# Práctica 6

## Hoja de actividades

**Actividad 1.** *Dados los vectores* $\vec{u} = (3, 5, -1, 0)$ *y* $\vec{v} = (1/2, 1/4, 1/3, -3)$, *calcula*

*(a)* $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ *y* $\|\vec{v}\|$

*(b) la distancia entre* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$

*(c ) un vector unitario con la misma dirección que* $\vec{u}$

*Solución*
a) Introducimos en columnas los vectores

```
-->u=[3;5;-1;0] ; v=[1/2;1/4;1/3;-3];

-->pescalar=u'*v
 pescalar  =

    2.4166667

-->modulou=norm(u)
 modulou  =

    5.9160798

-->modulov=norm(v)
 modulov  =

    3.0697901
```

b)

```
-->distancia=norm(u-v)
 distancia  =

    6.2920806
```

c)

```
-->unitario=(1/norm(u))*u
 unitario  =

    0.5070926
    0.8451543
  - 0.1690309
    0.
```

**Actividad 2.** *Sean los vectores* $\vec{b} = (1, 2, 3)$ *y* $\vec{c} = (1, 0, 2)$.

*(a) Determina el valor de* $m$ *para que el vector* $\vec{y} = (m, -1, 2)$ *sea ortogonal a* $\vec{b}$ *y a* $\vec{c}$.

*(b) Calcula* $H^{\perp}$ *siendo* $H =< \vec{b}, \vec{c} >$ .

*(c) Comprueba que el vector* $\vec{y}$ *obtenido en el apartado (a) pertenece a* $H^{\perp}$.

*Solución*
a) El vector $\vec{y}$ ha de cumplir que $\vec{b} \cdot \vec{y} = 0$ y que $\vec{c} \cdot \vec{y} = 0$. Es decir,
$m - 2 + 6 = 0$
$m + 0 + 4 = 0$
Así pues, $m = -4$.

b) $H = col(A)$, siendo $A$ la matriz que tiene como columnas a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Por tanto, según el Teorema 1 del boletín,

$$H^{\perp} = (col(A))^{\perp} = Nul(A^t).$$

Vamos a calcular el núcleo de $A^t$ con la instrucción kernel de Scilab.

```
-->b=[1;2;3] ; c=[1;0;2];
-->A=[b c]

 A  =
    1.    1.
    2.    0.
    3.    2.

-->ortoH=kernel(A')
 ortoH  =

    0.8728716
    0.2182179
  - 0.4364358
```

Así pues, $H^{\perp} =< (0{,}8728716, 0{,}2182179, -0{,}4364358 >$ .

c) Dado que $m$ ha sido elegido para que $\vec{y}$ sea ortogonal a los dos generadores de $H$, $\vec{y}$ estará en $H^{\perp}$, por definición de complemento ortogonal. Otra forma de ver que $\vec{y} = (-4, -1, 2)$ pertenece a $H^{\perp}$ es comprobando que $\vec{y}$ es combinación lineal de la base de $H^{\perp}$. Veámoslo:

```
->y=[-4;-1;2] ; C=[ortoH y]

 C  =
    0.8728716  - 4.
    0.2182179  - 1.
  - 0.4364358    2.

-->rank(C)
 ans  =

    1.
```

Dado que el rango de la matriz $C$ es 1, se deduce que la segunda columna ($\vec{y}$ ) es combinación lineal de la primera (base de $H^{\perp}$ ).

**Actividad 3.** *Sea* $\vec{r} = (1, -2, 4, -1)$ *y sea* $W =< \vec{r} >$

*(a) Calcula la proyección ortogonal del vector* $\vec{x} = (3, 0, -3, 5)$ *sobre* $W$.

*(b) Calcula una base de* $W^{\perp}$.

*(c) Comprueba que el vector obtenido en (a) es ortogonal a los vectores de la base de* $W^{\perp}$.

*Solución*

a) Dado que $W$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 1, aplicaremos la fórmula de la proyección sobre una recta

$$Proj_W(\vec{x}) = (\vec{q}^t\vec{x})\vec{q}$$

siendo $\vec{q}$ un vector unitario que genera a $W$, es decir,

$$\vec{q} = \frac{1}{\|\vec{r}\|}\vec{r}$$

Hacemos los cálculos con Scilab:

```
-->r=[1;-2;4;-1];
-->q=(1/norm(r))*r
 q  =

    0.2132007
  - 0.4264014
    0.8528029
  - 0.2132007

-->x=[3;0;-3;5]
 x  =

    3.
    0.
  - 3.
    5.

-->ProjWx=(q'*x)*q
 ProjWx  =

  - 0.6363636
    1.2727273
  - 2.5454545
    0.6363636
```

b) Si llamamos $A$ a la matriz que tiene como única columna al vector generador de $W$, entonces $W^{\perp} = (col(A))^{\perp} = Nul(A^t)$. Lo calculamos con Scilab:

```
-->A=r
    1.
  - 2.
    4.
  - 1.
```

```
-->ortoW=kernel(A')
 ortoW  =

  - 0.2132007    0.8528029  - 0.4264014
  - 0.1155429    0.4621717    0.7689141
    0.2310859    0.0756566    0.4621717
    0.9422285    0.2310859  - 0.1155429
```

Así pues, una base de $W^{\perp}$ es el conjunto $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$, siendo $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ y $\vec{c}_3$ las columnas de la matriz ortoW.

