Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de Simplex Revisado

Nombre y apellidos:____________________________________e-mail:____________________

1 En una explotación agropecuaria se está modernizando el sistema de regadío de un riego de superficie a un moderno sistema de riego por aspersión de tipo estacionario fijo enterrado.

La parcela es muy irregular y es necesario instalar un número elevado de aspersores. La parcela se ha dividido en 6 sectores diferentes y existen 8 posibles puntos donde se puede instalar un aspersor. Existen dos tipos de aspersores, el de tipo medio, con un coste de 300 €/unidad y el de tipo grande con un coste de 490 €/unidad. Dependiendo del tipo de aspersor que se instale, más o menos sectores de la parcela quedarán cubiertos.

La tabla siguiente nos indica los sectores de la parcela que quedan cubiertos según se instale un aspersor medio o grande en cada uno de los 8 posibles puntos:

Posibles puntos para los aspersores	Sectores cubiertos con aspersor medio		Sectores cubiertos con aspersor grande		
Punto 1	1		1	2	
Punto 2	4		2	4	5
Punto 3	2	5	2	5	
Punto 4	4	5	2	4	5
Punto 5	2		2	3	5
Punto 6	5	6	3	5	6
Punto 7	3	6	3	6	
Punto 8	6		3	6	

En un punto dado sólo se puede instalar un aspersor, sea de tipo mediano o de tipo grande.

Adicionalmente, debido a restricciones del caudal máximo de agua, tan sólo se pueden instalar como mucho 2 aspersores de tipo grande.

a) Plantea un **modelo de programación lineal**, (explicando con claridad variables, función objetivo y restricciones), que permita determinar los puntos de aspersión a ocupar y con qué tipos de aspersores, de manera que se minimice el coste total de instalación. [1.5 puntos]

b) Se desea tener en cuenta que si se instala un aspersor de tipo medio en el punto 3 también se debe instalar un aspersor del mismo tipo en el punto 6. Modifica el modelo para que incluya esta posibilidad, de modo que el modelo resultante siga siendo lineal. [0.5 puntos]

c) La empresa proveedora de los aspersores aplicaría un descuento de 300 euros en la factura total en el caso de que se instalen al menos 3 aspersores de tipo medio. Detalla qué cambios realizarías en el modelo construido en el apartado (a) para que tenga en cuenta esta nueva información, de modo que el modelo resultante siga siendo lineal. [0.75 puntos]

d) Se bonificará con 200 euros el hecho de que el sector 2 se cubriera exactamente con 1 aspersor. Modifica el modelo para que considere esta nueva situación, de modo que el modelo resultante siga siendo lineal. Indica claramente las modificaciones en las variables, función objetivo y restricciones que fueran necesarias para modelizar esta nueva situación. [0.75 puntos]

(Puntuación: 3.5 puntos)

2 Una empresa necesita determinar el plan de producción de los tres productos que fabrica: P1, P2 y P3. Estos productos pueden fabricarse en tres ubicaciones: U1, U2 y U3 de las cuales se desea utilizar como mucho dos.
La producción de cada producto genera, respectivamente, un volumen de contaminación de 0,5, 2 y 1 cm^3 por unidad producida, independientemente de la ubicación.

La siguiente tabla recoge, para cada una de las ubicaciones, los ingresos unitarios (euros) de cada producto, la capacidad máxima de producción diaria (unidades) y los volúmenes máximos de contaminación permitidos (cm^3):

	U1	U2	U3
Ingresos por P1 (euros/unidad)	2	4	3
Ingresos por P2 (euros/unidad)	5	3	6
Ingresos por P3 (euros/unidad)	3	4	2
Capacidad máxima de producción (unidades/día)	200	400	300
Volumen máximo de contaminación permitido (cm^3/día)	150	250	200

a) Plantea un **modelo de programación lineal** que permita determinar cuántas unidades diarias de cada producto deben producirse, y en qué ubicaciones, para maximizar los beneficios de la empresa respetando los niveles máximos de contaminación permitidos. [1.5 puntos]

b) La empresa, concienciada con los problemas del medio ambiente, ha establecido un sistema de penalización por la contaminación que pudiera exceder el volumen máximo de contaminación permitido:

	U1	U2	U3
Penalización por contaminación excedente (euros/cm^3)	20	15	10

En este contexto, la empresa decide considerar las siguientes *metas*:

- Los ingresos diarios (sin tener en cuenta las penalizaciones) deben ser de al menos 100 euros.
- No superar el nivel máximo de contaminación de la ubicación.
- No gastar más de 9.000 € al día por exceso de contaminación.

Reformula el modelo del apartado (a) como un modelo de programación lineal por metas, (explicando con claridad variables, función objetivo y restricciones) que permita determinar cuántas unidades diarias de cada producto deben producirse y en qué ubicaciones.
[1.5 puntos]

(Puntuación: 3 puntos)

3 Dado el siguiente programa lineal:

MAX Z= 4X1 + 3X2
s.a. 3X1+ 4X2 ≤ 12
4X1 + 2X2 ≤ 9
X1, X2 ≥ 0 y **enteras**

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}		x_B
X2	2/5	-3/10	21/10
X1	-1/5	2/5	12/10
$c_B^t\ B^{-1}$	2/5	7/10	Z=111/10

a) Aplica el algoritmo de **Bifurcación y Acotación** hasta encontrar la primera solución entera. Empieza la aplicación del algoritmo bifurcando en la solución óptima continua la variable X2. Utiliza como **técnica** de **selección del nodo a explorar** la del **nodo de mejor cota**. En cada nodo empezar acotando superiormente las variables (≤). [2 puntos]

b) La solución encontrada, ¿es óptima? Justifica tu respuesta y en caso negativo, indica cómo seguiría el proceso de búsqueda de la solución. [0.75 puntos]

c) En un problema de programación lineal entera resuelto mediante el algoritmo de bifurcación y acotación, explica *brevemente* en qué casos un nodo del árbol no se ramifica (y, por lo tanto, no da lugar a dos nuevos nodos con sus correspondientes problemas). [0.75 puntos]

(Puntuación: 3.5 puntos)

SOLUCIÓN

1.

a)

```
!Variables: Mi: 1: Se instala un aspersor Mediano en el punto i. 0: en
caso contrario
            Gi: 1: Se instala un aspersor Grande en el punto i. 0: en
caso contrario;

[Costes]MIN=300*(M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8)+490*(G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8);

!Todos los sectores han de estar cubiertos;
[S1] M1+G1 >=1;
[S2] G1+G2+G3+G4+G5+M3+M5 >=1;
[S3] G5+G6+G7+G8+M7 >=1;
[S4] G2+G4+M2+M4>=1;
[S5] G2+G3+G4+G5+G6+M3+M4+M6>=1;
[S6] G6+G7+G8+M6+M7+M8 >=1;

!En cada punto se puede instalar como mucho un aspersor sea de tipo
grande o mediano;
[Max1_1]G1+M1<=1;
[Max1_2]G2+M2<=1;
[Max1_3]G3+M3<=1;
[Max1_4]G4+M4<=1;
[Max1_5]G5+M5<=1;
[Max1_6]G6+M6<=1;

!Solo se pueden instalar 2 aspersores Grandes;
[Max2_G] G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8<=2;

!Las variables son binarias;
@BIN(G1);@BIN(G2);@BIN(G3);@BIN(G4);@BIN(G5);@BIN(G6);@BIN(G7);@BIN(G8);
@BIN(M1);@BIN(M2);@BIN(M3);@BIN(M4);@BIN(M5);@BIN(M6);@BIN(M7);@BIN(M8);
```

b) La instalación de M3 está condicionada a la de M6: **M3 <= M6**

c) Dado que el descuento se puede aplicar o no, se define una nueva variable:
YDesc: 1 si se aplica el descuento; 0 en caso contrario

Esta variable se añade a la función objetivo de modo que se descontarían 300€ del coste en caso de que se instalen al menos 3 aspersores de tipo medio:

```
MIN=300*(M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8)+490*(G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8)-
300YDesc;
```

Para controlar que el descuento se aplica en caso de que se hayan instalado al menos 3 aspersores de tipo medio es necesario añadir la siguiente restricción:

```
M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8 >= 3*YDesc;
```


d) Es necesario identificar el exceso de aspersores respecto al valor 1 requerido que cubren el sector 2; definimos la variable H2 que es la holgura de la restricción de cubrimiento del sector 2:

```
[S2] G1+G2+G3+G4+G5+M3+M5-H2=1;
```

Además se define una variable YDesc2: 1 si hay más de 1 aspersor cubriendo el sector 2; 0: en caso contrario
Es necesario vincular a la variable H2 y a la variable binaria asociada:

```
H2 <= 100*YDesc2;
```

Por último, en la función se incluirá el descuento que se aplicará en caso de que no haya exceso de aspersores en el sector 2:

```
MIN=300*(M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8)+490*(G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8) -
200*(1-YDesc2);
```

Nota: en la función objetivo aparece la variable complementaria de YDesc2 puesto que esta variable es =1 en caso de que efectivamente haya exceso de aspersores.
Nota 2: En la restricción que vincula a H2 y YDesc2, se controla que si H2<>0 entonces YDesc2=1. En caso de la variable H2=0 la variable YDesc2 tendría aparentemente libertad de valer 0 o 1 pero en realidad puesto que a la función objetivo le favorece que YDesc2=0, el comportamiento de la variable binaria sería el necesario para que efectivamente el descuento se aplique.

2.

a)

VARIABLES:

Definimos las variables de decisión siguientes:

Xij =unidades producidas al día de Pj en Ui (i=1,2,3 ; j=1,2,3)

δj = Variable binaria. Vale 1 si se elige la ubicación j i; vale 0 en caso contrario (j=1,2,3)

FUNCIÓN OBJETIVO:

MAX Z = 2 X11 + 5 X21 + 3 X31 + 4X12 + 3 X22 + 4 X32 + 3 X13 + 6 X23 + 2 X33

RESTRICCIONES:

[Capacidad de las ubicaciones y control del número de ubicaciones usadas]

$X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 200\ \delta_1$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} \leq 400\ \delta_2$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} \leq 300\ \delta_3$

$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2$

[No superar el nivel máximo de contaminación]

$0.5\ X_{11} + 2\ X_{21} + X_{31} \leq 150$

$0.5\ X_{12} + 2\ X_{22} + X_{32} \leq 250$

$0.5\ X_{13} + 2\ X_{23} + X_{33} \leq 200$

[Restricciones sobre el dominio de las variables]

$X_{ij} \geq 0$, $(i=1,2,3\ ;\ j=1,2,3)$; $\delta_j = 0, 1$ $(j=1,2,3)$

b)

VARIABLES:

Además de las variables definidas en el apartado a) definimos las variables de decisión siguientes:

P_i/N_i=variables desviación positivas/negativas $(i=0,1,2,3,4)$

FUNCIÓN OBJETIVO:

MIN $Z = N_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

(Se podría normalizar la función objetivo: MIN $Z = N_0/100 + P_1/150 + P_2/250 + P_3/200 + P_4/9000$)

RESTRICCIONES:

[Capacidad de las ubicaciones y control del número de ubicaciones usadas]

$X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 200\ \delta_1$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} \leq 400\ \delta_2$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} \leq 300\ \delta_3$

$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2$

etsinf II- Técnicas de Optimización - 2º Parcial (16 Junio 2015)

[Metas]

[Meta ingresos diarios]

$2\ X_{11} + 5\ X_{21} + 3\ X_{31} + 4X_{12} + 3\ X_{22} + 4\ X_{32} + 3\ X_{13} + 6\ X_{23} + 2\ X_{33} - P_0 + \underline{\underline{N_0}} = 100$

[Meta No superar el nivel máximo de contaminación]

$0.5\ X_{11} + 2\ X_{21} + X_{31} - \underline{\underline{P_1}} + N_1 = 150$

$0.5\ X_{12} + 2\ X_{22} + X_{32} - \underline{\underline{P_2}} + N_2 = 250$

$0.5\ X_{13} + 2\ X_{23} + X_{33} - \underline{\underline{P_3}} + N_3 = 200$

[Meta no gastar más de 9000 € al día por exceso de contaminación]

$20\ P_1 + 15\ P_2 + 10\ P_3 - \underline{\underline{P_4}} + N_4 = 9000$

[Restricciones sobre el dominio de las variables]

$X_{ij} \geq 0$, $(i=1,2,3\ ;\ j=1,2,3)$; $\delta_j = 0, 1$ $(j=1,2,3)$; $P_i \geq 0$, $N_i \geq 0$ $(i=0,1,2,3,4)$

3.

