Introducción a la Lógica. Lógica de proposiciones (1)

Cristina Jordán Lluch
Instituto de Matemáticas Multidisciplinar
Departamento de Matemática Aplicada (DMA)

Introducción

Contenido

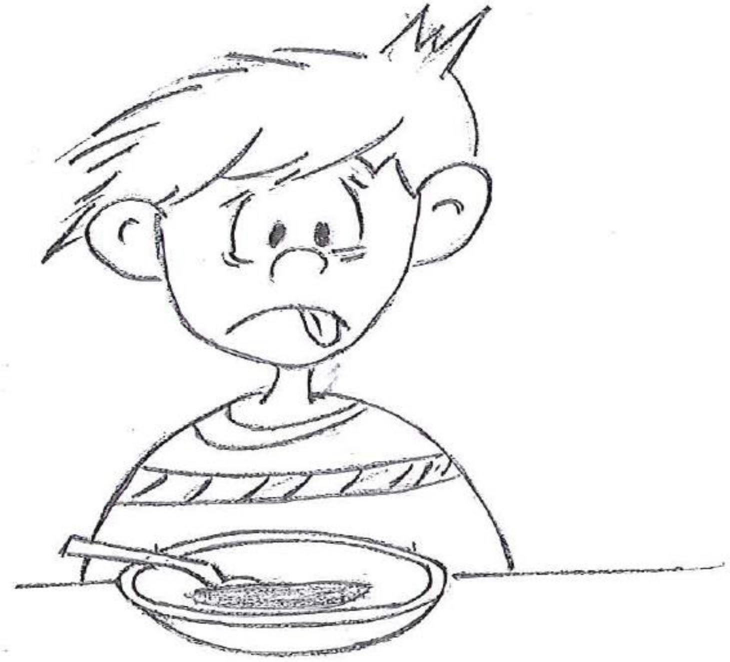
Cómo razonamos

La cena de Guille

A Guille no le gusta la sopa ….

Si no te acabas la sopa
te irás a la cama sin ver la tele

Con esfuerzo, Guille se come la sopa



La cena de Guille

¿Qué opinas?

- La madre no cumple con su palabra. Si lo engaña así Guille no se fiará más de ella
- Es culpa de Guille, por fiarse, viendo lo tarde que es y que al día siguiente tiene cole
- Guille aprenderá Lógica desde pequeño
- Ninguna de las anteriores

¡Qué decimos y qué entendemos!

Ejemplos

1. "Por seguridad, nadie cuya estatura no sea al menos de 1.40 m. puede subir en esta atracción".

Sería mejor:

"Por seguridad, si su altura es menor de 1.40 m. no puede subir en esta atracción".

¡Que decimos y qué entendemos!

Ejemplos

3. De las actas de una sesión del concejo municipal:

El concejal Trafford se opone al aviso propuesto para la entrada del Parque Sur: 'Prohibido introducir perros en este parque si no van cogidos de la correa'. El concejal observó que esta ordenanza no prohíbe al propietario soltar su perrito o sus perritos de la correa una vez entrados en el parque.

El Presidente (coronel Vine): ¿Qué otra solución propondría usted, señor concejal?

Concejal Trafford: 'Prohibidos en este parque los perros sin correa'.

Concejal Hogg: Me opongo, señor Presidente. La orden debe dirigirse a los propietarios de los perros, no a los perros.

Concejal Trafford: Una bonita objeción. Muy bien: 'Prohibida en este parque la presencia de propietarios de perros si no los llevan de la correa'.

Concejal Hogg: Me opongo, señor Presidente. Hablando propiamente, eso me prohibiría, en mi calidad de propietario de perro, dejar a mi perro en el patio de casa y pasear por el parque con mi mujer.

Concejal Trafford: Señor Presidente, propongo que nuestro legalista amigo redacte él mismo el aviso.

Concejal Hogg: Señor Presidente, puesto que el concejal Trafford considera tan difícil mejorar mi propia redacción original, acepto dar otro texto: 'No se admite en este parque a nadie que no lleve a su perro de la correa'.

¡Que decimos y qué entendemos!

