Exercici 15.1 Calculeu l'espai ortogonal de $F =< (1,1,0,0),(0,1,1,0) >$ i calculeu les projeccions ortogonals del vector $\mathbf{b} = (2,1,2,1)$ sobre F i sobre $F^{\perp}$.

Solució Una base de F és :

$$B_F = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}$$

ja que els vectors indicats són un sistema lliure i generador de F.

El complement ortogonal $F^{\perp}$ conté tots els vectors ortogonals a F. Per tant, els seus vectors, de la forma (x,y,z,t), han de ser ortogonals a la base de F. És a dir:

$$\left.\begin{array}{rcl} (x,y,z,t)\cdot(1,1,0,0) & = & 0 \\ (x,y,z,t)\cdot(0,1,1,0) & = & 0 \end{array}\right\}$$

és a dir:

$$\left.\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 0 \\ y & +z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent aquest sistema d'equacions tenim:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Per tant, una base de $F^{\perp}$ és:

$$B_{F^{\perp}} = \{(1,-1,1,0),(0,0,0,1)\}$$

Noteu que aquests vectors són ortogonals als vectors de la base de F.

Per tal de calcular les projeccions ortogonals, usem les equacions normals:

$$\boxed{A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}}$$

on el vector d'incògnites $\mathbf{x}$ conté les coordenades de $\mathbf{p}_F(\mathbf{b})$ escrites en la base B_F, és a dir, es tracta d'un vector de dues incògnites. $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2)$ i la projecció ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre F serà:

$$\mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(0,1,1,0)$$

La matriu A és tal que $F = Col(A)$. És a dir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

amb la qual cosa les equacions normals queden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

és a dir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

i resolent aquest sistema d'equacions trobem:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1$$

per tant,

$$\mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = 1(1,1,0,0) + 1(0,1,1,0) = (1,2,1,0)$$

Ara, com que

$$\mathbf{b} = \mathbf{p}_F(\mathbf{b}) + \mathbf{p}_{F^\perp}(\mathbf{b})$$

tenim que

$$\mathbf{p}_{F^\perp}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = (2,1,2,1) - (1,2,1,0) = (1,-1,1,1)$$

Exercici 15.2 Calculeu les projeccions ortogonals del vector $\mathbf{b} = (2,1,-3)$ sobre el subespai $F =< (1,1,1), (2,1,-1), (1,0,-2) >$ i sobre $F^\perp$. Calculeu també una base de $F^\perp$.

Solució Calculem primer una base de F. Com que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

tenim que els vectors generadors de F són LD. Ens quedem en els dos primers, que són generadors i LI:

$$B_F = \{(1,1,1), (2,1,-1)\}$$

El complement ortogonal $F^\perp$ conté tots els vectors ortogonals a F. Per tant, els seus vectors, de la forma (x,y,z), han de ser ortogonals a la base de F. És a dir:

$$\left.\begin{array}{rcl} (x,y,z)\cdot(1,1,1) & = & 0 \\ (x,y,z)\cdot(2,1,-1) & = & 0 \end{array}\right\}$$

és a dir:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x+y-z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent aquest sistema d'equacions tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Per tant, una base de $F^\perp$ és:

$$B_{F^\perp} = \{(2,-3,1)\}$$

Noteu que aquest vector és ortogonal als vectors de la base de F.

Per tal de calcular les projeccions ortogonals, usem les equacions normals:

$$\boxed{A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}}$$

on el vector d'incògnites $\mathbf{x}$ conté les coordenades de $\mathbf{p}_F(\mathbf{b})$ escrites en la base B_F, és a dir, es tracta d'un vector de dues incògnites, $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2)$ i la projecció ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre F serà:

$$\mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(2,1,-1).$$

La matriu A és tal que $F = Col(A)$. És a dir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

amb la qual cosa les equacions normals queden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

és a dir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

i resolent aquest sistema d'equacions trobem:

$$\alpha_1 = -\frac{8}{7}, \quad \alpha_2 = \frac{12}{7}$$

per tant,

$$\mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = -\frac{8}{7}(1,1,1) + \frac{12}{7}(2,1,-1) = \frac{1}{7}(16,4,-20)$$

Ara, com que

$$\mathbf{b} = \mathbf{p}_F(\mathbf{b}) + \mathbf{p}_{F^\perp}(\mathbf{b})$$

tenim que

$$\mathbf{p}_{F^\perp}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = (2,1,-3) - \frac{1}{7}(16,4,-20) = -\frac{1}{7}(2,-3,1)$$

Exercici 15.3 Siga F la recta $F =< (1,2,3) >$. Calculeu les projeccions ortogonals del vector $\mathbf{b} = (3,2,1)$ sobre el subespai F i sobre $F^\perp$.

Clarament, $B_F = \{(1,2,3)\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

i així, $F = Col(A)$. Per tal de calcular les projeccions ortogonals, usem les equacions normals:

$$\boxed{A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}}$$

on el vector d'incògnites $\mathbf{x}$ conté les coordenades de $\mathbf{p}_F(\mathbf{b})$ escrites en la base B_F, és a dir, es tracta d'una incògnita, $\mathbf{x} = \alpha$ i la projecció ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre F serà:

$$\mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = \alpha(1, 2, 3)$$

les equacions normals queden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

és a dir: $14\alpha = 10$, per tant

$$\alpha = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

per tant,

$$\mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = \frac{5}{7}(1, 2, 3)$$

i finalment, com que

$$\mathbf{b} = \mathbf{p}_F(\mathbf{b}) + \mathbf{p}_{F^\perp}(\mathbf{b})$$

tenim que

$$\mathbf{p}_{F^\perp}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{p}_F(\mathbf{b}) = (3, 2, 1) - \frac{5}{7}(1, 2, 3) = \frac{1}{7}(16, 4, -8).$$