Partimos de la solución en **P0:**

V.Básicas	B^{-1}		X_B
X2	2/5	-3/10	21/10
X1	-1/5	2/5	12/10
$c_B^t B^{-1}$	2/5	7/10	**Z=111/10**

P0: X1=12/10; X2=21/10; Z=111/10 (Z*=-inf)

P1=P0(X1, X2, X3, X4) + X2 ≤ 2

X2 = 2 – u2; u2≤2, necesitamos decrementar X2

VNB en P0: X3, X4.

- $Y_{X3} = B^{-1} a_{X3} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ 2/5 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X2 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X3 → **JE=X3. La variable IS=x2 que se reemplaza por u2.** El pivote del cambio de base será 2/5
- El modelo equivalente al reemplazar x2 por 2-u2 es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{MAX } Z= 4X1 + 3(2-u2) & & \text{MAX } Z= 6 + 4X1 - 3\,u2 \\ \text{s.a.}\quad 3X1+ 4(2-u2) \le 12 & \equiv & 3X1- 4u2 \le 4 \\ \qquad 4X1 + 2(2-u2) \le 9 & & 4X1- 2u2 \le 5 \end{array}$$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B_{P1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X3, X1; VNB= X4, u2.

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

$$Z = 6 + C_B^t X_B = 6 + (0,4) \begin{pmatrix} 1/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} = 6 + 5 = 11$$

P1: (VNB= X4, u2)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X3	1	-3/4	1/4
X1	0	1/4	5/4
$c_B^t B^{-1}$			**Z=11**

P1: X1=5/4; X2=2; Z=11 > Z*

Esta solución no es entera y el valor de la función objetivo es peor que el del problema P0. Dado que la técnica para generar y recorrer el árbol es la mejor cota, volvemos a P0 para resolver el otro subproblema: P2

P2=P0(X1, X2, X3, X4) + X2 ≥ 3

X2 = 3 + l2; l2≥0, necesitamos incrementar X2

VNB en P0: X3, X4.

- $Y_{X3} = B^{-1} a_{X3} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ 2/5 \end{pmatrix}$
- Para incrementar el valor de X2 necesitamos αij<0, por tanto sólo nos sirve X4 → **JE=X4. La variable IS=x2 que se reemplaza por l2.** El pivote del cambio de base será -3/10
- El modelo equivalente al reemplazar x2 por 3 + l2 es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \text{MAX } Z= 4X1 + 3(3 + l2) & & \text{MAX } Z= 9 + 4X1 + 3\,l2 \\ \text{s.a.}\quad 3X1+ 4(3 + l2) \le 12 & \equiv & 3X1+ 4\,l2 \le 0 \\ \qquad 4X1 + 2(3 + l2) \le 9 & & 4X1 + 2\,l2 \le 3 \end{array}$$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B_{P2}^{-1} = \begin{pmatrix} -4/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X4, X1; VNB= X3, l2.

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} -4/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Z = 9 + C_B^t X_B = 9 + (0, 4)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = 9 + 0 = 9$

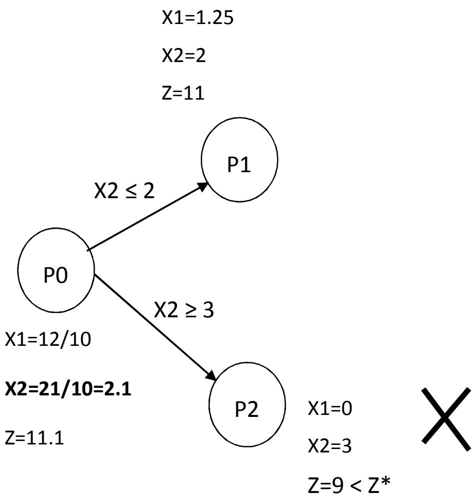
P2: (VNB= X3, l2)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X4	-4/3	1	3
X1	1/3	0	0
$c_B^t B^{-1}$			**Z=9**

Por tanto, la solución en P2 es: **X1=0; X2=3; Z=9**

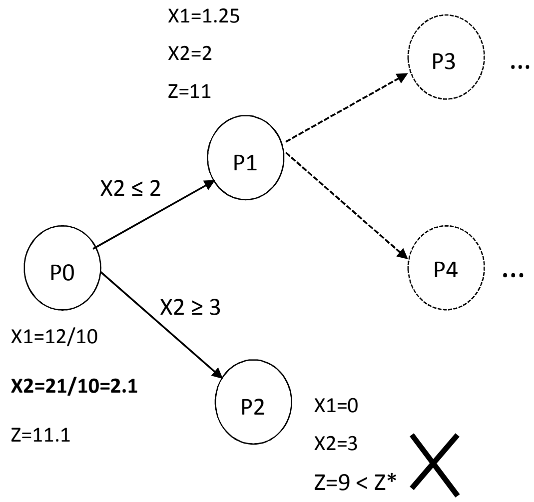
Esta solución es entera y mejor que el mejor valor entero hasta el momento por tanto actualizamos **Z* → Z* = 9**

Hemos encontrado la primera solución entera.



b) La solución encontrada en P2 es entera, sin embargo esta solución podría no ser la solución óptima dado que tenemos abierto el nodo P1 con mejor valor de la función objetivo.

El proceso de búsqueda seguiría a partir de ese problema acotando el valor de x1 a su entero superior e inferior en busca de una solución entera y con mejor valor de la función objetivo que la mejor disponible en este momento.



c) Un nodo no se ramifica si cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. Si la **solución** del problema correspondiente a ese nodo es **entera**.
2. Si el **valor de la función objetivo** del problema correspondiente a ese nodo es **peor** que el valor dela función objetivo de la **mejor solución entera** hasta el momento.
3. Si el problema correspondiente al nodo **no tiene solución factible**.

Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de Simplex Revisado

Nombre y apellidos:_____________________________________e-mail:_____________________

1 Una ONG desea instalar varios hospitales de campaña en un país, de manera que la población de las 10 regiones en que se divide dicho país pueda recibir asistencia médica. Es posible instalar hasta tres hospitales en cada región. La tabla siguiente especifica qué regiones recibirían asistencia médica al instalar algún hospital en cada una:

Al instalar un hospital en esta región:	recibirían asistencia estas regiones:
1	1 , 2 , 3 , 7 , 8
2	1 , 2 , 3
3	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7
4	3 , 4 , 5
5	3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 9
6	5 , 6 , 9 , 10
7	1 , 3 , 5 , 7 , 8 , 9
8	1 , 7 , 8 , 9
9	5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10
10	6 , 9 , 10

Las regiones 1, 9 y 10 son las más pobladas, y por ello se establece que deben ser cubiertas por al menos cuatro hospitales, cada una. El resto de regiones han de ser cubiertas por al menos tres hospitales, cada una.

a) Formula un modelo lineal que permita a los responsables de logística de la ONG decidir cuántos hospitales instalar y en qué regiones, de manera que se cubran las necesidades de asistencia médica del país con el mínimo número de ellos. [1,7 puntos]

b) El coste estimado de instalar y mantener un hospital en cualquier región es de 25.000 unidades monetarias (u.m.) al año. En cambio, si se instalan dos o más hospitales en una misma región, dicho coste disminuye hasta las 15.000 u.m. por año (y por hospital) en esa región, por razones logísticas.

Reformula el modelo construido en el apartado (a) para que tenga en cuenta esta nueva condición; el objetivo es ahora minimizar el coste total de la instalación y mantenimiento de hospitales. El modelo resultante debe continuar siendo lineal. [0,8 puntos]

(Puntuación: 2,5 puntos)

2 Dado el siguiente modelo lineal:

MAX $4X1 + 7X2 + 3X3$
s.a: [R1] $2X1 + X2 + 2X3 \leq 30$
[R2] $X1 + 2X2 + 2X3 \leq 45$
$X1, X2, X3 \geq 0$

Cuya solución óptima se incluye en la tabla siguiente :

v.básicas	B^{-1}		x_B
X1	2/3	-1/3	5
X2	-1/3	2/3	20
$c_B^t B^{-1}$	1/3	10/3	Z=160

responde a las siguientes cuestiones a partir de la tabla de la solución óptima:

a) Calcula el intervalo de análisis de sensibilidad del coeficiente en la función objetivo de X1. ¿Cuáles son las conclusiones de este análisis? [1 punto]

b) Calcula el coste de oportunidad y el intervalo de análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción [R2]. ¿Cuáles son las conclusiones de este análisis? [1 punto]

c) Determina si sería interesante incluir una nueva variable cuyo coeficiente en la función objetivo es 5 y su vector de coeficientes técnicos es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Justifica la respuesta. [0,5 puntos]

(Puntuación: 2,5 puntos)

3 Una empresa tecnológica fabrica microprocesadores de dos niveles de calidad: alta calidad y calidad estándar. Para producirlos utiliza silicio y germanio, de los que diariamente dispone de 48 kilogramos y 4,5 kilogramos, respectivamente. Para realizar un lote de microprocesadores de alta calidad se necesitan 600 gramos de silicio y 50 gramos de germanio, mientras que en el caso de los microprocesadores de calidad estándar, se necesitan 400 gramos de silicio y 50 gramos de germanio por cada lote. Además, por cada lote de alta calidad se obtiene un beneficio de 70 € y por cada lote de calidad estándar se obtiene un beneficio de 40 €. La empresa no tiene dificultad en vender todo lo que se produce.

a) Plantea un modelo matemático multiobjetivo (indicando claramente variables, funciones objetivo y restricciones) que permita a la empresa maximizar tanto su beneficio como el volumen de producción (cantidad de lotes) diario. [0,5 puntos]

b) Utilizando el método gráfico, obtén la matriz de pagos del problema multiobjetivo planteado en el apartado (a). A partir de la matriz de pagos, identifica el punto ideal y el punto antiideal del problema. Justifica tu respuesta. [0,4 puntos]

c) A partir de la resolución gráfica del apartado b), identifica el conjunto de soluciones eficientes o frontera de Pareto. Justifica tu respuesta. [0,4 puntos]

d) La empresa se está planteando como metas la obtención de al menos 5.500 € de beneficio y la producción de al menos 85 lotes de microprocesadores. Plantea un modelo de programación por metas ponderadas que permita determinar la solución con este nuevo planteamiento, teniendo en cuenta que el cumplimiento de la meta asociada al beneficio es cinco veces más importante que el cumplimiento de la meta asociada a los lotes de producción. [0,7 puntos]

(Puntuación: 2 puntos)

4 Dado el siguiente programa lineal:

MIN Z= X1 - 2X2 +2X3
s.a: X1 + X2 – 2X3 ≤ 4
X1 - X2 – X3 ≥ 3
X1, X2, X3 ≥ 0 y enteras;

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
X2	1/2	-1/2	1/2
X1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

a) Calcula la solución óptima entera del problema aplicando el algoritmo de **Bifurcación y Acotación. Para** Recorrer el árbol de soluciones utiliza la **técnica del nodo de creación más reciente (en profundidad).** Comienza bifurcando con respecto a la variable X1 y en cada nodo empieza acotando superiormente (≤) las variables.

Dibuja el árbol de soluciones e indica en cada nodo el valor de las variables decisión y de la función objetivo en la solución correspondiente. [2,5 puntos]

b) Explica cómo habría sido el proceso de búsqueda en caso de haber aplicado la **técnica de la mejor cota (en anchura)**. ¿Cuál habría sido en este caso la solución óptima? [0,5 puntos]

(Puntuación: 3 puntos)

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1:

a)

VARIABLES

Se pide un modelo que permita decidir cuántos hospitales instalar en cada región:

$x_i =$ Cantidad de hospitales a instalar en la región i, $\ i = 1, \dots, 10$.

