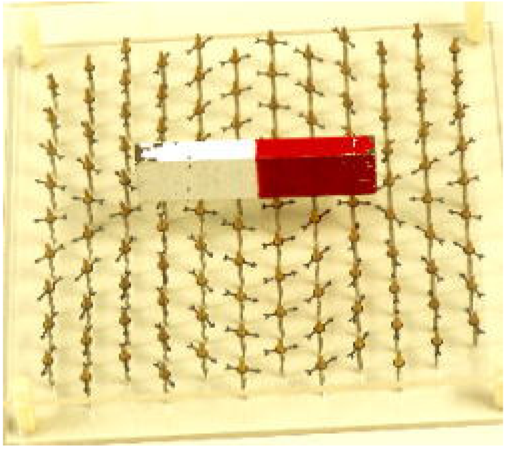
Capítulo 6

Fuerzas magnéticas



Objetivos

- Describir los efectos de un campo magnético sobre una partícula cargada en movimiento.
- Calcular la fuerza magnética sobre un elemento de corriente, una espira y un imán en un campo magnético.
- Hallar el momento magnético de una espira plana.
- Calcular el momento de las fuerzas que aparecen sobre una espira plana en un campo magnético uniforme.
- Explicar el efecto Hall.

6.1 Introducción

Si bien el conocimiento de las propiedades magnéticas de algunos minerales se remonta a la Grecia antigua, hasta el siglo XIII no se realiza ningún estudio sistemático de sus propiedades. En esta época, Pierre de Maricourt experimenta con imanes conociendo dos de sus propiedades:

- La existencia de dos polos magnéticos que se repelen si son iguales, y se atraen si son diferentes.
    - La persistencia de ambos polos tras la rotura del imán.

El uso de imanes para la orientación (brújulas) dio nombre a los polos de un imán dado que ambos polos se orientan según el eje norte–sur terrestre. Al polo que se orienta hacia el polo norte terrestre se le denomina polo norte. Del mismo modo ocurre con el polo sur.

Este comportamiento permitió identificar la tierra como un imán y, dado que los polos del mismo nombre se repelen y los de distinto nombre se atraen, una consecuencia de este hecho, es que en el polo norte geográfico se encuentra el polo sur magnético, y del mismo modo, en el polo sur geográfico se encuentra el polo norte magnético.

De igual forma que se trató en el campo eléctrico, a la región del espacio que posee propiedades magnéticas se le denomina **campo magnético** y una consecuencia observable de su existencia es que actúa sobre una carga en movimiento, tal como se tratará en el siguiente apartado.

6.2 Fuerza magnética sobre cargas en movimiento. Campo magnético

Cuando se estudiaron los fenómenos electrostáticos, se observó la fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ que un campo eléctrico $\vec{E}$ ejerce sobre una carga eléctrica q.

Sin embargo, la fuerza sobre la carga eléctrica q no depende solo de su posición sino también de su velocidad $\vec{v}$. Sumada a la fuerza eléctrica existe otra componente que denominaremos fuerza magnética, y que tiene las siguientes características:

- Sólo actúa si la carga está en movimiento
- La fuerza es perpendicular a la dirección de la velocidad de la carga
- Existe una dirección fija en cada punto tal, que si la carga se mueve en esa dirección, no experimenta ninguna fuerza
- El módulo de la fuerza es directamente proporcional al valor de la carga, al módulo de la velocidad y al módulo de una magnitud fija para cada punto del espacio

Esto nos lleva a definir el **campo magnético** $\vec{B}$ como la magnitud que reúne la dirección y módulo fijos en cada punto que hemos citado en las características de la fuerza magnética y por lo tanto a expresar la fuerza magnética como:

Fuerza magnética sobre una carga eléctrica en un campo magnético	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ Ecuación 6-1

Hay que recordar que $\vec{v} \times \vec{B}$ es un producto vectorial, por lo que la fuerza magnética tendrá las siguientes características:

- Su resultado es un vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican, es decir, a $\vec{v}$ y a $\vec{B}$.

- Su módulo vale $F = q\, v\, B$ senα, donde α es el ángulo que forman $\vec{B}$ y $\vec{v}$. De aquí que haya una dirección de fuerza nula, cuando la carga se mueve paralela al campo magnético.
- Su sentido se puede obtener con la regla del tornillo o de la mano derecha.
- Si la carga es negativa, el sentido de la fuerza es el contrario.

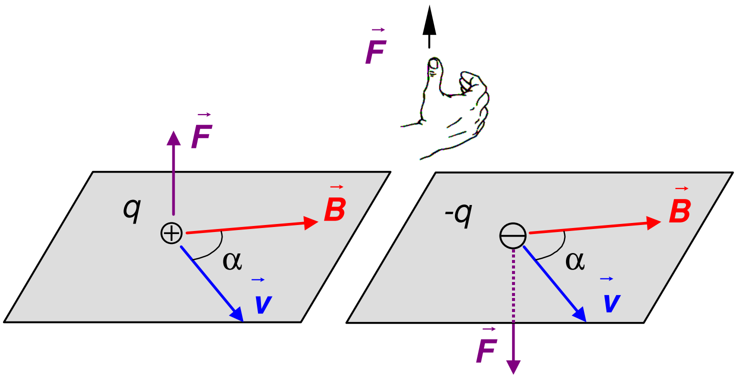
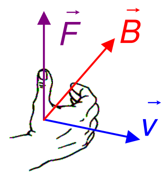


Figura 6-1. La fuerza magnética es perpendicular al plano que contiene al vector velocidad y al vector campo magnético

La regla de la mano derecha consiste en situar la mano de modo que los 4 dedos señalen el giro que debería realizar el primer vector que se multiplica si se dirigiera a superponerse con el segundo por el camino más corto; entonces el pulgar señalará el resultado.



La unidad en el Sistema Internacional del campo magnético $\vec{B}$ es el **tesla** (T), que, utilizando la Ecuación 6-1, se dice que *en un punto del espacio hay un campo magnético de un tesla, si al moverse una carga eléctrica puntual de un culombio perpendicularmente al campo magnético con una velocidad de un metro por segundo, experimenta una fuerza de un newton*. Para la mayoría de aplicaciones, 1T es una unidad demasiado grande, pues los campos magnéticos usuales son inferiores al mT, por lo que también se utiliza el gauss (G) que equivale a 1 G = 10^{-4} T.

Como ejemplo, el campo magnético terrestre vale aproximadamente 0,6 G = 60 µT, y el que se utiliza en espectroscopía de resonancia magnética nuclear del orden de 0.5 a 30T.

