Prácticas de Matemática Discreta: Introducción a la teoría de grafos

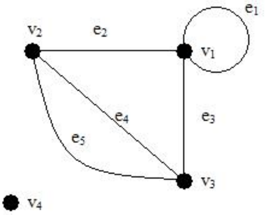
Sesión 2: sucesiones gráficas y tipos de grafos

Grado de un vértice

Recuerda:

Definición

El **grado** de un vértice v, denotado $\deg(v)$, es el número de aristas que inciden en él (contándolas 2 veces cuando son bucles).



En este grafo:

- $\deg(v_1) = 4$
- $\deg(v_2) = 3$
- $\deg(v_3) = 3$
- $\deg(v_4) = 0.$

Fórmula de los grados

Propiedad

Si $G = (V, A, f)$ es un grafo entonces:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot \text{n}^{\text{o}} \text{ de aristas},$$

es decir, en cualquier grafo, **la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas**.

Consecuencias inmediatas:

- La suma de los grados de los vértices de un grafo es un número par.

- Todo grafo contiene un número par de vértices de grado impar.

Secuencias gráficas

Definición

Una sucesión finita de enteros no negativos se dice que es una **secuencia gráfica** si existe un grafo (no dirigido) simple y sin bucles tal que dicha secuencia es exactamente la lista de grados de sus vértices.

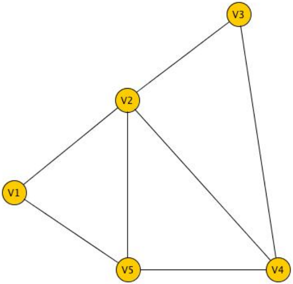
Ejemplo

¿Son secuencias gráficas las siguientes sucesiones?

1. $(4, 3, 3, 2, 2)$
2. $(3, 3, 3, 2, 2)$
3. $(6, 3, 3, 2, 2)$

Secuencias gráficas

1. $(4, 3, 3, 2, 2)$ Sí:



2. $(3, 3, 3, 2, 2)$ No. La suma de los valores no es par.
3. $(6, 3, 3, 2, 2)$ No. No podemos tener un vértice de grado 6 si sólo tenemos 5 vértices (¡no están permitidos bucles ni aristas múltiples!).

Secuencias gráficas

Teorema de Hakimi

Una sucesión decreciente de enteros no negativos

$$(s, t_1, t_2, \ldots, t_s, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

es una secuencia gráfica si y solo si

$$(t_1 - 1, t_2 - 1, \ldots, t_s - 1, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

también es una secuencia gráfica.

Secuencias gráficas

Algoritmo para determinar si una secuencia decreciente de enteros no negativos es una secuencia gráfica o no:

Algoritmo de Hakimi

1. Comienza con una secuencia decreciente de enteros no negativos

$$(s, t_1, t_2, \ldots, t_s, d_1, d_2, \ldots, d_r)$$

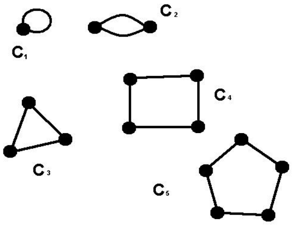
y con un grafo nulo (sin aristas) con tantos vértices como números hay en la secuencia.

2. Elimina en mayor valor de la secuencia (a la izquierda), s, y resta 1 a los s valores siguientes de la secuencia. Si la secuencia obtenida tiene algún entero negativo, la secuencia inicial no es gráfica. En caso contrario ve al paso siguiente.
3. Conecta con aristas el vértice asociado con s con los vértices asociados con $t_1, t_2, \ldots, t_s$.
4. Si la lista obtenida sólo tiene ceros, FIN (hemos obtenido el grafo deseado). En caso contrario, si **no es** no creciente entonces reordénala (¡**teniendo cuidado en no mezclar los nombres de los vértices!**) y vuelve al paso 2.

1. Grados (II)
2. Secuencias gráficas
3. Tipos de grafos

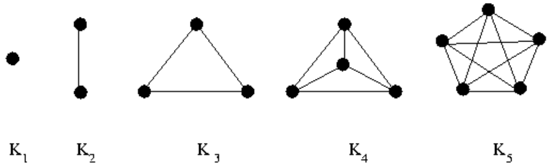
Tipos de grafos

- Recuerda: un **grafo** es **simple** si no tiene aristas paralelas.
- Un **grafo** es **nulo** si no tiene aristas, es decir, consta únicamente de un conjunto de vértices aislados.
- El **grafo trivial** es el que consta de un único vértice aislado.
- Un **grafo** es **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si ese grado común es k se dice que el grafo es ***k*-regular**. Por ejemplo los siguientes grafos son todos 2-regulares:



Tipos de grafos

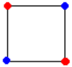
- Un **grafo** es **completo** si cada vértice es adyacente a todos los demás (es decir, cualquier par de vértices distintos están unidos por al menos una arista).
- Denotaremos $\mathbf{K_n}$ al grafo completo, simple y sin bucles de n vértices:



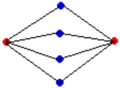
Estos grafos también se conocen como *grafos completos de Kuratowsky*.

Tipos de grafos

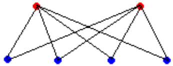
- Un **grafo** $G = (V, A, f)$ es **bipartido** si el conjunto de vértices V se puede dividir en dos subconjuntos V_1 y V_2 que no tienen elementos en común, de manera que cada arista del grafo une un vértice de V_1 con uno de V_2.
- Llamamos grafo **bipartido completo $\mathbf{K_{n,m}}$** al grafo simple y bipartido en el cual V_1 tiene n vértices, V_2 tiene m vértices y cada vértice de V_1 es adyacente a todos y cada uno de los vértices de V_2.



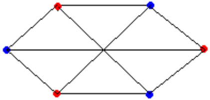
$K_{2,2}$



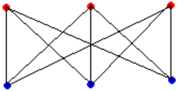
$K_{2,4}$



$K_{2,4}$



$K_{3,3}$



$K_{3,3}$