Álgebras de Boole.

Cristina Jordán Lluch

Instituto de Matemática Multidisciplinar

Departamento de Matemática Aplicada

Universitat Politècnica de València

Definición

Un álgebra de Boole es un conjunto A dotado de dos leyes de composición interna + y . que verifican las siguientes propiedades

Asociativas	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
Neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Complementario	$a + \bar{a} = 1$	$a \cdot \bar{a} = 0$

Ejemplos

- Dado E un conjunto, el conjunto de partes de E, $\mathcal{P}(E)$, es un álgebra de Boole con las operaciones "unión" e "intersección"
- El conjunto cociente de las formas proposicionales respecto a la relación "equivalencia lógica" (que es una RBE) es un álgebra de Boole con las operaciones $\vee$ y $\wedge$
- Se llama álgebra de Boole binaria al conjunto $A=\{0, 1\}$ (con $0 \neq 1$) con las operaciones booleanas suma y producto.

Propiedades

Dada un álgebra de Boole (A, +,.) para cualquier a y b de A se verifica

Leyes simplificativas $a + (a \cdot b) = a$ $a \cdot (a + b) = a$

Idempotentes $a + a = a$ $a \cdot a = a$

Absorbentes $a + 1 = 1$ $a \cdot 0 = 0$

Doble complementario $a = \bar{\bar{a}}$

Leyes de Morgan $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$

El complementario de cada elemento es único

Si A no es trivial (un solo elemento) **entonces** $\mathbf{1 \neq 0}$ **y** $\mathbf{a \neq \bar{a}}$

Los elementos 1 y 0 son únicos

Neutros complementarios $0 + 1 = 1$ $0 \cdot 1 = 0$

$\mathbf{\bar{1} = 0}$ **y** $\mathbf{\bar{0} = 1}$

Funciones booleanas

Si A es un álgebra de Boole, se llama **función booleana de orden n sobre A** a cualquier aplicación $f: A^n \longrightarrow A$ tal que la imagen de una n-tupla, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ se obtiene aplicando un número finito de veces las operaciones del álgebra de Boole, suma, producto y complementario, a los elementos $x_1,x_2,\ldots,x_n$

Ejemplo

1.- Si A es un álgebra de Boole, la aplicación $f:A^3 \longrightarrow A$ dada por

$$f(x,y,z) = x + xy + \overline{y}\, z$$

es una función booleana de orden 3

2.- Si A es el álgebra de Boole de las partes de un conjunto E, la operación anterior se corresponde con la operación

$$X \cup (X \cap Y) \cup (Y^c \cap Z)$$

Representación de funciones booleanas

Una función booleana puede tener diferentes expresiones.

Ejemplo

$f(x, y, z)= x+ x \cdot y + \overline{y} \cdot z$ o $f(x , y, z)= x+ \overline{y} \cdot z$

Cuestiones

a) ¿Cómo saber si dos funciones booleanas coinciden?

b) ¿Cómo obtener la expresión más sencilla de una función booleana?

Términos minimales y maximales

Un **término minimal de orden n** (o minterm) es una función booleana de la forma

$$m(x_1,x_2,\ldots,x_{n)} = b_1 \cdot b_2 \cdot\ldots\cdot b_n$$

donde bi =xi o $\overline{bi}$ =xi para todo i=1, 2, … , n

Ejemplo

$m(x,y,z,t)= x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot t$ es un término minimal de cuarto orden

$m(x,y,z)= \overline{x} \cdot y \cdot z$ es un término minimal de tercer orden

Un **término maximal de orden n** (o maxterm) es una función booleana de la forma

$$m(x_1,x_2,\ldots,x_{n)} = b_1+ b_2+\ldots +b_n$$

donde bi =xi o $\overline{bi}$ =xi para todo i=1, 2, … , n

Ejemplo

$M(x,y,z,t)= \overline{x} + y + z + t$ es un término maximal de cuarto orden

$M(x,y,z)= x + \overline{y} + z$ es un término maximal de tercer orden

Términos minimales y expresiones binarias

Propiedad

Si m es un término **minimal** de orden n en un álgebra de Boole, entonces existe una única n-tupla de ceros y unos tal que m toma el valor **uno** (*m toma valor cero en las otras n-tuplas binarias*)

Ejemplo

El minterm de tercer orden $m(x, y, z)= x \cdot \overline{y} \cdot z$ sólo toma valor 1 para la terna (1, 0, 1).