FUNCIÓN OBJETIVO

Minimizar el número de hospitales a instalar:

[Hospitales] $\ \text{Min } z = x_1 + \cdots x_{10}$ (cantidad de hospitales)

RESTRICCIONES

Restricciones propias de un problema de cubrimiento, teniendo en cuenta que las regiones 1, 9 y 10 requieren estar cubiertas por al menos tres hospitales y el resto por al menos dos:

$$
\begin{array}{lr}
[\text{Región } 1] & x_1 + x_2 + x_3 + x_7 + x_8 \geq 4 \\
[\text{Región } 2] & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\
[\text{Región } 3] & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 3 \\
[\text{Región } 4] & x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\
[\text{Región } 5] & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 3 \\
[\text{Región } 6] & x_5 + x_6 + x_9 + x_{10} \geq 3 \\
[\text{Región } 7] & x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 3 \\
[\text{Región } 8] & x_1 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 3 \\
[\text{Región } 9] & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 4 \\
[\text{Región } 10] & x_6 + x_9 + x_{10} \geq 4
\end{array}
$$

Como mucho, se puede instalar dos hospitales en cada región:

[Cantidad máxima i] $\qquad x_i \leq 3, \ \forall i$

Naturaleza de las variables:

$$x_i \geq 0 \text{y entera}, \forall i$$

b)

Modificaciones a realizar en el modelo del apartado (a), para adaptarlo a las nuevas condiciones enunciadas en el apartado (b):

VARIABLES

Podemos tratar este apartado como un problema de costes no lineales. Además de las variables ya definidas, añadimos las siguientes variables al modelo del apartado (a):

- x_{i1} = Cantidad de hospitales a instalar en la región i con precio 1.
- x_{i2} = Cantidad de hospitales a instalar en la región i con precio 2.
- δ_i = Binaria. Vale 1 si se activa el precio 2 para la región i; vale 0 en otro caso.

$i = 1, \dots, 10.$

Se mantienen también las variables originales.

FUNCIÓN OBJETIVO

Ahora el objetivo es minimizar el coste total de la instalación de hospitales. Sustituimos la función objetivo del apartado (a) por la siguiente:

$$\text{Min } z = 25 \sum_{i=1}^{10} x_{i1} + 15 \sum_{i=1}^{10} x_{i2} \text{ (miles de u.m./año)}$$

RESTRICCIONES

Mantenemos las restricciones del apartado (a).

Añadimos las siguientes restricciones para poner en relación las variables nuevas y las originales:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2}, \ \ \forall i.$$

Añadimos las siguientes restricciones para asegurarnos de que cada precio sólo se activa cuando corresponde:

$$x_{i1} \le 2(1 - \delta_i) \qquad \forall i$$

$$2\delta_i \le x_{i2} \le 3\delta_i \qquad \forall i$$

(las restricciones [Cantidad máxima i] del apartado (a) podrían ser eliminadas)

Naturaleza de las nuevas variables introducidas en este apartado:

$x_{i1}, x_{i2} \ge 0$ y enteras, $\forall i$ $\qquad$ δ_i binaria, $\forall i$

EJERCICIO 2:

a) A.S. de C1:

Como X1 es VB en la solución óptima un cambio en su coeficiente en la función objetivo afecta a los cj-zj de todas las VNB:

$Cj\text{-}Zj = cj - (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$(c^t_B\, B^{-1}) = (c1, 7) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (2/3c1\text{-}7/3, -1/3c1+14/3)$

$Cx3\text{-}Zx3 \leq 0 \rightarrow 3 - (2/3c1\text{-}7/3, -1/3c1+14/3)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 - (2/3c1+14/3) \leq 0 \rightarrow c1 \geq -5/2$

$Cx4\text{-}Zx4 \leq 0 \rightarrow 0 - (2/3c1\text{-}7/3, -1/3c1+14/3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - (2/3c1\text{-}7/3) \leq 0 \rightarrow c1 \geq 7/2$

$Cx5\text{-}Zx5 \leq 0 \rightarrow 0 - (2/3c1\text{-}7/3, -1/3c1+14/3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - (-1/3c1+14/3) \leq 0 \rightarrow c1 \leq 14$

Mientras $7/2 \leq c1 \leq 14$:

1. La solución actual seguirá siendo óptima.
2. Como X1 es VB el valor de la función objetivo cambia en función del valor de c1: Z=140+5 c1.
3. En los límites, existen soluciones alternativas.

b) Coste de oportunidad de b2:

El coste de oportunidad de la segunda restricción es el valor del Cj-Zj de la variable de holgura asociada.

$Cx5\text{-}Zx5 = 0 - (1/3, 10/3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -10/3$; como la restricción es $\leq$ el coste de oportunidad de la restricción es favorable al criterio de la función objetivo (en el informe de Lingo aparecerá con signo positivo).

El coste de oportunidad de la restricción será válido mientras no se produzca cambio de base. La base se mantendrá mientras la solución siga siendo factible, por tanto:

$$\mathbf{X_B = B^{-1}\, b} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 - 1/3b2 \\ -10 + 2/3b2 \end{pmatrix}$$

La solución es factible mientras todas las variables tienen valor ≥ 0, es decir,

$X1 = 20-1/3b2 \geq 0 \rightarrow b2 \leq 60$

$X2 = -10 + 2/3b2 \geq 0 \rightarrow b2 \geq 15$

Por tanto, mientras $15 \leq b2 \leq 60$:

1. El coste de oportunidad será constante e igual a 10/3.
2. Cambiará la solución óptima pero no habrá cambio de base.
3. En los valores extremos del intervalo, la solución básica será degenerada.

c) Introducción de una nueva variable:

Para saber si sería interesante la inclusión de la nueva variable debemos calcular su cj-zj y comprobar si la solución actual sigue siendo óptima:

$$C_{nueva}-Z_{nueva} = 5 - (1/3,\ 10/3)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -2$$

Al considerar la nueva variable la solución actual sigue siendo óptima, por tanto NO interesa su inclusión.

EJERCICIO 3:

a)

VARIABLES:

x1: número de lotes de microprocesadores de alta calidad a fabricar (lotes/día)

x2: número de lotes de microprocesadores de calidad estándar a fabricar (lotes/día)

FUNCIÓN OBJETIVO:

Eff = Max (70x1 + 40 x2 ; x1+x2)

RESTRICCIONES:

[Si] $600x1+ 400x2 \leq 48000$ (gramos)

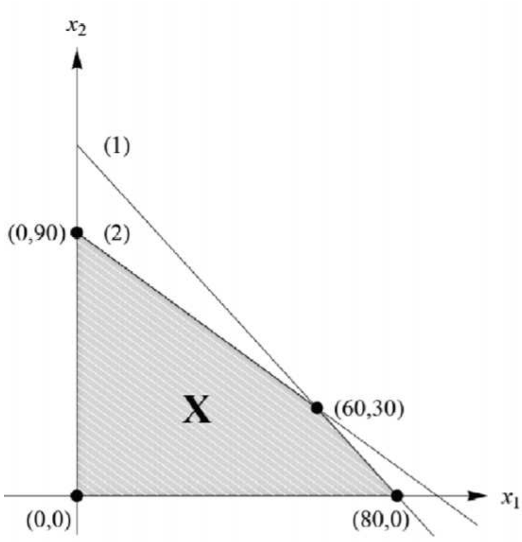
[Ge] $50x1+ 50x2 \leq 4500$ (gramos)

[No_negatividad] $x1, x2 \geq 0$

b)

La matriz de pagos es una matriz cuadrada de dimensión igual al número de objetivos. Cada fila de la matriz incluye los valores correspondientes a la optimización de uno de los objetivos. En concreto, la diagonal principal incluye el valor óptimo de cada objetivo mientras que los demás elementos de la fila resultan de evaluar los demás objetivos en la solución óptima del objetivo de esta fila.

Por tanto, para poder obtener los valores de la matriz de pagos, hay que encontrar la solución óptima del problema para cada objetivo. Como se trata de un problema con dos variables decisión, utilizaremos la resolución gráfica:



Evaluamos el valor de cada objetivo en cada solución básica factible:

Solución		$f_i(x)$	
x1	**x2**	**f1(x)**	**f2(X)**
0	0	0	0
80	0	5600	80
60	30	5400	90
0	90	3600	90

Por tanto, la **matriz de pagos** es:

Matriz de pagos		
OPTIMIZAR	**Beneficio**	**Lotes a producir**
Beneficio	5600	80
Lotes a producir	5400	90

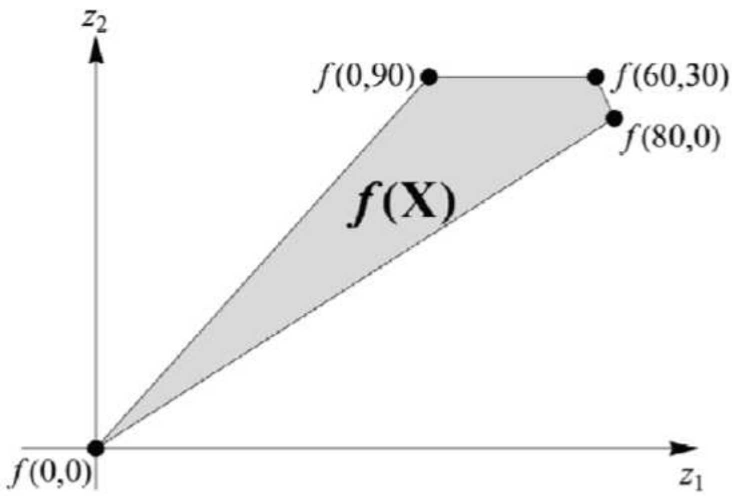
NOTA: La solución (f1, f2)=(3.600, 90) no forma parte de la matriz de pagos puesto que no es una solución eficiente al estar dominada por la solución (5.400, 90)

Partiendo de la matriz de pagos, el punto ideal se construye a partir de los elementos de la diagonal principal de la matriz de pagos; el punto antiideal se construye tomando los peores valores de cada columna.

Ideal (5600, 90); anti-ideal (5400, 80)

c)

Para identificar el conjunto eficiente es necesario representar las soluciones del problema en el espacio de los objetivos. En este caso la representación de las soluciones al problema en el espacio de los objetivos sería la siguiente:



Por lo que el conjunto eficiente estará formado por todas las soluciones comprendidas en el segmento f(80,0) y f(60,30). Este conjunto de soluciones configura la frontera de Pareto ya que no es posible mejorar un objetivo sin empeorar el otro objetivo.

d)

Para formular el problema como un problema de metas incluiremos en el modelo la meta de beneficio y de producción. En cada una de las metas hay que definir las variables desviación. Las variables de desviación no deseada de cada una de las metas ponderadas por su importancia formarán parte de la función objetivo.

En particular, el modelo resultante es:

VARIABLES:

x1: número de microprocesadores de Alta calidad a fabricar (lotes/semana)

x2: número de microprocesadores de calidad estándar a fabricar (lotes/semana)

FUNCIÓN OBJETIVO:

Min= 5N1 + N2;

RESTRICCIONES:

[Si] 600x1+ 400x2 ≤ 48000 (gramos)

[Ge] 50x1+ 50x2 ≤ 4500 (gramos)

[Meta_Bº] 70x1 + 40 x2 – P1 + N1 = 5500 (euros)

[Meta_produccion] x1 + x2 – P2 + N2 = 85 (lotes)

[No_negatividad] x1, x2, P1, N1, P2, N2 ≥ 0

EJERCICIO 4:

a)

P0:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
X2	1/2	-1/2	1/2
X1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

P0: X1=7/2; X2=1/2; Z=5/2 (Z*=+inf)

P1 = P0 + X1≤3; X1=3-u1; u1 ≤ 3

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X3, X4 y X5.

- $Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X1 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X4 →**JE=X4.** El pivote del cambio de base será ½. Sale de la base la variable que alcanza la cota, X1 que será reemplazada en el modelo por u1.

