Computación de Altas Prestaciones

Teoría: Sesión 10

1

Contenido

1. La descomposición LU (recordatorio)
2. Aplicaciones de la descomposición LU.
3. Descomposición LU con pivotación.
4. Aplicaciones de la descomposición LU con pivotación.
5. Descomposición LU de altas prestaciones.

2

1. Descomposición LU

- La descomposición LU de una matriz $A \in \Re^{n\times n}$ consiste en encontrar una matriz $L \in \Re^{n\times n}$ triangular inferior unidad y una matriz $U \in \Re^{n\times n}$ triangular superior de manera que $A=LU$.
- Ejemplo (n=4):

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}} = \overset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & 0 \\ l_{4,1} & l_{4,2} & l_{4,3} & 1 \end{pmatrix}} \overset{U}{\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & u_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & u_{4,4} \end{pmatrix}}$$

1. Descomposición LU

- Ejercicio. Calcular la descomposición LU de la matriz de coeficientes del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Etapa 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow F_2 = F_2 - \alpha_{21} F_1 \quad \rightarrow F_2 = F_2 - 2F_1 \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} -2 & -4 & 2 \\ +\;2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -5 & 1 \end{array}$$

$$\alpha_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ [2] & -5 & 1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow F_3 = F_3 - \alpha_{31} F_1 \quad \rightarrow F_3 = F_3 + 3F_1 \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 3 & 6 & -3 \\ +\,-3 & 9 & 6 \\ \hline 0 & 15 & 3 \end{array}$$

$$\alpha_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-3}{1} = -3$$

4. Descomposición LU

Etapa 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ [2] & -5 & 1 \\ [-3] & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 = F_3 - \alpha_{32} F_2 \quad \rightarrow F_3 = F_3 + 3F_2 \rightarrow$$

$$\alpha_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{15}{-5} = -3$$

$$\begin{array}{rrr} & -15 & 3 \\ + & 15 & 3 \\ \hline & 0 & 6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ [2] & -5 & 1 \\ [-3] & [-3] & 6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Cálculo del determinante de una matriz:
  1. Realizamos la descomposición LU de A, tal que $A=LU$.
  2. Calculamos el determinante de la matriz U, el cual coincide con el producto de sus elementos diagonales.

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot \det(U) =$$
$$= \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} \cdot \cdots \cdot u_{nn}$$

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Ejercicio. Calcular el determinante de la matriz de coeficientes del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

- Obtenemos la descomposición LU de A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

7

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Obtenemos el determinante de A como:

$$\det(A) = \det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} = 1 \cdot (-5) \cdot 6 = -30$$

8

CAP-MUIinf

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Resolución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax=b$, con $A \in \Re^{n \times n}$, $x \in \Re^{n}$, $b \in \Re^{n}$. Para ello:
  1. Realizamos la descomposición LU de A, tal que $A=LU$.
  2. Resolvemos dos sistemas de ecuaciones triangulares:

$$Ax = b \longleftrightarrow L\underbrace{(Ux)}_{y} = b \quad \begin{cases} 1^{\circ} : Ly = b. \\ 2^{\circ} : Ux = y. \end{cases}$$

9

CAP-MUIinf

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Ejercicio. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante la descomposición LU:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

- Obtenemos la descomposición LU de A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

10

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Resolvemos el sistema $Ly=b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow y=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

- Resolvemos el sistema $Ux=y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow x=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

11

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Resolución simultánea de sistemas de ecuaciones. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$AX=B$, $A \in \Re^{n\times n}$, $X \in \Re^{n\times m}$ y $B \in \Re^{n\times m}$.

$$AX=B \rightarrow A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix} \begin{cases} \boxed{Ax_1=b_1} \\ \boxed{Ax_2=b_2} \\ \vdots \\ \boxed{Ax_m=b_m} \end{cases}$$

1. Como los m sistemas tienen la misma matriz de coeficientes A, calcularemos su descomposición LU.
2. Resolveremos los m sistemas de ecuaciones lineales, resolviendo sistemas de ecuaciones triangulares:

$$LUx_1=b_1 \leftrightarrow \begin{cases} Ly=b_1 \\ Ux_1=y \end{cases} \quad LUx_2=b_2 \leftrightarrow \begin{cases} Ly=b_2 \\ Ux_2=y \end{cases} \cdots \quad LUx_m=b_m \leftrightarrow \begin{cases} Ly=b_m \\ Ux_m=y \end{cases}$$

12

CAP-MUIinf

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Ejercicio. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante la descomposición LU:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & -2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

- Obtenemos la descomposición LU de A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

13

CAP-MUIinf

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Resolvemos el sistema $Ly=b_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

- Resolvemos el sistema $Ux_1=y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

14

CAP-MUIinf

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Resolvemos el sistema $Ly=b_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

- Resolvemos el sistema $Ux_2=y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

15

CAP-MUIinf

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & -2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

