





# Fundamentos de computadores

TEMA 2. PRINCIPIOS DEL DISEÑO DIGITAL

### **Objetivos**



- Conocer las funciones lógicas y su representación
- Diseñar circuitos lógicos sencillos
- Fundamentos del Álgebra de Boole
- Métodos de simplificación. Mapas de Karnaugh



### Bibliografía



### Introducción a los Computadores.

J. Sahuquillo y otros.

Ed. SP-UPV, 1997 (ref. 97.491)



### Recursos de aprendizaje



- Poliformat, sección "Recursos"
  - Ejercicios sin solución.
  - Soluciones a los ejercicios.
  - Entrenador de Karnaugh.
  - Exámenes de años anteriores.
- Poliformat, sección "Contenidos"
  - Módulo 2: Principios de diseño digital.
    - » Tablas de verdad.
    - » Puertas lógicas.



### Índice



- Introducción
- Funciones lógicas y tablas de verdad
- Puertas lógicas
- Análisis de circuitos
- Álgebra de Boole
- Formas canónicas de representar una función lógica
- Simplificación de funciones lógicas
  - Mapas de Karnaugh



#### Introducción



- Transistor
  - Unidad física mínima de diseño digital
- Puerta lógica
  - Unidad lógica mínima de diseño digital
- Circuito combinacional
  - Las salidas sólo dependen del valor de las entradas en el momento actual
    - Ejemplo. Selección de la bebida en una máquina de café



#### Introducción



#### Circuito secuencial

- Las salidas dependen del valor actual de las entradas y de la secuencia de valores anteriores (historia) del circuito.
  - Ejemplo. Monedero de una máquina de café

#### Unidad funcional

 Suma de pequeños circuitos que realizan una función definida



### Índice



- Introducción
- Funciones lógicas y tablas de verdad
- Puertas lógicas
- Análisis de circuitos
- Álgebra de Boole
- Formas canónicas de representar una función lógica
- Simplificación de funciones lógicas
  - Mapas de Karnaugh



### Funciones lógicas y tablas de verdad



### Función lógica

- Expresión formal del comportamiento de un circuito lógico
- Permite determinar la salida del circuito en función de las entradas
- Aridad = número de variables lógicas de entrada
- Valoración = una de las combinaciones de valores de las entradas



### Funciones lógicas y tablas de verdad (ii)

#### **FCO**

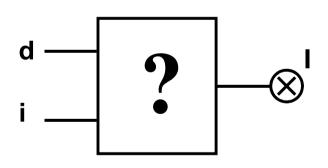
- Tabla de verdad
  - Forma tabular de expresar una función lógica
  - Para cada entrada o salida se asigna una columna
  - Para cada valoración se asigna una fila
  - Entradas a la izquierda, salidas a la derecha
  - Valoraciones siguiendo la numeración binaria



### Tablas de verdad. Ejemplos



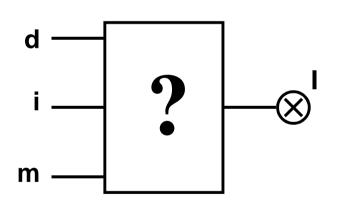
- Luz interior de un coche
  - A partir de dos entradas d, i (puertas derecha e izquierda),
     diseñad un circuito que encienda una luz I cuando alguna de las puertas esté abierta



d	i	I
0	0	0
1	0 1	1

### Tablas de verdad. Ejemplos (ii)

- Luz interior de un coche (ii)
  - Añadir una entrada m de encendido manual: Si la entrada m está activada (*m*=1) encender la luz independientemente del estado (abierto/cerrado) de las puertas



m	d	i	I		m	d	i	
0 0 0 0 1 1	0 0 1 1 0	0 1 0 1 0	0 1 1 1 1 1		0 0 0 0 1	0 0 1 1 X	0 1 0 1 X	
1 1	1	0		,	Tabl	a de	e ve	2

erdad reducida



### Tablas de verdad. Ejemplos (iii)



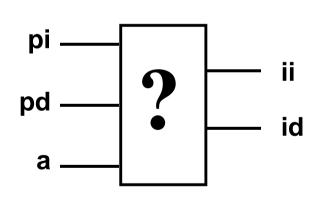
- Funciones con entradas indiferentes
  - Aquellas combinaciones de valores de entrada para las que no importa el valor de la salida, por
    - tratarse de una combinación de las entradas para la que no se ha especificado el comportamiento del circuito
    - o tratarse de una combinación de las entradas que es imposible
  - En la tabla de verdad, la salida para estas valoraciones es X



### Tablas de verdad. Ejemplos (iv)

#### **FCO**

- Intermitentes de un coche
  - A partir de 3 entradas: palanca a la izquierda (*pi*), palanca a la derecha (*pd*) y avería (*a*), generar las salidas que activen los intermitentes izquierdo (*ii*) y derecho (*id*)



а	pi	pd	i=	id
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	X	X
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	X	X