Modelo Equivalente con $x1=3-u_1$

MIN3-u1 -2x2 + 2 X3
$-u_1 + X_2 - 2x3 \leq 1$
$-u_1 - X_2 - X_3 \geq 0$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z = 3 + C_B^t X_B = 3 + (-2,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 < Z^*\text{, actualizamos } Z^*=3$$

P1: (u1, x2, x3, x4)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	0	-1	0
X4	1	1	1
$c_B^t B^{-1}$			**3**

- Como la solución es entera esta es una hoja del árbol de soluciones. Dado que el valor de la función objetivo es mejor que el de la mejor cota hasta el momento, actualizamos dicha cota: Z*= 3.
- Volvemos a P0 para generar y resolver el otro problema que resulta de acotar X1 a su entero superior:

P2 = P0(X1,X2,X3,X4,X5) + X1 ≥ 4; X1 = 4 +l_1 ; l_1≥ 0

- Necesitamos incrementar X1, para ello analizamos las VNB en P0: X3, X4 y X5:

$$Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix};\ Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};\ Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

- Para incrementar el valor de X1 necesitamos αij<0, por tanto nos sirven tanto X3 como X5. Aplicamos el criterio del dual para escoger la variable JE:

$$\min \left\{ \left| \frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}} \right| \mid y_{xk} < 0 \right.$$

$$z_{x3}=(c^t_B B^{-1})\, a_{x3}=(-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1/2 \rightarrow c_{x3}-z_{x3}= 5/2$$

$$z_{x5}=(c^t_B B^{-1})\, a_{x5}=(-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3/2 \rightarrow c_{x5}-z_{x5}= 3/2$$

entonces, min{5/2, 3}=1 →**JE:x3**

Modelo Equivalente con x1=4+l1

MIN 4+l1 -2x2 + 2 X3
l_1 + X_2– 2x3 ≤ 0
l_1- X_2 –X_3≥ -1

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + C_B^t\, X_B = 4 + (-2,2) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 10/3$$

P2 (l1, x2, x3, x4, x5)

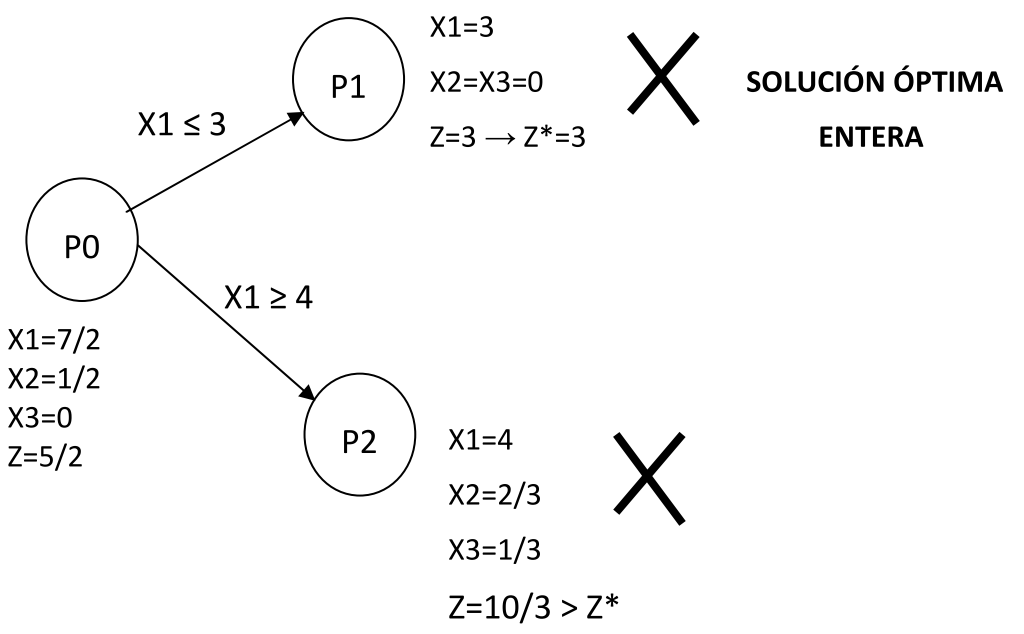
V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	1/3	-2/3	2/3
X3	-1/3	-1/3	1/3
$c_B^t\, B^{-1}$			**10/3**

P2: X1=4; X2=1/3; Z=10/3 > Z* → PODA

La solución en P2 es continua pero como el valor de la función objetivo es peor (mayor) al de la mejor cota, la solución en P2 se poda de forma que la solución entera actual (la de P1) es la solución óptima.

LA SOLUCIÓN ÓPTIMA ES LA OBTENIDA EN EL NODO P1:
X1 = 3; X2 = X3 = 0; Z = 3

El árbol de soluciones sería el siguiente:



b)

En caso de haber aplicado la técnica de la mejor cota, el árbol de soluciones habría sido el mismo.

La solución óptima habría sido, por supuesto, la misma, es decir: **X1 = 3; X2 = X3 = 0**
Z = 3

Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de Simplex Revisado

Nombre y apellidos:____

- Justifica todas tus respuestas
- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico, excepto calculadores no programables
- Se puede escribir las respuestas en lápiz
- **Duración del Examen: 2h 30minutos**

1. Una compañía dispone de un sistema de producción con 4 máquinas en el que se fabrican 3 tipos de productos. Las máquinas se etiquetan como A, B, C y D mientras que los productos se identifican por P, Q y R. La siguiente tabla incluye los tiempos de fabricación requeridos por unidad de cada tipo de producto en cada máquina. La capacidad semanal de cada máquina es 2.400 minutos.

Tiempo de fabricación en cada máquina (minutos) por unidad de producto

	P	**Q**	**R**
Máquina A	20	10	10
Máquina B	12	28	16
Máquina C	15	6	16
Máquina D	10	15	0

Los beneficios por las ventas de cada producto son una función no lineal de la cantidad vendida. Para linealizar esta función, se identifican 3 segmentos para la función de beneficio de cada producto según las cantidades vendidas de cada uno de ellos y que están limitadas a 100 unidades máximas en cada caso.

Los datos de beneficios para cada tipo de producto en los distintos segmentos se recogen en la siguiente tabla. Para el producto P, el beneficio unitario disminuye con las ventas; en el caso del producto Q el beneficio aumenta con el número de unidades vendidas mientras que en el caso del producto R los beneficios se ajustan a las cantidades indicadas en la tabla para cada segmento de ventas.

Beneficio unitario (€) por tipo de producto

Unidades vendidas	**P**	**Q**	**R**
0 a 30	60	40	20
30 a 60	45	60	70
60 a 100	35	65	30

a) Plantea un modelo matemático de **programación lineal entera** para establecer la **planificación de ventas semanal de los tres tipos de productos** de modo que el beneficio sea máximo. **[2.25 puntos]**

b) La empresa está analizando la posibilidad de ampliar la capacidad de la máquina B. Dicha ampliación supondría, en caso de realizarse, un incremento de su capacidad semanal de 1.000 minutos y un coste de 500 euros semanales. Modifica el modelo de modo que permita decidir si es interesante llevar a cabo la mejora. **[0.5 puntos]**

c) La empresa contempla ahora la posibilidad de ampliar la capacidad de algunas de las cuatro máquinas. Cada ampliación supondría, en caso de realizarse, disponer de 1.000 minutos adicionales y el coste de cada ampliación sería de 500 euros semanales. Además, debe considerarse que, por limitaciones en el presupuesto, no es posible ampliar más de 2 máquinas y que, por sus características técnicas, si se amplia la máquina A no debe ampliarse la C. **[0.75 puntos]**

Nota: considera las modificaciones de los apartados b) y c) de forma independiente. En todos los casos el modelo resultante ha de seguir siendo lineal.

(Puntuación: 3.5 puntos)

2 La compañía InfoVal S.A. desea planificar el ensamblaje de dos nuevos modelos de ordenador: el QNAP i5 y el QNAP i7. Ambos modelos precisan del mismo tipo de carcasa y lector óptico. En el modelo QNAP i5 se ensambla la carcasa con 2 lectores ópticos. En el modelo QNAP i7 se ensambla la carcasa con un lector óptico y además se añade un lector de tarjetas. Se dispone semanalmente de 1.000 lectores ópticos, 500 lectores de tarjetas y de 600 carcasas.

Un QNAP i5 requiere 1 hora de trabajo para su ensamblaje y proporciona un beneficio neto de 200 euros y mientras que un QNAP i7 requiere 1.5 horas de trabajo y su beneficio neto es de 500 euros.

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores, el director de la compañía desea alcanzar las siguientes metas:

- Meta 1. Producir semanalmente 200 ordenadores QNAP i5 como mucho.
- Meta 2. Ensamblar al menos 500 ordenadores en total a la semana.
- Meta 3. Igualar el número de horas totales de trabajo semanal dedicadas al ensamblaje de los dos tipos de ordenador.
- Meta 4. Obtener un beneficio semanal neto de al menos 250.000 euros.

▪ Plantea un modelo de **Programación por Metas Ponderadas** utilizando el siguiente vector de pesos (W1, W2, W3, W4) = (2, 1, 1, 5).

(Puntuación: 1.5 puntos)

3 Dado el siguiente modelo lineal:

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{Max} & & \boldsymbol{z = 2x_1 + x_2} \\ \boldsymbol{s.a}: & [\boldsymbol{R1}] & \boldsymbol{x_1 + 2x_2 \leq 10} \\ & [\boldsymbol{R2}] & \boldsymbol{3x_1 + x_2 \leq 10} \\ & [\boldsymbol{R3}] & \boldsymbol{x_1 + x_2 \leq 2} \\ & & \boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}\right\} (P),$$

cuya solución óptima se incluye en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	0	-1	8
X4	0	1	-3	4
X1	0	0	1	2
$c_B^t\, B^{-1}$	0	0	2	Z=4

a) Calcula el análisis de sensibilidad del coeficiente en la función objetivo de X1 (c1). ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? **[1.25 puntos]**

b) Calcula el análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción 3 (b3). ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? **[1.25 puntos]**

(Puntuación: 2.5 puntos)

4 Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{Max} & & \boldsymbol{z = 4x_1 + 4x_2 + x_3} \\ \boldsymbol{s.a}: & [\boldsymbol{R1}] & \boldsymbol{2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4} \\ & [\boldsymbol{R2}] & \boldsymbol{x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4} \\ & & \boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0 \; y \; enteras} \\ & & \boldsymbol{x_3 \geq 0} \end{array}\right\} (P),$$

cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
X2	2/3	-1/3	4/3
X3	1/3	1/3	8/3
$c_B^t\, B^{-1}$	3	-1	Z = 8

a) Aplica el algoritmo de **Bifurcación y Acotación** hasta encontrar la primera solución factible del problema (P). Recorre el árbol de soluciones **en profundidad** (técnica de la cota más reciente)**.** <u>En cada nodo empieza acotando superiormente (≤) la variable correspondiente</u>.

b) Dibuja el árbol de soluciones e indica en cada nodo el valor de las variables decisión y de la función objetivo en la solución correspondiente.

(Puntuación: 2.5 puntos)

SOLUCIÓN

1.

a)

VARIABLES:

Las variables hacen referencia a las unidades vendidas de cada tipo de producto y en cada tramo de beneficio. Adicionalmente serán necesarias variables binarias que aseguren la aplicación del beneficio adecuado según el número de unidades vendidas.

P1, Q1, R1: Unidades vendidas el producto P con el beneficio indicado en el segmento 1

P2, Q2, R2: Unidades vendidas el producto P con el beneficio indicado en el segmento 2

P3, Q3, R3: Unidades vendidas el producto P con el beneficio indicado en el segmento 3

Y_{P2} (0,1): 0: Unidades vendidas de P sólo con el beneficio indicado en el segmento 1

1: Unidades vendidas de P con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

Y_{P3} (0,1): 0: Unidades vendidas de P con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

1: Unidades vendidas de P con el beneficio indicado en el segmento 1, 2 y 3

Y_{Q2} (0,1): 0: Unidades vendidas de Q sólo con el beneficio indicado en el segmento 1

1: Unidades vendidas de Q con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

Y_{Q3} (0,1): 0: Unidades vendidas de Q con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

1: Unidades vendidas de Q con el beneficio indicado en el segmento 1, 2 y 3

Y_{R2} (0,1): 0: Unidades vendidas de R sólo con el beneficio indicado en el segmento 1

1: Unidades vendidas de R con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

Y_{R3} (0,1): 0: Unidades vendidas de R con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

1: Unidades vendidas de R con el beneficio indicado en el segmento 1, 2 y 3

(Opcionalmente podríamos definir tres variables continuas adicionales P, Q y R que indicaran el número total de unidades vendidas de cada tipo de producto, independientemente del segmento de beneficio.)

FUNCION OBJETIVO:
La función objetivo expresada en términos de las variables es **lineal**.