Concejal Trafford: Protesto, señor Presidente: propiamente hablando, ese aviso me prohibiría, como ciudadano que no tiene perro, pasear por el parque a menos de comprarme antes un perro.

Concejal Hogg (algo acalorado): Bueno, es muy sencillo: 'Hay que traer los perros atados a este parque'.

Concejal Trafford: Protesto, señor Presidente. Eso es como una orden a todo el pueblo para que traigan sus perros al parque.

El concejal Hogg interpone una observación por la cual se le llama al orden; tras haberla retirado, se dispone que la observación se elimine del acta.

El Presidente: Concejal Trafford, el concejal Hogg lo ha intentado tres veces, y usted sólo dos...

Concejal Trafford: 'Todos los perros tienen que estar atados en este parque'.

El Presidente: Ya estoy viendo al concejal Hogg levantarse con razón para proponer otra enmienda. ¿Me permiten ustedes que me anticipe yo? 'Todos los perros presentes en este parque tienen que estar atados'.

Se pasó a votación esta redacción y se votó por unanimidad con dos abstenciones.

De *The reader over your shoulder*, por Robert Graves y Alan Hodge

¿Podemos ser ambiguos?

En nuestra vida ordinaria ,… puede
En nuestro quehacer científico,… ¡NO!

Objetivos

Objetivos

1.- Objetivo principal :
determinar si un **razonamiento** es correcto.

2.- Objetivo consecuencia del anterior:
Disponer de un **lenguaje** preciso, conciso, sin ambigüedades, que nos permite expresar exactamente y por tanto transmitir, sin lugar a confusión, lo que estamos pensando

Lógica de proposiciones

Introducción a la simbolización

Dobles negaciones y retórica del lenguaje usual

- No iré nunca
- De ninguna manera iré nunca jamás ni contigo ni con tu padre a Berlín
- ¿Me preguntas que tiempo hace? El cielo era un mar de lágrimas y las palabras quedaban congeladas en nuestros labios al pronunciarlas

Introducción a la simbolización

Primeros ejemplos

1.  y 

Introducción a la simbolización

Dobles negaciones y retórica del lenguaje usual

- No iré nunca
- De ninguna manera iré nunca jamás ni contigo ni con tu padre a Berlín
- ¿Me preguntas que tiempo hace? El cielo era un mar de lágrimas y las palabras quedaban congeladas en nuestros labios al pronunciarlas
- Me encuentro ante la difícil disyuntiva de elegir entre tomar pastel o helado

Introducción a la simbolización

Primeros ejemplos

1.  y 

2.  o 

Introducción a la simbolización

Dobles negaciones y retórica del lenguaje usual

- No iré nunca
- De ninguna manera iré nunca jamás ni contigo ni con tu padre a Berlín
- ¿Me preguntas que tiempo hace? El cielo era un mar de lágrimas y las palabras quedaban congeladas en nuestros labios al pronunciarlas
- Me encuentro ante la difícil disyuntiva de elegir entre tomar pastel o helado
- Si el astro rey decide iluminar nuestra ciudad, la playa será sin lugar a dudas el lugar de esparcimiento adonde iré a pasar el día

Introducción a la simbolización

Primeros ejemplos

1.  y  L y F

2.  o  P o H

3. Si  entonces  Si S entonces P

4. Si  entonces  Si no R entonces M

Introducción a la simbolización

Primeros ejemplos

1.  y    L **y** F

2.  o    P **o** H

3. Si  entonces    **Si** S **entonces** P

4. Si  entonces    Si **no** R entonces M

Recomendación

1. Simplificad las expresiones localizando los diferentes bloques sujeto+verbo+predicado y los conectores que las unen

2. Transformadlas en otras más sencillas que solo utilicen los conectores.

   … y….
   … O…
   Si… entonces …
   No …

   Sólo si… entonces
   … Si y sólo si …

Introducción a la simbolización

Simboliza las siguientes expresiones

- Voy al cine sólo si está lloviendo
- Si está lloviendo voy al cine
- Sólo voy al cine cuando está lloviendo
- Está lloviendo luego voy al cine
- Si voy al cine, está lloviendo
- Voy al cine y no llueve
- No voy al cine y no llueve
- Voy al cine y llueve

Valores de verdad

Como comentamos nuestro objetivo principal es determinar si un razonamiento es correcto.

