Solución al examen de Teoría de autómatas y lenguajes formales (29 XI 2013).

0.a. (2 ptos.)
Sea $L = \{x \in \{a,b,c\}^* : |x|_c = 2|x|_a + |x|_b\}$. Demuestre que L no es regular:

Sea la secuencia infinita $\langle c^i \rangle_{i>0}$ y sean c^j y c^k con $j \neq k$ dos palabras cualesquiera de la misma. Consideremos además la palabra b^j. Podemos observar que

$c^j.b^j \in L$ pues contiene un número de $c$es igual a dos veces el número de as (cero) mas el número de $b$es, mientras que

$c^k.a^j \notin L$ pues contiene un número de $c$es distinto a dos veces el número de as (cero) mas el número de $b$es ya que $k \neq j$.

Por tanto c^j y c^k tendrían que llevarnos a estados diferentes en cualquier AFD que aceptara a L. Puesto que esto es cierto para cada par de palabras de la serie infinita, cualquier autómata que aceptara a L tendría que tener infinitos estados y no sería, por tanto, un AFD. Con esto queda demostrado que no existe ningún AFD que acepte a L y, por definición, que L no es regular.

0.b. (2 ptos.)
Sea $L = \{x \in \{a,b\}^* : |x|_b = 3 + |x|_a\}$. Demuestre que L no es regular:

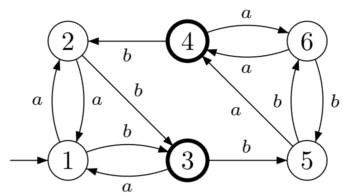
Sea la secuencia infinita $\langle a^i \rangle_{i>0}$ y sean a^j y a^k con $j \neq k$ dos palabras cualesquiera de la misma. Consideremos además la palabra b^{j+3}. Podemos observar que

$a^j.b^{j+3} \in L$ pues contiene un número de $b$es igual al número de as mas tres, mientras que

$a^k.b^{j+3} \notin L$ pues contiene un número de $b$es distinto al número de as mas tres ya que $k \neq j$.

Por tanto a^j y a^k tendrían que llevarnos a estados diferentes en cualquier AFD que aceptara a L. Puesto que esto es cierto para cada par de palabras de la serie infinita, cualquier autómata que aceptara a L tendría que tener infinitos estados y no sería, por tanto, un AFD. Con esto queda demostrado que no existe ningún AFD que acepte a L y, por definición, que L no es regular.

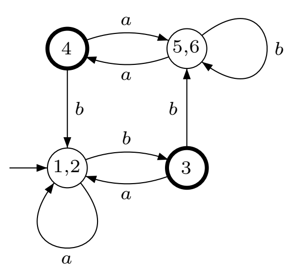
1. (3 ptos.)
Calcular el AFD mínimo equivalente al siguiente autómata finito:



Calculamos R^∞:

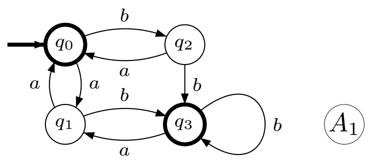
$R^0 = \{\{1,2,5,6\},\{3,4\}\}$;
$R^1 = \{\{1,2\},\{5,6\},\{3,4\}\}$;
$R^2 = \{\{1,2\},\{5,6\},\{3\},\{4\}\}$;
$R^3 = R^2 = R^\infty$

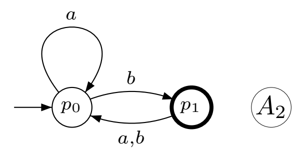
Por tanto el AFD mínimo es:



2. (7 ptos.)

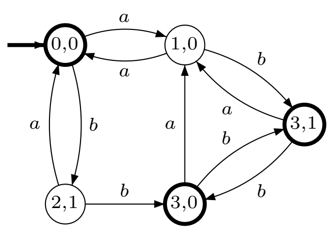
Sea h el homomorfismo tal que $h(0) = aa$, $h(1) = b$. Dados los autómatas



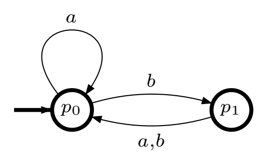


calcular un AFD para cada uno de los siguientes lenguajes:

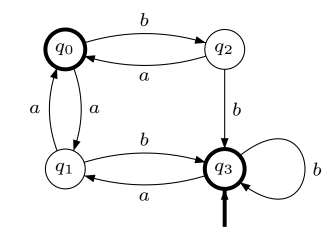
i) $L(A_1) \cup L(A_2)$



ii) $\overline{L(A_2)}$



iii) $(bbb)^{-1}L(A_1)$



iv) $h^{-1}(L(A_1))$