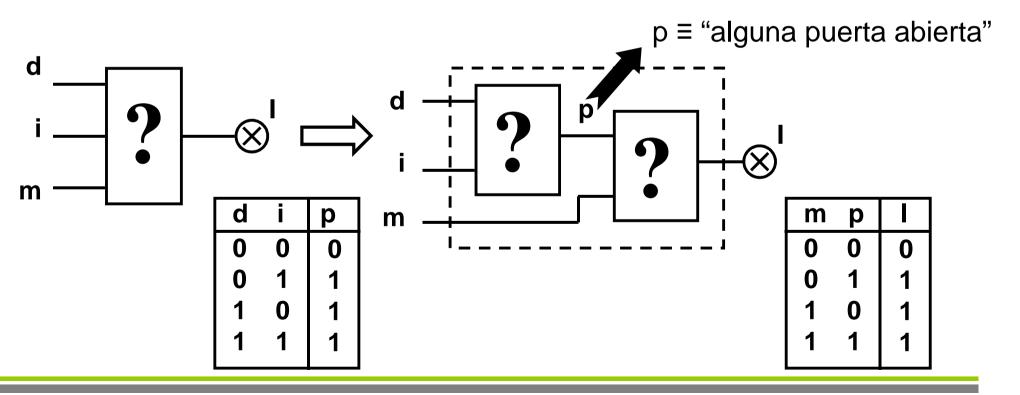
Tabla de verdad de una <u>función</u> con entradas indiferentes



### Composición de funciones

#### **FCO**

- Función compuesta. Aquella en la que la salida de una (sub)función es utilizada como entrada de otra
- Ejemplo: Luz interior de coche con encendido manual



### Índice



- Introducción
- Funciones lógicas y tablas de verdad
- Puertas lógicas
- Análisis de circuitos
- Álgebra de Boole
- Formas canónicas de representar una función lógica
- Simplificación de funciones lógicas
  - Mapas de Karnaugh



### Puertas lógicas

 Puerta lógica. Circuito electrónico que implementa una función lógica elemental

- Tipos
  - Básicos: AND, OR, NOT
  - Otras: XOR
  - Con salida negada: NAND, NOR, XNOR
- Tecnologías. Base física de construcción
  - TTL, CMOS



### Puertas lógicas (ii)

#### **FCO**

#### AND

- Producto lógico ("y")
- Ampliable

а	a-b
b	)

b	а	a-b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

#### OR

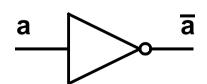
- Suma lógica ("o")
- Ampliable

a	_		a+b
b		<b>&gt;</b>	
	Z		

b	а	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

#### NOT

- Negación lógica ("no")
- No ampliable



а	ā
0	1
1	0

#### XOR

- OR Exclusiva
- No ampliable

<u>a</u>	7/_	
b		<u>a⊕b</u>
	<del></del> /	

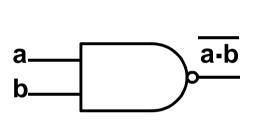
a	a⊕b
0	0
1	1
0	1
1	0
	0



### Puertas lógicas con salida negada

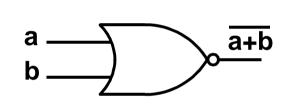
**FCO** 

- NAND = NOT (AND)
  - Ampliable



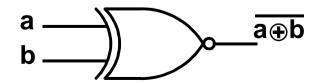
b	а	a-b
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- NOR = NOT (OR)
  - Ampliable



b	a	a+b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- XNOR = NOT (XOR)
  - No ampliable



b	а	a⊕b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



### Puertas lógicas. Tecnologías

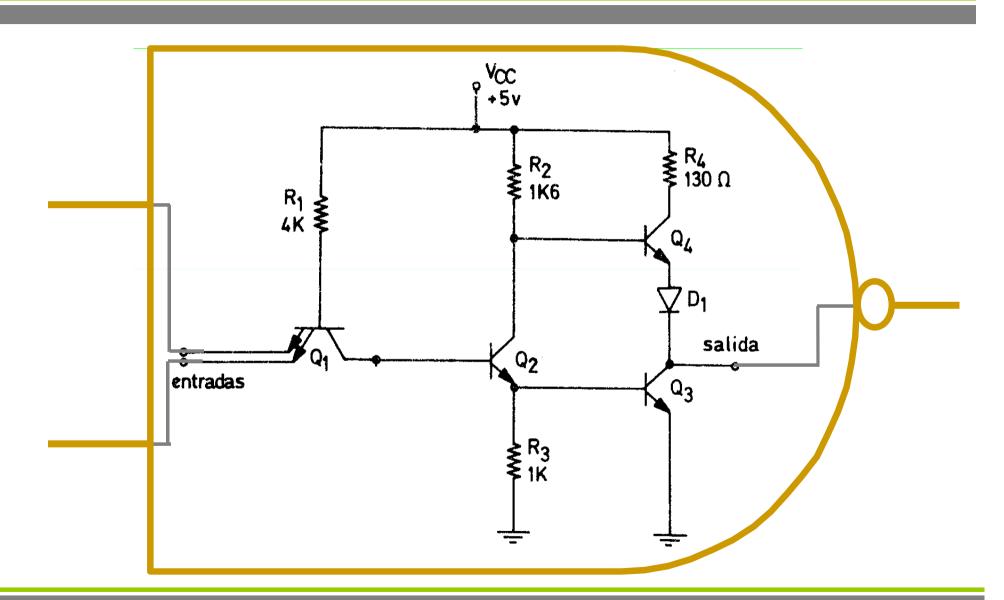


- Cada tecnología de construcción emplea diferentes tipos de elementos físicos (transistores) y tensiones para representar los valores lógicos "0" y "1"
- TTL = Transistor-Transistor Logic
  - Basada en transistores bipolares
  - Alta velocidad, alto consumo, difícil integración
- CMOS = Complementary Metal Oxide Semiconductor
  - Basada en transistores MOSFET
  - Menor velocidad, bajo consumo, alta escala de integración