Para hablar de corrección deberemos introducir valores de certeza, es decir, consideraciones sobre la verdad o falsedad de lo que decimos.

Validez de la proposiciones

Ejemplos

- Hoy es domingo

  P ……………………………………. Le podemos asignar F o V(ó 0 o 1)

- La luna es un satélite

  Q ……………………………………Le podemos asignar F o V(ó 0 o 1)

- El sol es un planeta

  R ……………………………………Le podemos asignar F o V(ó 0 o 1)

Introducción a la simbolización

Ejercicios

- Esta afirmación es falsa
- Amanece hoy nublado ha
- Lunes
- ¿Irás al cine mañana?
- ¡Cállate!

¡No las consideramos válidas!

Simbolización y validez de la proposiciones

Resumiendo

Debemos expresar nuestras ideas:

- de la forma más sencilla posible, utilizando frases "básicas" y "conectores" (y, o, no, si…entonces, si y sólo si)
- no consideramos las que no tienen significado
- no consideramos aquellas de las que no se puede decir si son ciertas o falsas (ahí están incluidas las interrogativas y exclamativas)

Definiciones de la Lógica proposicional

Definición

Llamamos **proposición** o **enunciado** a cualquier afirmación de la que se pueda decir sin ambigüedad (y de forma excluyente) que es verdadero o falsa.

Cuando una proposición es cierta se le asigna el valor lógico 1 o V de verdadera) y si es falsa el valor lógico 0 (o F de falsa).

Definiciones de la Lógica proposicional

Definiciones

Proposiciones

- **atómicas** Las proposiciones más simples
- **moleculares** formadas por proposiciones atómicas unidas mediante unas partículas que actúan como nexos.

Representación: con letras mayúsculas, P, Q, R, …

Conectores (más usuales)

Conector	Símbolo	Se escribe	Se lee
Conjunción	$\wedge$	$P \wedge Q$	P y Q
Disyunción	$\vee$	$P \vee Q$	P o Q
Negación	$\urcorner$	$\urcorner P$	No P
Condicional	$\longrightarrow$	$P \longrightarrow Q$	Si P entonces Q
Bicondicional	$\longleftrightarrow$	$P \longleftrightarrow Q$	P si y sólo si Q

Tablas de verdad de los conectores

Conector ∧ (Conjunción)

Ejemplos "y"

Valor de verdad

- El Sol es una estrella y la Tierra es un planeta

V V V

- La Luna es un satélite de la Tierra y el Sol es un planeta

V F F

- La Tierra es una estrella y la Luna es un planeta.

F F F

Tabla de verdad CONJUNCIÓN

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tablas de verdad de los conectores

Conector ∨ (Disyunción)

Ejemplos "o"

Valor de verdad

- El Sol es una estrella o la Tierra es un planeta
  V V — V
- La Luna es un satélite de la Tierra o el Sol es un planeta
  V F — V
- La Tierra es una estrella o la Luna es un planeta
  F F — F

Tabla de verdad DISYUNCIÓN

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tablas de verdad de los conectores

Conector ˥ (Negación)

Ejemplos "no"

- El Sol es una estrella

V

El Sol no es una estrella

F

- La Luna es un planeta

F

La Luna no es un planeta

V

Tabla de verdad NEGACIÓN

P	**˥ P**
V	F
F	V

Tablas de verdad de los conectores

Conector $\longrightarrow$ (Condicional)

Ejemplos "Si … entonces …"

> Soy un político en campaña y anuncio en público:
>
> "Si salgo elegido, (entonces) bajaré los impuestos"

¿Bajo qué condiciones me podrían llamar mentiroso?