Si se sustituye (x, y, z) por cualquier otra terna el resultado será 0.

Notación

Es usual denotar el minterm $m(x_1, x_2, \ldots, x_n)=b_1 b_2 \ldots b_n$ mediante un número binario de n dígitos en el que el n–ésimo dígito es 1 si $b_i=x_i$ y 0 si $b_i=\overline{x}_i$, es decir, la n-tupla para la que tome valor 1.

Así el ejemplo anterior sería m_{101}.

Términos maximales y expresiones binarias

Propiedad

Si m es un término **maximal** de orden n en un retículo de Boole, entonces existe una única n-tupla de ceros y unos tal que m toma el valor **cero** (*m toma valor uno en las otras n-tuplas binarias*)

Ejemplo

El maxterm de tercer orden $M(x,y,z)= x + \overline{y} + z$ sólo toma valor 0 para la terna (0,1,0).

Si se sustituye (x,y,z) por cualquier otra terna el resultado será 1.

Notación

Es usual denotar el maxterm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)=b_1b_2\ldots b_n$ mediante un número binario de n dígitos en el que el n–ésimo dígito es 1 si $b_i=\overline{x_i}$ y 0 si $b_i= x_i$, es decir, la n-tupla para la que tome valor 0.

Así el ejemplo anterior sería M_{010}.

Forma Normal Disyuntiva

Teorema

Toda función booleana no nula f puede espresarse de forma **única**, excepto por el orden, como suma de diferentes términos minimales. Esta expresión se conoce como **forma normal disyuntiva.**

Notas.

- Los términos minimales que aparecen en la forma normal disyuntiva de una función booleana de orden n son aquellos asociados a las n-tuplas binarias donde f toma valor 1.

- Por tanto para obtener la forma normal disyuntiva de una función de orden n se calculará la tabla de verdad de f y se seleccionarán las líneas en las que la función vale 1

Cálculo de la Forma Normal Disyuntiva

Ejemplo

Sea $f(x,y) = x \cdot y + \overline{x}$ una función booleana no nula f de segundo orden.

Consideremos su tabla de verdad:

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La forma normal disyuntiva sería:

$$f(x,y) = m_{00}(x,y) + m_{01}(x,y) + m_{11}(x,y) =$$

$$= \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y + x \cdot y$$

Forma Normal Conjuntiva

Teorema

Toda función booleana no nula f puede espresarse de forma **única**, excepto por el orden, como producto de diferentes términos maximales. Esta expresión se conoce como **forma normal conjuntiva.**

Notas.

- Los términos maximales que aparecen en la forma normal conjuntiva de una función booleana de orden n son aquellos asociados a las n-tuplas binarias donde f toma valor 0.

- Por tanto, para obtener la forma normal conjuntiva de una función de orden n se calculará la tabla de verdad de f y se seleccionarán las líneas en las que la función vale 0.

Cálculo de la Forma Normal Conjuntiva

Ejemplo

Sea $f(x,y) = x \cdot y + \overline{x}$ una función booleana no nula f de segundo orden.

Consideremos su tabla de verdad:

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La forma normal disyuntiva sería:

$f(x,y) = M_{01}(x,y) =$

$= \overline{x} + y$

Forma Normal Disyuntiva y Forma Normal Conjuntiva

Ejemplo

Sea $f(x,y) = x \cdot y + \overline{x}$ una función booleana no nula f de segundo orden.

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Forma normal conjuntiva (FNC)

$$f(x,y) = M_{10}(x,y) =$$

$$= x + y$$

Forma normal disyuntiva (FND)

$$f(x,y) = m_{00}(x,y) + m_{01} + m_{11} =$$

$$= \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y + x \cdot y$$

Nota

Observamos que para pasar de FNC a FND, hay que escoger la suma de minterms m_{ij} donde (ij) no aparezcan como subíndices de los maxterms en la FNC

Análogamente para pasar de FND a FNC

Simplificación de la forma normal

Para obtener una simplificación de una FND podemos aplicar los métodos de

a) Método de Karnaugh

b) Método De Quine-Mcluskey