenada (x o θ) y existe también un grado de libertad.

Sin embargo, si se estudia el movimiento de la rueda en el plano, tal como se muestra en la figura 4.13b, aparecen restricciones no holónomas. En efecto, considérese el movimiento de la rueda de forma que el diámetro correspondiente al punto de contacto con el suelo esté siempre en posición vertical. En este caso, pueden emplearse cuatro coordenadas para especificar completamente la posición y orientación de la rueda: las coordenadas (x , y) del punto de contacto, el ángulo θ entre la vertical y un radio de referencia, el cual indica cuánto ha girado el disco, y el ángulo de orientación ϕ de la rueda. La condición de rodadura sin deslizamiento introduce dos restricciones, ya que el espacio que el punto de contacto recorre sobre el borde de la rueda es igual al que recorre en el plano. Por consiguiente, proyectando la velocidad del punto de contacto en el plano, paralela y perpendicularmente al disco, se obtiene:

$$-x' \operatorname{sen} \phi + y' \cos \phi = \theta' c \quad (4.85)$$

$$x' \cos \phi + y' \operatorname{sen} \phi = 0 \quad (4.86)$$

Estas dos restricciones no son integrables (no se pueden obtener como las derivadas de dos condiciones holónomas), lo cual se comprueba observando que no se satisface el teorema de Frobenius. Por tanto, no se pueden obtener relaciones funcionales entre las variables (x , y , θ , ϕ) a partir de las (4.85) y (4.86). Dados unos valores (x_0 , y_0 , θ_0 , ϕ_0), haciendo rodar la rueda sin deslizar y girándola alrededor del eje vertical, es posible llegar a cualquier otra configuración (x_f , y_f , θ_f , ϕ_f), lo cual implica que no existe una relación funcional entre estos valores. Sin embargo, las direcciones de movimiento deben satisfacer las ecuaciones anteriores y, por tanto, el camino no puede ser cualquiera.

Nótese como, en los manipuladores con base fija estudiados en las secciones precedentes, la ecuación del modelo jacobiano (4.6) constituye una restricción que puede ser integrada para obtener el modelo geométrico. Si el manipulador tiene un número suficiente de articulaciones, podrá moverse en su espacio de trabajo haciendo que su efecto final describa cualquier camino, exceptuando los puntos en que existan singularidades del jacobiano y teniendo en cuenta limitaciones físicas, tales como las saturaciones en los actuadores y las limitaciones de ángulos de giro de las articulaciones.

(4.82)

ricción sea no
uzca por deri-

e caracterizan
te no es el ca-
mos entre las
io cartesiano.
n tal como el
tiro θ y la va-
dos variables

(4.83)

la restricción

(4.84)

OS DE ROBOTS

En la práctica, existen diferentes tipos de ruedas cuya consideración tiene una notable influencia en el modelo cinemático del vehículo. Así, cabe distinguir entre cuatro tipos de ruedas (ver, por ejemplo, Bastin y otros, 1997). Las ruedas fijas sólo pueden rotar sobre su eje (ángulo θ en la figura 4.13). Las ruedas de direccionamiento se caracterizan por la rotación alrededor del eje vertical (ángulo ϕ en la figura 4.13) que pasa por el centro de la rueda y que permite orientarla con respecto al vehículo. Las ruedas de castor también son orientables respecto al vehículo, pero el eje vertical de rotación no pasa por el centro de la rueda. Finalmente, las denominadas ruedas suecas (ver ruedas del robot Uranus en el capítulo 2) permiten variar la dirección de la velocidad del punto de contacto con relación al plano de la rueda (el vector velocidad puede tener un ángulo con respecto a la tangente).

Considérese un sistema de referencia $\{G\}$ y un sistema $\{L\}$ con centro en el punto de guiado del vehículo y eje \hat{Y}_L en la dirección del eje longitudinal del vehículo (figura 4.14).

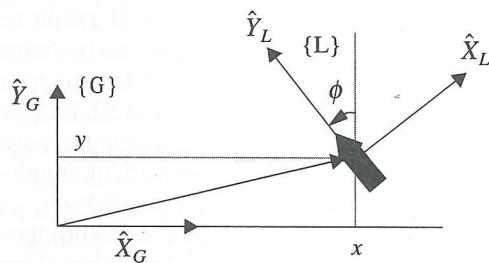


Figura 4.14: Cambio de sistema de referencia en navegación de robots móviles.

