

Práctica 5

Hoja de actividades

Curso 2014–2015

Actividad 1. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcula la matriz A^2 .

b) Sin hacer ningún cálculo, determina quién es la inversa de A .

Solución

a) Introducimos la matriz A y calculamos A^2 .

```
-->A=[-2 4 2 1;4 2 1 -2;2 1 -2 4;1 -2 4 2]
```

```
A =
```

```
 - 2.    4.    2.    1.
  4.    2.    1.   - 2.
  2.    1.   - 2.    4.
  1.   - 2.    4.    2.
```

```
-->A^2
```

```
ans =
```

```
25.    0.    0.    0.
 0.   25.    0.    0.
 0.    0.   25.    0.
 0.    0.    0.   25.
```

b) En virtud del resultado anterior, se tiene que $A \cdot A = 25I$, siendo I la identidad de orden 4. Así pues, $A \cdot (\frac{1}{25}A) = I$. Por consiguiente, $A^{-1} = \frac{1}{25}A$.

Actividad 2. Calcula de dos formas distintas las inversas de las siguientes matrices. Si alguno de los resultados que has obtenido no es correcto explica por qué.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Solución

Introducimos la matriz A y calculamos la inversa con la instrucción `inv`

```
-->A=[1 -1 2;-1 2 -1;2 -3 1]
```

```
A =
```

```
 1.   - 1.    2.
 - 1.    2.   - 1.
 2.   - 3.    1.
```

```
-->inv(A)
ans =

    0.5    2.5    1.5
    0.5    1.5    0.5
    0.5   -0.5   -0.5
```

Esta matriz es la inversa de A .

Ahora calcularemos la inversa de A obteniendo la escalonada reducida de la matría ($A \ I$)

```
-->rref([A eye(3,3)])
ans =

    1.    0.    0.    0.5    2.5    1.5
    0.    1.    0.    0.5    1.5    0.5
    0.    0.    1.    0.5   -0.5   -0.5
```

Dado que la reducida de A es la identidad, la inversa de A es bloque determinado por las tres últimas columnas de `ans`, es decir,

```
-->ans(:,4:6)
ans =

    0.5    2.5    1.5
    0.5    1.5    0.5
    0.5   -0.5   -0.5
```

Introducimos la matriz B

```
->B=[2 1 0 1;1 1 1 2; 2 1 3 1;4 3 5 5]
B =

    2.    1.    0.    1.
    1.    1.    1.    2.
    2.    1.    3.    1.
    4.    3.    5.    5.
```

```
-->inv(B)
!--error 19
El problema es singular.
```

Este mensaje indica que la matriz B es singular, es decir, no tiene inversa. En efecto, podemos comprobar que B no tiene rango 4:

```
-->rank(B)
ans =

    3.
```

Veamos que sucede si utilizamos `rref`:

```
-->rref([B eye(4,4)])
```

```
ans =
```

```

1.    0.    0. - 1.    0.6666667    0.    0.8333333 - 0.5
0.    1.    0.    3. - 0.3333333    0. - 1.6666667    1.
0.    0.    1.    0. - 0.3333333    0.    0.3333333    0.
0.    0.    0.    0.    0.          1.    0.5          - 0.5

```

El bloque formado por las 4 primeras columnas de esta matriz es la forma escalonada reducida de B que no es la identidad, por tanto B no es invertible. Observar que este resultado nos indica que el rango de B es 3.

Introducimos la matriz C :

```
-->C=[2 4 6;8 10 12;14 16 18]
```

```
C =
```

```

2.    4.    6.
8.    10.   12.
14.   16.   18.

```

```
-->inv(C)
```

Advertencia :

la matriz esta cerca de la singularidad o mal escalada. rcond = 0.0000D+00

```
ans =
```

```
10-15 *
```

```

- 2.2517998    4.5035996 - 2.2517998
 4.5035996 - 9.0071993    4.5035996
- 2.2517998    4.5035996 - 2.2517998

```

Este mensaje nos indica que la matriz puede no ser invertible. Para ver si el resultado que nos ha proporcionado es correcto multiplicamos C por dicha matriz

```
-->C*ans
```

```
ans =
```

```

2.    0.    2.
8.    0.    0.
16.   0.    8.

```

Dado que la matriz obtenida no es la identidad, el resultado es incorrecto. Calculando el rango de B , se tiene que

```
-->rank(C)
```

```
ans =
```

```
2.
```

por lo que podemos concluir que C no es invertible.

Veamos con rref que obtendríamos:

```
-->rref([C eye(3,3)])
```

```
ans =
```

```

1.    0. - 1.    0. - 1.3333333    0.8333333
0.    1.    2.    0.    1.1666667 - 0.6666667
0.    0.    0.    1. - 2.          1.

```

Como el bloque formado por las tres primeras columnas no es la identidad podemos concluir que C no es invertible.

Actividad 3. Sea la matriz

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcula la matriz T tal que $TD = R$ siendo R la forma escalonada reducida de D .

b) Resuelve la ecuación matricial $TX + X = DD^t$.

