Relaciones binarias.
Definiciones, representación, operaciones y propiedades.

Cristina Jordán Lluch
Instituto de Matemática Multidisciplinar
Departamento.de Matemática Aplicada
Universitat Politècnica de València

Contenido

- Introducción
- Definición de relación binaria
- Representación
  - Gráfica
  - Matricial
- Operaciones entre relaciones
  - Unión
  - Intersección
  - Diferencia
  - Complementario
  - Inversa
  - Composición
- Propiedades
  - Reflexiva
  - Simétrica
  - Antisimétrica
  - Transitiva

Ejemplo

Se está un barrio y nos comentan que a consecuencia de las obras quedará interrumpido el tráfico entre los cruces 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en le sentido que se indica a continuación:

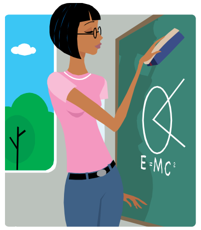
Calles de 1 hacia 2, de 1 hacia 3 y de 1 hacia 5
Calles de 2 hacia 3 y de 2 hacia 5
Calle de 3 hacia 4
Calle de 4 hacia 5
Calle de 5 hacia 3

¿Cómo podrías representar esta información de manera que fuera más legible o clara?

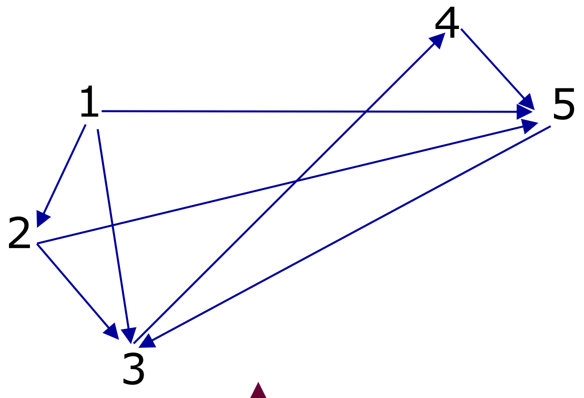
Ejemplo

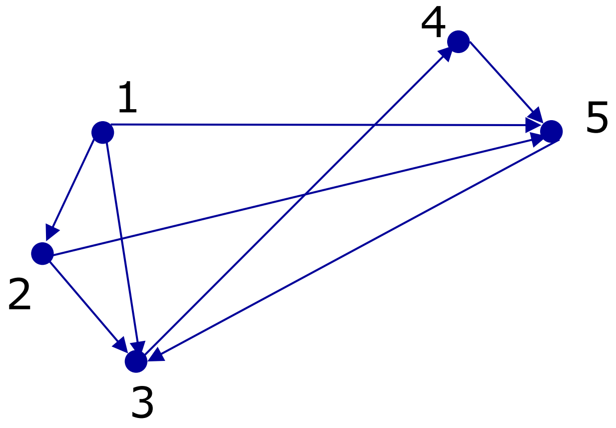
Representaciones

Calles de 1 hacia 2, de 1 hacia 3 y de 1 hacia 5
Calles de 2 hacia 3 y de 2 hacia 5
Calle de 3 hacia 4
Calle de 4 hacia 5
Calle de 5 hacia 3



(1, 2), (1, 3), (1,5),
(2, 3), (2, 5),
(3, 4),
(4, 5),
(5, 3)





	1	2	3	4	5
1		x	x		x
2			x		x
3				x	
4					x
5			x		

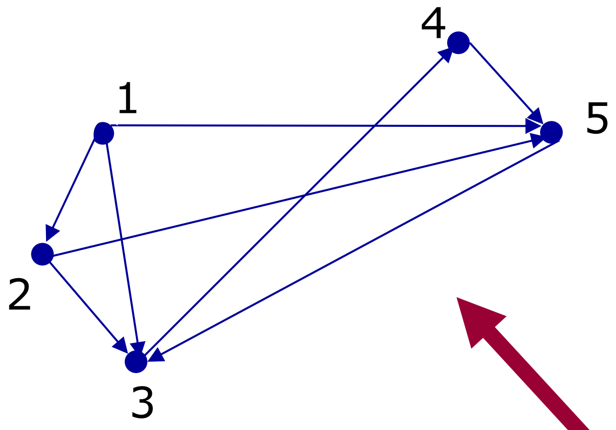
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Modelización

Considerando el conjunto de cruces A={1, 2, 3, 4, 5}, podemos definir una relación R en A de la siguiente manera:

Dados $i,j \in A$ $\quad$ $i \mathrel{R} j \leftrightarrow$ hay una calle de i hacia j (sin pasar por cruce intermedio)



	1	2	3	4	5
1		x	x		x
2			x		x
3				x	
4					x
5			x		

(1, 2), (1, 3), (1,5), (2,3),
(2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz asociada a R

R= {(1, 2), (1, 3), (1,5),
(2,3), (2, 5), (3, 4),
(4, 5), (5, 3)} $\subset$ AxA

Relación binaria en AxB

Sean A y B dos conjuntos.

- Llamamos **relación binaria en $A \times B$** a todo subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

  Notación R

  Representación simbólica de la definición $R \subset A \times B$

  Interpretación R establece una relación entre A y B

- Una relación binaria puede representarse por pares ordenados, gráficamente o mediante matrices.

