Objetivo

Dada una expresión de una función booleana f de orden n, describiremos un proceso (denominado Método de Quine-McCluskey) que nos conducirá a una expresión de f más "simple". En lo que sigue consideraremos inicialmente la forma canónica disyuntiva de $f \neq 0$, que sabemos que es única, y la simplificaremos escribiéndola como suma de productos con el mínimo número de literales posible. Un tratamiento dual podría hacerse con la expresión de la forma canónica conjuntiva de $f \neq 1$.

El Método de Quine-McCluskey consta de dos fases:

1. La primera trata de encontrar términos posibles de la expresión mínima de f (denominados *implicantes primos*).
2. En una segunda fase, se determinan cuáles de los *implicantes primos* constituyen una expresión "mínima" de f.

Descripción de la primera fase (1)

Consideremos la siguiente función booleana de orden 4, expresada según su forma canónica disyuntiva:

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot\overline{t}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot t+\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{t}+\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot t+$$

$$x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}+x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot t+x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}+x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot t+x\cdot y\cdot z\cdot\overline{t}+x\cdot y\cdot z\cdot t$$

Expresada usando la “notación de minitérminos” con subíndices binarios:

$$f(x,y,z,t) = m_{0000}+m_{0010}+m_{0011}+m_{0110}+m_{0111}+$$

$$m_{1000}+m_{1001}+m_{1100}+m_{1101}+m_{1110}+m_{1111}$$

Descripción de la primera fase (2)

0000
0010
1000
0011
0110
1001
1100
0111
1101
1110
1111

Se escriben en una columna, a la izquierda, los subíndices binarios de los términos minimales de f. Estarán separados por bloques de manera que los números del primer bloque no contienen ningún 1, los del segundo bloque contienen exactamente un 1, los del tercero contienen dos 1's, etc.

Descripción de la primera fase (3)

0000 *	00-0
0010 *	-000
1000 *	001-
0011 *	0-10
0110 *	100-
1001 *	1-00
1100 *	0-11
0111 *	011-
1101 *	-110
1110 *	1-01
1111 *	110-
	11-0
	-111
	11-1
	111-

Se consideran todos los pares de números binarios pertenecientes a bloques contiguos que se diferencien sólo en un dígito, se marcan con un $*$ y se escribe, en otra columna a la derecha, la expresión resultante de sustituir el dígito diferente por un guión $-$. Por ejemplo, el término 0000 (perteneciente al primer bloque) y el término 0010 (perteneciente al segundo) se diferencian sólo en un dígito; por tanto, deben "marcarse" y se debe añadir el término $00-0$ en la columna de la derecha.

La razón es la siguiente: los minitérminos correspondientes a 0000 y 0010 son $\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{t}$ y $\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot\overline{t}$. Aplicando la propiedad distributiva y la complementariedad su suma se "simplifica":

$$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{t}\cdot(\overline{z}+z)=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{t}=: m_{00-0}$$

De esta manera podemos sustituir, en la expresión de la f.c.d. de f, la suma $m_{0000}+m_{0010}$ por m_{00-0}. Obsérvese que 0000 puede "combinarse" también con 1000 dando lugar a -000; esto puede hacerse porque el minitérmino m_{0000} puede considerarse "repetido" como sumando en la expresión de f tantas veces como queramos usando la idempotencia.

Descripción de la primera fase (4)

0000 *	00-0	0-1-
0010 *	-000	1-0-
1000 *	001- *	-11-
0011 *	0-10 *	11--
0110 *	100- *	
1001 *	1-00 *	
1100 *	0-11 *	
0111 *	011- *	
1101 *	-110*	
1110 *	1-01 *	
1111 *	110- *	
	11-0 *	
	-111*	
	11-1 *	
	111- *	

Se procede igual que antes con los nuevos bloques, "combinando" aquellos términos correspondientes a bloques contiguos con exactamente un dígito distinto. Observamos que no podemos combinar ningún elemento del primer bloque con elementos del segundo. También, por ejemplo, el término $001-$ puede combinarse con $011-$ dando lugar a $0-1-$. Es decir:

$$m_{001-} + m_{011-} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot z = \overline{x} \cdot z \cdot (\overline{y} + y) =$$

$$\overline{x} \cdot z =: m_{0-1-}$$

Seguiríamos el proceso hasta que no puedan "combinarse más términos". En nuestro ejemplo, hemos llegado ya a esta situación.