### Esquema físico de una NAND TTL

#### **FCO**





### Puertas lógicas. Integración.





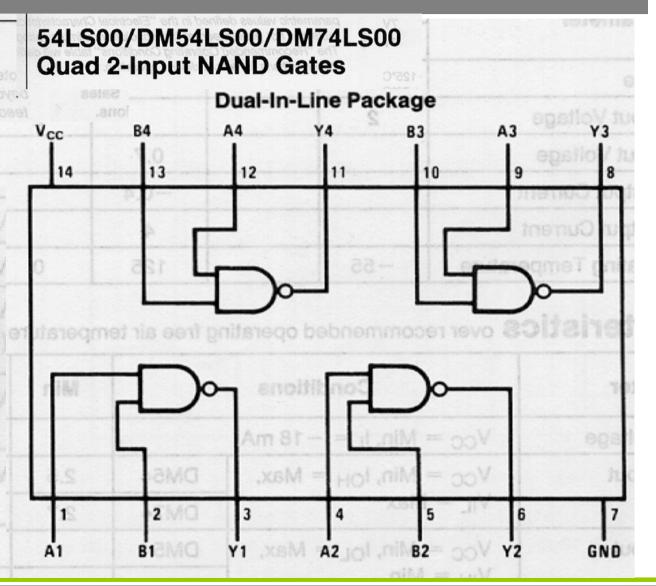
#### **Function Table**

$$Y = \overline{AB}$$

	Inp	uts	Output
N. E.	Α	В	cc = YAax
	g L	L	(ote 2H
1	L	Н	H
1	Н	L	H
1	Н	Н	L

H = High Logic Level

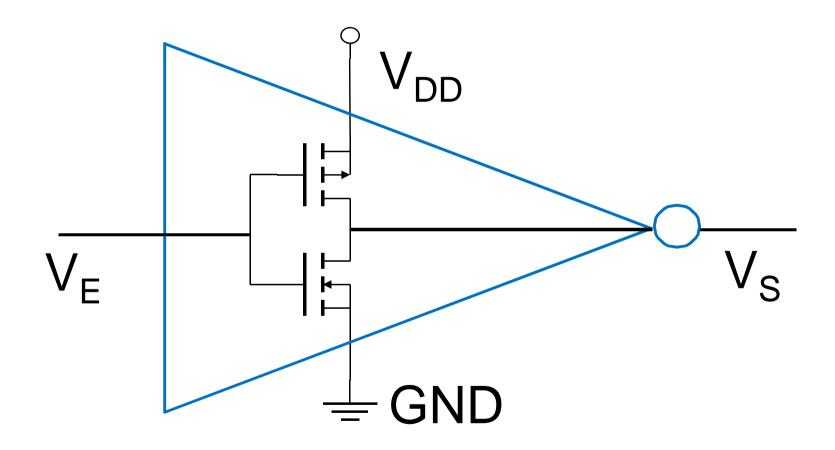
L = Low Logic Level





### Esquema físico de un inversor CMOS





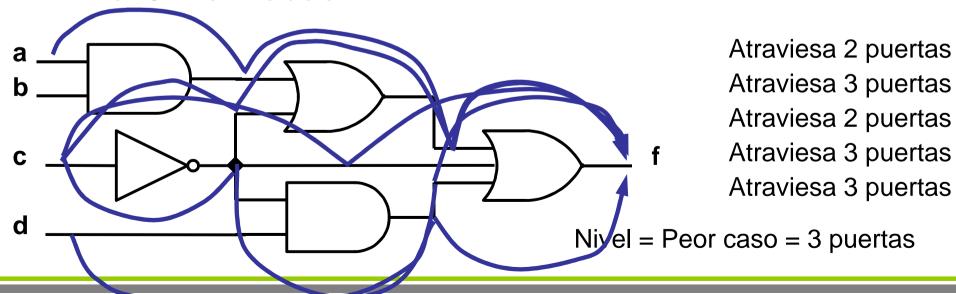


### Nivel de un circuito lógico

#### **FCO**

#### Nivel

- Número de puertas que hay que atravesar en el peor de los casos desde las entradas a las salidas del circuito
- Es una indicación del retardo del circuito
- Cada puerta tiene un retardo T
- Nivel 0 = entradas



### Índice



- Introducción
- Funciones lógicas y tablas de verdad
- Puertas lógicas
- Análisis de circuitos
- Álgebra de Boole
- Formas canónicas de representar una función lógica
- Simplificación de funciones lógicas
  - Mapas de Karnaugh