Relación binaria en AxB

- Llamamos **relación binaria en $A \times B$** a todo subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

  Notación R

  Representación simbólica de la definición $R \subset A \times B$

  Interpretación R establece una relación entre A y B

- *Nota*. Cuando $A = B$, en vez de "R relación en $A \times A$", solemos decir "R relación en A".

- *Consecuencia*. Si R es una relación binaria en $A \times B$ podemos escribir $R \subset A \times B$

  Por tanto, los elementos de R son pares ordenados (a, b)

Notación

Si (a,b) es un elemento de R $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $(a, b) \in R$ o $a\,R\,b$

podemos escribir

Si (a,b) **no** es un elemento de R $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $(a, b) \notin R$ o $a \neg R\, b$

Observación: en papel no usaremos el símbolo ¬, sino que tacharemos la R

Notación

Ejercicio

Si A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {a, b, c, d} podemos definir la siguiente relación binaria entre los conjuntos A y B:

$$R = \{ (1, b), (1, c), (2, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c), (4,d)\} \subset A \times B$$

a) *Indica cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta, cuáles no y cuáles no tienen sentido:*

- $1\ R\ b$, $a\ R\ 2$, $3\ R\ c$, $1 \neg R\ d$, $3\ b\ R$, $2 \neg R\ d$, $a\ R\ 4$, $2\ R\ d$, $R\ 1\ c$, $4 \neg R\ b$
- $(1, c) \in R$, $(2, a) \in R$, $(d, 4) \in R$, $(a, 3) \notin R$, $(4, a) \in R$, $(2, d)\ R \in$, $(2, c) \notin R$, $(3,d) \notin R$
- $\forall\, x \in B \quad 5 \neg R\ x$
- $\forall\, x \in B \quad (5, x) \notin R$
- $\forall\, x \in B \quad 4\ R\ x$
- $\forall\, x \in B \quad (4, x) \in R$
- $\exists x \in B \quad (2, x) \in R$
- $\exists x \in B \quad (4, x) \notin R$

b) *¿Puedes indicar algún otro elemento de A que no esté relacionado con algún elemento de B?*

Notación

Ejercicio

Si A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {a, b, c, d} podemos definir la siguiente relación binaria entre los conjuntos A y B:

$$R = \{ (1, b), (1, c), (2, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c), (4,d)\} \subset A \times B$$

a) *Indica cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta, cuáles no y cuáles no tienen sentido:*

- $1\ R\ b$, $a\ R\ 2$, $3\ R\ c$, $1\ \neg R\ d$, $3\ b\ R$, $2\ \neg R\ d$, $a\ R\ 4$, $2\ R\ d$, $R\ 1\ c$, $4\ \neg R\ b$
- $(1, c) \in R$, $(2, a) \in R$, $(d, 4) \in R$, $(a, 3) \notin R$, $(4, a) \in R$, $(2, d)\ R \in$, $(2, c) \notin R$, $(3,d) \notin R$
- $\forall x \in B \quad 5\ \neg R\ x$
- $\forall x \in B \quad (5, x) \notin R$
- $\forall x \in B \quad 4\ R\ x$
- $\forall x \in B \quad (4, x) \in R$
- $\exists x \in B \quad (2, x) \in R$
- $\exists x \in B \quad (4, x) \notin R$

Ejemplo

Se consideran los conjuntos $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{4, 6, 9, 10\}$ y se define la relación en A x B

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B \qquad a\,R\,b \leftrightarrow a \mid b$$

Define por extensión la relación R

$$R = \{ (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9), (5, 10) \} \subset A \times B$$

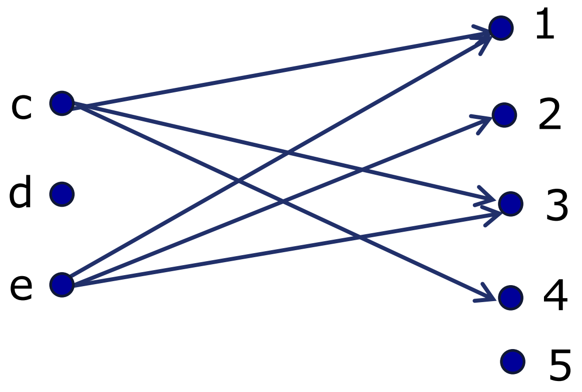
Representación

Gráfica. Para representar gráficamente una relación binaria R en A $\times$ B utilizamos puntos y flechas:

- Cada uno de los elementos de los conjuntos A y B se representa por un punto.
- El elemento (a,b) de la relación AxB se representa por una flecha que sale de a y termina en b.

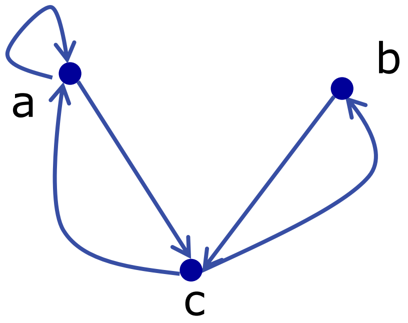
Ejemplo 1

A={c,d,e} B={1,2,3,4,5}
R={(c,1), (c,3), (c,4), (e,1), (e,2), (e,3)}$\subset$ AxB



Ejemplo 2

A={a,b,c}
S={(a,a), (a,c), (b,c), (c,a), (c,b)$\subset$ AxA



Representación

Observación. Hablaremos de representación matricial de una relación binaria sólo si los conjuntos entre los cuales se establece la relación son finitos.

