Nombre y apellidos:
Grupo:

Examen de Álgebra (primer parcial)

14 de marzo de 2016

Duración: 1 hora y 30 minutos

Cuestión 1 (2.5 pt.) La matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha sido obtenida a partir de una matriz A realizando, sucesivamente, las operaciones elementales siguientes:

(1) a la segunda fila se le ha restado el doble de la primera,

(2) a la tercera fila se le ha restado el triple de la primera,

(3) a la tercera fila le hemos sumado la segunda.

Responde a las siguientes preguntas:

(a) Explica razonadamente cuál es el rango de la matriz A **sin hacer ningún cálculo**.

(b) Calcula la forma escalonada reducida de A.

(c) Escribe como producto de matrices elementales la matriz T que cumple la relación $TA = S$.

(d) Determina el número de soluciones y resuelve (si es posible) el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = (1, 5, 0)$. (Utiliza los métodos de Gauss o Gauss-Jordan).

Solución:

(a) Puesto que S es una matriz escalonada equivalente por filas a A, el rango de A coincide con el número de filas no nulas de S, que es 2.

(b) Como A es equivalente por filas a S, su forma escalonada reducida (que es única) coincide con la de S. Será, por tanto:

$$E_{12}(-1)S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Teniendo en cuenta que realizar una operación elemental a una matriz equivale a multiplicarla (por la izquierda) por la matriz elemental correspondiente, se tiene que:

$$E_{32}(1)E_{31}(-3)E_{21}(-2)A = S.$$

Por tanto:

$$T = E_{32}(1)E_{31}(-3)E_{21}(-2).$$

(d) Como T es una matriz invertible (al ser producto de matrices elementales), se tiene que el sistema $A\vec{x} = (1, 5, 0)$ es equivalente a $TA\vec{x} = T(1, 5, 0)$, es decir, al sistema

$$S\vec{x} = T(1, 5, 0),$$

siendo T la matriz calculada en el apartado anterior. El vector de términos independientes es

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{32}(1)E_{31}(-3)E_{21}(-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{32}(1)E_{31}(-3)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{32}(1)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema a resolver es, por tanto, $S\vec{x} = (1, 3, 0)$. Su matriz ampliada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada coinciden y, además, su valor es estrictamente menor que el número de incógnitas (que asumimos que son x, y, z y t), el sistema es compatible indeterminado (aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius). El sistema inicial equivale a $x + y + 2z - t = 1, y + t = 3$. Las variables principales son x e y. Despejándolas, por sustitución regresiva, en función de las variables libres (z y t) se obtiene que el conjunto de soluciones es:

$$\{(-2 - 2\alpha + 2\beta, 3 - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Cuestión 2 (2.5 pt.) Determina (usando el método de Gauss o el de Gauss-Jordan) el número de soluciones según los valores del parámetro a y resuelve (en los casos compatibles) el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a-1 \\ 1 & 1-2a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a+1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Escalonando la matriz ampliada del sistema se tiene que

$$\mathsf{E}_{32}(a)\mathsf{E}_{31}(-1)\mathsf{E}_{21}(-1) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a-1 & 1 \\ 1 & 1-2a & 0 & a+1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a \end{bmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes depende de si $a(a-1)$ se anula o no. Distinguimos, por tanto, tres casos:

(1) Si $a = 0$, la última matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son ambos iguales a 2 (que es menor que el número de incógnitas). Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo podemos aplicar, por ejemplo, el método de Gauss Jordan. La forma escalonada reducida de la matriz amplidada anterior es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego el conjunto de soluciones es:

$$\left\{(1 - \frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

(2) Si $a = 1$ la matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen rangos distintos, el sistema es incompatible en este caso.

(3) Si $a \notin \{0, 1\}$ entonces el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son ambos iguales a 3 (que es el número de incógnitas). Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado. Calculamos la forma escalonada reducida de la matriz ampliada para resolverlo por Gauss-Jordan:

$$\mathsf{E}_{12}(-1)\mathsf{E}_{23}(\frac{1-a}{2})\mathsf{E}_{3}(1/2)\mathsf{E}_{3}(\frac{1}{a(a-1)}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \end{bmatrix}.$$

La solución es, por tanto: $\left(3/2, -1/2, \dfrac{1}{a-1}\right)$.