#### Análisis de circuitos

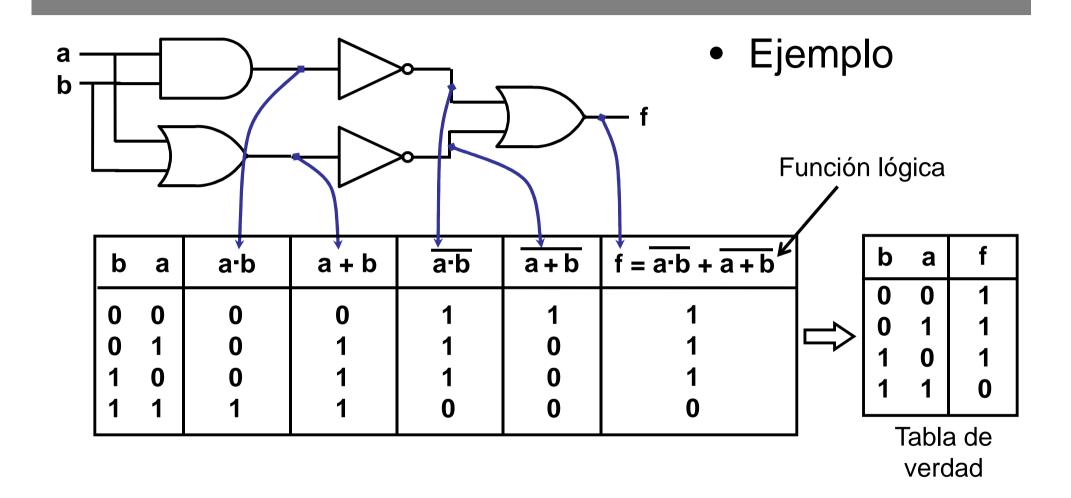


- Dado un circuito, se trata de obtener su función lógica y tabla de verdad
  - Función lógica: componiendo las subfunciones correspondientes a cada punto del circuito
  - Tabla de verdad: calculando la salida para todas las posibles combinaciones de entrada



### Análisis de circuitos (ii)



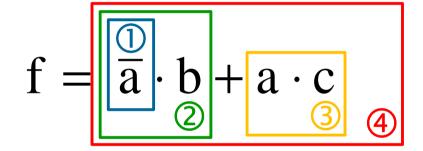


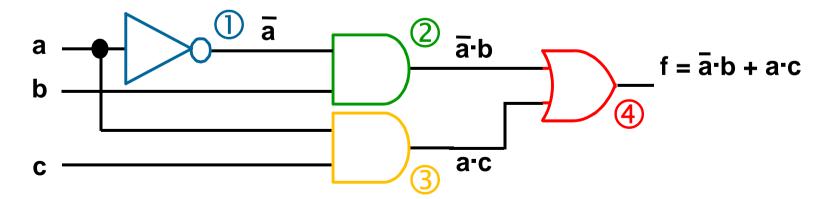
### Síntesis de un circuito lógico



- A partir de su función lógica:
  - Añadir e interconectar las puertas en el orden en que se evalúan los términos de la expresión lógica







### Índice



- Introducción
- Funciones lógicas y tablas de verdad
- Puertas lógicas
- Análisis de circuitos
- Álgebra de Boole
- Formas canónicas de representar una función lógica
- Simplificación de funciones lógicas
  - Mapas de Karnaugh



### Álgebra de Boole



- George Boole (s. XIX)
  - Matemático y filósofo inglés
  - Desarrolla una estructura algebraica con dos valores ("verdadero", "falso") y dos leyes de composición interna ("y", "o")

    Precedencia
  - Permite formalizar las reglas del razonamiento lógico

(si no hay paréntesis)

- Claude Shannon (1938, Lab. Bell)
  - Adapta este álgebra a la computación
    - Valores 0 y 1, leyes de composición AND y OR
  - Permite formalizar las reglas de construcción de circuitos digitales

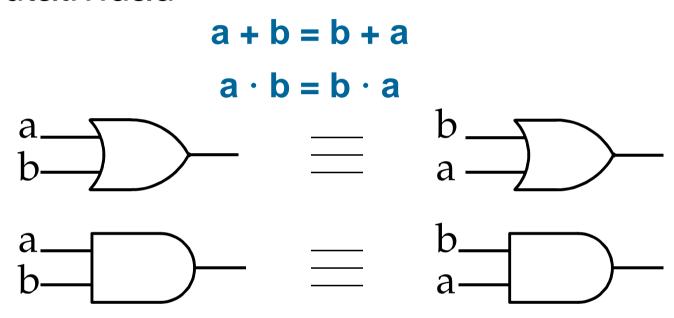
Puerta Iógica	Símbolo estándar	
AND	•	
OR	+	
NOT	_	
XOR	$\oplus$	