MAX Z = 60 P1 + 45 P2 + 35 P3 + 40 Q1 + 60 Q2 + 65 Q3 + 20 R1 + 70 R2 + 70 R3

RESTRICCIONES:

- Capacidad de las máquinas:

  [MAQ A] 20(P1+P2+P3) + 10(Q1+Q2+Q3) + 10(R1+R2+R3) <= 2400
  [MAQ B] 12(P1+P2+P3) + 28(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400
  [MAQ C] 15(P1+P2+P3) + 6(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400
  [MAQ D] 10(P1+P2+P3) + 15(Q1+Q2+Q3) + 0(R1+R2+R3) <= 2400

- Para que el modelo represente correctamente las funciones de beneficio no lineales, los segmentos de beneficio deben utilizarse en el orden correcto. Es decir, las ventas del primer segmento deben estar en su valor máximo para que se aplique el beneficio del segundo segmento y tanto el primero como el segundo deben haberse cubierto antes de que el tercer segmento se aplique.

  Para ello necesitamos utilizar las **variables binarias** en el modelo. Estas variables controlarán el orden en el que los beneficios unitarios se utilizarán en la solución según el número de unidades vendidas.

[Producto P]
30 Y_{P2} <= P1 <= 30
30 Y_{P3} <= P2 <= 30 Y_{P2}
0 <= P3 <= 40 Y_{P3}

[Producto Q]
30 Y_{Q2} <= Q1 <= 30
30 Y_{Q3} <= Q2 <= 30 Y_{Q2}
0 <= Q3 <= 40 Y_{Q3}

[Producto R]
30 Y_{R2} <= R1 <= 30
30 Y_{R3} <= R2 <= 30 Y_{R2}
0 <= R3 <= 40 Y_{R3}

[No_negatividad] P1, Q1, R1, P2, Q2, R2, P3, Q3, R3 >= 0

* Nota: Por los datos de los tramos de beneficio no todas las variables binarias son indispensables. La formulación de las restricciones con el número mínimo de variables binarias es la siguiente:

[Restricciones de segmentos de beneficios]
[Producto P] (En este caso NO es necesario el uso de vBinarias ya que los beneficios son decrecientes)
P1 <= 30
P2 <= 30
P3 <= 40
[Producto Q]
30 Y_{Q2} <= Q1 <= 30

$30\ Y_{Q3} <= Q2 <= 30\ Y_{Q2}$

$0 <= Q3 <= 40\ Y_{Q3}$

[Producto R] (solo es indispensable controlar que el beneficio del segundo tramo solo se usa a partir de las 30 primeras unidades fabricadas)

$30\ Y_{R2} <= R1 <= 30$

$0 <= R2 <= 30\ Y_{R2}$

$0 <= R3 <= 40\ Y_{R2}$

b)

Las modificaciones a añadir el modelo del apartado a) son las siguientes:

VARIABLES adicionales:

Y_B (0,1): 0: No se realiza la ampliación de la maquina B

1: Se realiza la ampliación de la maquina B

FUNCIÓN OBJETIVO:

MAX Z = 60 P1 + 45 P2 + 35 P3 + 40 Q1 + 60 Q2 + 65 Q3 + 20 R1 + 70 R2 + 70 R3 - 500 Y_B

RESTRICCIONES:

[MAQ B] 12(P1+P2+P3) + 28(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000 Y_B

El resto del modelo se queda igual.

c)

Dado que en este caso es posible realizar la ampliación en cualquiera de los 4 tipos de máquinas, las modificaciones a realizar en el modelo se concretan en:

VARIABLES adicionales:

Yi (0,1): 0: No se realiza la ampliación de la maquina i i= A, B, C, D

1: Se realiza la ampliación de la maquina i

MAX Z = 60 P1 + 45 P2 + 35 P3 + 40 Q1 + 60 Q2 + 65 Q3 + 20 R1 + 70 R2 + 70 R3 - 500 ($Y_A + Y_B + Y_C + Y_D$)

RESTRICCIONES:

[MAQ A] 20(P1+P2+P3) + 10(Q1+Q2+Q3) + 10(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000 Y_A
[MAQ B] 12(P1+P2+P3) + 28(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000 Y_B
[MAQ C] 15(P1+P2+P3) + 6(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000 Y_C
[MAQ D] 10(P1+P2+P3) + 15(Q1+Q2+Q3) + 0(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000 Y_D

$Y_A + Y_B + Y_C + Y_D \leq 2$

$Y_A + Y_C \leq 1$

2.

VARIABLES DECISIÓN:

X1: Unidades ensambladas semanalmente del ordenador QNAP i5

X2: Unidades ensambladas semanalmente del ordenador QNAP i7

FUNCIÓN OBJETIVO:
MIN Z = 2 P1 + 1 N2 + 1 (P3 + N3) + 5 N4

RESTRICCIONES:
[Restricciones del problema]
[lectores_ópticos] 2X1 +X2 <= 1000
[lector_tarjeta] X2 <= 500
[carcasas] X1+X2 <= 600

[Metas]
[M1] X1 – <u>P1</u> + N1 = 200
[M2] X1 + X2 – P2 + <u>N2</u> = 500
[M3] X1 – 1.5X2 – <u>P3</u> + <u>N3</u> = 0
[M4] 200X1 + 500X2 – P4 + <u>N4</u> =250000

[No negatividad de las variables]
X1, X2, N1, P1, N2, P2, N3, P3, N4, P4 >=0

3.

a) Análisis de sensibilidad de c1: Intervalo de variación de c1 en el que la solución actual sigue siendo óptima.

Como x1 es VB en la solución optima, es necesario recalcular $c_B^t B^{-1}$ y los cj-zj $\forall$j VNB:

$$c_B^t B^{-1} = (0, 0, c1)\, B^{-1} = (0, 0, c1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, c1)$$

$$c_{x2} - z_{x2} = 1 - (0, 0, c1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \le 0 \rightarrow 1 - c1 \le 0 \rightarrow c1 \ge 1$$

$$c_{x5} - z_{x5} = 0- (0, 0, c1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \rightarrow 0\text{-}c1 \leq 0 \rightarrow c1 \geq 0$$

Conclusiones: Mientras c1 $\in$ [1, .. +∞):

1. La solución actual sigue siendo óptima
2. El valor de la función objetivo cambia y lo hace según la expresión: Z=2c1
3. En los límites, existen soluciones óptimas alternativas.

b)

Para realizar el análisis de sensibilidad de b3, calculamos en primer lugar el coste de oportunidad de la restricción y a continuación el intervalo en el que dicho coste de oportunidad y el plan de producción se mantienes constantes.

- Coste de oportunidad de la restricción b3:

$$c_{x5} - z_{x5} = 0 - (0, 0, 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 2 = -2$$

Como se trata de una restricción ≤, el coste de oportunidad es favorable al criterio de la función objetivo. Por tanto C.O.=+2

- Intervalo en el que el coste de oportunidad y el plan de producción se mantienen constantes:

$$x'^* = x^* + B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta b3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - \Delta b3 \\ 4 - 3\Delta b3 \\ 2 + \Delta b3 \end{pmatrix} \geq 0$$

8 - Δb3 ≥ 0 → Δb3 ≤ 8

4 - 3Δb3 ≥ 0 → Δb3 ≤ 4/3

2 + Δb3 ≥ 0 → Δb3 ≥ -2

Conclusiones: Mientras b3 $\in$ [0,..10/3)

- El coste de oportunidad es constante e igual a 2
- La solución óptima cambia puesto que la restricción es limitativa. También cambia el valor de la función objetivo y su valor se puede calcular.
- No hay cambio de solución básica.
- En los límites, la solución es degenerada

4.

P0:

V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	2/3	-1/3	4/3
X3	1/3	1/3	8/3
$c_B^t B^{-1}$	3	-1	**Z=8**

P0: X1=0; X2=4/3; X3=8/3; Z=8 (Z*=-inf)

a)

P1 = P0 + X2≤ 1; X2=1-u_{x2}; u_{x2}≤ 1

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X2

VNB en P0: X1, X4, X5.

- $Y_{X1} = B^{-1} a_{X1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1} a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X2 necesitamos $\alpha_{X2,j}>0$, por tanto nos sirven X1, X4 y X5. Escogeremos la variable que consigue el objetivo (decrementar X2) de la forma más eficiente posible. Para ello necesitamos calcular el Cj-Zj de cada una de ellas y escoger la que verifica:

  $$\text{Min } \{ |(cj-zj)/ \alpha_{X2,j} |, \forall\ \alpha_{X2,j}< 0 \}$$

- $Z_{x1}= C_B^tB^{-1}a_{X1} = (3, -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =5 \rightarrow C_{x1} - Z_{x1}= 4-5 = -1$
- $Z_{x4}= C_B^tB^{-1}a_{X4} = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =3 \rightarrow C_{x4} - Z_{x4}= 0-3 = -3$
- $Z_{x5}= C_B^tB^{-1}a_{X5} = (3, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} =1 \rightarrow C_{x5} - Z_{x5}= 0-1 = -1$

Entonces: Min {|(-1)/1|, |(-3)/2/3|, |(-1)/1/3|} =1 → **JE: X1**

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1}_{P2} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X1, X3; VNB= u_{X2}, X4,X5

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + C_B^t X_B = 4 + (4,1)\begin{pmatrix}1/3\\7/3\end{pmatrix} = 23/3$$

P1: (x1, u_{x2}, x3, x4, x5)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X1	2/3	-1/3	1/3
X3	-1/3	2/3	7/3
$c_B^t B^{-1}$	7/3	-2/3	**Z=23/3**

- Dado que esta solución no es factible para el problema original (ya que se requiere que tanto x1 como x2 tomen valor entero) y que el criterio para recorrer el árbol es cota más reciente, el proceso de búsqueda continúa a partir de P1. Dado que X1 es la única variable que ha de ser entera y todavía no lo es, el proceso sigue bifurcando X1:

P2 = P1 + X1≤ 0; X1=0-u_{x1}; u_{x1}≤ 0

- A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

- Como VNB en P2: $\mathbf{u_{x2}}$, X4, X5, calculamos:

$$Y\mathbf{u}_{x2} = B^{-1} a_{ux2} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}; \quad Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\end{pmatrix}; \; Y_{X5} = B^{-1} a_{X5} = \begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

Para decrementar el valor de X1 necesitamos $\alpha_{X1,j}$>0, por tanto debemos escoger entre X4 y X5 la variable que es capaz de conseguirlo del modo más eficiente posible. Para ello necesitaremos en primer lugar calcular sus Cj-Zj:

- $Z_{x4}= C_B^t B^{-1} a_{X4} = (7/3, -2/3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 7/3 \rightarrow C_{x4} - Z_{x4}= 0-7/3 = -7/3$

- $Z_{x5}= C_B^t B^{-1} a_{X5} = (7/3, -2/3)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 2/3 \rightarrow C_{x5} - Z_{x5}= 0-2/3 = -2/3$

Entonces: Min {|(-7/3)/2/3|, |(-2/3)/1/3|} =2 →**JE: X5**

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1}_{P4} = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

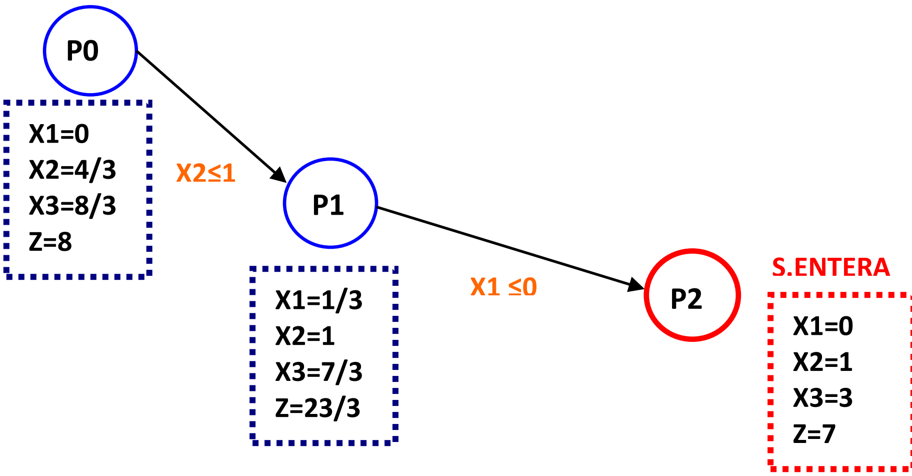
$$Z = 4 + C_B^t X_B = 4 + (0,1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 7 > Z^* \rightarrow Z^*=7$$

Como en esta solución tanto X1 como X2 son enteras, la solución es factible para el problema original (puesto que se requiere que x1 y x2 sean enteras; x3 también toma un valor entero

aunque no era necesario para que la solución fuese factible para el problema original) y por tanto una hoja del árbol de soluciones. La solución entera sería:
X1=0; X2=1; X3=3 y Z=7

b)

- El árbol de soluciones generado es el de la siguiente figura:



Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de SIMPLEX REVISADO

Nombre y apellidos:____________________________________e-mail:____________________

Ejercicio 1 — 3,5 puntos

Con el fin de hacer frente a un incremento imprevisto de la demanda, una empresa se plantea la posibilidad de ampliar temporalmente la capacidad de producción de algunas de sus factorías.

