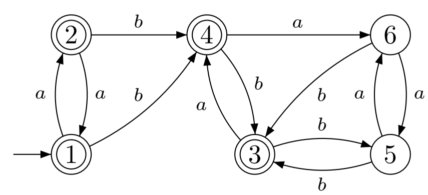
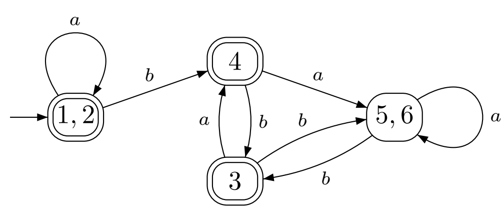
Soluciones al examen de Teoría de autómatas y lenguajes formales
del 25 de Noviembre del 2016.

1. (3 ptos.)
Calcular el AFD mínimo equivalente al siguiente autómata finito:



$R^0 = \{\{1,2,3,4\},\{5,6\}\}$
$R^1 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5,6\}\}$
$R^2 = R^1 = R^\infty$



2. (3 ptos.)
Sea $L = \{xay : x, y \in \{a,b\}^* \wedge |y| \neq 2|x|\}$. ¿Es L regular?

Sea la secuencia infinita $\langle b^i a\rangle_{i>0}$ y sean $b^j a$ y $b^k a$ con $j \neq k$ dos palabras cualesquiera de la misma. Consideremos además la palabra b^{2j}. Podemos observar que

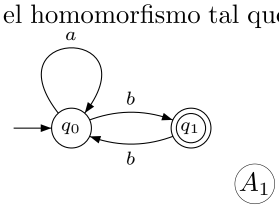
$b^j a.b^{2j} \notin L$ pues contiene una única a y las palabras a su izquierda, x, y derecha, y, son tales que $|y| = 2j = 2|x|$, mientras que

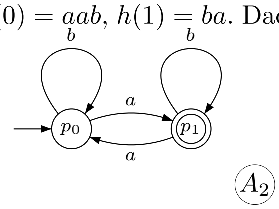
$b^k a.b^{2j} \in L$ pues puede expresarse en la forma $xay : |y| = 2j \neq 2|x| = 2k$.

Por tanto $b^j a$ y $b^k a$ tendrían que llevarnos a estados diferentes en cualquier AFD que aceptara a L. Puesto que esto es cierto para cada par de palabras de la serie infinita, cualquier autómata que aceptara a L tendría que tener infinitos estados y no sería, por tanto, un AFD. Con esto queda demostrado que no existe ningún AFD que acepte a L y, por definición, que L no es regular.

3. (3 ptos.)

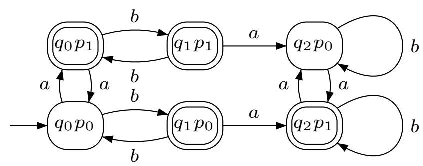
Sea h el homomorfismo tal que $h(0) = aab$, $h(1) = ba$. Dados los autómatas



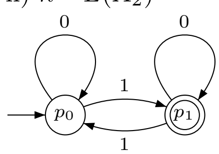


calcular un AFD para cada uno de los siguientes lenguajes:

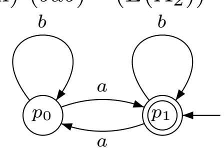
i) $L(A_1) \cup L(A_2)$



ii) $h^{-1}L(A_2)$



iii) $(bab)^{-1}(L(A_2))$



4. (1 pto.)

Sea $L \subseteq \{a, b\}^*$. Sabiendo que $\{a\}$ y $\{b\}$ son lenguajes regulares y que $\mathfrak{L}_3$ es cerrada, entre otras operaciones, bajo CONCATENACION, derivadas y unión, demuestre que si $L \in \mathfrak{L}_3$ entonces también $P(L) \in \mathfrak{L}_3$, siendo $P(L)$ el lenguaje formado por las palabras de L de longitud mayor o igual que 2 tras eliminar el segundo símbolo de cada una de ellas.

$(ab)^{-1}L$ son las palabras resultantes de quitar a las palabras de L que comienzan por ab sus dos primeros símbolos. $\{a\}(ab)^{-1}L$ son, por tanto, las palabras resultantes de quitar a las palabras de L que comienzan por ab su segundo símbolo.

Por tanto $P(L) = \{a\}((aa)^{-1}L \cup (ab)^{-1}L) \cup \{b\}((ba)^{-1}L \cup (bb)^{-1}L)$. Ahora:

$L \in \mathfrak{L}_3 \Rightarrow$

(por ser $\mathfrak{L}_3$ cerrada bajo derivadas)

$(aa)^{-1}L, (ab)^{-1}L, (ba)^{-1}L, (bb)^{-1}L \in \mathfrak{L}_3 \Rightarrow$

(por ser $\mathfrak{L}_3$ cerrada bajo unión)

$(aa)^{-1}L \cup (ab)^{-1}L, (ba)^{-1}L \cup (bb)^{-1}L \in \mathfrak{L}_3 \Rightarrow$

(por ser $\mathfrak{L}_3$ cerrada bajo concatenación y $\{a\}, \{b\} \in \mathfrak{L}_3$)

$\{a\}((aa)^{-1}L \cup (ab)^{-1}L), \{b\}((ba)^{-1}L \cup (bb)^{-1}L) \in \mathfrak{L}_3 \Rightarrow$

(por ser $\mathfrak{L}_3$ cerrada bajo unión)

$\{a\}((aa)^{-1}L \cup (ab)^{-1}L) \cup \{b\}((ba)^{-1}L \cup (bb)^{-1}L) \in \mathfrak{L}_3 \Rightarrow$

$P(L) \in \mathfrak{L}_3$