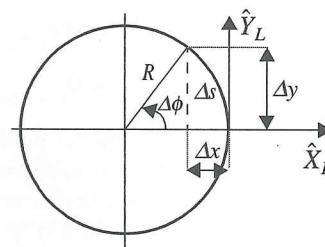


Figura 4.15: Círculo osculador.

Supóngase que el vehículo se desplaza en un intervalo de control según un arco de circunferencia, tal como se muestra en la figura 4.15. Esta suposición es válida para intervalos de control suficientemente pequeños.

La velocidad lineal del vehículo viene dada por:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (4.87)$$

y la velocidad angular por:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (4.88)$$

siendo Δs y $\Delta\phi$ respectivamente el espacio recorrido por el punto de guiado del vehículo y su cambio de orientación durante el intervalo de control Δt .

La longitud Δs del arco recorrido por el robot en Δt viene dada por:

$$\Delta s = R\Delta\phi \quad (4.89)$$

siendo R el radio de giro o radio de la circunferencia que describe el punto de guiado.

La curvatura se define como la inversa del radio de giro:

$$\gamma = \frac{1}{R} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \quad (4.90)$$

Las ecuaciones de movimiento en el sistema $\{L\}$ de la figura 4.15 en la posición inicial son:

$${}^L(\Delta x) = -(R - R \cos (\Delta\phi)) \quad (4.91)$$

$${}^L(\Delta y) = R \sin (\Delta\phi) \quad (4.92)$$

Si la orientación inicial del vehículo con respecto al sistema $\{G\}$ es de ϕ , el movimiento en el sistema $\{G\}$ se determina rotando ϕ :

$$\begin{aligned} \Delta x &= R [\cos (\Delta\phi) - 1] \cos (\phi) - R \sin (\Delta\phi) \sin (\phi) \\ \Delta y &= R [\cos (\Delta\phi) - 1] \sin (\phi) + R \sin (\Delta\phi) \cos (\phi) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Suponiendo que el intervalo de control es suficientemente pequeño, también lo será el cambio de orientación $\Delta\phi$ con lo cual se tendrá que

$$\begin{aligned} \cos (\Delta\phi) &\approx 1 \\ \sin (\Delta\phi) &\approx \Delta\phi \end{aligned} \quad (4.94)$$

Sustituyendo en las anteriores ecuaciones se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta x &= -R\Delta\phi \sin (\phi) \\ \Delta y &= R\Delta\phi \cos (\phi) \end{aligned} \quad (4.95)$$

y teniendo en cuenta (4.89)

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\Delta s \sin (\phi) \\ \Delta y &= \Delta s \cos (\phi) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Dividiendo ambas ecuaciones por Δt , teniendo en cuenta (4.87) y haciendo tender Δt a cero se llega a:

$$x' = -v \sin \phi \quad (4.97)$$

$$y' = v \cos \phi \quad (4.98)$$

ecuaciones a las que puede añadirse la que se obtiene a partir de la (4.88):

$$\phi' = \omega \quad (4.99)$$

la cual proporciona la variación de la orientación.

Nótese que en el modelo anterior no se considera el ángulo de direccionamiento de las ruedas, variables que se utilizan en diversas configuraciones de robots móviles. Estos ángulos se emplean en modelos tales como el de la bicicleta que se ilustra en la figura 4.16.

El ángulo de direccionamiento α es el que forma el eje longitudinal del vehículo con la rueda delantera, la cual se supone direccionable.

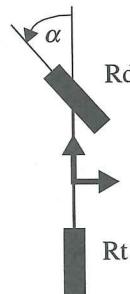


Figura 4.16: Modelo de la bicicleta. Rd rueda delantera, Rt rueda trasera.

4.7.3 Modelo jacobiano

Sea p el vector que representa un punto en el espacio de n coordenadas generalizadas y q el vector de m variables de actuación, siendo $n > m$. Sean p' y q' las derivadas temporales correspondientes. En lo que sigue, por omisión, se considera que las variables se expresan en el sistema de referencia global $\{G\}$. El *modelo directo* en la forma (4.59) es

$$p' = J(p)q' \quad (4.100)$$

siendo $J(p)$ el jacobiano. Este jacobiano puede escribirse en la forma (Zhao y Bement, 1992):

$$p' = f(p) + \sum_{i=1}^m g(p)_i q'_i \quad (4.101)$$

siendo f y g funciones vectoriales analíticas.

Si
hículo
forma

siendo
Las
como:

siendo
Cor
restricc

que co
hículo
metría.