En concreto, los clientes 1 y 2 demandan <u>exactamente</u> 2.000 y 3.000 toneladas de producto. La tabla siguiente muestra, para cada una de las cinco factorías, el stock disponible actualmente, el coste que tendría ampliar temporalmente su capacidad, y el incremento productivo que supondría dicha ampliación, en caso de realizarse.

	Stock disponible (toneladas)	Coste de la ampliación (euros)	Incremento productivo que supondría la ampliación (toneladas)
Factoría 1	400	50.000	500
Factoría 2	300	60.000	1.000
Factoría 3	200	70.000	1.500
Factoría 4	100	80.000	2.000
Factoría 5	0	90.000	2.500

Los costes de envío de la mercancía desde cada factoría a cada cliente se muestran en la siguiente tabla.

Costes de envío (euros/tonelada)	Cliente 1	Cliente 2
Factoría 1	1.000	5.000
Factoría 2	1.500	4.000
Factoría 3	2.000	3.000
Factoría 4	2.500	2.000
Factoría 5	3.000	1.000

a) Formula un modelo <u>lineal</u> (indicando claramente variables, función objetivo y restricciones) que permita a la empresa conocer la forma más barata de hacer frente a los pedidos de los clientes 1 y 2, utilizando el stock disponible y el incremento productivo generado por las ampliaciones que se lleven a cabo. **[1,25 puntos]**

Explica qué hay que modificar, eliminar o añadir en el modelo del apartado (a) para que incluya las siguientes condiciones adicionales, teniendo en cuenta que el modelo resultante debe continuar siendo lineal, en cada caso:

b) Pueden realizarse, como mucho, tres de las cinco ampliaciones. **[0,5 puntos]**

c) La empresa se plantea enviar al cliente 2 una cantidad de producto inferior a la demandada (hasta un máximo de 200 toneladas menos). Se sabe que, en caso de que la demanda total no satisfecha sea menor de 50 toneladas, cada tonelada que se deje de servir a este cliente supondrá un coste de 1.900 euros para la empresa (en concepto de pérdidas de ingresos y penalización por demanda no satisfecha), mientras que, en el caso de que la demanda total no satisfecha supere esta cantidad, cada tonelada que se deje de servir a este cliente supondrá un coste de 2.000 euros. **[1 punto]**

d) Si se realizan las ampliaciones 1 y 2 (las dos), el coste total conjunto de las dos ampliaciones será de 100.000 euros (es decir, 10.000 euros inferior a la suma de lo que cuesta cada una por separado). **[0,75 puntos]**

Ejercicio 2 — 3 puntos

Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{lrl} \textit{Min} & & z = 20x_1 + 30x_2 + 16\,x_3 \\ \textit{s.a:} & [R1] & \frac{5}{2}x_1 + 3\,x_2 + x_3 \geq 3 \\ & [R2] & x_1 + 3\,x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución óptima se incluye en la siguiente tabla,

V. Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	2/3	-1/3	2/3
x_3	-1	1	1
$c_B^t\, B^{-1}$	4	6	Z = 36

a) Calcula el intervalo de análisis de sensibilidad del coeficiente en la función objetivo de x_1. ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? **[1,5 puntos]**

b) Calcula el coste de oportunidad asociado a la restricción [R2] así como el intervalo de análisis de sensibilidad del segundo miembro de dicha restricción. ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? **[1,5 puntos]**

Ejercicio 3 3,5 puntos

Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{Min} & \boldsymbol{z = x_1 - 2x_2 + 2x_3} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{[R1]\ \ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4} \\ & \boldsymbol{[R2]\ \ x_1 - x_2 - x_3 \geq 3} \\ & \boldsymbol{x_1, x_2, x_3 \geq 0\ y\ enteras} \end{array}\right\} (P),$$

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	1/2	-1/2	1/2
x_1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t\ B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

a) Aplica el algoritmo de Bifurcación y Acotación (B&B) hasta encontrar la **primera solución factible** del problema (P). Recorre el árbol de soluciones utilizando la **técnica de la mejor cota (en anchura).** Comenzar bifurcando la variable X1 y, en cada nodo, empezar acotando inferiormente (≥) las variables.

Dibuja el árbol de soluciones generado y en cada nodo, indica el valor de las variables decisión y de la función objetivo. **[2,25 puntos]**

b) La solución encontrada en a), ¿es óptima? Justifica tu respuesta. En caso de que no lo sea, explica cómo continuaría el proceso de búsqueda de la solución óptima. **[0,75 puntos]**

c) Explica cómo habría sido el proceso de búsqueda en caso de haber aplicado la técnica del **nodo de creación más reciente (en profundidad)**. ¿Cuál habría sido en este caso la solución óptima? **[0,5 puntos]**

SOLUCIÓN

1.

a)

Variables

$\delta_i =$ Binaria. Vale 1 si se realiza la ampliación de la factoría i; vale 0 en caso contrario.

$x_{ij} =$ Cantidad de producto que se enviará desde la factoría i al cliente j (toneladas).

$i = 1, \dots, 5; \quad j = 1, 2.$

Función objetivo

$$\text{Min} \quad z = 50\delta_1 + 60\delta_2 + 70\delta_3 + 80\delta_4 + 90\delta_5 + x_{11} + 5x_{12} + 1{,}5x_{21} + 4x_{22} + 2x_{31} + 3x_{32} + 2{,}5x_{41} + 2x_{42} + 3x_{51} + x_{52} \text{ (miles de euros)}$$

Restricciones

Cada factoría puede enviar una determinada cantidad como máximo, en función de si se realiza o no la ampliación:

[Oferta 1] $x_{11} + x_{12} \leq 400 + 500\delta_1$

[Oferta 2] $x_{21} + x_{22} \leq 300 + 1.000\delta_2$

[Oferta 3] $x_{31} + x_{32} \leq 200 + 1.500\delta_3$

[Oferta 4] $x_{41} + x_{42} \leq 100 + 2.000\delta_4$

[Oferta 5] $x_{51} + x_{52} \leq 2.500\delta_5$

Cada cliente debe recibir la cantidad de producto que solicita:

[Demanda 1] $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 2000$

[Demanda 2] $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 3000$

Naturaleza de las variables:

$x_{ij} \geq 0$, para todo i y todo j.

δ_i binaria, para todo i.

b)

Añadimos la siguiente restricción: $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 \leq 3$

c)

Añadimos las siguientes variables:

$h_{21} =$ Demanda del cliente 2 no satisfecha, con tarifa 1 (toneladas).

$h_{22} =$ Demanda del cliente 2 no satisfecha, con tarifa 2 (toneladas).

$\delta_{C2} =$ Binaria. Vale 1 si se activa la tarifa 2 para la demanda no satisfecha del cliente 2; vale 0 en caso contrario.

Modificamos la función objetivo para añadir los costes de la demanda no satisfecha:

$$z = \cdots + 1{,}9h_{21} + 2h_{22}.$$

Modificamos la restricción de la demanda del cliente 2:

[Demanda 2] $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + h_{21} + h_{22} = 3000$

La tarifa 1 de demanda no satisfecha se activa solo si dejamos de servir entre 0 y 50 unidades; a partir de ahí, hasta 200, se activa la 2 (PARA TODAS LAS UNIDADES no servidas). Por tanto:

[Tarifa 1] $h_{21} \leq 50(1 - \delta_{C2})$

[Tarifa 2] $50\delta_{C2} \leq h_{22} \leq 200\delta_{C2}$

Naturaleza de las nuevas variables:

$$h_{21}, h_{22} \geq 0$$

δ_{C2} binaria

d)

Añadimos la siguiente variable:

$\delta_{12} =$ Binaria. Vale 1 si se realizan las dos ampliaciones 1 y 2; vale 0 en caso contrario.

Modificamos la función objetivo añadiendo el siguiente término:

$$z = \cdots - 10\delta_{12},$$

lo que representa el hecho de que, en caso de realizar las dos ampliaciones, el coste se reduce en 10.000 euros respecto a la suma de los dos costes por separado.

Añadimos la siguiente restricción:

[Ampliaciones 1 y 2] $2\delta_{12} \leq \delta_1 + \delta_2$

Esta restricción tiene el efecto que buscamos: si $\delta_{12} = 1$ (es decir, si queremos 'tener derecho al descuento'), entonces necesariamente se tiene que cumplir $\delta_1 + \delta_2 = 2$ (es decir, se tienen que realizar las dos ampliaciones).

NOTA: Debido al papel que tiene δ_{12} en la función objetivo, la restricción [Ampliaciones 1 y 2] que hemos añadido es suficiente. También podría haberse expresado de la siguiente forma, más 'completa', aunque el lado derecho NO es estrictamente necesario en este caso:

[Ampliaciones 1 y 2] $2\delta_{12} \leq \delta_1 + \delta_2 \leq 1 + \delta_{12}$.

Naturaleza de la nueva variable añadida:

δ_{12} binaria.

MODELIZACIÓN ALTERNATIVA (apartado (d))

Añadimos la siguiente variable:

$\delta_{12} =$ Binaria. Vale 1 si se realizan las dos ampliaciones 1 y 2; vale 0 en caso contrario.

Modificamos el significado de las variables δ_1 y δ_2:

$\delta_1 =$ Binaria. Vale 1 si se realiza la ampliación de la factoría 1, pero NO la 2; vale 0 en cualquier otro caso.

$\delta_2 =$ Binaria. Vale 1 si se realiza la ampliación de la factoría 2, pero NO la 1; vale 0 en cualquier otro caso.

Modificamos la función objetivo añadiendo el siguiente término:

$$z = \cdots + 100\delta_{12}.$$

Modificamos las restricciones siguientes:

[Oferta 1] $x_{11} + x_{12} \leq 400 + 500(\delta_1 + \delta_{12})$

[Oferta 2] $x_{21} + x_{22} \leq 300 + 1.000(\delta_2 + \delta_{12})$

Añadimos las siguientes restricciones:

[Ampliación 1] $\delta_1 + \delta_{12} \leq 1$

[Ampliación 2] $\delta_2 + \delta_{12} \leq 1$

Naturaleza de la nueva variable añadida:

δ_{12} binaria.

2.

a)

Como X1 es variable no básica, una modificación en su coeficiente en la función objetivo afectará solo a su Cj-Zj. La solución actual seguirá siendo solución óptima siempre que Cj-Zj $\geq 0 \forall$j, es decir:

ya que es min

$$C_1 - Z_1 = C_1 - (4 \cdot 5/2 + 6 \cdot 1) = C_1 - 16 \geq 0 \rightarrow C_1 \geq 16$$

Por tanto, mientras $C_1 \in [16, +\infty)$:

- La solución óptima No cambia (es decir las variables básicas seguirán con el mismo valor)
- No cambia el valor de la función objetivo puesto que x1 es Variable No Básica en la solución óptima.
- En los límites del intervalo existen soluciones alternativas.

b)

El coste de oportunidad de la Restricción [R2] corresponde al Cj-Zj de la variable de holgura de la restricción. Sea h_2 la variable de holgura de la restricción [R2], el coste de oportunidad es:

$Zh_2 = c_B^t B^{-1} ah_2 = (4, 6)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -6$; $Ch_2 - Zh_2 = 6$

Teniendo en cuenta que se trata de una restricción de tipo ≥, el coste de oportunidad es desfavorable a la función objetivo, es decir, el incremento del lado derecho de la restricción implicará un empeoramiento (incremento) del valor de la función objetivo igual a 6.

El análisis de sensibilidad del segundo miembro de una restricción determina el intervalo en el que puede variar dicho coeficiente y mantenerse constante el coste de oportunidad de la restricción. Esto ocurrirá mientras la solución óptima actual siga siendo factible, es decir:

$$X_B'^* = B^{-1} b' = B^{-1} (b + \Delta b) = X_B^* + B^{-1} \Delta b \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + B^{-1} \Delta b = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x_2' = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 \rightarrow \Delta b_2 \leq 2$$

$$x_3' = 1 + \Delta b_2 \geq 0 \rightarrow \Delta b_2 \geq -1$$

Dado que b2 = 4 + Δb_2, entonces $\Delta b_2 = b_2 - 4$ por tanto,

Mientras b2 $\in$ [3,..., 6]:

- El coste de oportunidad se mantiene constante e igual a –6
- La solución óptima y el valor de la función objetivo cambian puesto que la restricción [R2] es limitativa en la solución óptima

- Se mantiene la misma solución básica.