16

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Cálculo de la inversa de una matriz $A \in \Re^{n\times n}$:

$$AA^{-1} = I \leftrightarrow AX = I$$

$$AX = I \to A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \to \begin{cases} \boxed{Ax_1 = e_1} \\ \boxed{Ax_2 = e_2} \\ \vdots \\ \boxed{Ax_n = e_n} \end{cases}$$

1. Como los n sistemas tienen la misma matriz de coeficientes A, calcularemos su descomposición LU.
2. Resolveremos los n sistemas de ecuaciones lineales, resolviendo sistemas de ecuaciones triangulares:

$$LUx_1 = e_1 \leftrightarrow \begin{cases} Ly = e_1 \\ Ux_1 = y \end{cases} \quad LUx_2 = e_2 \leftrightarrow \begin{cases} Ly = e_2 \\ Ux_2 = y \end{cases} \quad \cdots \quad LUx_n = e_n \leftrightarrow \begin{cases} Ly = e_n \\ Ux_n = y \end{cases}$$

DSIC DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y COMPUTACIÓN

17

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Ejercicio. Calcular, mediante la descomposición LU, la segunda columna de la inversa de la matriz de coeficientes del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

- Para calcular la inversa de A, debemos resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DSIC DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y COMPUTACIÓN

18

CAP-MUIinf

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- Como nos piden la segunda columna, resolvemos el sistema $Ax_2=e_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Obtenemos la descomposición LU de A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

19

CAP-MUIinf

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- En primer lugar, resolvemos el sistema $Ly=e_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Finalmente, debemos resolver el sistema $Ux_2=y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

20

2. Aplicaciones de la descomposición LU

- La inversa completa de la matriz A sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & -0.1 & 0.0333 \\ -0.5 & 0.5 & 0.1667 \end{pmatrix}$$

21

3. Descomposición LU con pivotación

- Algoritmo básico sin pivotación y con sobreescritura. Entrada: matriz A de tamaño nxn. Salida: matriz A *sobreescrita con* L (triangular inferior unidad) y U (triangular superior), tal que $L*U=A$.

```
for k=1:n-1
    if A(k,k)==0
        error('Encontrado pivote nulo')
    end
    for i=k+1:n
        A(i,k) = A(i,k)/A(k,k)
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j)
        end
    end
end
```

22

3. Descomposición LU con pivotación

- La descomposición LU presenta dos grandes inconvenientes:
  1. Puede ocurrir que en una etapa el elemento pivote sea nulo.
  2. Puede presentar grandes errores si el elemento pivote en una etapa es muy pequeño, en valor absoluto, con relación a los elementos que se encuentran debajo de él.
- Solución: Utilizar pivotación (intercambio de filas) para que la descomposición LU sea estable o pueda llevarse a cabo si encontramos un elemento pivote $A(k,k)$ nulo.

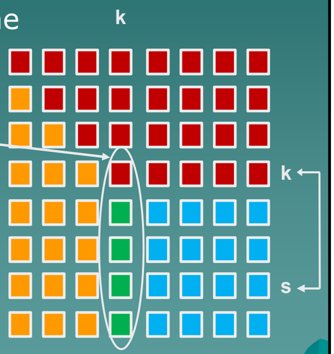
3. Descomposición LU con pivotación

- Tipos de pivotación:
  1) Pivotación total:
     - Segura pero costosa.
  2) Pivotación parcial de filas:
     - Se selecciona como pivote al elemento de la columna k, situado entre las filas k y n, más grande en valor absoluto.
     - Se realiza un intercambio entre los elementos de la fila k y la fila donde se encuentra el mayor elemento, en valor absoluto.
     - Ofrece un buen balance entre coste y precisión. Es la que más se usa.

3. Descomposición LU con pivotación

- El algoritmo de la descomposición LU con pivotación parcial de filas para una matriz $A \in \Re^{n \times n}$ sería:
  - En cada etapa k $(k = 1{:}n\text{-}1)$ se obtiene el índice de fila s que verifica:

$$\left|a_{sk}\right| = \max_{k \le i \le n} \left\{ \left|a_{ik}\right| \right\}$$

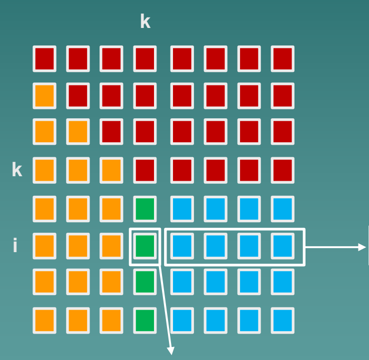


- Si dicho máximo es distinto de 0:
  - Se intercambian todos los elementos de las filas k y s de la matriz A y los elementos k y s del vector piv.
  - Se aplican las transformaciones de Gauss para modificar las filas que están por debajo de la nueva fila k, desde la columna k en adelante.
- Si el máximo anterior es 0, entonces no se hace nada.

