Lliçó 16: Aproximació per mínims quadrats

La matriu $\mathsf{A}^t\mathsf{A}$ (A és una matriu real $n \times n$)

- Les entrades d'aquesta matriu són els productes escalars de les columnes de A
- És simètrica
- $\operatorname{Nul} \mathsf{A}^t\mathsf{A} = \operatorname{Nul} \mathsf{A}$
- $\operatorname{rang} \mathsf{A}^t\mathsf{A} = \operatorname{rang} \mathsf{A}$
- És invertible si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{A} = n$

Teorema de l'aproximació òptima

El vector del subespai F més pròxim al vector $\vec{b}$ és $P_F(\vec{b})$

El problema dels mínims quadrats

- Resoldre per mínims quadrats el sistema lineal (compatible o incompatible) $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és trobar el vector $\vec{x}$ que minimitza la norma $\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\|$
- La solució del problema de mínims quadrats és la solució del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = p_{\operatorname{Col}\mathsf{A}}(\vec{b})$
- La solució del problema de mínims quadrats és la solució del sistema lineal $\mathsf{A}^t\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^t\vec{b}$
- L'error de mínims quadrats és $\left\|\mathsf{A}\vec{x} - \vec{b}\right\|$

La recta de regressió

- La recta de regressió associada a una taula de valors $\{(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq p\}$ és la recta $y = a + bx$ que millor s'ajusta, en el sentit dels mínims quadrats a aquesta taula de valors.
- La recta de regressió és la recta $y = ax + b$ on (a, b) és la solució per mínims quadrats del sistema

$$\left.\begin{array}{r} a + x_1 b = y_1 \\ a + x_2 b = y_1 \\ \cdots \\ a + x_p b = y_p \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdots & \\ 1 & x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{bmatrix}$$