Matricial. Sean $A = \{ a_1, \dots , a_m \}$ y $B = \{ b_1, \dots , b_p \}$. La **matriz asociada** a la relación binaria R en $A \times B$ es la matriz booleana (formada sólo por unos y ceros) de m filas y p columnas $M_R = (r_{ij})_{m\times p}$ donde

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{si } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Notas.

a) La matrices asociadas a relaciones en $A \times A$ son cuadradas.

b) La matriz asociada a la relación $R= A \times B$ es una matriz formada por unos.

c) La matriz asociada a la relación $R=\emptyset$ es una matriz formada por ceros.

Representación

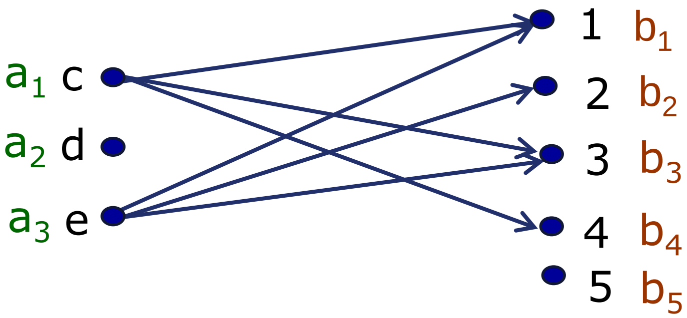
Matricial.

Sean los conjuntos $A = \{ a_1, \dots , a_m \}$, $B = \{ b_1, \dots ,b_p \}$.
Una relación binaria R en AxB se puede definir a partir de la matriz $M_R = (r_{ij})_{m\times p}$ donde

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{si } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ejemplo 1

A={c,d,e} B={1,2,3,4,5}
R={(c,1), (c,3), (c,4), (e,1), (e,2), (e,3)}⊂ AxB



$A=\{a_1, a_2, a_3\}$ $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$
m=3 p=5
$R=\{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3)\}\subset AxB$

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{c} a_1=c \\ a_2=d \\ a_3=e \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_R \\ & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ = & = & = & = & = \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \end{array}$$

Representación

Matricial.

$A = \{ a_1, \dots , a_m\}$, S relación binaria en AxA definida por

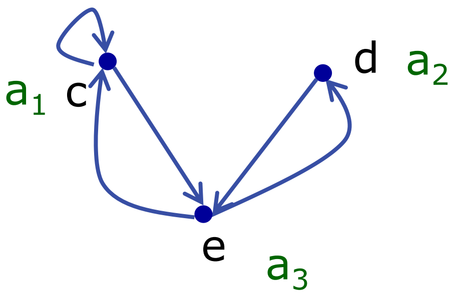
$M_S = (s_{ij})_{m\times m}$ donde

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, a_j) \in S \\ 0 & \text{si } (a_i, a_j) \notin S \end{cases}$$

Ejemplo 2

$A=\{c,d,e\}$

$S=\{(c,c), (c,e), (d,e), (e,c), (e,d)\} \subset AxA$



$A=\{a_1, a_2, a_3\}$ $m=3$

$S=\{(a_1, a_1), (a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2)\} \subset AxA$

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{c} a_1=c \\ a_2=d \\ a_3=e \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_S \\ & \begin{array}{ccc} c & d & e \\ = & = & = \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \end{array}$$

Representación

Ejercicio 1

Se consideran los conjuntos A = {2, 3, 5} y B = {4, 6, 9, 10} y se define la relación en AxB

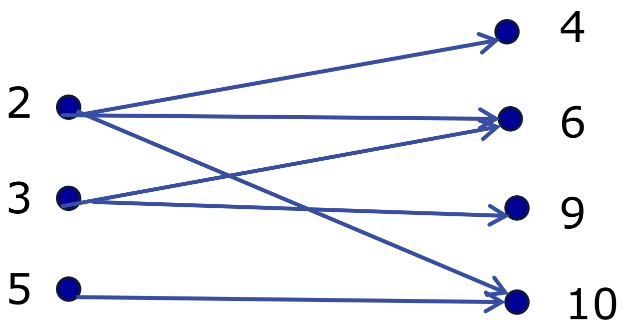
$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ R\ b \leftrightarrow a \mid b$$

a) *Define por extensión la relación R*

a.1) Utilizando pares ordenados R = { (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9), (5, 10) } $\subset$ A×B

a.2) Utilizando la notación aRb 2R4, 2R6, 2R10, 3R6, 3R9, 5R10

b) *Representa gráficamente la relación R*



c) *Determina la matriz M_R asociada a R*

$$M_R = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 4 & 6 & 9 & 10 \end{array} \end{array}$$