Solución

a) Para obtener la matriz T calcularemos la forma escalonada reducida de la matriz $(D \ I)$ siendo I la identidad de orden 4.

```
-->D=[7 1 2;4 2 1;0 1 -2;0 4 2]
D =

    7.    1.    2.
    4.    2.    1.
    0.    1.   -2.
    0.    4.    2.
-->R1=rref([D eye(4,4)])
R1=

    1.    0.    0.    0.    0.25 - 1.388D-17 - 0.125
    0.    1.    0.    0.    0.      0.2      0.2
    0.    0.    1.    0.    0.     -0.4      0.1
    0.    0.    0.    1.   -1.75    0.6      0.475
```

Este resultado nos indica que la reducida de D es la matriz formada por las tres primeras columnas de $R1$ y que la matriz T es la matriz formada por las cuatro últimas columnas de $R1$. Es decir,

```
-->T=R1(:,4:7)
T =

    0.    0.25 - 1.388D-17 - 0.125
    0.    0.      0.2      0.2
    0.    0.     -0.4      0.1
    1.   -1.75    0.6      0.475
```

Podemos "limpiar" T para que redondee el elemento próximo a cero:

```
-->T=clean(T)
T =

    0.    0.25    0.   -0.125
    0.    0.      0.2    0.2
    0.    0.     -0.4    0.1
    1.   -1.75    0.6    0.475
```

b) $TX + X = DD^t \iff (T + I)X = DD^t$. Así pues, si la matriz $(T + I)$ es invertible, podremos despejar X . Comprobamos que $(T + I)$ es invertible viendo que su rango es máximo:

```
-->rank(T+eye(4,4))
ans =
```

4.

Así pues, $X = (T + I)^{-1}DD^t$ que lo calculamos con Scilab:

```
-->X=inv(T+eye(4,4))*D*D'
X =
```

```
47.840909    28.568182   - 3.0681818    8.4090909
30.909091    19.181818   - 1.1818182    7.0909091
- 7.0909091   - 1.8181818    8.8181818   - 2.9090909
12.545455    10.909091   - 2.9090909   17.454545
```

Actividad 4. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 13 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Calcula (a mano) una descomposición LU de A.

b) Resuelve (a mano) el sistema siguiente utilizando la descomposición LU que has obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 2 \\ x - y - z &= -2 \\ -3x + 13y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

c) Calcula con Scilab la descomposición LU de la matriz A. Si no es la misma que has obtenido en el apartado a), explica por qué.

d) Calcula la inversa de A y su determinante utilizando la factorización LU que has obtenido en el apartado anterior. Comprueba que sale el mismo resultado que utilizando las instrucciones $\text{inv}(A)$ y $\text{det}(A)$, respectivamente.

Solución

a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 13 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 13 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = U$$

Interpretando matricialmente este proceso se tiene que $E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1)A = U$. Despejando A obtenemos que $A = (E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1))^{-1}U$. Por tanto,

$$L = (E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1))^{-1} = E_{21}(1)^{-1}E_{31}(-3)^{-1}E_{32}(-2)^{-1} = E_{21}(-1)E_{31}(3)E_{32}(2) =$$

$$= E_{21}(-1)E_{31}(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}(-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) En primer lugar resolvemos por sustitución progresiva el sistema $L\vec{y} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es:

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -2 + y_1 = 0, \quad y_3 = -2 - 3y_1 - 2y_2 = -2 - 6 = -8.$$

Es decir, $\vec{y} = (2, 0, -8)$.

Ahora resolvemos por sustitución progresiva el sistema $U\vec{x} = \vec{y}$. Esta solución será la solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$z = -8 / -4 = 2, \quad y = -z/2 = -2/2 = -1, \quad x = -2 + 3y + 2z = -2 - 3 + 4 = -1.$$

c)

```
-->A=[-1 3 2;1 -1 -1;-3 13 4]
A =
```

```
- 1.      3.      2.
  1.     - 1.     - 1.
- 3.     13.      4.
```

```
-->[L,U]=lu(A)
U =
```

```
- 3.      13.      4.
  0.      3.333333  0.333333
  0.      0.      0.8
```

```
L =
```

```
  0.3333333  - 0.4      1.
- 0.3333333      1.      0.
  1.      0.      0.
```

La descomposición LU de A que proporciona Scilab no es la misma que la obtenida en el apartado a). Ello es debido a que Scilab utiliza pivotación parcial para calcular la matriz U .

d) Dado que $A = LU$, se tiene que $\det(A) = \det(L)\det(U)$. Lo comprobamos:

```
-->det(L)*det(U)
ans =
```

```
8.
```

```
-->det(A)
ans =
```

```
8.
```

La matriz A es invertible ($\det(A) \neq 0$) y $A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$. Lo comprobamos:

```
-->inv(U)*inv(L)
```

```
ans =
```

```
    1.125    1.75 - 0.125
- 0.125    0.25  0.125
    1.25    0.5  - 0.25
```

```
-->inv(A)
```

```
ans =
```

```
    1.125    1.75 - 0.125
- 0.125    0.25  0.125
    1.25    0.5  - 0.25
```