Al ser un campo vectorial, el campo magnético se puede visualizar mediante líneas de campo magnético, cuyo vector desplazamiento $d\vec{r}$ es pararelo a $\vec{B}$ en cada punto, como las representadas en la Figura 6-2. Cabe destacar dos características de las líneas de campo magnético:

- Las líneas de $\vec{B}$ son perpendiculares a la fuerza magnética
- Las líneas de $\vec{B}$ son cerradas, ya que no existen fuentes ni sumideros de campos magnéticos

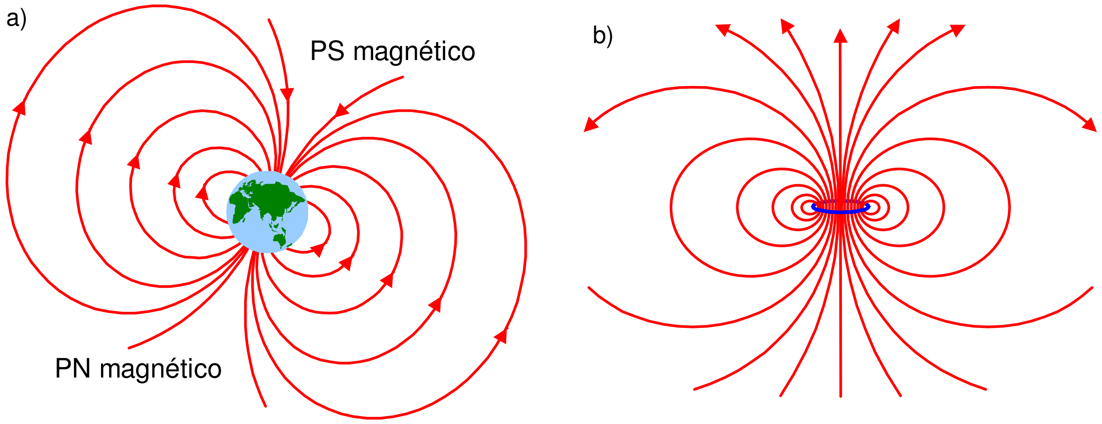


Figura 6-2. Líneas del campo magnético en las cercanías de la Tierra (a) y líneas del campo magnético producidas por una corriente circular (b)

Así pues, la fuerza total que actúa sobre una carga q con la velocidad $\vec{v}$ es la superposición de la fuerza eléctrica y la fuerza magnética,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \qquad \text{Ecuación 6-2}$$

llamada **fuerza de Lorentz** y expresada en función del campo eléctrico $\vec{E}$ y del campo magnético $\vec{B}$.

Movimiento de cargas puntuales en campos electromagnéticos uniformes

Caso a) Si una carga puntual q lleva una velocidad $\vec{v}$ paralela al campo magnético uniforme $\vec{B}$, la fuerza magnética sobre la carga será 0, por lo que la carga describirá un Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU).

Caso b) A continuación vamos a considerar el movimiento de una carga puntual q que entra en una región del espacio con un campo magnético uniforme $\vec{B}$ y con una velocidad $\vec{v}$ perpendicular al campo magnético, sin ningún campo eléctrico. Estará sometida, a una fuerza perpendicular a la velocidad, cuyo valor es $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ y módulo $F = qvB$. El resultado de la actuación de una fuerza perpendicular a la velocidad en todo momento, es una trayectoria circular de radio r.
Llamando m a la masa de la partícula, la fuerza resultante es, según el segundo principio de la dinámica, $\vec{F} = m\vec{a}$, y por tratarse de una trayectoria circular, la aceleración únicamente tendrá compo-

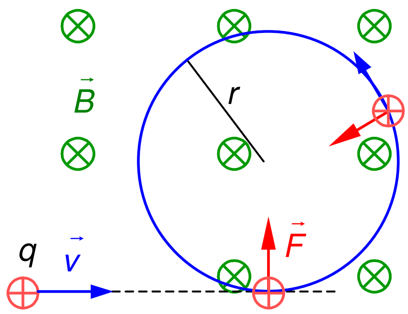


Figura 6-3. Partícula cargada moviéndose en un campo magnético entrante y perpendicular al plano del papel[1]

[1] Los vectores perpendiculares al plano del papel se representan con el símbolo $\odot$ si son salientes, y con el símbolo $\otimes$ si son entrantes.

nente normal a la trayectoria con módulo $a_N = \frac{v^2}{r}$. De modo que tendremos $qvB = \frac{mv^2}{r}$, y despejando el radio de la trayectoria, $r = \frac{mv}{qB}$, y utilizando la definición de velocidad angular $\omega = v/r$, obtendremos que la partícula gira con una velocidad angular $\omega = \frac{qB}{m}$ independiente del radio, siguiendo un Movimiento Circular Uniforme (MCU).

Caso c) Cuando la partícula tiene una velocidad que no es totalmente perpendicular o paralela al campo, y posee una componente de la velocidad en la misma dirección que el campo, esta describe una trayectoria helicoidal, pues al mismo tiempo gira en una trayectoria circular como consecuencia de la componente perpendicular (MCU) y mantiene un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) por la componente de la velocidad paralela al campo.

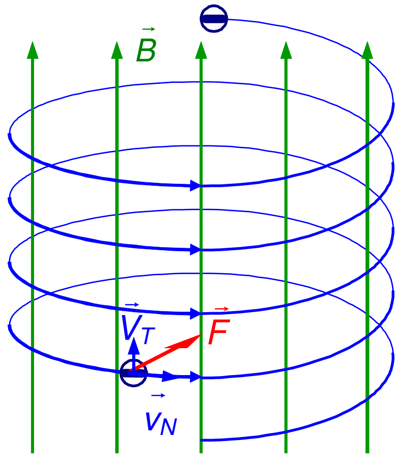


Figura 6-4. Partícula cargada negativamente moviéndose helicoidalmente en un campo magnético

Selector de velocidades

En un selector de velocidades, se introducen partículas cargadas producidas a diferentes velocidades. De lo que se trata, es de seleccionar una velocidad única, o una estrecha banda de velocidades, separando aquellas partículas que no posean la velocidad deseada. Para ello, las partículas con una amplia gama de velocidades, rápidas, lentas, etc. se introducen en una región con un campo eléctrico y un campo magnético perpendiculares entre sí, tal como muestra la Figura 6-4. El campo eléctrico de la figura produce una fuerza dirigida hacia abajo, cuyo valor es independiente de la velocidad, y de módulo qE. El campo magnético produce (siempre respecto de la figura) una fuerza dirigida hacia arriba, que en cambio, sí depende de la velocidad, siendo de módulo qvB. De este modo, la fuerza dirigida hacia arriba es directamente proporcional a la velocidad, por lo que las partículas lentas se verán desviadas hacia abajo (qvB vale poco), mientras que las partículas rápidas serán desviadas hacia arriba (qvB vale mucho). Aquéllas que cumplan que $qE = qvB$, no serán desviadas, y emergerán horizontalmente. Se tiene pues, un dispositivo que "clasifica" las partículas por su velocidad, no produciendo ningún desvío en las que cumplan que la velocidad valga E/B.