Condiciones	¿Mentiroso?
a) Salgo elegido y bajo los impuestos	NO
b) Salgo elegido y no bajo los impuestos	SI
c) No salgo elegido pero influyo de forma determinante en que bajen los impuestos	NO
d) No salgo elegido y no bajan los impuestos	NO

Tablas de verdad de los conectores

Conector → (Condicional)

Ejemplos "Si … entonces …"

> "Si salgo elegido, (entonces) bajaré los impuestos"
>
> $E \rightarrow I$

Condiciones	E	I	¿Mentiroso?	$E \rightarrow I$
a) Salgo elegido y bajo los impuestos	V	V	NO	V (dice verdad)
b) Salgo elegido y no bajo los impuestos	V	F	SI	F (dice falsedad)
c) No salgo elegido pero influyo de forma determinante en que bajen los impuestos	F	V	NO	V (dice verdad)
d) No salgo elegido y no bajan los impuestos	F	F	NO	V (dice verdad)

Tablas de verdad de los conectores

Conector → (Condicional)

Ejemplos "Si … entonces …"

"Si salgo elegido, (entonces) bajaré los impuestos"

$E \longrightarrow I$

Condiciones	E	I	E → I
a) Salgo elegido y bajo los impuestos	V	V	V
b) Salgo elegido y no bajo los impuestos	V	F	F
c) No salgo elegido pero influyo de forma determinante en que bajen los impuestos	F	V	V
d) No salgo elegido y no bajan los impuestos	F	F	V

Tablas de verdad de los conectores

Conector → (Condicional)

Ejemplos "Si … entonces …"

Valor de verdad

- Si el sol es una estrella (V) entonces da luz (V) — V
- Si el sol es una estrella (V) entonces vive en el mar (F) — F
- Si la Luna es de queso (F) entonces la Tierra es un planeta (V) — V
- Si la Luna es de queso (F) entonces un ratón se la comerá (F) — V

Tabla de verdad CONDICIONAL

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tablas de verdad de los conectores

Conector ↔ : Bicondicional

$P \leftrightarrow Q \equiv (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$

Ejemplos "Si … y sólo si …"

Valor de verdad

- Se celebran las Olimpiadas en 2012 (V) si y sólo si 2012 es bisiesto (V) — V
- En 2010 tuvo lugar el mundial de fútbol (V) si y sólo si 2010 es bisiesto (F) — F
- 2010 es bisiesto (F) si y sólo si en 2010 tuvo lugar el mundial de fútbol (V) — F
- La Luna es de queso (F) si y sólo si un ratón se la come (F) — V

Tabla de verdad BICONDICIONAL

P	Q	P ↔ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Corrección de los razonamientos

Hemos establecido un lenguaje que nos permitirá definir unas reglas que guíen nuestro razonamiento, que nos indiquen si es o no correcto.

Pero la lógica no saca las cosas de la nada. Analiza que es lo que creemos que debe ser cierto y lo formaliza.

Corrección de los razonamientos

Ejemplo 1

Si corro una maratón me canso.
Corro una maratón.
Conclusión. Me canso

CIERTO

Utilizando Lógica proposicional

M=Corro una maratón,
C= Me canso
$((M \rightarrow C) \wedge M) \rightarrow C$

(Tabla de verdad)

Ejemplo 2

Si fumo aumenta el riesgo de cáncer de pulmón.
Fumo.
Conclusión. Aumenta el riesgo de cáncer de pulmón.

CIERTO

Utilizando Lógica proposicional

P = Aumenta el riesgo de cáncer de pulmón
F= Fumo
$((F \rightarrow P) \wedge F) \rightarrow P$

(Tabla de verdad)

Corrección de los razonamientos

Ejemplo 3

En un laboratorio mezclaron:

 y  entonces 

 y  entonces 

 y  entonces 

CONCLUSIÓN:  es 

$X \wedge H \longrightarrow V$

$X \wedge C \longrightarrow V$

$X \wedge A \longrightarrow V$

CONCLUSIÓN: $X \longrightarrow V$

¿CORRECTO?

¿CORRECTO?

Corrección de los razonamientos

Ejemplo 4

Corrección de los razonamientos

Ejemplo 4

$V \wedge H \longrightarrow C$

$R \wedge H \longrightarrow C$

$W \wedge H \longrightarrow C$

$C \wedge H \longrightarrow C$

CONCLUSIÓN: $H \longrightarrow C$

¿CORRECTO?