Representación

Ejercicio 2

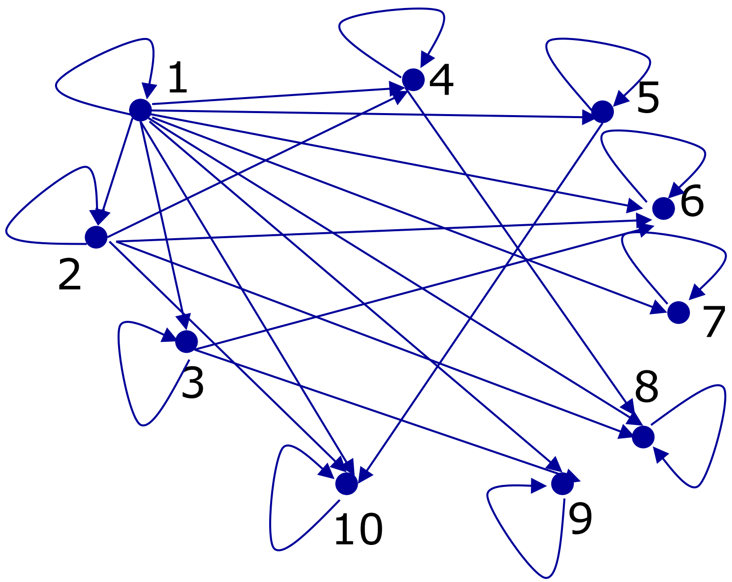
Sea A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Consideramos la relación binaria R en A definida

$$\forall a, b \in A \qquad a\,R\,b \leftrightarrow a \mid b$$

a) *Define por extensión la relación R utilizando la notación de pares ordenados*

R = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,2),(2,4) ,(2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)} $\subset A \times A$

b) *Representa gráficamente la relación R*



c) *Determina la matriz M_R asociada*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

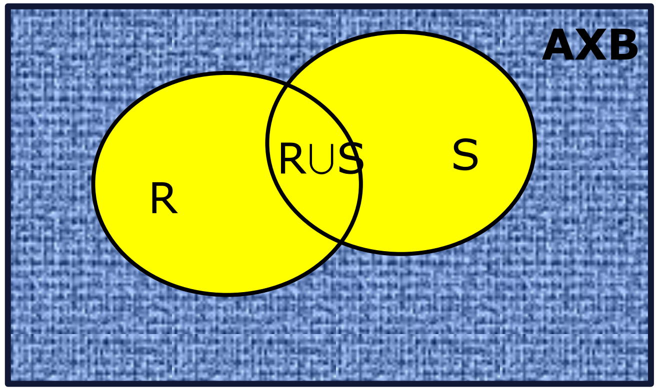
Operaciones entre relaciones

A={1,2,3}   B={a, b, c}   AxB={(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)}

R={(1, a), (2, c), (3, a), (3, c)}   S={(1, b), (2, c), (3, b)}

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

UNIÓN



R∪S es la zona amarilla

R∪S={(1,a), (2, c), (3, a), (3, c), (1, b), ~~(2~~, c), (3, b)}

$$M_{R\cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R + M_S$$

(Se considera suma booleana)

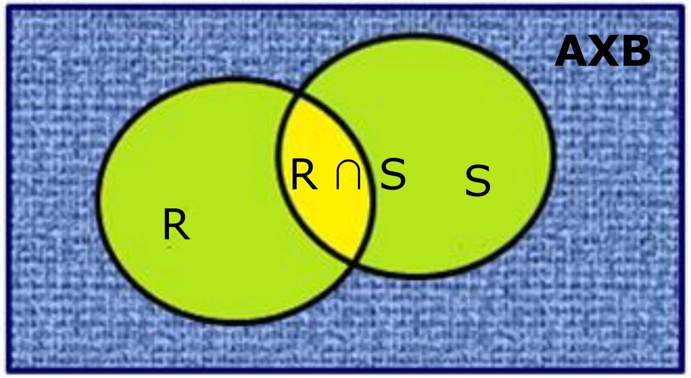
Operaciones entre relaciones

A={1,2,3}   B={a, b, c}   AxB={(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)}

R={(1, a), (2, c), (3, a), (3, c)}   S={(1, b), (2, c), (3, b)}

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

INTERSECCIÓN



R ∩ S es la zona amarilla

R∩S={(2, c)}

$$M_{R\cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R \otimes M_S$$

(Se considera producto lógico)

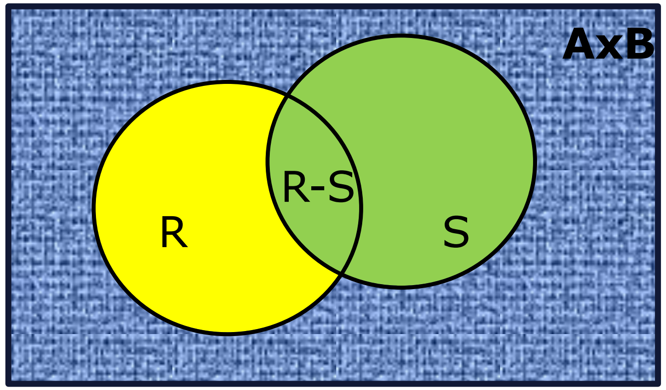
Operaciones entre relaciones

A={1,2,3}   B={a, b, c}   AxB={(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)}