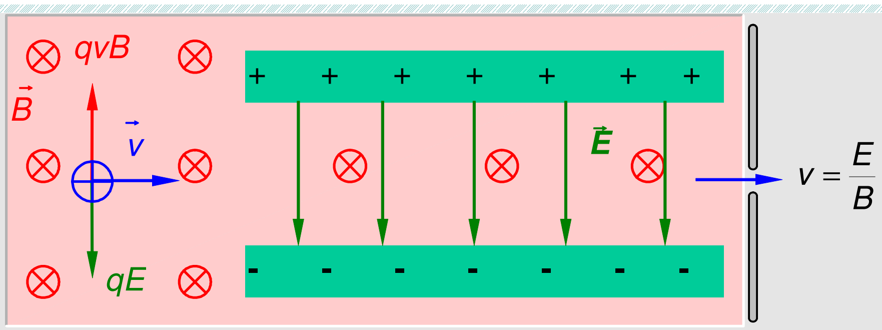


Figura 6-4. Partículas cargadas en un selector de velocidades. No se desvían las que cumplen que $v = E/B$

Variando el campo eléctrico aplicado, como la velocidad de las no desviadas es directamente proporcional al campo eléctrico, se consigue aumentar o disminuir la velocidad de las partículas no desviadas. Se tiene así un dispositivo, en el que, gobernando el valor del campo eléctrico aplicado exteriormente, se producen partículas más o menos rápidas.

Ejemplo 6-1

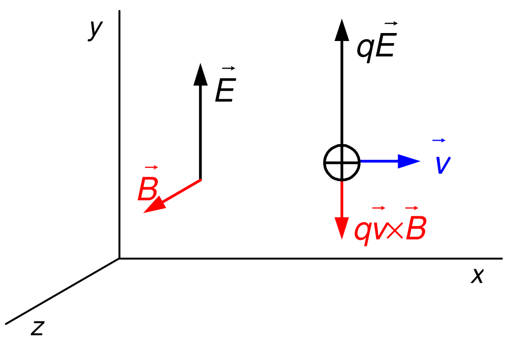
Un protón se mueve en la dirección del eje x y sentido positivo en una región en que el campo eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí. Si el campo eléctrico vale $3\,\vec{j}$ kV/m, y el campo magnético $50\,\vec{k}$ mT. ¿Cuál es la velocidad de los protones que no se desvían? Si los protones se mueven a una velocidad inferior, ¿hacia donde se desvían?

Solución

Los protones no desviados son aquéllos que experimentan una fuerza eléctrica qE igual a la fuerza magnética qvB, por lo que igualando y despejando:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{3 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-3}} = 60 \text{ km/s}$$

Si la velocidad es inferior a este valor, la fuerza magnética qvB, será menor que la fuerza eléctrica, y por tanto se desviarán hacia el eje y positivo.



6.3 Fuerza sobre un elemento de corriente

Como se ha tratado en el apartado anterior, sobre las cargas en movimiento que se mueven en un campo magnético actúa una fuerza magnética, por lo que sobre un conductor por el que circula una corriente eléctrica situado en una región del espacio con un campo magnético, también actuará una fuerza magnética.

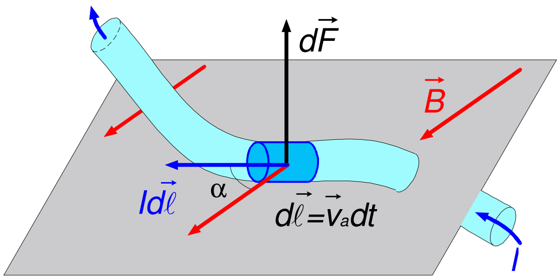


Figura 6-5. Fuerza sobre un elemento de corriente

Considérese un conductor por el que circula una corriente *I*, situado en una región con un campo magnético $\vec{B}$, tal como se muestra en la Figura 6-5. En un intervalo de tiempo *dt*, las cargas eléctricas se desplazan a lo largo del conductor una longitud $d\vec{\ell}$ igual a su velocidad de arrastre por el tiempo

$$d\vec{\ell} = \vec{v}_a dt$$

Por lo que la fuerza elemental $d\vec{F}$ que actúa sobre el elemento de longitud $d\vec{\ell}$ que contiene una carga elemental *dq*, vale $d\vec{F} = dq(\vec{v}_a \times \vec{B})$. De este modo, sustituyendo en la Ecuación 6-1, se obtiene

$$d\vec{F} = Idt(\vec{v}_a \times \vec{B}) = I(d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

Al producto $Id\vec{\ell}$ se le denomina **elemento de corriente**. Hay que subrayar esta expresión proporciona únicamente la fuerza elemental que actúa sobre un elemento de corriente. Para calcular la fuerza sobre corrientes cualesquiera, habrá que integrar esta expresión.

Fuerza sobre un conductor que transporta carga en un campo magnético	$\vec{F} = I\int_{\vec{\ell}_A}^{\vec{\ell}_B} \left(d\vec{\ell} \times \vec{B}\right)$ Ecuación 6-3

En el caso de **corrientes en un campo magnético uniforme**, el campo magnético puede salir fuera de la integral, de modo que esta expresión se reduce a,

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I\left(\int_{\vec{\ell}_A}^{\vec{\ell}_B} d\vec{\ell}\right) \times \vec{B} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

siendo $\vec{\ell}$ el vector que une el punto inicial de la corriente con el punto final, tal como muestra la Figura 6-6.

Fuerza sobre un conductor que transporta carga en un campo magnético uniforme	$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$ Ecuación 6-4

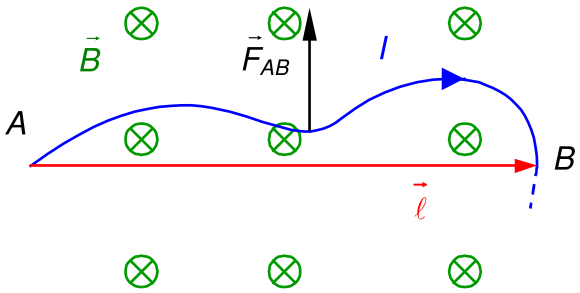
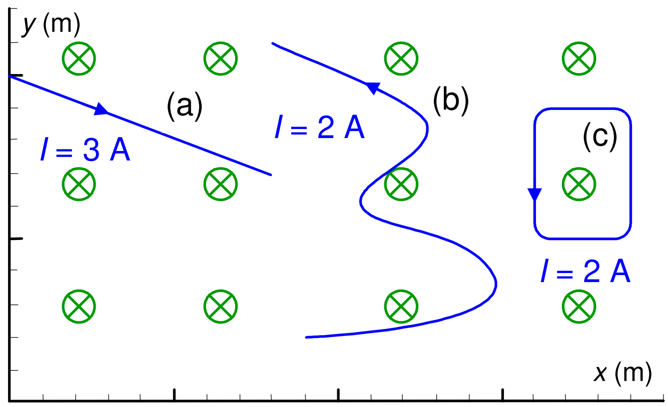


Figura 6-6. En el interior de un campo magnético uniforme no importa la forma del conductor

Una consecuencia de este resultado es que la fuerza sobre una corriente cerrada en un campo magnético uniforme es nula, por ser el vector $\vec{\ell}$ nulo.

Ejemplo 6-2

Calcula la fuerza que actúa sobre las corrientes de la figura situadas en un campo magnético de $-2\vec{k}$ T.



Solución

a) La corriente va de (0,10) a (8,7), por lo que sustituyendo en la Ecuación 6-4:

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B} = 3\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 48\vec{j} \text{ N}$$

b) Del mismo modo, independientemente de la forma del conductor, sólo se considera el punto inicial y el punto final.

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -36\vec{i} - 4\vec{j} \text{ N}$$

c) Por tratarse de una corriente cerrada en un campo magnético uniforme, la fuerza neta es cero.