c) Para probar que $Proj_W(\vec{x})$ es ortogonal a los vectores $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ y $\vec{c}_3$ efectuamos el producto de la transpuesta de la matriz ortoW por el vector $Proj_W(\vec{x})$ y comprobamos que es una matriz nula.

```
-->ortoW'*ProjWx
 ans  =

   1.0D-15 *

  - 0.3330669
    0.8049117
  - 0.4024558

-->clean(ans)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
```

**Actividad 4.** *Sea* $W = < \vec{u}_1, \vec{u}_2 >$ *siendo* $\vec{u}_1 = (-1, 2, 4)$ *y* $\vec{u}_2 = (4, -5, 1)$

*(a) Escribe la proyección ortogonal del vector* $\vec{x} = (2, 2, 3)$ *sobre* $W$*,* $Proj_W(\vec{x})$*, como combinación lineal de los vectores* $\vec{u}_1$ *y* $\vec{u}_2$*.*

*(b) Calcula* $Proj_W(\vec{x})$ *mediante la matriz proyección* $P_W$*. Comprueba que se obtiene el mismo resultado que en (a).*

*(c) Calcula* $Proj_W(\vec{z})$ *y* $Proj_W(\vec{t})$*, siendo* $\vec{z} = (-6, 9, 7)$ *y* $\vec{t} = (-22/3, -17/3, 1)$*. ¿Qué conclusión puedes sacar de los resultados obtenidos?*

*Solución*

a) Sabemos que

$$Proj_W(\vec{x}) = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2$$

siendo $\vec{y} = (y_1, y_2)$ la solución del sistema de ecuaciones

$$M^t M\vec{y} = M^t\vec{x}$$

donde $M$ es la matriz del conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, es decir, $M$ es la matriz que tiene como columnas a esos dos vectores. Vamos a resolver con Scilab dicho sistema de ecuaciones utilizando la instrucción rref:

```
-->u1=[-1;2;4] ;u2=[4;-5;1];

-->M=[u1 u2]
 M  =

  - 1.    4.
    2.  - 5.
    4.    1.

-->x=[2;2;3]
 x  =

    2.
    2.
    3.

R=rref([M'*M M'*x])
 R  =

    1.    0.    0.7647059
    0.    1.    0.2058824

-->y1=R(1,3)
 y1  =

    0.7647059

-->y2=R(2,3)
 y2  =

    0.2058824
```

Así pues,

$$Proj_W(\vec{x}) = 0{,}7647059\vec{u}_1 + 0{,}2058824\vec{u}_2$$

Efectuando los cálculos se obtiene que

$$Proj_W(\vec{x}) = (0{,}0588235,\ 0{,}5,\ 3{,}2647059).$$

b) Dado que el conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es linealmente independiente, la matriz $M^tM$ tiene rango 2 y por consiguiente es invertible. Así pues, podemos construir la matriz proyección $P_W = M(M^tM)^{-1}M^t$.

```
-->PW=M*inv(M'*M)*M'
 PW  =

    0.3810742  - 0.4782609    0.0843990
  - 0.4782609    0.6304348    0.0652174
    0.0843990    0.0652174    0.9884910
```

Ahora calculamos la proyección de $\vec{x}$ mediante la fórmula

$$Proj_W(\vec{x}) = P_W\vec{x}$$

```
-->ProjWx=PW*x
 ProjWx  =

    0.0588235
    0.5
    3.2647059
```

Por tanto,

$$Proj_W(\vec{x}) = (0{,}0588235,\ 0{,}5,\ 3{,}2647059).$$

c) Introducimos los vectores $\vec{z}$ y $\vec{t}$ y calculamos sus proyecciones mediante la matriz de proyección.

```
-->z=[-6;9;7] ; t=[-22/3;-17/3;1];

-->ProjWz=PW*z
 ProjWz  =

  - 6.
    9.
    7.

-->ProjWt=PW*t
 ProjWt  =

   1.0D-15 *

  - 0.0277556
  - 0.7216450
  - 0.2220446

-->clean(ProjWt)
 ans  =

    0.
    0.
    0.
```

Así pues, $Proj_W(\vec{z}) = \vec{z}$ y $Proj_W(\vec{t}) = \vec{0}$. Esto nos indica que $\vec{z} \in W$ y que $\vec{t}$ es ortogonal a $W$, es decir, $\vec{t} \in W^{\perp}$.

**Actividad 5.** *Sea $W$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Demuestra que cualquier matriz proyección $P_W$ es simétrica e idempotente ($P_W^2 = P_W$).*

*Solución*

Si $P_W$ es una matriz proyección, entonces $P_W = M(M^tM)^{-1}M^t$, siendo $M$ la matriz de una base de $W$. Dado que

$$P_W^t = (M(M^tM)^{-1}M^t)^t = (M^t)^t((M^tM)^{-1})^tM^t =$$

$$= M((M^tM)^t)^{-1}M^t = M(M^t(M^t)^t)^{-1}M^t = M(M^tM)^{-1}M^t = P_W$$

concluimos que la matriz $P_W$ es simétrica.

Por otra parte,

$$P_W^2 = (M(M^tM)^{-1}M^t)(M(M^tM)^{-1}M^t) = M((M^tM)^{-1}M^tM)(M^tM)^{-1}M^t =$$

$$= MI(M^tM)^{-1}M^t = M(M^tM)^{-1}M^t = P_W$$

Por tanto, $P_W$ es idempotente.