### Álgebra de Boole. Axiomas



Conmutatividad



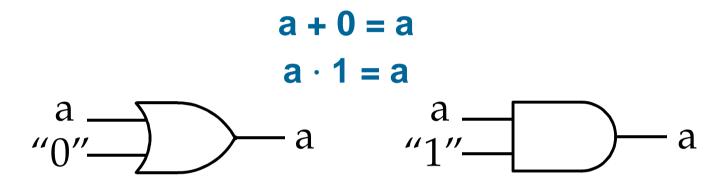
Distributividad

$$(a + b) \cdot (a + c) = a + (b \cdot c)$$
  
 $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$ 

### Álgebra de Boole. Axiomas (ii)



Existencia de elemento neutro



Existencia de elemento complementario

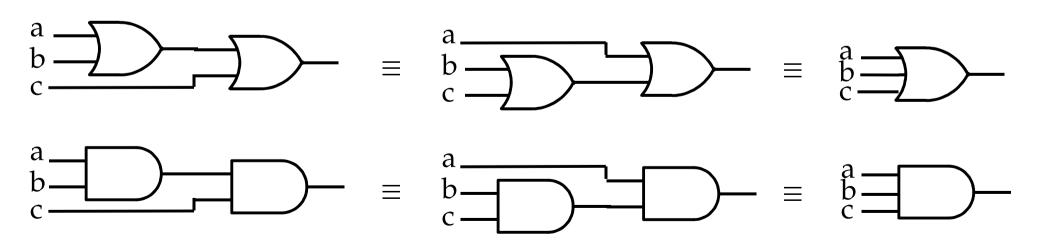
$$a + \overline{a} = 1$$
  
 $a \cdot \overline{a} = 0$ 

## Álgebra de Boole. Propiedades

Asociativa

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$
  
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ 

 Permite construir puertas con mayor número de entradas a partir de puertas más pequeñas:



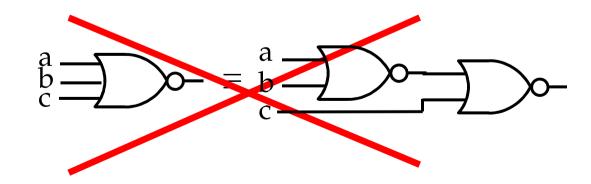
### Álgebra de Boole. Propiedades (ii)

#### **FCO**

- Asociativa (ii)
  - ¡OJO a las puertas con salida negada!:

$$\overline{a+b+c} = \overline{(a+b)+c}$$

$$\stackrel{a}{b} = \stackrel{a}{\longrightarrow} \stackrel$$



### Álgebra de Boole. Propiedades (iii)



Idempotencia

$$a + a = a$$
  $a \cdot a = a$ 

$$a - a = a$$

Permite construir puertas NOT a partir de NAND o NOR

$$\overline{a + a} = \overline{a} = \overline{a \cdot a}$$
 $a - \overline{a} = \overline{$ 

### Álgebra de Boole. Propiedades (iv)

**FCO** 

Involución

$$\overline{a} = a$$

$$a \longrightarrow \overline{a} \longrightarrow a$$

Leyes de De Morgan

$$(\overline{a+b+...+n}) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot ... \cdot \overline{n}$$

$$(\overline{a \cdot b \cdot ... \cdot n}) = \overline{a} + \overline{b} + ... + \overline{n}$$

$$- iOJO!$$

$$(\overline{a+b}) = \overline{a} + \overline{b}$$

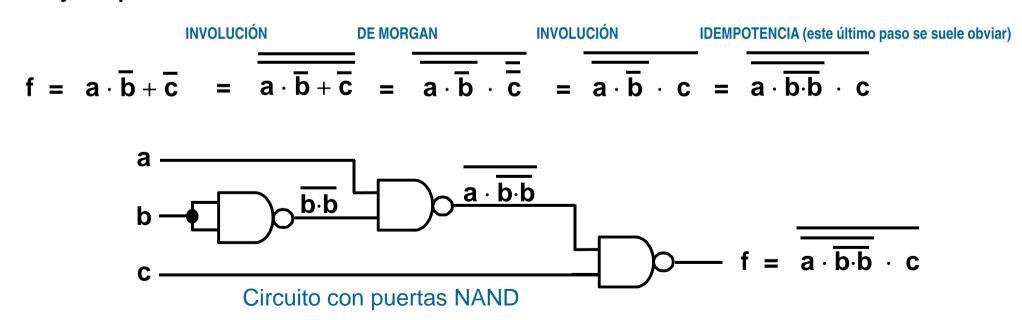
$$(\overline{a+b}) = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

# Álgebra de Boole. Propiedades (v)

#### **FCO**

 Aplicando adecuadamente las leyes de De Morgan, cualquier circuito lógico se puede implementar sólo con puertas NAND o NOR.

#### - Ejemplo:



## Índice



- Introducción
- Funciones lógicas y tablas de verdad
- Puertas lógicas
- Análisis de circuitos
- Álgebra de Boole
- Formas canónicas de representar una función lógica
- Simplificación de funciones lógicas
  - Mapas de Karnaugh



#### Formas canónicas



 Expresión algebraica única de una función lógica formulada con maxitérminos o minitérminos

- Minitérmino de orden n
  - Producto en el que aparecen las n variables lógicas de entrada
  - Cada variable aparece complementada si su valor es 0
  - Cada valoración da lugar a un minitérmino distinto
  - Los minitérminos se numeran según la cantidad representada por la valoración correspondiente



## Formas canónicas (ii)



- Maxitérmino de orden n
  - Suma en la que aparecen las n variables lógicas de entrada
  - Cada variable aparece complementada si su valor es 1
  - Cada valoración da lugar a un maxitérmino distinto
  - Los maxitérminos se numeran según la cantidad representada por la valoración correspondiente