6.4 Acción de un campo magnético uniforme sobre una espira plana. Momento magnético

Un caso particular de fuerza sobre una corriente consiste en una espira plana por la que circula una corriente eléctrica y que está situada en un campo magnético. Vamos a considerar una espira rectangular como la de la Figura 6-7 de lados *a* y *b* por la que circula una corriente *I*, y se encuentra en un campo magnético uniforme *B*. La fuerza sobre cada lado viene dado por la Ecuación 6-4. Por tratarse de un campo magnético uniforme, la resultante de las fuerzas es nula, pues puede verse como las fuerzas se anulan por parejas.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad \vec{F}_3 = -\vec{F}_4 \qquad \sum \vec{F} = 0$$

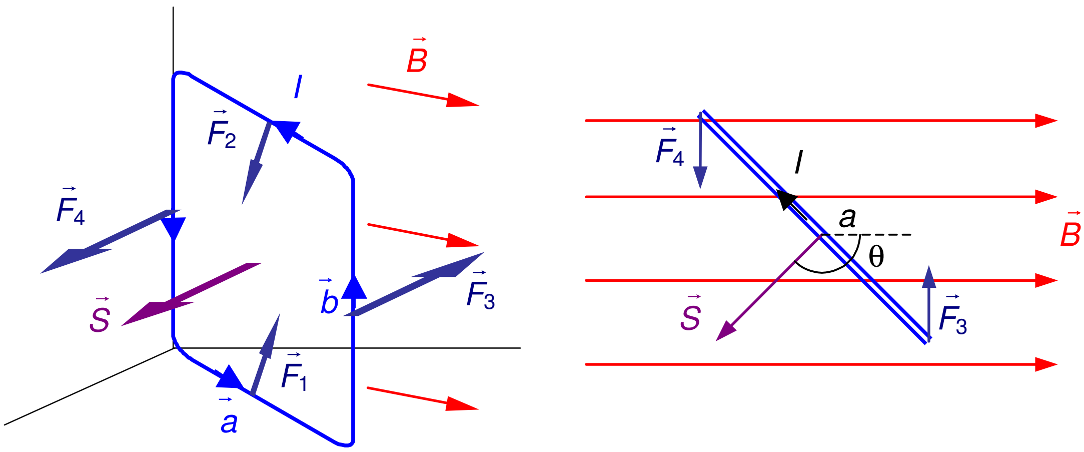


Figura 6-7. Espira rectangular de superficie *S*, en un campo magnético *B*

Aunque la fuerza neta es nula, la espira está sometida a dos pares de fuerzas[2], ya que puede observarse como F_3 y F_4 constituyen dos fuerzas paralelas, de sentido contrario y en diferentes líneas de acción, al igual que F_1 y F_2. Hay que recordar que así como el resultado de la acción de una fuerza neta sobre un sistema es una aceleración, el resultado de la acción de un par de fuerzas sobre un sistema es una aceleración angular, y por lo tanto, la espira girará por la acción de los dos pares. El momento total de las fuerzas, $\vec{M}$, que actúa sobre la espira es igual a la suma de los momentos ejercidos por los dos pares de fuerzas. Para el par constituido por F_3 y F_4:

$$\vec{M}_{34} = \vec{a} \times \vec{F}_3$$

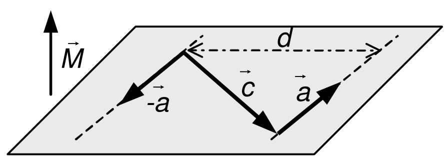
---

[2] Par:

Se denomina par al conjunto de dos vectores deslizantes de igual módulo y dirección, sentido opuesto y diferente línea de acción. El momento de un par es independiente del punto respecto del que se calcule y su valor es:

$$\vec{M} = \vec{c} \times \vec{a}$$

donde $\vec{c}$ es un vector que va de una línea de acción a otra. Su módulo es $M = d \cdot a$, donde *d* es la distancia entre las dos líneas de acción. El sentido de $\vec{M}$ viene dado por la regla del tornillo aplicada al par de vectores.



y para el par F_1 y F_2:

$$\vec{M}_{12} = \vec{b}\times\vec{F}_2 = I\left(\vec{b}\times\left(-\vec{a}\times\vec{B}\right)\right)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}\vec{M} = \vec{M}_{34} + \vec{M}_{12} &= I\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{B}\right) - \vec{b}\times\left(\vec{a}\times\vec{B}\right)\right) = \\ &= I\left(\left(\vec{a}\cdot\vec{B}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{B} - \left(\vec{b}\cdot\vec{B}\right)\vec{a} + \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{B}\right) = \\ &= I\left(\left(\vec{a}\cdot\vec{B}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{B}\right)\vec{a}\right) = I\,\vec{B}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right) = I\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{B}\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso del doble producto vectorial definido en el Apéndice A.

Sustituyendo el producto $\vec{a}\times\vec{b}$ por el vector superficie, definido como un vector de módulo *ab*, dirección perpendicular al plano de la espira, y sentido determinado por la regla de la tornillo aplicado en el sentido de giro de la corriente, obtenemos finalmente:

$$\vec{M} = I\vec{S}\times\vec{B}$$

Al producto de la intensidad por el vector superficie se le denomina ***momento magnético*** de la espira.

$$\vec{m} = I\vec{S} \qquad \text{y se mide en Am}^2 \qquad \text{Ecuación 6-5}$$

El **momento del par** o **momento de las fuerzas** queda finalmente:

$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} \qquad \text{y se mide en Nm} \qquad \text{Ecuación 6-6}$$

Por lo tanto, cuando el momento magnético o el vector superficie de la espira sean paralelos al campo magnético aplicado, la espira estará en equilibrio dinámico (equilibrio estable si son paralelos y equilibrio inestable sin son antiparalelos). Si la espira se coloca con su vector superficie dirigido en otra dirección distinta, aparecerá un par que tenderá a alinear el vector superficie con el vector campo magnético.

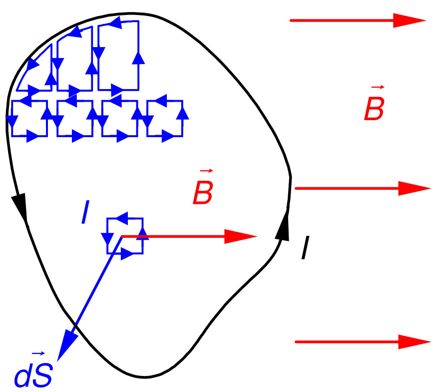


Figura 6-8. Momento de fuerza sobre una espira de forma irregular

Se ha considerado que la espira es rectangular. Sin embargo, este resultado puede extrapolarse a cualquier espira plana de forma arbitraria, sin más que considerar la espira de forma arbitraria como un conjunto de espiras elementales rectangulares de área dS, y recorridas cada una de ellas por una corriente I.

Como puede apreciarse en la Figura 6-8, donde se juntan dos espiras, las corrientes adyacentes tienen sentidos contrarios por lo que se anulan. Del mismo modo ocurre con la fuerza sobre esos segmentos. Con esta idea, puede considerarse que cada espira elemental tiene un momento magnético $d\vec{m} = Id\vec{S}$, y el momento magnético total $\vec{m} = \int Id\vec{S} = I\vec{S}$, pues al sumar las espiras elementales, las corrientes en los lados adyacentes se anulan, quedando sólo la intensidad periférica I y su superficie $\vec{S}$.