En e
culo no

El n
versa d
cobiano
Multip

Así,

de la pri

MODELO

(4.97) Si $p = [x \ y \ \phi]^T$ es el vector con las coordenadas globales del punto de guía del vehículo y la orientación, las ecuaciones (4.97), (4.98) y (4.99) pueden expresarse en la forma (4.101) con $f(p) = 0$; $m = 2$ como

$$(4.99) \quad p' = \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (4.102)$$

siendo v la velocidad lineal del vehículo y ω la angular.

Las ecuaciones (4.102) pueden expresarse también en la forma del modelo (4.100) como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 \\ \cos \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

siendo $q' = [v \ \omega]^T$ el vector de variables de entrada.

Combinando las dos primeras ecuaciones de (4.103) es posible obtener la siguiente restricción independiente de v :

$$x' \cos \phi + y' \sin \phi = 0 \quad (4.104)$$

que constituye la restricción no holónoma del movimiento (4.86) según la cual el vehículo debe moverse en cada instante según la dirección de su eje longitudinal de simetría.

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{x'}{y'} \quad (4.105)$$

En efecto, teniendo en cuenta (4.86), la posición (x, y) y la orientación ϕ del vehículo no son independientes.

El modelo inverso, tal como el (4.61) para robots manipuladores, involucra la inversa del jacobiano. Para resolverlo de una forma general sería necesario invertir el jacobiano. Cuando el jacobiano no es cuadrado, es necesario emplear la seudoinversa. Multiplicando ambos miembros de (4.100) por J^T y despejando q' se obtiene:

$$q' = \{[J(p)]^T J(p)\}^{-1} [J(p)]^T p' \quad (4.106)$$

Así, para el modelo (4.103) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \phi' \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

de la primera se deduce

$$v = -x' \sin \phi + y' \cos \phi \quad (4.108)$$

que coincide con la ecuación (4.85).

4.7.4 Modelos de diferentes configuraciones

En la figura 4.17 se muestran cuatro configuraciones diferentes de robots móviles. Las coordenadas (x, y) suministran la posición del robot con respecto a las coordenadas globales y el ángulo ϕ su orientación con respecto a un eje paralelo al \hat{Y} .

La configuración de la figura 4.17a es la denominada *síncrona* o “synchro-drive” en la cual existen transmisiones que permiten orientar las tres ruedas simultáneamente con una velocidad angular ω y hacer que el vehículo se desplace con una velocidad lineal v . En esta configuración el modelo viene dado por las ecuaciones (4.102) o (4.103).

Nótese que para especificar la configuración hay que indicar los valores de las tres variables (x, y, ϕ) . Se tiene una restricción no holónoma y dos grados de libertad.

En la figura 4.17b se representa la *locomoción con guiado diferencial*, tal como la de la plataforma comercial Labmate mencionada en el capítulo 2. En este caso, las variables de control son las velocidades de las ruedas laterales. Sean ω_i y ω_d , las velocidades de giro de la rueda izquierda y derecha, respectivamente. Si el radio de la rueda es c , las velocidades lineales correspondientes son $v_i = \omega_i c$ y $v_d = \omega_d c$. En este caso, la velocidad lineal y la velocidad angular correspondientes en el modelo (4.101) vienen dadas por:

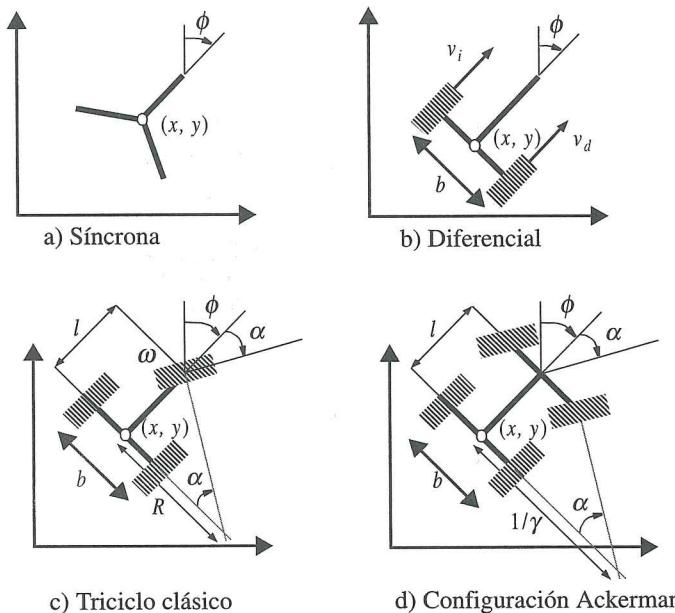


Figura 4.17: Configuraciones de robots móviles.