# Forma canónica disyuntiva



- Forma canónica disyuntiva o suma de productos
  - Suma de los minitérminos pertenecientes a la función
  - Pertenecen a la función los minitérminos correspondientes a las valoraciones para las que la función vale 1

 $\sum$  (lista numerada de los minitérminos de la función)

listade vbles de la función

	b a
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	0 1

Forma canónica 
$$f = \sum_{b,a} (1,3) = \overline{b} \cdot a + b \cdot a$$

$$b, a \uparrow$$
Expresión algebraica equivalente



# Forma canónica conjuntiva



- Forma canónica conjuntiva o producto de sumas
  - Producto de los maxitérminos de la función
  - Pertenecen a la función los maxitérminos correspondientes a las valoraciones para las que la función vale 0

 $\prod$  (lista numerada de los maxitérminos de la función) listade vbles de la función

nº
0
1
2
3

Forma canónica 
$$f = \prod_{b,a} (0,2) = (b+a) \cdot (\overline{b}+a)$$
 Expresión algebraica equivalente



#### Formas canónicas. Interés



- Expresión única y compacta de una función lógica.
- Primera aproximación a la síntesis de circuitos a partir de una tabla de verdad:

b	а	f	b ~
0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 0 1	$f = \sum_{b,a} (1,3) = \overline{b} \cdot a + b \cdot a \Rightarrow \overline{a}$

 Cualquier función lógica puede implementarse mediante un circuito de nivel ≤ 3.

#### Formas canónicas. Entradas indiferentes

**FCO** 

- Formas canónicas para funciones con entradas indiferentes
  - Estas combinaciones se agrupan por separado en sumatorios o productorios del conjunto vacío Φ

	а	pi	pd	id
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1 2 3	0	1	0	0
3	0	1	1	X
<b>4 5</b>	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	X

$$id = \sum_{a, pi, pd} (1, 4, 5, 6) + \sum_{\phi} (3, 7)$$

$$id = \prod_{a, pi, pd} (0, 2) \bullet \prod_{\phi} (3, 7)$$

## Índice



- Introducción
- Funciones lógicas y tablas de verdad
- Puertas lógicas
- Análisis de circuitos
- Álgebra de Boole
- Formas canónicas de representar una función lógica
- Simplificación de funciones lógicas
  - Mapas de Karnaugh

## Simplificación



#### Simplificar una función

- Consiste en hallar una expresión algebraica equivalente a la de partida, pero de menor tamaño (menos términos, términos con menos variables)
- El objetivo es reducir al máximo el circuito con el que se implementa una función lógica

#### Metodología

- Algebraica. Aplicación de axiomas y propiedades del álgebra de Boole
  - Elemento complementario, elemento neutro, distributiva y asociativa
- Gráfica. Mapas de Karnaugh



## Simplificación por Karnaugh



#### Mapa de Karnaugh

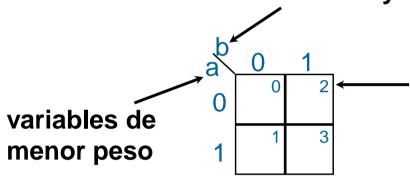
- Representación matricial de una tabla de verdad
- Una celda del mapa de Karnaugh representa una fila de la tabla de verdad
- En cada celda se coloca el valor de una salida de la función
- La disposición espacial de las celdas es tal que los términos adyacentes de la función lógica están en celdas adyacentes
- Dos términos se dicen adyacentes si sus valoraciones difieren en el valor de una sola variable
- Los bordes del mapa de Karnaugh deben considerarse adyacentes



# Simplificación por Karnaugh (ii)

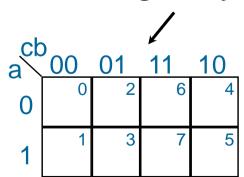
**FCO** 

 Mapas para funciones de 2, 3 y 4 variables variables de mayor peso



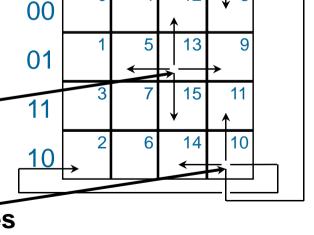
número de celda / término  $(2_{10} \Rightarrow b=1, a=0)$ 

numeración celdas en código Gray



celdas adyacentes a la celda 13

celdas adyacentes a la celda 10



## Simplificación por Karnaugh (iii)

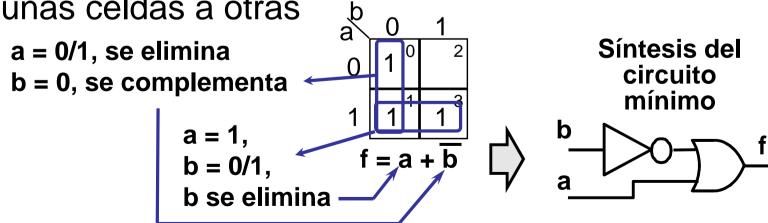


- Método de simplificación
  - Agrupar todas las celdas con el mismo valor, en uno o más grupos
  - Cada grupo contendrá un número de celdas adyacentes potencia de 2
  - Hacer los grupos lo más grande posible
  - El número de grupos debe ser mínimo
  - Una celda puede estar en uno o más grupos