Del mismo modo, el momento del par que actúa sobre la espira es la suma de los momentos elementales sobre cada espira elemental, por tanto, tendremos $\vec{M} = \int d\vec{M} = \int d\vec{m} \times \vec{B}$, y si el campo es uniforme y la espira plana:

$$\vec{M} = \int d\vec{m} \times \vec{B} = \left(\int d\vec{m}\right) \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

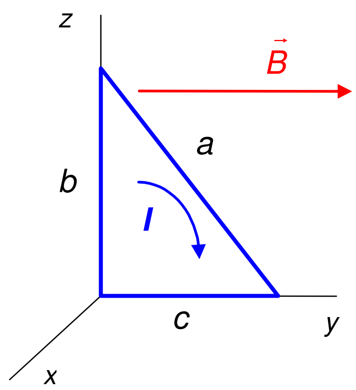
Queda así demostrado que el momento magnético de una espira y el momento de fuerza sobre ella es independiente de su forma, con la única condición de que sea plana.

Todo lo dicho anteriormente, es aplicable también a una bobina de N vueltas, pues está constituida por N espiras. En este caso el momento magnético de la bobina es $\vec{m} = NI\vec{S}$, y el momento del par $\vec{M} = NI\vec{S} \times \vec{B}$.

Ejemplo 6-3

Sea la espira de la figura de lados *a*, *b* y *c*, por la que circula una intensidad *I* en el sentido indicado, situada en el interior de un campo magnético $\vec{B} = B\vec{j}$. Halla:

a) Fuerzas magnéticas sobre los lados de la espira.
b) Momento magnético de la espira.
c) Momento resultante de las fuerzas sobre la espira.



Solución

a) La fuerza sobre un conductor que se halla en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ de longitud $\vec{\ell}$ por el que circula una corriente I vale $\vec{F} = I\left(\vec{\ell} \times \vec{B}\right)$. Por tanto en cada segmento de corriente tendremos:

$$\vec{F}_a = I\left(\vec{a} \times \vec{B}\right) = I\left(\left(-b\vec{k} + c\vec{j}\right) \times B\vec{j}\right) = IbB\vec{i}$$

$$\vec{F}_b = IbB\left(\vec{k} \times \vec{j}\right) = -IbB\vec{i}$$

$$\vec{F}_c = IbB\left(-\vec{j} \times \vec{j}\right) = 0$$

b) El momento magnético de una espira se define como $\vec{m} = I\vec{S}$. Así pues:

$$\vec{m} = I\vec{S} = I\frac{1}{2}cb(-\vec{i}\,) = -\frac{1}{2}Icb\vec{i}$$

c) Y el momento de las fuerzas vale $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = -\frac{1}{2}Icb\vec{i} \times B\vec{j} = -\frac{1}{2}IcbB\vec{k}$$

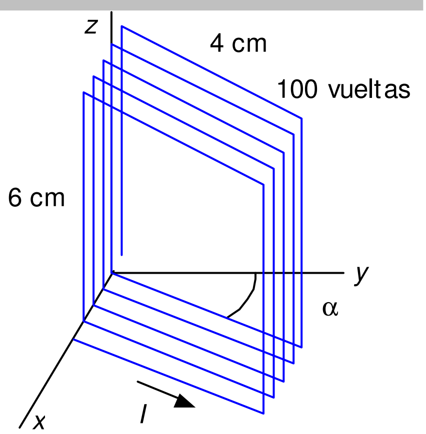
Por tanto, el momento de fuerza tenderá a hacer girar a la espira alrededor del eje OZ (en sentido horario visto desde arriba).

Ejemplo 6-4

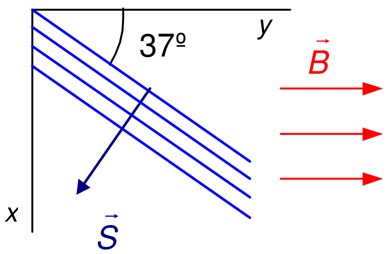
Una bobina consta de 100 espiras rectangulares de 6x4 cm^2 de lado, y la recorre una corriente de 2,5 A. Se encuentra orientada como muestra la figura, formando el plano de las espiras 37º con el eje *y*.

a) ¿Cuál es el momento magnético de la bobina?

b) ¿Cuál es el momento del par que actúa sobre la bobina si se aplica un campo magnético de 2 T en la dirección del eje *y* en sentido positivo?



Solución



a) El vector superficie es perpendicular al plano de las espiras. El sentido se obtiene aplicando la regla del tornillo al giro de la corriente.

$$\vec{S} = S(\cos 37\vec{i} - sen 37\vec{j}) = 24(0.8\vec{i} - 0.6\vec{j})\text{cm}^2$$

y el momento magnético

$$\vec{m} = NI\vec{S} = 250 \cdot 24 \cdot 10^{-4}(0.8\vec{i} - 0.6\vec{j}) = (0.48\vec{i} - 0.36\vec{j})\,\text{Am}^2$$

b) $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}48 & -0{,}36 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}96\vec{k}\,\text{Nm}$

Por lo tanto, el par de fuerzas tenderá a hacer girar la bobina en sentido antihorario (vista desde arriba)

Motor eléctrico

El motor eléctrico está constituido por un conjunto de espiras que pueden girar alrededor de un eje fijo en un campo magnético. Cuando circule corriente por las espiras, sobre éstas actuará un par de fuerzas cuyo momento *M*, depende del número de espiras, *N*, de la intensidad de la corriente *I*, de la superficie de éstas, *S* del campo magnético *B*, y del ángulo formado entre $\vec{S}$ y $\vec{B}$.

El par de fuerzas tenderá a situarlas con su vector superficie paralelo al campo magnético, y el sentido del par cambiará cada vez que las espiras pasen por la posición de equilibrio en α = 0, por lo que el resultado sería un movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio, hasta que el par de rozamiento con el eje las detuviera.

Para conseguir un movimiento circular, es necesario cambiar el sentido de la corriente cada vez que las espiras pasen por la posición de equilibrio, de tal manera que el par no se invierta. Esto se consigue con un contacto deslizante (escobilla) entre las espiras y el conductor de corriente. De este modo, cada vez que las espiras pasan por la posición de equilibrio, el sentido de la corriente por éstas se invierte, y el sentido del par, y por tanto el sentido del giro no cambia.