3.

a)

P0:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	1/2	-1/2	1/2
x_1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t\ B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

P0: X1=7/2; X2=1/2; Z=5/2 (Z*=+inf)

P1=P0(X1,X2,X3,X4,X5) + X1 ≥ 4; X1 = 4 +l_1 ; l_1≥ 0

- Necesitamos incrementar X1, para ello VNB en P0: X3, X4 y X5:

$$Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix};\ Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};\ Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

- Para incrementar el valor de X1 necesitamos αij<0, por tanto nos sirven tanto X3 como X5. Aplicamos el criterio del dual para escoger la variable JE:

$$\min \left\{ \left| \frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}} \right| \ \middle|\ y_{xk} < 0 \right.$$

$$z_{x3} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x3} = (-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1/2 \rightarrow c_{x3} - z_{x3} = 5/2$$

$$z_{x5} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x5} = (-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3/2 \rightarrow c_{x5} - z_{x5} = 3/2$$

entonces, min{5/3, 3}=5/3 →**JE:x3**

Modelo Equivalente con x1=4+l1

MIN Z= 4+l1 -2x2 + 2 X3
$l_1 + X_2 - 2x3 \leq 0$
$l_1 - X_2 - X_3 \geq -1$

- B^{-1} de la nueva solución:

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$Z = 4 + C_B^t X_B = 4 + (-2,2) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 10/3$

P1 (11, x2, x3, x4, x5)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	1/3	-2/3	2/3
X3	-1/3	-1/3	1/3
$c_B^t\, B^{-1}$			**10/3**

P1: X1=4; X2=1/3; Z=10/3; Z*=+inf

Como utilizamos la técnica de la mejor cota, debemos volver a P0 y generar y resolver P2: P0 + X1≤ 1

P2 = P0 + X1≤3; X1=3-u1; u1 ≤3

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X3, X4 y X5.

- $Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X1 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X4 →**JE=X4.**
- El pivote del cambio de base será ½.
- Sale de la base la variable que alcanza la cota, X1 que será reemplazada en el modelo por u1.

Modelo Equivalente con $x1=3-u_1$

MIN Z = 3-u1 -2x2 + 2 X3
$-u_1 + X_2 - 2x3 \le 1$
$-u_1 - X_2 - X_3 \ge 0$

- B^{-1} de la nueva solución:

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_B = B^{-1}\,b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Z = 3 + C_B^t X_B = 3 + (-2,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 < Z^*$, **actualizamos $Z^*=3$**

P1: (u1, x2, x3, x4)

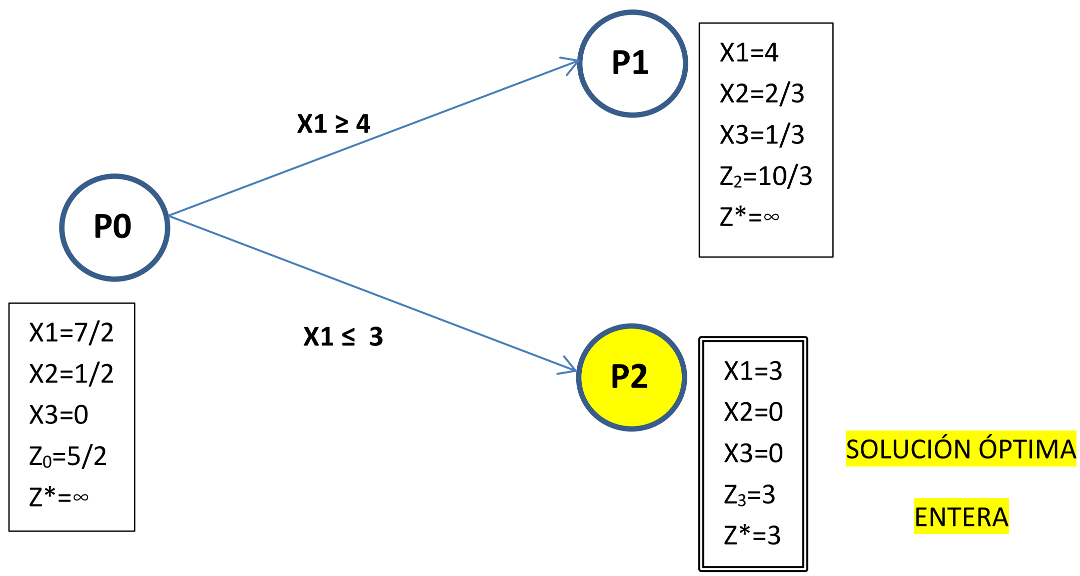
V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	0	-1	0
X4	1	1	1
$c_B^t\,B^{-1}$			**3**

La solución en P2 es:

X1=3; X2=0; X3=0 y Z=3.

Dado que tanto X1 como X2 y X3 toman valor entero, la solución de P2 es solución entera y por tanto solución factible para el problema (P).

El árbol de soluciones que se ha generado es el siguiente:



b)
Como la solución obtenida en P2 es entera, es una hoja del árbol de soluciones. El único nodo que queda abierto es P1, pero como el valor de la función objetivo es peor (mayor) al de la mejor cota ($Z1=10/3 > Z^*=3$) , la solución en P1 se poda de forma que la solución actual (la de P2) es la solución óptima.

c)
En caso de haber aplicado la técnica del nodo de creación más reciente el proceso de búsqueda habría seguido a partir de P_1 hasta alcanzar una hoja. En ese momento habríamos empezado el backtracking hasta llegar de nuevo a P_0 y resolver el problema P_2.
La solución óptima sería la misma que la obtenida en el apartado a).

Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de Simplex Revisado

Nombre y apellidos:___________________________________e-mail:____________________

1 Una empresa fabrica cuatro tipos diferentes de productos A, B, C y D para cuya elaboración precisan pasar por dos máquinas: M1 y M2. El tiempo de máquina requerido por cada unidad de producto así como el tiempo disponible de cada tipo de máquina se muestran en la siguiente tabla.

	Tiempo de Máquina 1 (minutos/unidad)	Tiempo de Máquina 2 (minutos/unidad)
Producto A	4	5
Producto B	3	8
Producto C	5	9
Producto D	6	2
Disponibilidad diaria	8 h	16 h

Los **precios de venta** son de 7,20 € para cada unidad de A. Para cada unidad del producto B el precio de venta es de 8,40 € cuando la cantidad fabricada es menor o igual a 300 unidades, y es de 6,00 €, cuando es superior a 300 unidades. Los precios de venta para los productos C y D son 7,80 € y 5,70 € respectivamente.

Por otro lado, los **costes de fabricación** ascienden a 1,80 € por unidad para el producto B, mientras que para A este coste es de 2,40 € por unidad si se fabrican menos de 200 unidades, y pasa a ser de sólo 1,20 € si se fabrican 200 unidades o más. En el caso de C y D, los costes de fabricación de cada unidad ascienden a 1,90 € y 1,10 € respectivamente.

a) Plantea un modelo de **Programación Lineal Entera** que proporcione el plan óptimo de producción que maximice el beneficio. (1.5 puntos)

b) Incluye en el modelo formulado en el apartado anterior las siguientes condiciones (**en todos los casos, indica claramente las modificaciones sobre las variables, restricciones y función objetivo y ten en cuenta que el modelo resultante ha de seguir siendo lineal**):

b.1) Deben producirse al menos tres tipos de producto. (0.75 puntos)

b.2) La producción de los productos A y C es incompatible. Es decir, no es posible producir en el plan óptimo unidades de A y C simultáneamente. (0.5 puntos)

etsinf Técnicas de Optimización - 2º Parcial (Mayo 2016)

b.3) Si se producen unidades del producto B, hay que producir unidades del producto D. (0.5 puntos)

b.4) Es posible realizar mejoras en la capacidad de las máquinas que implicarían un aumento de las horas disponibles con un cierto coste. Concretamente, el modelo debe incluir la posibilidad de aumentar la disponibilidad de la M1 en 2 horas adicionales lo que implicaría un coste de 30 € así como el aumento de la disponibilidad de la M2 en 1h adicional en cuyo caso el coste sería 15 €. Solo es posible ampliar una de las dos máquinas. (0.75 puntos)

(Puntuación: 4 puntos)

2 Dado el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} &\text{MAX } Z = 2X1 + X2 \\ &\text{s.a} \quad X1 - X2 \le 5 \\ &\qquad 4X1 + 3X2 \le 10 \\ &\qquad X1, X2 \ge 0 \text{ y } \textbf{enteras} \end{aligned}$$

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente (X3 es la variable de holgura de la primera restricción):

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	-¼	5/2
X1	0	¼	5/2
$c_B^t B^{-1}$	0	½	Z=5

a) Aplica el algoritmo de **Bifurcación y Acotación** hasta encontrar **una solución entera.** Utiliza como **estrategia** de **bifurcación** la de **mejor cota.** <u>En cada nodo empieza acotando inferiormente (≥) las variables</u>. Indica claramente el valor de las variables y la función objetivo en cada uno de los subproblemas. (3 puntos)

b) Dibuja el árbol de soluciones que se ha generado en el apartado anterior. Identifica los subproblemas calculados en el apartado anterior. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál habría sido el árbol de soluciones en caso de haber aplicado la técnica de la cota más reciente? (0.5 puntos)

(Puntuación: 4 puntos)

3 Una compañía agrícola dispone de 1.000 hectáreas de terreno para el cultivo de trigo y centeno. Por cada hectárea dedicada al cultivo de trigo, la compañía tiene un coste de 150 unidades monetarias (u.m) y se obtienen 2 toneladas de este cereal, mientras que cada hectárea dedicada al centeno tiene un coste de 200 u.m. y produce 3 toneladas. La próxima temporada se debe atender un pedido de 2.500 toneladas de cada uno de estos dos cereales. Dado que no dispone de suficientes hectáreas para poder atender este pedido mediante la cosecha de sus terrenos, la compañía va a recurrir al mercado para comprar las cantidades de trigo y centeno que precisa para cubrir exactamente esta demanda, con un coste de 200 u.m. por cada tonelada de trigo y 180 u.m. por cada tonelada de centeno. Los objetivos que se plantea la compañía se concretan en minimizar los costes totales y maximizar las hectáreas de terreno cultivadas.

a) Se desea obtener **soluciones eficientes**, en un contexto multiobjetivo. Por ello, **plantea el modelo multiobjetivo** que permita decidir cuántas hectáreas de trigo y de centeno deben ser cultivadas y cuántas toneladas de estos cereales deben ser adquiridas en el mercado, para minimizar los costes totales y maximizar las hectáreas de terreno cultivadas. [0,8 puntos]

b) **Plantea los modelos matemáticos** necesarios (indicando claramente función objetivo y restricciones) para obtener el punto ideal y el punto antiideal del problema multiobjetivo planteado en el apartado (a). Es decir, si tuvieras que calcular dichos puntos numéricamente, ¿qué modelos necesitarías resolver? [0,4 puntos]

c) La compañía decide flexibilizar sus objetivos y plantear un **modelo de programación por metas**. En particular, se desea que los costes totales no superen las 180.000 u.m. y que el terreno cultivado sea de al menos 800 hectáreas. **Modeliza** el problema de forma que las metas planteadas se cumplan tanto como sea posible. [0,8 puntos]

(Puntuación: 2 puntos)

etsinf Técnicas de Optimización - 2º Parcial (Mayo 2016)

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1:

a)

VARIABLES:

A1: unidades a fabricar de A con coste unitario 2.40€
A2: unidades a fabricar de A con coste unitario 1.20€
B1: unidades a fabricar de B con pvp 8.40€
B2: unidades a fabricar de B con pvp 6€
C: unidades a fabricar de C
D: unidades a fabricar de D
YA1: 1: Se aplicar el coste de 2.40€; 0: no se aplica
YA2: 1: Se aplica el coste de 1.20€; 0: no se aplica
YB1: 1: Se aplicar el PVP de 8.40€; 0: no se aplica
YB2: 1: Se aplica el coste de 6€; 0: no se aplica

FUNCIÓN OBJETIVO: Max Bº= P.V.P. – Coste = 7.2(A1+A2) + 8.4B1 + 6B2 + 7.8C + 5.70D- -(2.4A1 + 1.2A2 + 1.8(B1+B2) + 1.90C + 1.10D)

RESTRICCIONES:

[Cap_M1] $4(A1+A2) + 3(B1+B2) + 5C + 6D \leq 8 \cdot 60$ (minutos)
[Cap_M2] $5(A1+A2) + 8(B1+B2) + 9C + 2D \leq 16 \cdot 60$ (minutos)

[Costes_A] $A1 \leq 200\ YA1$
$200\ YA2 \leq A2 \leq M\ YA2$

$YA1 + YA2 = 1$

Nota1: Esta condición se podría modelizar con una sola v.Binaria que en uno de sus dos valores indicara que se aplica el primer coste y en el otro valor, que se aplica el segundo coste a la totalidad de las unidades producidas.