# Simplificación por unos. Método

#### **FCO**

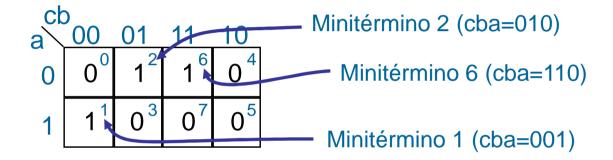
- Agrupar las celdas de valor 1
- Cada grupo representa a un término producto (no minitérmino, puesto que no aparecerán todas las vbles. de la función). Las variables a cero aparecerán complementadas
- Un grupo de 2<sup>k</sup> celdas elimina k variables del término resultante, y por tanto tendrá n-k variables
- En cada grupo se eliminan las variables que cambian de valor de unas celdas a otras



## Simplificación por unos. Fundamento

**FCO** 

 Cada celda a 1 representa un minitérmino que pertenece a la función



 La función sin simplificar incluiría todos los minitérminos que le pertenecen:

$$f = \sum_{c,b,a} (1, 2, 6) = \overline{c} \cdot \overline{b} \cdot a + \overline{c} \cdot b \cdot \overline{a} + c \cdot b \cdot \overline{a}$$

# Simplificación por unos. Fundamento (ii) FCO

 Los grupos de celdas adyacentes detectan minitérminos con un factor común:



- Su suma es simplificable. Algebraicamente sería:

ASOCIATIVA
$$\overline{c} \cdot b \cdot \overline{a} + c \cdot b \cdot \overline{a} = \overline{c} \cdot (b \cdot \overline{a}) + c \cdot (b \cdot \overline{a}) = (\overline{c} + c) \cdot (b \cdot \overline{a}) = 1 \cdot (b \cdot \overline{a}) = b \cdot \overline{a}$$

– Karnaugh obtiene el mismo resultado:

Celda 2 (cba=010)  
Celda 6 (cba=110)

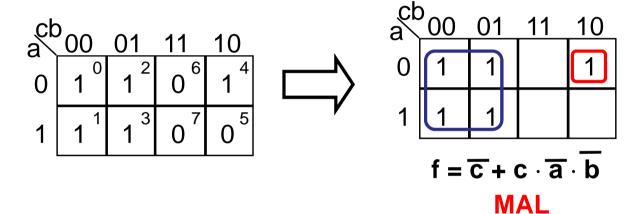
$$c = 0/1$$
, se elimina  
 $b = 1$ , se incluye  
 $a = 0$ , se complementa

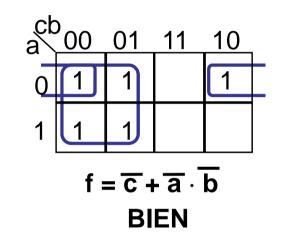


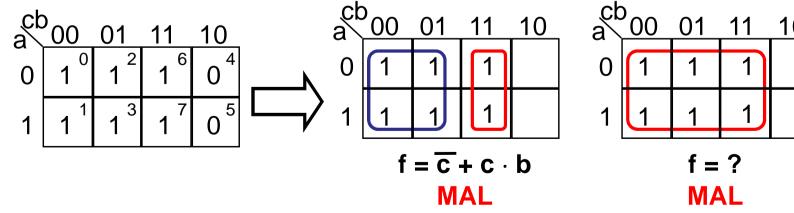
# Simplificación por unos. Ejemplos

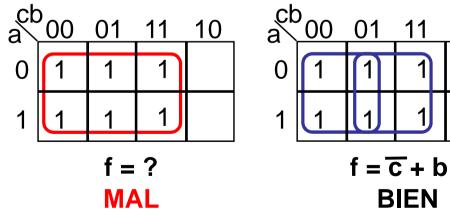
#### **FCO**

#### Ejemplos









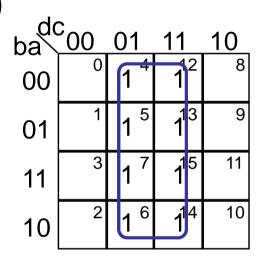


10

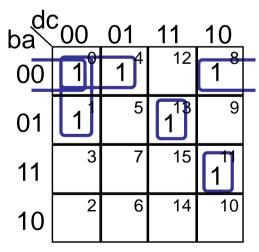
# Simplificación por unos. Ejemplos (ii)

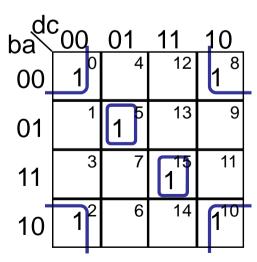
**FCO** 

• Ejemplos (cont.)



ba 00	00 1	0	)1 1 <sup>4</sup>	11	2	10
01	1	1	1 <sup>5</sup>	1	3	9
11	1	3	7	1	5	11
10	1	2	6	1	4	10