25

3. Descomposición LU con pivotación

- Transformaciones de Gauss: modificamos las filas que están por debajo de la fila k, desde la columna k en adelante:



$$F_i = F_i - \alpha_{ik} * F_k$$

$$\alpha_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

$$\left|\alpha_{ik}\right| \le 1$$

26

3. Descomposición LU con pivotación

- Algoritmo con pivotación parcial y con sobreescritura. Entrada: matriz A de tamaño nxn y vector piv de tamaño n tal que $piv(i)=i$. Salida: matriz A *sobreescrita con* L (triangular inferior unidad) y U (triangular superior), y un vector piv tal que $A(piv,:)=L*U$.

```
for k=1:n-1
    Determinar la fila s tal que |A(s,k)|=max_{k<=i<=n} |A(i,k)|
    Intercambiar las filas k y s de A
    Intercambiar los elementos de las posiciones k y s de piv
    for i=k+1:n
        A(i,k) = A(i,k)/A(k,k)
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j)
        end
    end
end
```


3. Descomposición LU con pivotación

- Ejercicio. Calcular la descomposición LU con pivotación de la matriz de coeficientes del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Etapa 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & 12 & 8 \end{pmatrix}, piv = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, piv = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F_2 = F_2 - \alpha_{21} F_1 \qquad \rightarrow F_2 = F_2 + 0.5F_1 \rightarrow \begin{array}{rrr} -2 & 6 & 4 \\ +\ 2 & -4 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ [-0.5] & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{-4} = -0.5$$

3. Descomposición LU con pivotación

$$\begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ [-0.5] & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 = F_3 - \alpha_{31}F_1 \rightarrow F_3 = F_3 + 0.25F_1 \rightarrow \begin{array}{rrr} & -1 & 3 & 2 \\ + & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 4 & 2 \end{array}$$

$$\alpha_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{-4} = -0.25$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ [-0.5] & 2 & 3 \\ [-0.25] & 4 & 2 \end{pmatrix}, \; piv = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Etapa 2: $\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ [-0.25] & 4 & 2 \\ [-0.5] & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; piv = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow F_3 = F_3 - \alpha_{32}F_2 \rightarrow F_3 = F_3 - 0.5F_2 \rightarrow \begin{array}{rrr} & -2 & -1 \\ + & 2 & 3 \\ \hline & 0 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ [-0.25] & 4 & 2 \\ [-0.5] & [0.5] & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{4} = 0.5$$

29

CAP-MUIinf

3. Descomposición LU con pivotación

$$\begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ [-0.25] & 4 & 2 \\ [-0.5] & [0.5] & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad piv = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

30

4. Aplicaciones de la descomposición LU con pivotación

- Las aplicaciones son las mismas que en el caso de la LU sin pivotación.
- Veamos, por ejemplo, la resolución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax=b$, con $A \in \Re^{n\times n}$, $x \in \Re^n$, $b \in \Re^n$. Para ello:
  1. Realizamos la descomposición LU con pivotación de A, tal que A(piv,:)=LU.
  2. Permutamos el vector b de acuerdo al vector piv:
     b=b(piv).
  3. Resolvemos dos sistemas de ecuaciones triangulares, con el nuevo vector b:

$$L\overset{y}{(Ux)} = b \begin{cases} 1^{\circ}: Ly = b. \\ 2^{\circ}: Ux = y. \end{cases}$$

4. Aplicaciones de la descomposición LU con pivotación

- Ejercicio. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante la descomposición LU con pivotación parcial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ -36 \end{pmatrix}$$

- Calculamos la descomposición LU con pivotación parcial:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad piv = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

CAP-MUIinf

4. Aplicaciones de la descomposición LU con pivotación

- Reordenamos el vector b:

$$b=\begin{pmatrix}-3\\20\\-36\end{pmatrix},\ piv=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\rightarrow b=b(piv)=\begin{pmatrix}-36\\-3\\20\end{pmatrix}$$

- Resolvemos el sistema $Ly=b$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-0.25&1&0\\-0.5&0.5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-36\\-3\\20\end{pmatrix}\rightarrow y=\begin{pmatrix}-36\\-12\\8\end{pmatrix}$$

33

CAP-MUIinf

4. Aplicaciones de la descomposición LU con pivotación

- Resolvemos el sistema $Ux=y$:

$$\begin{pmatrix}-4&12&8\\0&4&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-36\\-12\\8\end{pmatrix}\rightarrow x=\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$$

34

5. Descomposición LU de altas prestaciones

- Existen muchas posibles descomposiciones LU.
- Las versiones más eficientes son "a bloques", para disminuir el tráfico de datos entre memorias. Estas versiones necesitan:
  1) Una descomposición LU "pequeña" (para matrices que quepan en la caché).
  2) Una subrutina lo más eficiente posible de producto de matrices.
  3) Subrutinas auxiliares para resolver sistemas triangulares con múltiples lados derechos.
- La versión en Matlab (de la librería Lapack, implementación de Intel) combina versión a bloques con paralelización (especialmente en el producto de matrices) y vectorización (AVX, SSE) de los bucles más internos.