Algorisme per a diagonalitzar una matriu real

1. Calculeu el determinant $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})$
2. Resoleu l'equació característica: $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$.

   (això ens proporciona els valors propis i les multiplicitats algèbriques)
3. Si algun valor propi no és real, llavors A no és diagonalitzable.

   En cas contrari,

   3.1 Calculeu els subespais propis $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})$

   (això ens proporciona els vectors propis i les multiplicitats geomètriques)

   3.2 Compareu les multiplicitats algèbrica i geomètrica de cada valor propi.

   3.3 Comproveu si tots els valors propis són geomètricament complets.
   Si no tots ho són, llavors A no és diagonalitzable.
   En cas contrari, A és diagonalitzable

   3.3.1 Elegiu una base de cada subespai propi i uniu-les totes per a formar una base de $\mathbb{R}^n$: $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$

   3.3.2 Construïu la matriu $\mathsf{P} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$

   3.3.3 Construïu la matriu $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ on λ_i és el valor propi associat a $\vec{u}_i$.

Casos especials

1. Els valors propis simples sempre són geomètricament complets
2. Si tots els valors propis són simples, llavors A és diagonalitzable com a matriu complexa
   - Si tots els valors propis són simples i reals, llavors A és diagonalitzable
3. Si A és triangular, llavors els valors propis són els elements de la diagonal de A
4. Si A és simètrica i real, llavors A és *ortogonalment* diagonalitzable:

$$\mathsf{A} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^t, \qquad \text{(Q és una matriu ortogonal)}$$

Recordeu: Un valor propi es diu geomètricament complet quan coincideixen les multiplicitats algebraica i geomètrica