R={(1, a), (2, c), (3, a), (3, c)}   S={(1, b), (2, c), (3, b)}

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

DIFERENCIA



R - S es la zona amarilla

R-S={(1, a), (~~2, c~~), (3, a), (3, c)}

$$M_{R-S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R - M_S$$

(Se considera 0-1=0)

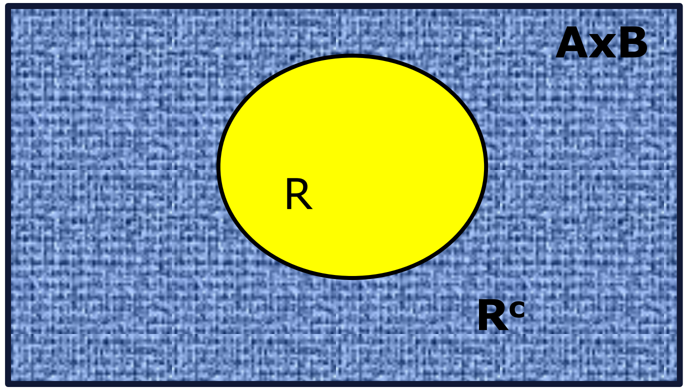
Operaciones entre relaciones

A={1,2,3}   B={a, b, c}   AxB={(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)}

R={(1, a), (2, c), (3, a), (3, c)}   S={(1, b), (2, c), (3, b)}

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

COMPLEMENTARIO



R^c es la zona azul

R^c= AxB-R = {(1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (3, b)}

$$M_{R^c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_{AxB} - M_R$$

Operaciones entre relaciones

- Sean R y S relaciones binarias en A $\times$ B.

  Como R y S son subconjuntos de A $\times$ B, podemos definir las siguientes operaciones entre ellas (con la correspondiente matriz asociada si A y B son finitos):

  - **Unión de R y S**: $R \cup S$ $\quad M_{R \cup S} = M_R + M_S$
  - **Intersección de R y S:** $R \cap S$ $\quad M_{R \cap S} = M_R \otimes M_S$
  - **Complementario de R** : $A \times B - R$ $\quad M_R = M_{A \times B} - M_R$
  - **Diferencia R-S :** $R - S$ $\quad M_{R\text{-}S} = M_R - M_S$ *(VER c))*

    $= M_{R \cap S^c} = M_R \otimes (M_{A \times B} - M_S)$ *(VER d))*

teniendo en cuenta que

a) La suma de matrices es booleana (0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1)
b) $\otimes$ representa el producto (booleano) elemento a elemento
c) Si consideramos la resta definida: 1-1=0, 1-0=1, 0-0=0, 0-1=0
d) Si consideramos la resta habitual de matrices

Operaciones

Ejercicio 1

Sean los conjuntos A={a, b, c, d} y B={1, 2, 3, 4, 5}

Sean R y S las siguientes relaciones binarias en A $\times$ B (definidas a partir de sus pares):

$$R = \{(a, 1), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 4), (d, 5)\}$$

$$S = \{(a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 5), (c, 4), (d, 2), (d, 5)\}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

a) *R $\cup$ S* **b)** *R $\cap$ S* **c)** *Complementario de R* **d)** *Complementario de S* **e)** *R-S* **f)** *S-R*

Solución

En primer lugar representamos cada una de las dos relaciones matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 1

Sean los conjuntos A={a, b, c, d} y B={1, 2, 3, 4, 5} y las relaciones R y S definidas matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

a) $R \cup S$

$$M_{RUS} = M_R + M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 1

Sean los conjuntos A={a, b, c, d} y B={1, 2, 3, 4, 5} y las relaciones R y S definidas matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

b) $R \cap S$

$$M_{R\cap S} = M_R \otimes M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 1

Sean los conjuntos A={a, b, c, d} y B={1, 2, 3, 4, 5} y las relaciones R y S definidas matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

c) *Complementario de R*

$$M_{R^c} = M_{A\times B} - M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 1

Sean los conjuntos A={a, b, c, d} y B={1, 2, 3, 4, 5} y las relaciones R y S definidas matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

c) *Complementario de S*

$$M_{S^c} = M_{A\times B} - M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 1

Sean los conjuntos A={a, b, c, d} y B={1, 2, 3, 4, 5} y las relaciones R y S definidas matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

d) *R-S*

$$M_{R\text{-}S} = M_R\text{-}M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 1

Sean los conjuntos A={a, b, c, d} y B={1, 2, 3, 4, 5} y las relaciones R y S definidas matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

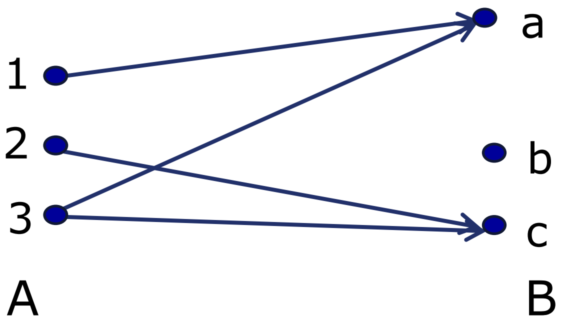
e) *S-R*

$$M_{S\text{-}R} = M_S - M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Relación inversa