Se denominan implicantes primos a los términos que quedan sin "marcar". En nuestro caso serían: $m_{00-0} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{t}$, $m_{-000} = \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{t}$, $m_{0-1-} = \overline{x} \cdot z$, $m_{1-0-} = x \cdot \overline{z}$, $m_{-11-} = y \cdot z$ y $m_{11--} = x \cdot y$.

Descripción de la primera fase (5)

Deducimos, tras lo dicho hasta ahora, que la función booleana original se expresa como suma de los implicantes primos:

$$f(x, y, z, t) = m_{00-0} + m_{-000} + m_{0-1-} + m_{1-0-} + m_{-11-} + m_{11--} =$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{t} + \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{t} + \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z} + y \cdot z + x \cdot y$$

Hemos llegado, así, a una expresión “más simple” de la función f. En la segunda parte veremos cómo obtener expresiones todavía más simples, eliminando algunos implicantes primos “sobrantes”.

Descripción de la segunda fase (1)

Definición

Diremos que un término r cubre a un cierto minitérmino m si todos los literales que son factores de r lo son también de m.

Por ejemplo, el término $m_{-0-1} = \overline{y} \cdot t$ cubre al minitérmino $m_{1001} = x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot t$.

El siguiente paso consistirá en determinar a qué minitérminos de la forma canónica disyuntiva de f cubre cada uno de los implicantes primos que aparecen en la expresión "simplificada" de f que hemos obtenido.

Descripción de la segunda fase (2)

	0000	0010	0011	0110	0111	1000	1001	1100	1101	1110	1111
00 − 0	X	X									
−000	X					X					
0 − 1−		X	X	X	X						
1 − 0−						X	X	X	X		
−11−				X	X					X	X
11 − −								X	X	X	X

Construimos una tabla de manera que cada fila corresponde a un implicante primo y cada columna corresponde a un minitérmino de la forma canónica disyuntiva de f.

Marcamos con una cruz aquellas casillas en las que el implicante primo (asociado a su fila) cubra al minitérmino (asociado a su columna).

Descripción de la segunda fase (3)

	0000	0010	0011	0110	0111	1000	1001	1100	1101	1110	1111
$00-0$	X	X									
-000	X					X					
$0-1-$		X	$\otimes$	X	X						
$1-0-$						X	$\otimes$	X	X		
$-11-$				X	X					X	X
$11--$								X	X	X	X

Buscamos las columnas que sólo contengan una cruz y encerramos en un círculo estas cruces. Esto quiere decir que los correspondientes minitérminos sólo son cubiertos por un implicante primo. Éstos son los implicantes primos esenciales (señalados en verde), y tendrán que aparecer necesariamente en cualquier expresión minimal de f (ya que, de lo contrario, habría minitérminos que no quedarían "cubiertos"):

$$f(x,y,z,t) = m_{0-1-} + m_{1-0-} + \cdots = \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z} + \cdots$$

Descripción de la segunda fase (4)

	0000	0010	0011	0110	0111	1000	1001	1100	1101	1110	1111
$00-0$	X	X									
-000	X					X					
$0-1-$		X	$\otimes$	X	X						
$1-0-$						X	$\otimes$	X	X		
$-11-$				X	X					X	X
$11--$								X	X	X	X

Señalamos de alguna manera todos los minitérminos que son cubiertos por los implicantes primos esenciales (los escritos en rojo, en la tabla). Así pues, la expresión:

$$m_{0-1-} + m_{1-0-} = \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{z}$$

ya “cubre” a todos los minitérminos escritos en rojo. Sólo “faltan por cubrir” los escritos en azul.

Descripción de la segunda fase (5)

	0000	0010	0011	0110	0111	1000	1001	1100	1101	1110	1111
00 – 0	X	X									
–000	X					X					
0 – 1–		X	$\otimes$	X	X						
1 – 0–						X	$\otimes$	X	X		
–11–				X	X					X	X
11 – –								X	X	X	X

Los minitérminos que "faltan por cubrir" son cubiertos únicamente por los implicantes primos señalados también en azul. Por lo tanto:

Las expresiones minimales de f se obtendrán sumando, a los implicantes primos esenciales (que han de aparecer necesariamente en todas las expresiones minimales), una cantidad mínima de implicantes primos no esenciales de manera que se "cubran" todos los minitérminos.