108)

$$v = \frac{v_d + v_i}{2} = \frac{(\omega_d + \omega_i)c}{2} \quad (4.109)$$

$$\omega = \frac{v_d - v_i}{b} = \frac{(\omega_d - \omega_i)c}{b} \quad (4.110)$$

siendo b la vía del vehículo (distancia que separa las dos ruedas centrales). Por consiguiente, si se especifican la velocidad lineal v y angular ω del vehículo, las velocidades de giro que hay que aplicar a las ruedas izquierda y derecha son:

$$\omega_i = \frac{v - (b/2)\omega}{c} \quad (4.111)$$

$$\omega_d = \frac{v + (b/2)\omega}{c} \quad (4.112)$$

Sustituyendo (4.109) y (4.110), el modelo (4.102) puede expresarse en función de estas variables de control como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(c \operatorname{sen} \phi)/2 \\ (c \cos \phi)/2 \\ -c/b \end{bmatrix} \omega_i + \begin{bmatrix} -(c \operatorname{sen} \phi)/2 \\ (c \cos \phi)/2 \\ c/b \end{bmatrix} \omega_d \quad (4.113)$$

$$= \begin{bmatrix} -(c \operatorname{sen} \phi)/2 & -(c \operatorname{sen} \phi)/2 \\ (c \cos \phi)/2 & (c \cos \phi)/2 \\ -c/b & c/b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_d \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

El esquema de la figura 4.17c representa el *triciclo convencional*, en el cual la rueda delantera se utiliza tanto para la orientación como para la tracción. Esta configuración corresponde al robot Romeo 3R mencionado en el capítulo 2. En este caso las variables de control suelen tomarse como el ángulo α de dirección de la rueda delantera (o su velocidad angular ω_α) y la velocidad de giro de la misma rueda ω_t (o su velocidad lineal correspondiente $v_t = c\omega_t$). Se supondrá que el punto de guía (x, y) está en el centro del eje trasero.

Las velocidades lineal v y angular ω del vehículo que corresponden a las entradas en el modelo (4.102) son respectivamente

$$v = v_t \cos \alpha = c\omega_t \cos \alpha \quad (4.115)$$

y

$$\alpha' = \omega_\alpha \quad (4.116)$$

Asimismo, el ángulo de orientación del vehículo varía según:

$$\phi' = \frac{c\omega_t}{l} \sin \alpha = \frac{v_t}{l} \sin \alpha \quad (4.117)$$

Por consiguiente, sustituyendo en (4.102), se obtiene el siguiente modelo en función de las velocidades de control v_t y ω_α .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \phi' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \alpha \\ \cos \phi & \cos \alpha \\ (\sin \alpha)/l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_\alpha = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \alpha & 0 \\ \cos \phi & \cos \alpha & 0 \\ (\sin \alpha)/l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ \omega_\alpha \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Obsérvese también que, conocidas las velocidades deseadas lineal v y angular ω , las variables de control α y ω_t pueden obtenerse mediante:

$$\alpha = \arctg \left(\frac{l}{R} \right) = \arctg \left(\frac{l\omega}{v} \right) \quad (4.119)$$

$$\omega_t = \frac{v_t}{c} = \frac{\sqrt{v^2 + \omega^2 l^2}}{c} \quad (4.120)$$

En efecto, obsérvese como la relación entre la velocidad de traslación y la de rotación es el radio de giro R . Asimismo, $R = 1/\gamma$ siendo γ la curvatura.

El triciclo puede representarse también mediante el denominado modelo de la bicicleta que se ilustra en la figura 4.16. En este modelo se adoptan las expresiones (4.97) y (4.98). Con respecto a la orientación, se tiene en cuenta la definición de la curvatura (4.90) de donde se obtiene la ecuación $\phi' = v\gamma$. Por tanto, las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x' &= -v \sin \phi \\ y' &= v \cos \phi \\ \phi' &= v\gamma \end{aligned} \quad (4.121)$$

siendo γ la curvatura, que puede obtenerse en función del ángulo de direccionamiento mediante $\gamma = (\tan \alpha)/l$.

En general, si se emplea el modelo de la bicicleta, para obtener los modelos inversos puede aplicarse la expresión (4.106), donde el jacobiano viene dado por las correspondientes ecuaciones del modelo directo: (4.114) para el guiado diferencial y (4.118) para el triciclo.

Ejemplo 4.8

Se trata de obtener el modelo inverso del triciclo convencional. En esta configuración, teniendo en cuenta (4.118), el jacobiano puede escribirse como: