Lliçó 9: Matrius simètriques i matrius ortogonals
Idees clau, definicions, propietats, mètodes...

La matriu transposada

La *matriu transposada de* A, A^t, és la que té per columnes les files de A.

- La transposada de la suma és la suma de les transposades: $(\mathsf{A}+\mathsf{B})^t = \mathsf{A}^t + \mathsf{B}^t$.
- La transposada del producte d'un escalar per una matriu és el producte de l'escalar per la transposada de la matriu: $(\alpha\mathsf{A})^t = \alpha\mathsf{A}^t$.
- ☞ La transposada del producte és el producte de les transposades en ordre contrari: $(\mathsf{AB})^t = \mathsf{B}^t\mathsf{A}^t$.
- Els rangs d'una matriu i la seua de la transposada són iguals: $\operatorname{rang}\mathsf{A}^t = \operatorname{rang}\mathsf{A}$.
- Si A és invertible, la inversa de la transposada és la transposada de la inversa: $(\mathsf{A}^{-1})^t = (\mathsf{A}^t)^{-1}$.

Matrius simètriques i antisimètriques

Una matriu A és *simètrica* si $\mathsf{A}^t = \mathsf{A}$.
Una matriu A és *antisimètrica* si $\mathsf{A}^t = -\mathsf{A}$.

- Les matrius simètriques o antisimètriques són quadrades.
- La suma, el producte per un escalar i la inversa de les matrius simètriques també són simètriques.
- ☞ El producte de matrius simètriques A i B és una matriu simètrica si i només si les matrius commuten.

La matriu $\mathsf{A}^t\mathsf{A}$

- ☞ El producte escalar real és igual a un producte de matrius: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}^t\vec{v}$.
- Si A és una matriu real, les entrades de la matriu $\mathsf{A}^t\mathsf{A}$ són els productes escalars de les columnes de A:

$$\mathsf{A}^t\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_n \\ \cdots & & & \\ \vec{a}_n\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_n \end{bmatrix}$$

Matrius ortogonals

Una matriu quadrada Q és *ortogonal* si $\mathsf{Q}^t\mathsf{Q} = \mathrm{I}$

- Una matriu Q és ortogonal sí i només sí la seua inversa és la transposada Q^t.
- Una matriu Q és ortogonal sí i només sí les seues columnes són ortonormals.
- ☞ Les matrius ortogonals conserven normes, angles, longituds i distàncies.

Cas complex: matriu adjunta i matrius hermítiques, antihermítiques i unitàries

- La matriu adjunta A^* és la transposada conjugada de A (el resultat de transposar i canviar totes les entrades pels complexos conjugats).
- Una matriu A és hermítica si $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$.
- Una matriu A és antihermítica si $\mathsf{A}^* = -\mathsf{A}$.
- Una matriu quadrada U és unitària si $\mathsf{U}^*\mathsf{U} = \mathrm{I}$.