Descripción de la segunda fase (6)

	0000	0010	0011	0110	0111	1000	1001	1100	1101	1110	1111
$00-0$	X	X									
-000	X					X					
$0-1-$		X	$\otimes$	X	X						
$1-0-$						X	$\otimes$	X	X		
$-11-$				X	X					X	X
$11--$								X	X	X	X

En nuestro caso podemos obtener 4 expresiones minimales de f ("jugando" con los 4 implicantes primos no esenciales):

- $f(x,y,z,t) = m_{0-1-} + m_{1-0-} + m_{00-0} + m_{-11-} =$ $\overline{x}\cdot z + x\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{t} + y\cdot z$
- $f(x,y,z,t) = m_{0-1-} + m_{1-0-} + m_{00-0} + m_{11--} =$ $\overline{x}\cdot z + x\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{t} + x\cdot y$
- $f(x,y,z,t) = m_{0-1-} + m_{1-0-} + m_{-000} + m_{-11-} =$ $\overline{x}\cdot z + x\cdot\overline{z} + \overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{t} + y\cdot z$
- $f(x,y,z,t) = m_{0-1-} + m_{1-0-} + m_{-000} + m_{11--} =$ $\overline{x}\cdot z + x\cdot\overline{z} + \overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{t} + x\cdot y$

Justificación de la segunda fase del Método de Quine-McCluskey

Así como la primera parte del Método de Quine-McCluskey (la deducción de la expresión de una función booleana como suma de los implicantes primos) ha sido justificada durante el desarrollo del ejemplo, no ha quedado muy claro hasta ahora por qué las expresiones obtenidas a partir de la tabla anterior se corresponden con la función f. Justificaremos ahora este hecho. La forma canónica disyuntiva de una función booleana queda determinada por su tabla de verdad. Por tanto, se tiene el siguiente resultado:

Proposición

Dos funciones booleanas f y g de orden n son iguales si y sólo si $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = g(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ para todas las n-tuplas $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^n$.

Como consecuencia:

Corolario

Dos funciones booleanas f y g de orden n son iguales si y sólo si para todo $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ se satisface la equivalencia:

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1 \Leftrightarrow g(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1.$$

Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función booleana de orden n y sea $f = m'_1 + m'_2 + \cdots + m'_s$ su forma canónica disyuntiva (los sumandos m'_i representan los términos minimales que aparecen en la misma).

Aplicando la primera fase del Método de Quine-McCluskey se tiene que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$, siendo $r_1, r_2, \ldots, r_m$ los implicantes primos.

Sea $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r_1 + r_2 + \cdots + r_t$ (con $t \leq m$) una de las expresiones "minimales" obtenidas al finalizar la aplicación del Método de Quine-McCluskey a f. Probaremos que $g = f$ usando el corolario anterior. Consideremos, por tanto, un elemento $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ arbitrario.

- Si $g(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$ entonces $r_i(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$; y como $f = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$, es claro que $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$.
- Supongamos ahora que $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$. Entonces existe un minitérmino m'_i tal que $m'_i(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$. Pero, teniendo en cuenta como se ha construído g, existe un término r_i (con $1 \leq i \leq t$) tal que r_i cubre a m'_i. Luego $r_i(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$ y, por lo tanto, $g(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$.

Aplicando el corolario anterior queda probado que $f = g$.

Bibliografía recomendada

- C. Alegre Gil, A. Martínez Pastor y M. C. Pedraza Aguilera. Problemas de Matemática Discreta. Servicio de Publicaciones UPV, Valencia, 1997.
- J. C. Ferrando y V. Gregori. Matemática Discreta. Reverté, Barcelona, 1995.
- R. Fuster, Matemàtica discreta. Monografies de la UPV. Servei de Publicacions UPV, València, 2009.
- R. Garnier, J. Taylor, Discrete Mathematics for new technology, Institute of Physics Publishing.
- R. P. Grimaldi. Matemáticas Discretas y Combinatoria. Addison Wesley Longman, México, tercera edición, 1998.