Los hay que tendrían que venir a clase.....

Simbolización y validez en L. de proposiciones

Resumiendo

Debemos expresar nuestras ideas:

- de la forma más sencilla posible, utilizando frases "básicas" y "conectores" (y, o, no, si…entonces, si y sólo si)
- no consideramos las que no tienen significado
- no consideramos aquellas de las que no se puede decir si son ciertas o falsas (ahí están incluidas las interrogativas y exclamativas)

En relación a la validez

- Las tablas de verdad permiten determinar la validez de los razonamientos
- La validez de los razonamientos depende de la estructura, no no del posible significado de las proposiciones que intervienen.

Formalizando: Formas proposicionales y conectores

Definición

Una **forma proposicional** (o fórmula proposicional o forma enunciativa) es cualquier expresión formada por

(a) símbolos (normalmente letras) que representan otras formas proposicionales y que se denominan **variables proposicionales**,
(b) conectores lógicos,
(c) pares de paréntesis (…),
y construida utilizando la siguiente regla:
si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son formas proposicionales entonces también lo son $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\urcorner\, \mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$

Ejemplos

- $\wedge P \vee \longrightarrow Q$ no es una forma proposicional
- $((P \wedge (\urcorner\, Q)) \longrightarrow R)$ es una forma proposicional

Formalizando: Formas proposicionales y conectores

Notas

- Una forma proposicional o enunciativa (por ejemplo $P \wedge Q$) se convierte en una proposición cuando sustituimos sus variables (P y Q en el ejemplo) por enunciados concretas.
- Una proposición es necesariamente verdadera o falsa, mientras que una fórmula proposicional puede ser una cosa o la otra según el valor de verdad de las expresiones que la forman.

Ejemplo

La forma proposicional $P \wedge Q$ puede representar tanto a la

- proposición verdadera

  "La Tierra es un planeta y París es la capital de Francia"
- como a la proposición falsa

  "El Sol es una estrella y Londres es la capital de España"

Formalizando: Formas proposicionales y conectores

Jerarquía

Para representar adecuadamente proposiciones en las que aparecen Varios conectores se utilizan paréntesis. Para minimizar el uso de estos se establece la siguiente jerarquía entre los conectores:

Jerarquía (de mayor a menor)

$\longleftrightarrow$

$\longrightarrow$

$\wedge \; \vee$

$\urcorner$

Si la jerarquía de un conector es mayor que la de otro quiere decir que, en ausencia de paréntesis, el segundo se ejecuta antes que el primero.

Formalizando: Formas proposicionales y conectores

Ejemplos

La proposición

- $P \wedge Q \longrightarrow R$ está correctamente escrita puesto que tiene una interpretación única, de acuerdo con la jerarquía de los conectores. Equivale a $(P \wedge Q) \longrightarrow R$
- $P \wedge Q \vee R$ no está correctamente escrita, puesto que los conectores $\wedge$ y $\vee$ tienen la misma categoría jerárquica. Es necesario el uso de paréntesis para evitar ambigüedades, es decir: $(P \wedge Q) \vee R$ ó $P \wedge (Q \vee R)$ (no significan lo mismo)

Ejercicio

Reduce el número de paréntesis de las siguientes formas proposicionales

a) $((P\wedge Q) \vee R) \rightarrow ((R\wedge P) \wedge (\neg R))$

b) $((P\wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow ((R\wedge S) \vee T)$

c) $(P\wedge (\neg Q)) \wedge (\neg R) \rightarrow (P\rightarrow (Q\vee R))$

Tautologías, contingencias y contradicciones

Definiciones

Una **tautología** es una forma proposicional que siempre es verdadera (independientemente de los valores de verdad de las variables que la forman). La denotaremos por τ

Una **contradicción** es una forma proposicional que siempre es falsa (independientemente de los valores de verdad de las variables que la forman). La denotaremos por ϕ .

Una **contingencia** es una forma proposicional que no es ni tautología ni contradicción.