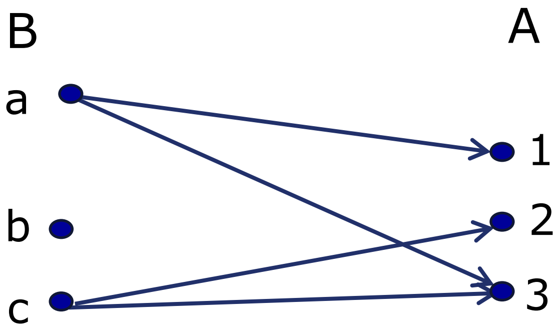
$A=\{1,2,3\}$ $B=\{a, b, c\}$ $AxB=\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$

$R=\{(1, a), (2, c), (3, a), (3, c)\}$



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INVERSA



$R^{-1}=\{(a,1), (a, 3), (c, 2), (c, 3)\}$

$$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t = M_R^t$$

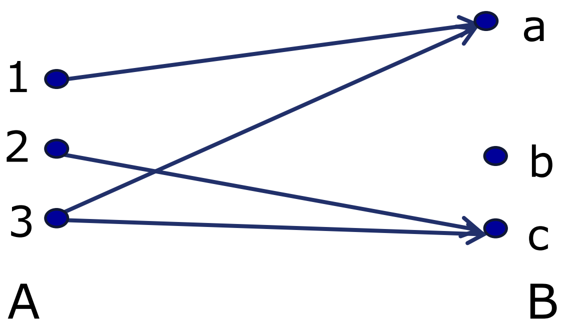
Composición de relaciones

A={1,2,3}   B={a, b, c}   C={α, β}

AxB={(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)}

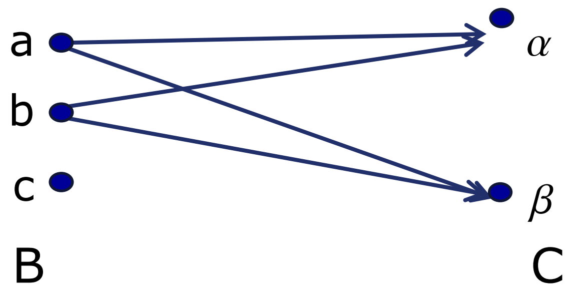
BxC={(a, α), (a, β), (b, α), (b, β), (c, α), (c, β)}

R={(1, a), (2, c), (3, a), (3, c)}



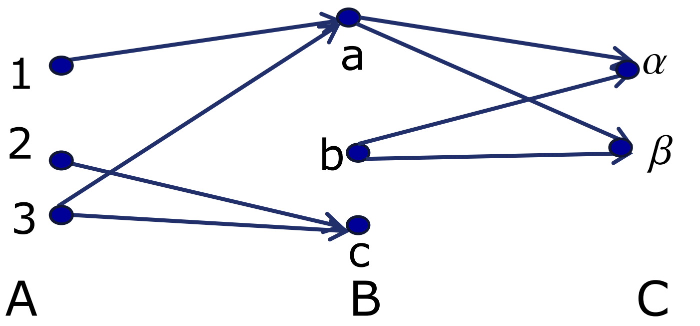
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T={(a, α), (a, β), (b, α), (b, β)}



$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

COMPOSICIÓN



R_0T={(1, α), (1, β), (3, α), (3, β)}

$$M_{R_0T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M_R \odot M_T$$

Operaciones entre relaciones

- Dada una relación binaria R en $A \times B$, se llama **relación inversa** R^{-1} en $B \times A$ al subconjunto de $B \times A$

$$R^{-1} = \{ (b, a) \in B \times A \,/\, (a, b) \in A \times B \} \qquad M_{R^{-1}} = M^t$$

- Dadas dos relaciones binarias R en $A \times B$ y S en $B \times C$, se puede definir la **composición de R y S**, S_0R en $A \times C$, de la misma forma que se definió la composición de correspondencias

$$S_0R = \{ (a, c) \in A \times C \,/\, \exists\, b \in B \text{ de manera que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S \} \qquad M_{S_0R} = M_S \odot M_R$$

(producto fila por columna booleano)

Operaciones

Ejercicio 2

Sean los conjuntos A={a, b, c, d}, B={1, 2, 3, 4} y C={e, f, g, h, i} las relaciones R y S definidas matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

a) R^{-1}

$$M_R^{-1} = M_R^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 2

Sean los conjuntos A={a, b, c, d}, B={1, 2, 3, 4} y C={e, f, g, h, i} las relaciones R y S definidas matricialmente

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén de forma matricial las relaciones

b) R_0S

$$M_{R0S} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Se consideran los conjuntos A = {2, 3, 5} y B = {4, 6, 8, 9, 10} y se define las relaciones en AxB

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ R\ b \leftrightarrow a \mid b$$

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ S\ b \leftrightarrow b=a+3$$

a) *Representa matricialmente las relaciones R y S*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) *Determina que pares (a,b)∈AxB verifican que a|b y b=a+3*

= (a,b) ∈ R y (a,b) ∈ S

La respuesta es R∩S

$$M_{R\cap S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 2

Se consideran los conjuntos A = {2, 3, 5} y B = {4, 6, 8, 9, 10} y se define las relaciones en AxB

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ R\ b \leftrightarrow a \mid b$$