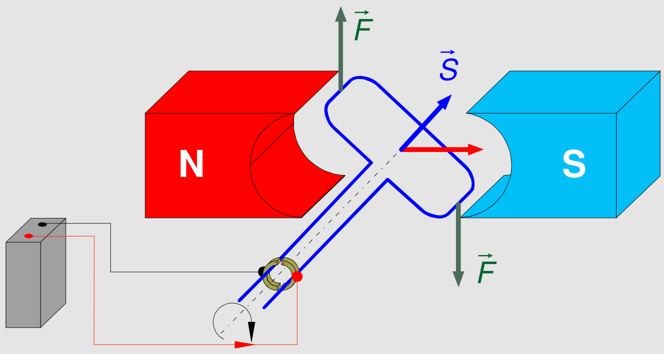
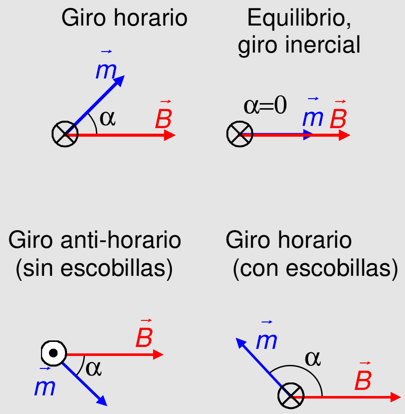
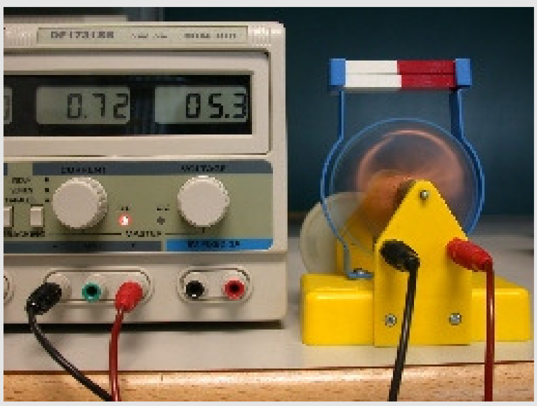


Figura 6-9. Motor eléctrico. El campo magnético no cambia de dirección, y el vector superficie describe un giro completo

$$|M| = NISB\operatorname{sen}\alpha$$





El momento medio a lo largo de media vuelta se puede calcular como

$$M_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} NISBsen\,\alpha\, d\alpha = \frac{2NISB}{\pi}$$

Por lo que la potencia producida por el motor es

$$P = M_m\omega = \frac{2NISB}{\pi}\omega$$

Lo que nos permite calcular la fuerza contraelectromotriz del motor, asumiendo que no existen pérdidas mecánicas, como el trabajo convertido en energía mecánica por unidad de carga

$$\varepsilon' = \frac{dW}{dq} = \frac{dW}{dt}\frac{dt}{dq} = \frac{P}{I} = \frac{2NS}{\pi}B\omega = kB\omega$$

donde *k* es una constante que depende de la geometría del motor, $k = \frac{2NS}{\pi}$, y por lo tanto la f.c.e.m. del motor es proporcional a *B* y ω.

6.5 Efecto Hall

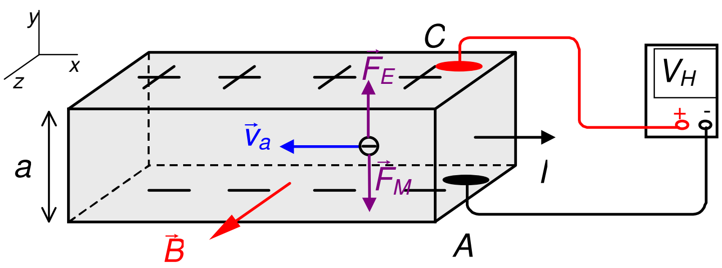


Figura 6-10. Efecto Hall en un conductor

Por un conductor por el que circula una corriente en presencia de un campo magnético aparece una fuerza sobre el conductor como se analizó en el apartado 6.3. Esta fuerza sobre el conductor es la suma de las fuerzas ejercidas sobre cada una de las cargas en movimiento y que siguen la Ecuación 6-4. Dado que las cargas son libres para desplazarse en el interior del conductor, la acción resultante de estas fuerzas dará lugar al efecto Hall que se describe a continuación:

Consideremos un tramo de conductor como el de la Figura 6-10 por el que circula una intensidad *I*. Se aplica un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular a esta intensidad. Como consecuencia, y de acuerdo con la Ecuación 6-4, aparece una fuerza perpendicular al campo magnético y al movimiento de las cargas que provoca que éstas se desplacen lateralmente a su sentido de la marcha y se concentren en uno de los laterales del conductor. Esta acumulación de carga en un lateral supondrá la aparición de un campo eléctrico en sentido transversal que actuará sobre las cargas en movimiento con una fuerza contraria a la fuerza magnética. En el equilibrio, ambas fuerzas se igualarán. Por otra parte, relacionada con este campo eléctrico existe una diferencia de potencial en sentido transversal que se denomina **tensión de Hall** y que es medible experimentalmente.

Si se realiza la experiencia, tal como se muestra en la Figura 6-10, son datos de entrada en la misma el valor y sentido de la intensidad de la corriente eléctrica y el vector campo magnético. Como dato de salida se obtiene el valor de la tensión de Hall (V_H), así como su polaridad.

Si el material es un conductor, la polaridad obtenida es la de la Figura 6-10, lo que indica que la carga que circula es negativa, luego los portadores son electrones (queda para el estudiante verificar que si los portadores tuviesen carga positiva la polaridad de la tensión de Hall sería la opuesta).

El valor de la diferencia de potencial de Hall puede obtenerse a partir de la fuerza magnética sobre una carga móvil:

$$\vec{F}_M = q\vec{v}_a \times \vec{B},$$

y por la fuerza eléctrica producida por el campo eléctrico transversal creado por la redistribución de la carga eléctrica debida a la acción del campo magnético.

Una vez establecido el equilibrio, suponiendo una distribución uniforme de la carga en las caras laterales del conductor y despreciando el hecho de que esta distribución no sea indefinida, el valor del campo eléctrico será similar al existente en el interior de un condensador plano y, por lo tanto, el valor de la fuerza eléctrica que actúa sobre un electrón que circula en el interior del conductor tendrá una expresión:

$$\vec{F}_E = q\vec{E},$$

En el equilibrio, ambas fuerzas deben anularse, por lo que

$$q\vec{v}_a \times \vec{B} + q\vec{E} = 0 \qquad \vec{E} = -\vec{v}_a \times \vec{B}$$

La tensión de Hall es la diferencia de potencial entre el punto *C* y el *A* de la Figura 6-10, que viene dada por:

$$V_H = -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = v_a B a$$

La tensión de Hall es directamente proporcional a la velocidad de arrastre, al campo magnético aplicado y a la anchura del conductor.	$V_H = v_a B a$

En el caso concreto del conductor de la figura, la velocidad de los electrones es $\vec{v}_a = -v_a\vec{i}$, el campo magnético $\vec{B} = B\vec{k}$, por lo que

$$\vec{E} = -\vec{v}_a \times \vec{B} = -v_a B(-\vec{i} \times \vec{k}) = -v_a B\vec{j}$$

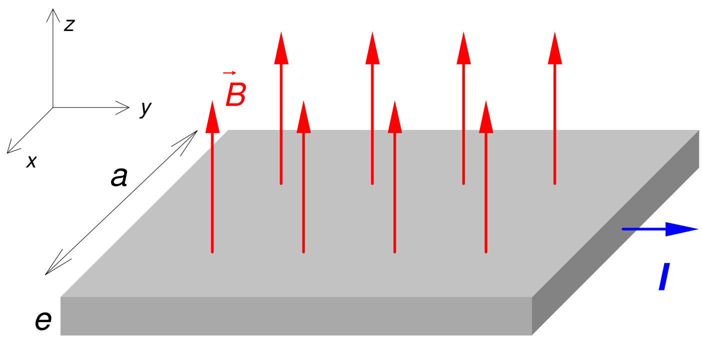
y V_H se establece en el eje *Y* con valor positivo en el punto *C*, en la Figura 6-10.