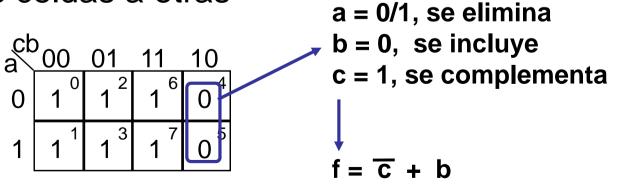




## Simplificación por ceros



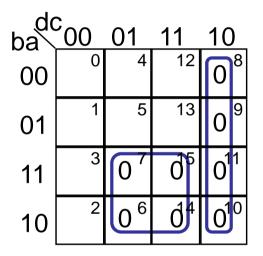
- Agrupar las celdas de valor cero
- Cada grupo representa un término suma (no maxitérmino, puesto que no aparecerán todas las variables de la función).
   Las variables de valor uno aparecerán complementadas
- Un grupo de 2<sup>k</sup> celdas elimina k variables del término resultante, y por tanto tendrá n-k variables
- En cada grupo se eliminan las variables que cambian de valor de unas celdas a otras



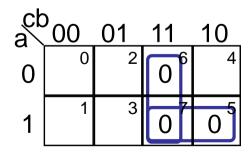
# Simplificación por ceros (ii)

#### FCO

#### Ejemplos



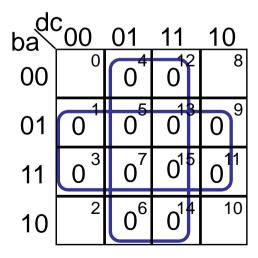
$$f = (\overline{d} + c) \cdot (\overline{c} + \overline{b})$$



ba\	00	01	11	10
00	0	4	12	0 °
01	0	5	13	0 9
11	0 3	7	15	0 <sup>11</sup>
10	02	6	14	0 <sup>10</sup>

ba do	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	013	09
11	03	0 7	0,5	11
10	0 <sup>2</sup>	0 6	014	0 0

do ba	00	01	11	10
00	0	4	12	0
01	1	0 5	01β	0 9
11	3	0 7	015	011
10	2	6	14	010

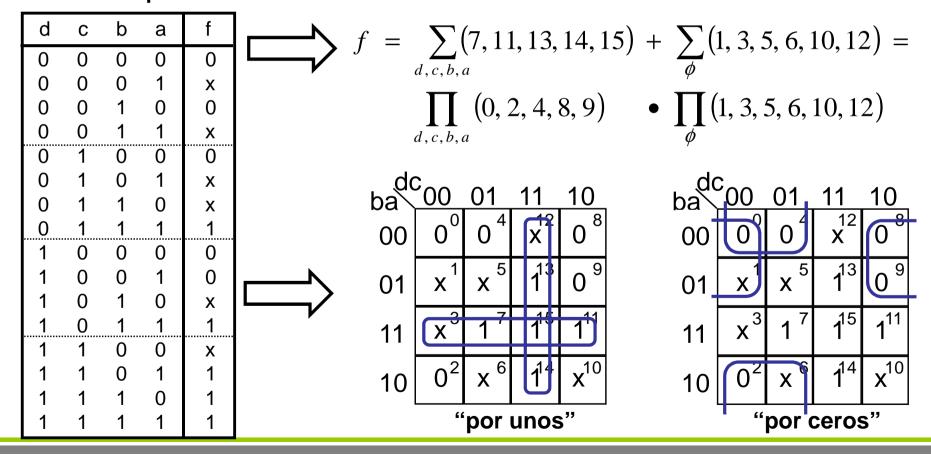




### Simplificación. Entradas indiferentes

**FCO** 

 Las celdas con "x" se toman como si tuvieran valor uno o valor cero, cada una como mejor convenga, para maximizar la simplificación.



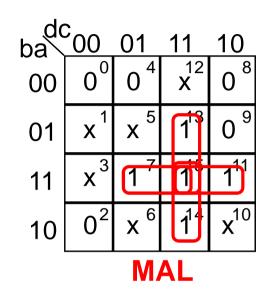
## Simplificación. Entradas indiferentes (ii)

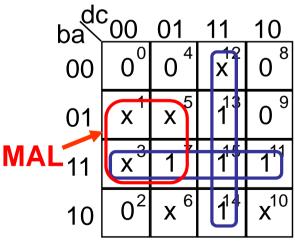
#### **FCO**

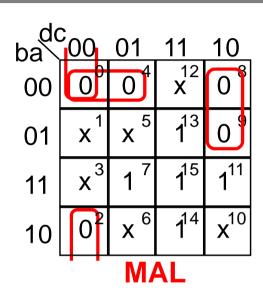
Errores comunes:

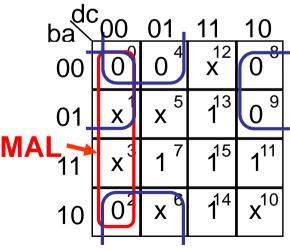
Tomar todas las "x" por 0 o por 1

Hacer grupos con "x" innecesarios











## Recursos de aprendizaje



- Poliformat, sección "Recursos"
  - Ejercicios sin solución.
  - Soluciones a los ejercicios.
  - Entrenador de Karnaugh.
  - Exámenes de años anteriores.
- Poliformat, sección "Contenidos"
  - Módulo 2: Principios de diseño digital.
    - » Tablas de verdad.
    - » Puertas lógicas.









# Fundamentos de computadores

TEMA 2. PRINCIPIOS DEL DISEÑO DIGITAL