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ S\ b \leftrightarrow b=a+3$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) *Determina que pares $(a,b) \in AxB$ verifican que $a|b$ o $b=a+3$*

$= (a,b) \in R$ o $(a,b) \in S$

La respuesta es $R \cup S$

$$M_{R\cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 2

Se consideran los conjuntos A = {2, 3, 5} y B = {4, 6, 8, 9, 10} y se define las relaciones en AxB

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ R\ b \leftrightarrow a \mid b$$

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ S\ b \leftrightarrow b=a+3$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) *Determina que pares $(a,b) \in AxB$ verifican que $a|b$ pero $b \neq a+3$*

$= (a,b) \in R$ y $(a,b) \notin S$

La respuesta es R-S

$$M_{R-S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Se consideran los conjuntos A = {2, 3, 5} y B = {4, 6, 8, 9, 10} y se define las relaciones en AxB

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ R\ b \leftrightarrow a \mid b$$

$$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ S\ b \leftrightarrow b=a+3$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) *Determina que pares $(a,b) \in AxB$ verifican que $b=a+3$ y $a \nmid b$*

$= (a,b) \in S$ y $(a,b) \notin R$

La respuesta es S-R

$$M_{S-R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 2

Se consideran los conjuntos A = {2, 3, 5} y B = {4, 6, 8, 9, 10} y se define las relaciones en AxB

$\forall a \in A, \forall b \in A \qquad a\ R\ b \leftrightarrow a \mid b$

$\forall a \in A, \forall b \in A \qquad a\ S\ b \leftrightarrow b = a+3$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f) *Determina que pares* $(a,b) \in AxB$ *verifican que* $b \neq a+3$

$= (a,b) \notin S$

La respuesta es S^c

$$M_{S^c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones

Ejercicio 2

Se consideran los conjuntos A = {2, 3, 5} y B = {4, 6, 8, 9, 10} y se define las relaciones en AxB

$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ R\ b \leftrightarrow a \mid b$

$\forall a \in A,\ \forall b \in A \qquad a\ S\ b \leftrightarrow b=a+3$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g) *Determina que pares $(b,a) \in BxA$ verifican que b es múltiplo de a*

$$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La respuesta es R^{-1}

Operaciones entre relaciones

- Sean R y S relaciones binarias en $A \times B$. Sea T relación binaria en $B \times C$

  Se pueden definir las siguientes operaciones (con la correspondiente matriz asociada si los conjuntos son finitos):

  - **Unión de R y S**: $R \cup S$ $\quad M_{R\cup S} = M_R + M_S$
  - **Intersección de R y S:** $R \cap S$ $\quad M_{R\cap S} = M_R \otimes M_S$
  - **Complementario de R** : $R^c = A \times B - R$ $\quad M_R = M_{A \times B} - M_R$
  - **Diferencia R-S :** $R - S$ $\quad M_{R-S} = M_R - M_S$ *(VER c))*

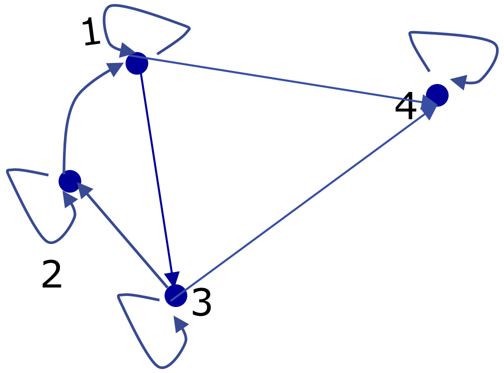
    $= M_{R\cap S^c} = M_R \otimes (M_{A \times B} - M_S)$ *(VER d))*
  - **Inversa de R:** R^{-1} $\quad M_{R^{-1}} = M_R^t$
  - **Composición de R y T:** R_0T $\quad M_{R_0T} = M_R \odot M_S$

teniendo en cuenta que

a) La suma de matrices es booleana (0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1)
b) $\otimes$ representa el producto (booleano) elemento a elemento
c) Si consideramos la resta definida: 1-1=0, 1-0=1, 0-0=0, 0-1=0
d) Si consideramos la resta habitual de matrices
e) $\odot$ representa el producto fila por columna booleano

Propiedad reflexiva

Ejemplo 1



A={1,2,3, 4}

R={(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4,4)}

a) $\Delta \subset R$, siendo $\Delta=\{(x, x) \in AxA \text{ , } x \in A\}$

b) $$M_R = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_R$$

Propiedad reflexiva

Sea R una relación en **AxA**.