La existencia de esta diferencia de potencial se pone de manifiesto experimentalmente, al colocar un voltímetro preciso entre los puntos *A* y *C*. Esta diferencia de potencial suele ser del orden de microvoltios. En el caso que estamos considerando y conectando el positivo del voltímetro al punto *C* y el negativo al punto *A*, el voltímetro nos proporcionaría una lectura positiva; es decir, la tensión en el punto *C* es mayor que la tensión en el punto *A*.

Se ha analizado el efecto Hall para una conducción basada en electrones, que son los portadores de carga responsables de la conducción en los conductores metálicos y en los semiconductores tipo *n*. En los semiconductores tipo *p*, los portadores mayoritarios son huecos con carga positiva, por lo que la situación cambia en lo relativo al sentido de movimiento de los portadores, y por tanto la polaridad de la tensión Hall resultante.

Ejemplo 6-5

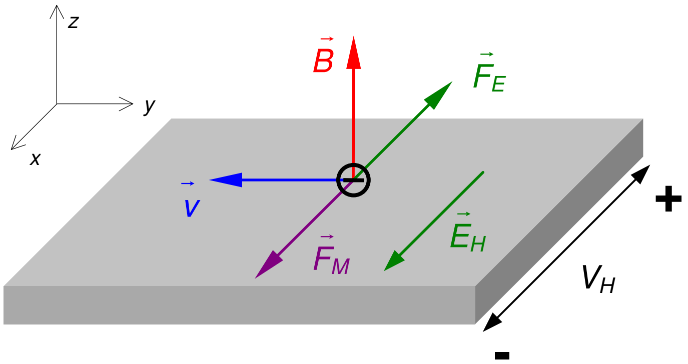
Una tira de plata de 5 cm de anchura y 0,5 mm de espesor se coloca en un campo magnético de 2 T tal como se indica en la figura. ¿Cuál es la diferencia de potencial Hall si se hace circular una intensidad de 200 A por ella, suponiendo que hay un promedio de 0,65 electrones libres por átomo?
Datos: Densidad de la plata 10,5 g/cm^3; masa molar de la plata 107,9 g/mol.



Solución

Al moverse una carga en un campo magnético, aparece una fuerza magnética cuyo valor es: $\vec{F}_M = q(\vec{v}\times\vec{B})$, por tanto, sobre los electrones actuará una fuerza magnética (en el eje *x*) que provocará una separación de cargas. Esta separación de cargas producirá un campo eléctrico interior (de lo contrario, no habría equilibrio, y la separación continuaría indefinidamente). De modo que:

$$\vec{F}_M + \vec{F}_E = 0 \quad \rightarrow \quad q(\vec{v}\times\vec{B}) = -q\vec{E}$$



El campo eléctrico que aparece se denomina campo eléctrico Hall, y vale por lo tanto:

$$V_H = E_H\, a$$

Hay que conocer pues, la velocidad con que avanza la nube electrónica por el sólido (no la velocidad individual de un electrón). Esta velocidad se denomina velocidad de arrastre y está relacionada con la densidad de corriente, como ya se trató en temas anteriores del modo: $\vec{v}_a = \dfrac{\vec{J}}{n_e q}$.

n_e es la concentración de electrones (número de electrones por unidad de volumen), que vale:

n_e = electrones libres por átomo · átomos/m^3 = 0,65·cantidad de sustancia (n)·constante de Avogadro = 0,65 n N_A = 0,65 $\frac{m}{A_r}N_A$.

$$n_e = 0{,}65\frac{10500}{0{,}1079}6{,}022\cdot10^{23} = 3{,}81\cdot10^{28} \text{ electrones/m}^3.$$

La densidad de corriente es:

$$J = I/S = 200/2{,}5\cdot10^{-5} = 8 \text{ MA/m}^2 \qquad \vec{J} = 8\vec{j}\ \text{ MA/m}^2$$

Y la velocidad de arrastre de los electrones:

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{J}}{n_e q} = \frac{8\cdot10^6\vec{j}}{3{,}81\cdot10^{28}\left(-1{,}602\cdot10^{-19}\right)} = -1{,}31\vec{j}\ \text{ mm/s}$$

El signo negativo de la velocidad es debido a que, al tratarse de cargas negativas, se mueven en sentido contrario a la corriente.

$\vec{E}_H = -\vec{v}_a\times\vec{B}$ = $1{,}31\vec{j}\times2\vec{k} = 2{,}62\vec{i}$ mN/C, que provocará una diferencia de potencial:

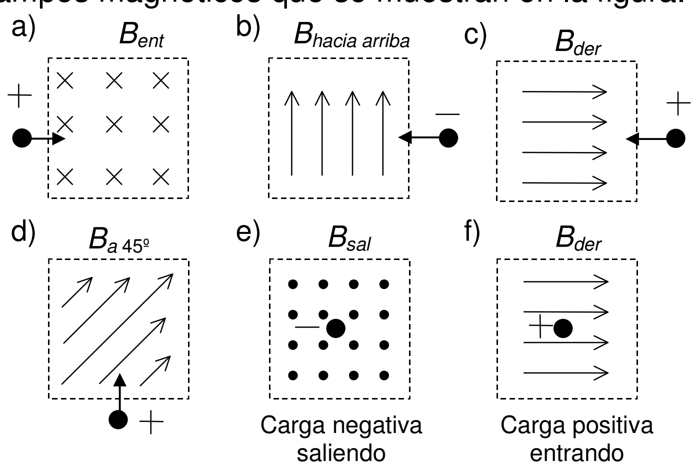
$V_H = E_H\, a$ = 131 µV (mayor hacia OX negativo)

6.6 Problemas

1. Halla la fuerza magnética que actúa sobre un protón que se mueve con una velocidad de 4·10^6 m/s en el sentido positivo del eje X, en el interior de un campo magnético de 2 T dirigido en el sentido positivo de las z.
(Dato: $q(p)$ = 1,6·10^{-19} C).

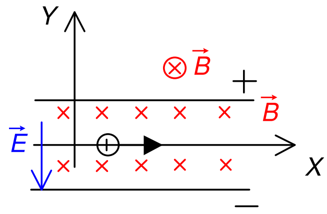
Sol: $\vec{F} = -1{,}28\cdot10^{-12}\ \vec{j}$ N

2. Indica la dirección inicial de la desviación de las partículas cargadas cuando entran en los campos magnéticos que se muestran en la figura.



Sol: a) Hacia arriba; b) Perpendicularmente al papel, sentido hacia fuera; c) No se desvía; d) Perpendicularmente al papel, sentido hacia dentro; e) No se desvía; f) Hacia abajo.