Ejemplos

- $\neg (P \wedge Q \longrightarrow R)$ es una contingencia
- $(P \longrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ es una tautología
- $P \wedge \neg P$ es una contradicción

Tautologías, contingencias y contradicciones

Definiciones

1. Si un condicional $P \longrightarrow Q$ es una tautología, diremos que es una **implicación** (tautológica) y escribiremos $P \vdash Q$, $P \longrightarrow Q$ o $P \Longrightarrow Q$.
   En este caso diremos que P **implica** Q.
   Se dice que P es el antecedente y Q es el **consecuente** de la implicación

   Ejemplo

   $\{\urcorner P\} \vdash \urcorner P \vee Q$ o $\urcorner P \longrightarrow \urcorner P \vee Q$ o $\urcorner P \Longrightarrow \urcorner P \vee Q$

2. Dos formas proposicionales P y Q se dice que son **equivalentes** si sus tablas de verdad coinciden (es decir, tienen idénticos valores lógicos para cada conjunto de valores lógicos de sus componentes). Dicho de otro modo, dos formas proposicionales P y Q son equivalentes si $P \longleftrightarrow Q$ es una tautología. Lo escribiremos $P \Leftrightarrow Q$, $P \longleftrightarrow Q$ o también $P \equiv Q$.

   Ejemplo

   $\urcorner(P \wedge Q) \equiv \urcorner P \vee \urcorner Q$ o $\urcorner(P \wedge Q) \longleftrightarrow \urcorner P \vee \urcorner Q$ o

   $\urcorner(P \wedge Q) \Leftrightarrow \urcorner P \vee \urcorner Q$

Equivalencias en Lógica de proposiciones

Propiedades booleanas

1. Propiedades asociativas
   $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
   $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
2. Propiedades conmutativas
   $P \vee Q \equiv Q \vee P$
   $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
3. Propiedades distributivas
   $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
4. Elementos neutros
   $P \vee \phi \equiv P$
   $P \wedge \tau \equiv P$
5. Elementos complementarios (propiedad de la negación)
   $P \vee \neg P \equiv \tau$
   $P \wedge \neg P \equiv \phi$

Equivalencias en Lógica de proposiciones

Otras equivalencias relacionadas con los conectores disyunción, conjunción y negación

1. Absorbentes

   $\tau \vee P \equiv \tau$

   $P \wedge \phi \equiv \phi$

2. Simplificativas (o leyes de absorción)

   $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

   $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

3. Idempotentes

   $P \vee P \equiv P$

   $P \wedge P \equiv P$

4. Leyes de De Morgan

   $\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

   $\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

5. Doble negación

   $\neg (\neg P) \equiv P$

Equivalencias en Lógica de proposiciones

Equivalencias involucrando a los conectores condicional, bicondicional y disyunción

1. Condicional-disyunción

$$P \longrightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

2. Condicional-bicondicional

$$P \longleftrightarrow Q \equiv (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$$

3. Trasposición (o contrarrecíproco)

$$P \longrightarrow Q \equiv \neg Q \longrightarrow \neg P$$

4. Ley de exportación

$$P \longrightarrow (Q \longrightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \longrightarrow R$$

Equivalencias en Lógica de proposiciones

Ejercicios

1. Simplificad las formas proposicionales siguientes:

   a) $(\neg P \wedge Q) \wedge P$

   b) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

   c) $\neg Q \wedge R \leftrightarrow Q$

   d) $(\neg P \rightarrow \neg(\neg P \vee Q)) \rightarrow \neg P$

   e) $(P \rightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge (\neg P \vee \neg R)$

2. ¿Es cierto

   a) $P \longrightarrow Q \equiv \urcorner P \longrightarrow \urcorner Q$

   b) $P \longrightarrow Q \implies \urcorner P \longrightarrow \urcorner Q$?

Equivalencias en Lógica de proposiciones

Nota

Todas las equivalencias expuestas se pueden utilizar para simplificar una determinada forma proposicional, es decir, para obtener otra equivalente más sencilla.

Ejercicio

Simplifica la forma proposicional siguiente

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee T \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R \vee Q)$$