Lliçó 4: Equacions i sistemes d'equacions lineals

Equacions Lineals

Una equació és *lineal* si té la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K})$$

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ són els *coeficients*
- b és el *terme independent*
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són les *incògnites*

Discussió i resolució

- L'equació $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ és *compatible* i tots els vectors de $\mathbb{K}^n$ en són solució
- L'equació $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ és *inconsistent* (o *incompatible*) si $b \neq 0$
- Si algun coeficient a_i és no nul llavors, l'equació $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ és *consistent* (o *compatible*)
  - La solució s'obté aïllant x_i i canviant totes les altres incògnites per paràmetres
  - La solució es pot expressar en la forma

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\vec{u}_{n-1}$$

Sistemes d'equacions lineals

Un sistema de m equacions amb n incògnites és *lineal* si té la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ són els *coeficients*
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ són els *termes independents*
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són les *incògnites*

El sistema lineal pot expressar-se en *forma vectorial* com

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

El sistema lineal pot expressar-se en *forma matricial* com

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriu de coeficients és $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$

La matriu ampliada, $\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$

Classificació

1. *Consistent* (o *compatible*) si té alguna solució
   (a) *Determinat*, quan te només una solució
   (b) *Indeterminat*, quan en te més d'una
2. *inconsistent* (o *incompatible*) quan no té cap solució

☞ El sistema és compatible si i només si el vector dels termes independents és combinació lineal dels vectors dels coeficients

Operacions elementals

- L'algorisme de Gauss-Jordan transforma una matriu en una matriu *esglaonada reduïda*, fent servir les *operacions elementals:*
  - *Permutació*: Intercanvi de dues files
  - *Reducció (o eliminació)*: Suma d'un múltiple d'una fila a una altra fila
  - *Escalat*: Multiplicació d'una fila per un nombre no nul