NOMBRE Y APELLIDOS:
GRUPO:

Cuestión 3 (2 pt.) Sin utilizar determinantes, estudia la invertibilidad de la matriz $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{bmatrix}$. Calcula la matriz inversa A^{-1} y escribe A y A^{-1} como productos de matrices elementales.

Solución:

Aplicando el algoritmo de Gauss-Jordan a la matriz $[\mathsf{A} \mid \mathsf{I}]$ (siendo I la matriz identidad de orden 4) se tiene que

$$\mathsf{E}_{43}(c)\mathsf{E}_{32}(b)\mathsf{E}_{21}(a)\,[\mathsf{A} \mid \mathsf{I}] = [\mathsf{I} \mid \mathsf{B}],$$

donde

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ ab & b & 1 & 0 \\ abc & bc & c & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, A es invertible (puesto que su rango es 4) y su inversa es B. Además

$$\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{E}_{43}(c)\mathsf{E}_{32}(b)\mathsf{E}_{21}(a) \quad \text{y}$$

$$\mathsf{A} = (A^{-1})^{-1} = (\mathsf{E}_{43}(c)\mathsf{E}_{32}(b)\mathsf{E}_{21}(a))^{-1} = \mathsf{E}_{21}(a)^{-1}\mathsf{E}_{32}(b)^{-1}\mathsf{E}_{43}(c)^{-1} = \mathsf{E}_{21}(-a)\mathsf{E}_{32}(-b)\mathsf{E}_{43}(-c).$$

Cuestión 4 (3 pt.) (a) Sea A una matriz invertible de tamaño 10×10 y sea B la matriz que se obtiene al sumarle a la tercera fila el doble de la primera. Determina razonadamente si B es invertible. En caso afirmativo, determina la relación existente entre A^{-1} y B^{-1}.

(b) Sea A una matriz ortogonal y sea B una matriz simétrica del mismo orden que A. Simplifica al máximo

$$\left((\mathsf{B}\,\mathsf{A}^t)^t + \mathsf{A}\right)^t \mathsf{A} - \mathsf{B}^t.$$

(c) Calcula la descomposición LU de la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Escribe la **traspuesta** de L como producto de matrices elementales.

Solución:

(a) Obsérvese que $\mathsf{B} = \mathsf{E}_{31}(2)\mathsf{A}$. Como A es invertible y $\mathsf{E}_{31}(2)$ también lo es (al ser una matriz elemental), se tiene que B es invertible (puesto que el producto de matrices invertibles es invertible). Además:

$$\mathsf{B}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{E}_{31}(2)^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{E}_{31}(-2).$$

A partir de aquí no es difícil deducir que B^{-1} se obtiene, a partir de A^{-1}, restándole a la primera columna el doble de la tercera.

(b)

$$\left((\mathsf{B}\,\mathsf{A}^t)^t + \mathsf{A}\right)^t \mathsf{A} - \mathsf{B}^t = (\mathsf{B}\,\mathsf{A}^t + \mathsf{A}^t)\mathsf{A} - \mathsf{B}^t = \mathsf{B}\mathsf{A}^t\mathsf{A} + \mathsf{A}^t\mathsf{A} - \mathsf{B}^t = \mathsf{B}\mathsf{I} + \mathsf{I} - \mathsf{B}^t = \mathsf{B} + \mathsf{I} - \mathsf{B} = \mathsf{I},$$

teniendo en cuenta que $\mathsf{A}^t\mathsf{A} = I$ (al ser A ortogonal) y $\mathsf{B} = \mathsf{B}^t$ (al ser B simétrica).

(c)

$$\mathsf{E}_{31}(-2)\mathsf{E}_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathsf{U}.$$

Luego $\mathsf{L} = (\mathsf{E}_{31}(-2)\mathsf{E}_{12})^{-1} = \mathsf{E}_{12}^{-1}\mathsf{E}_{31}(-2)^{-1} = \mathsf{E}_{12}\mathsf{E}_{31}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\mathsf{L}^t = (\mathsf{E}_{12}\mathsf{E}_{31}(2))^t = \mathsf{E}_{31}(2)^t\mathsf{E}_{12}^t = \mathsf{E}_{13}(2)\mathsf{E}_{12}.$$