[PVP_B] $B1 \leq 300\ YB1$
$300\ YB2 \leq B2 \leq M\ YB2$

$YB1 + YB2 = 1$

Nota2: Esta condición se podría modelizar con una sola v.Binaria que en uno de sus dos valores indicara que se aplica el primer PVP y en el otro valor, que se aplica el segundo PVP a la totalidad de las unidades producidas.

[No_negatividad] $A1, A2, B1, B2, C, D \geq 0$

b.1)
VARIABLES:
Adicionalmente a las variables definidas en el apartado a), son necesarias las siguientes:
Y1: 1: se produce el producto A; 0: no se produce
Y2: 1: se produce el producto B; 0: no se produce
Y3: 1: se produce el producto C; 0: no se produce
Y4: 1: se produce el producto D; 0: no se produce

$m\,Y1 \le A1 + A2 \le M\,Y1$
$m\,Y2 \le B1 + B2 \le M\,Y2$
$m\,Y3 \le C \le M\,Y3$
$m\,Y4 \le D \le M\,Y4$

$Y1 + Y2 + Y3 + Y4 \ge 3$

Siendo M un valor arbitrariamente grande y m un valor pequeño que no restrinjan en ninguno de los dos casos las unidades a producir.

b.2)

además de las variables y restricciones definidas en b.1, añadir la restricción:

$$Y1 + Y3 \le 1$$

b.3)

además de las variables y restricciones definidas en b.1, añadir la restricción:

$$Y2 \le Y4$$

b.4)

VARIABLES adicionales:

Ym1: 1: se realiza la ampliación de M1; 0: caso contrario
Ym2: 1: se realiza la ampliación de M2; 0: caso contrario

FUNCIÓN OBJETIVO: Max Bº= P.V.P. – Coste = 7.2(A1+A2) + 8.4B1 + 6B2 + 7.8C + 5.70D- -(2.4A1 + 1.2A2 + 1.8(B1+B2) + 1.90C + 1.10D) – 30Ym1 – 15Ym2

RESTRICCIONES:

[Cap_M1] $4(A1+A2) + 3(B1+B2) + 5C + 6D \le 8\cdot 60 + 120Ym1$ (minutos)
[Cap_M2] $5(A1+A2) + 8(B1+B2) + 9C + 2D \le 16\cdot 60 + 60Ym2$ (minutos)

$Ym1 + Ym2 \le 1$

resto del modelo igual

EJERCICIO 2:
a)

P0:
X1=5/2; X2=0 Z=5

P1=P0(X1, X2, X3, X4) + X1>= 3; X1 = 3 + l1; l1≥ 0 , necesitamos incrementar X1

VNB en P0: X2, X4

$$Y_{X2} = B^{-1} a_{X2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

NO EXISTE SOLUCIÓN YA QUE NO EXISTE α_{ij} que permita incrementar el valor de X1 respecto al que toma en P0.

P2=P0(X1, X2, X3, X4) + X1<= 2; X1 = 2 – u1; 0 ≤ u1 ≤ 2, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X2, X4.

Tanto con X2 como con X4 podemos decrementar X1 hasta 2, lo tenemos que hacer de la forma más eficiente posible: Aplicamos el algoritmo Dual del Simplex y seleccionaremos la variable JE según:

$$\text{JE}: x_j \,/\, \left|\frac{C_{xj} - Z_{xj}}{y_{xj}}\right| = \left\{ \min_{1\le k\le n} \left|\frac{C_{xj} - Z_{xj}}{y_{xj}}\right| \;\middle|\; y_{xk} > 0 \right\}$$

$$C_{X2} - Z_{X2} = 1 - \left((0, 1/2)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -1/2$$

$$C_{X4} - Z_{X4} = 0 - \left((0, 1/2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1/2$$

$$\text{Min} \left|\frac{C_{xj} - Z_{xj}}{y_{xj}}\right| = \text{Min}\left(\frac{1/2}{3/4}; \frac{1/2}{1/4}\right) = 2/3 \rightarrow \textbf{JE = X2}$$

- Para decrementar el valor de X1 necesitamos αij>0, y después de aplicar el criterio de entrada del Dual se elige a X2 como variable a entrar en la base ya que decrementa x1 de la forma más eficiente→ **JE=X2. La variable IS=x1 que se reemplaza por u1.** El pivote del cambio de base será ¾.
- El modelo equivalente al reemplazar x1 por 2-u1 es el siguiente:

MAX Z= 2(2-u1) + X2		MAX Z= 4 - 2u1 + X2
s.a. 2 -u1-X2 ≤ 5	≡	-u1-X2 ≤ 3
4(2-u1) + 3X2 ≤ 10		-4u1+3X2 ≤ 2

En P2: VB: X3, X2; VNB: U1, X4

$$X_B = B^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + (0,1) \begin{pmatrix} 11/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 4 + 2/3 = 14/3 = 4.67$$

P2: Variables: U1, X2, X3, X4

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	1/3	11/3
X2	0	1/3	2/3
$c^t_B B^{-1}$			Z = 14/3

La solución en P2:
X1=2; x2=2/3; Z=14/3

SEGUIMOS A PARTIR DE P2:

P3= P2 (U1, X2, X3, X4) + X2 >= 1; X2 = 1 + l2; l2≥ 0

Necesitamos incrementar el valor de X2 respecto al que tiene en P2, por tanto debe entrar en la solución alguna variable no básica cuyo α_{ij} sea negativo.

VNB: U1, X4

$$Yu_1 = B^{-1} a\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

- Para incrementar el valor de X2 necesitamos αij<0, por tanto sólo nos sirve u1 → **JE=u1. La variable IS=x2 que se reemplaza por l2.** El pivote del cambio de base será -4/3
- El modelo equivalente al reemplazar x2 por 1+l2 es el siguiente:

MAX Z= 4 - 2u1 + (1+l2)	MAX Z= 5 - 2u1 + l2
s.a. -u1-(1+l2) ≤ 3 ≡	-u1-l2 ≤ 4
-4u1+3(1+l2) ≤ 2	-4u1+l2 ≤ -1

En P3 VB: X3, U1; VNB: X4, l2

$$X_B = B^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + 1 + (0,-2) \begin{pmatrix} 17/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = 5 - 2/4 = 18/4 = 4.5$$

etsinf Técnicas de Optimización - 2º Parcial (Mayo 2016)

P3: Variables: U1, l2, X3, X4

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	-1/4	17/4
U1	0	-1/4	1/4
$c^t_B B^{-1}$			Z = 18/4

La solución en P3 es: **X1=2-U1=7/4; X2=1; Z=4.5**

VOLVEMOS A P2:

P4= P2 (U1, X2, X3, X4) + X2 <= 0; X2 = 0 – U2; 0 ≤ U2 ≤ 0, necesitamos decrementar X2

Necesitamos decrementar el valor de X2 respecto al que tiene en P2, por tanto debe entrar en la solución alguna variable no básica cuyo α_{ij} sea positivo.

$$Yu_1 = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} ;\ Y_{X4} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

- Para decrementar el valor de X2 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X4 → **JE=x4. La variable IS=x2 que se reemplaza por u2.** El pivote del cambio de base será 1/3
- El modelo equivalente al reemplazar x2 por 0-u2 es el siguiente:

MAX Z= 2(2-u1) + (0-u2)	MAX Z= 4 - 2u1 - u2
s.a. 2 -u1-(0-u2) ≤ 5 ≡	-u1+u2 ≤ 3
4(2-u1) + 3(0-u2) ≤ 10	-4u1-3u2 ≤ 2

En P4: VB: X3, X4; VNB: U1, U2

$$X_B = B^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + (0,0) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

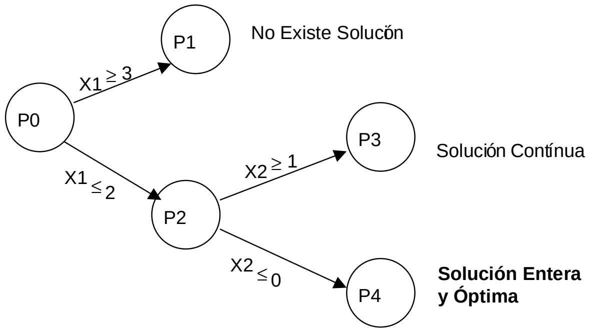
P4: Variables: U1, U2, X3, X4

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	0	3
X4	0	1	2
$c^t_B B^{-1}$			Z = 4

La solución en P4 es: X1=2; x2=0; Z=4

LA SOLUCIÓN DE P4 ES ENTERA POR TANTO **FIN.**

b)



c)

El árbol de soluciones en caso de haber aplicado la técnica de la cota más reciente continuaría a partir de P3 hasta llegar a una hoja. Entonces volvería al nodo padre y así hasta volver de nuevo a P2 y resolver P4 que como ya sabemos es una hoja del proceso de búsqueda.

Por tanto utilizando la misma numeración del apartado b), la secuencia sería: P0, P1, P2, P3, <subproblemas hasta llegar a hojas y volver a P2>, P4.

etsinf Técnicas de Optimización - 2º Parcial (Mayo 2016)

EJERCICIO 3:

a)

Definimos las variables de decisión siguientes:

hT = **hectáreas** dedicadas al trigo.

hC = **hectáreas** dedicadas al centeno.

tT = **toneladas** de trigo compradas en el mercado.

tC = **toneladas** de centeno compradas en el mercado.

La modelización queda como sigue:

Eff f(x)=[Coste; HaCultivadas]

O también: Eff = Max (-(150 hT + 200 hC + 200 tT + 180 tC) ; (hT + hC))

s.a: 2 hT + tT = 2500

3 hC + tC = 2500

hT + hC <= 1000

hT, hC, tT, tC >=0

b)

Para obtener el punto ideal y el punto anti-ideal del problema multiobjetivo planteado en a) hay que resolver el modelo matemático tantas veces como funciones objetivo a optimizar evaluando el resto de funciones objetivo. En este caso tenemos dos funciones objetivo. Por tanto, resolveremos el modelo matemático dos veces, cada vez con una de las funciones objetivo:

Min Z = 150 hT + 200 hC + 200 tT + 180 tC

hT + hC =HaCultivadas

2 hT + tT = 2500

3 hC + tC = 2500

hT + hC <= 1000

hT, hC, tT, tC, HaCultivadas >=0

Max W =hT + hC

150 hT + 200 hC + 200 tT + 180 Tc = Costes

2 hT + tT = 2500

3 hC + tC = 2500

hT + hC <= 1000

hT, hC, tT, tC, Costes >=0

El punto ideal se obtendrá con los valores de Z* y W* (valores óptimos de cada objetivo al resolver cada modelo de forma independiente) y el punto anti-ideal se obtendrá con HECTAREAS, COSTES (valores de la función objetivo que no se optimiza al resolver cada modelo).

c)

Definimos las variables desviación positiva y negativa asociadas a las metas de costes y de hectáreas cultivadas: P1, N1, P2, N2. Las desviaciones no deseadas en cada caso son P1 y N2 respectivamente.

El modelo de programación por metas es el siguiente:

MIN Z = P1 + N2

2 hT + tT = 2500

3 hC + tC = 2500

hT + hC <= 1000

150 hT + 200 hC + 200 tT + 180 tC – P1 + N1 = 180000

hT + hC – P2 + N2 = 800

hT, hC, tT, tC, P1, P2, N1, N2 >=0