3. Un haz de electrones se lanza entre las armaduras de un condensador cargado a potencial *V*. Entre las armaduras existe un campo magnético uniforme, perpendicular al campo eléctrico. Sabiendo que las armaduras están separadas una distancia *d*, calcula la velocidad de los electrones que no se desvían al pasar por el condensador.

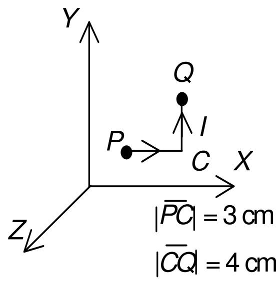


Sol: *v=V/Bd*

4. Un conductor largo, paralelo al eje *X*, lleva una corriente de 10 A en el sentido positivo de las *X*. Existe un campo magnético uniforme de valor 2 T en la dirección y sentido del eje *Y*. Halla la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre el conductor.

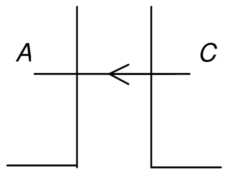
Sol: $20\vec{k}$ N/m

5. Por el segmento de conductor de la figura circula una corriente *I* = 2 A desde *P* hasta *Q*. Existe un campo magnético $\vec{B} = 1\vec{k}$ T. Halla la fuerza total sobre el conductor y demuestra que es la misma que si todo el conductor fuese un segmento recto desde *P* hasta *Q*.



Sol: $\vec{F} = \left(8\vec{i} - 6\vec{j}\right) \cdot 10^{-2}$ N

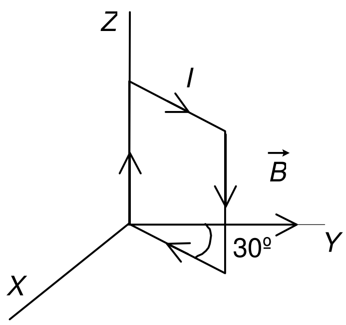
6. El conductor *AC* de la figura forma parte de un circuito, pudiéndose deslizar sobre dos rieles metálicos verticales. ¿Cuál debe ser el valor del campo magnético uniforme, perpendicular al plano de la figura, si debe producir una fuerza que compense la de la gravedad cuando la corriente por el conductor es de 10 A? ¿Cuál debe ser el sentido del campo magnético? La longitud del conductor es 10 cm y su masa 20 g.



Sol: B = 0,196 T hacia fuera del papel.

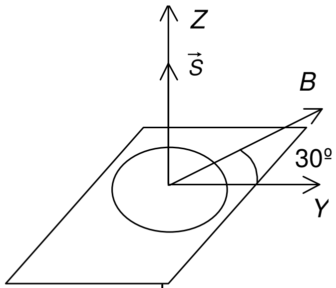
7. Se dobla de forma arbitraria un conductor y por él se hace circular una corriente *I* en el interior de un campo magnético $\vec{B}$ uniforme y perpendicular al plano de la corriente. Demuestra que la fuerza total sobre la parte del conductor que va desde un punto *a* a otro *b* es $\vec{F} = I\vec{L}x\vec{B}$ siendo $\vec{L}$ el vector que va desde *a* hasta *b*.

8. La figura muestra una de las espiras rectangulares de 10 cm por 5 cm, de una bobina de 20 espiras. Lleva una corriente de 0,1 A y tiene goznes en un lado, ¿Qué momento obra sobre la espira (módulo, dirección y sentido) si está montada con un plano formando un ángulo de 30º con respecto a la dirección de un campo magnético uniforme de $\vec{B} = 0{,}5\vec{j}$ T ?



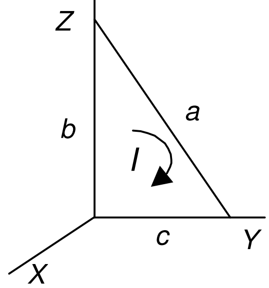
Sol: $-4{,}3 \cdot 10^{-3}\ \vec{k}$ Nm

9. Para medir un campo magnético se coloca una bobina de 200 espiras de 14 cm^2 de sección formando éstas un ángulo de 30º con el campo. Al circular una intensidad de 0,7 A se mide un momento de $980 \cdot 10^{-6}$ Nm. Calcula *B*.



Sol: $B = 5{,}7 \cdot 10^{-3}$ T. $\vec{B} = (1/200)(\vec{j} + 3^{-1/2}\vec{k})$

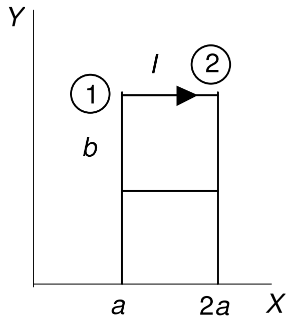
10. Sea la espira de la figura de lados *a*, *b* y *c*, por la que circula una intensidad *I* en el sentido indicado, situada en el interior de un campo magnético $\vec{B} = B\vec{j}$. Halla: a) fuerzas magnéticas sobre los lados de la espira, b) momento magnético de la espira, c) momento resultante de las fuerzas sobre la espira.



Sol: a) $\vec{F}_a = IbB\vec{i}$, $\vec{F}_b = -IbB\vec{i}$, $\vec{F}_c = 0$ b) $\vec{m} = -(1/2)Ibc\vec{i}$

c) $\vec{M} = -(1/2)IbcB\vec{k}$

11. Sea la espira rectangular de la figura de lados *a* y *b*, recorrida por una corriente de intensidad *I* en el sentido indicado, situada en el interior de un campo magnético no uniforme de valor $\vec{B} = B_0 \dfrac{a}{x}\vec{k}$. Calcula la fuerza que aparece sobre los lados 1 y 2.



Sol: $\vec{F}_1 = IB_0 b\vec{i}$ $\vec{F}_2 = IB_0 a \ln 2(-\vec{j})$

GLOSARIO

Fuerza magnética sobre una carga móvil. Es la fuerza que experimenta una carga *q* al moverse con una velocidad *v* en un acampo magnético *B*.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Tesla: En un punto del espacio hay un campo magnético de un tesla, si al moverse una carga eléctrica puntual de un culombio perpendicularmente al campo magnético con una velocidad de un metro por segundo, experimenta una fuerza perpendicular a la velocidad de un newton.

Fuerza sobre un elemento de corriente: Fuerza que actúa sobre una corriente *I* de longitud $d\ell$ en un campo magnético *B*

$$d\vec{F} = I(d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

Momento magnético de una espira: Es el producto de la intensidad que circula por una espira de corriente por el vector superficie. Tiene el sentido del vector superficie, es decir, el resultante de aplicar la regla de la mano derecha a la espira, con el sentido de la corriente como sentido de giro.

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

Momento de fuerzas sobre una espira: Es el producto vectorial entre el momento magnético de la espira y el campo magnético.

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Efecto Hall. Efecto que aparece cuando una corriente eléctrica circula no paralelamente a un campo magnético. El campo provoca una separación de los portadores de carga que se manifiesta como una diferencia de potencial denominada voltaje Hall, y que se calcula como:

$$V_H = v_a B a$$

siendo v_a la velocidad de arrastre de los portadores, B el campo magnético, y a la anchura del conductor en la dirección en que aparece V_H.