- Se dice que R es **reflexiva** si

$$\forall x \in A \qquad x \, R \, x$$

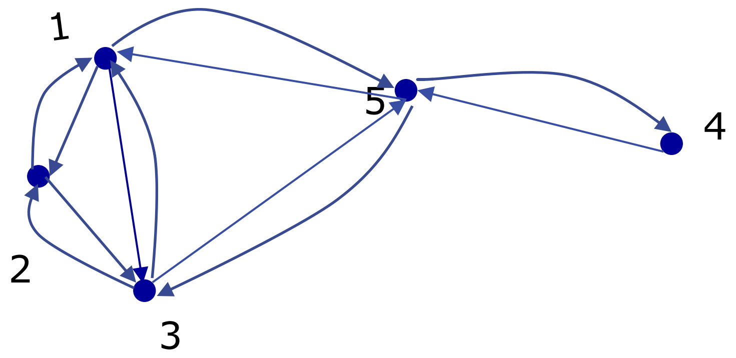
Representación gráfica
Existe un bucle (de i hacia i) en cada uno de los vértices

Representación matricial
La diagonal de la matriz asociada a R está formada por unos.
La matriz asociada a R verifica $Id \leq M_R$ (donde Id es la matriz identidad)

Equivalencia
R es reflexiva si y sólo si $\Delta \subset R$
si y sólo si $Id \leq M_R$

Propiedad simétrica

Ejemplo 2



A={1, 2, 3, 4, 5}

R = {(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 5), (4,5), (5, 1), (5, 3), (5, 4)}}

R^{-1}={(2,1), (3, 1), (5, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (5, 3), (5, 4), (1, 5), (3, 5), (4, 5)}

a) $R=R^{-1}$

b) $$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R^{\,t}$$

Propiedad simétrica

Sea R una relación en **AxA.**

- Se dice que R es **simétrica** si

$$\forall x,y \in A \quad x\,R\,y \quad \text{entonces} \quad y\,R\,x$$

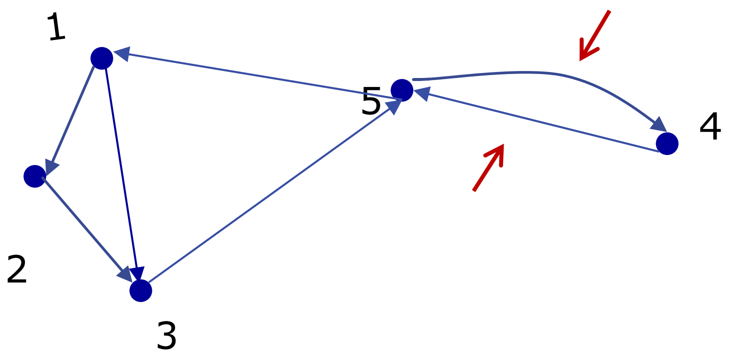
Representación gráfica
Si existe una flecha de i hacia j, entonces hay una flecha de j hacia i.

Representación matricial
La matriz asociada a R es simétrica, es decir, coincide con su traspuesta.

Equivalencia
R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$
si y sólo si $M_R = M_R^{\,t}$

Propiedad antisimétrica

Ejemplo 3



A={1, 2, 3, 4, 5}
R={(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5), (5, 4)}

a)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R^{\,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

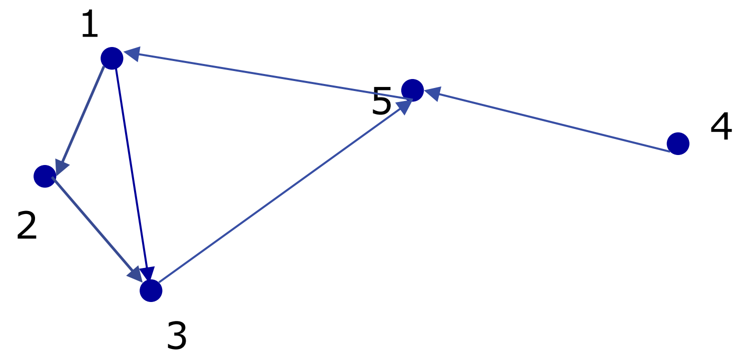
$$M_R - (M_R^{\,t} - Id) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq M_R$$

(Se considera 0-1=0)

Propiedad antisimétrica

Ejemplo 4

A={1, 2, 3, 4, 5}
R={(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5)}



a)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R{}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$M_R - (M_R{}^t - Id) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_R$$

(Se considera 0-1=0)

Propiedad antisimétrica

Sea R una relación en **AxA**

- Se dice que R es **antisimétrica** si

$\forall x,y \in A \quad x \neq y \quad \wedge \quad x\,R\,y \quad$ entonces $\quad y \,\neg R\, x$, o equivalentemente

$\forall x,y \in A \quad x\,R\,y \quad \wedge \quad y\,R\,x \quad$ entonces $\quad y = x$

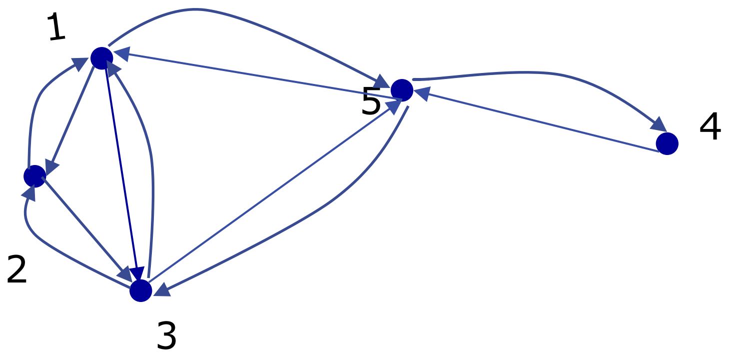
Representación gráfica
Si existe una flecha de i hacia j, entonces no existe una flecha de j hacia i.

Representación matricial
Si en la posición (i,j) de la matriz hay un 1, en la posición (j,i) hay un cero, es decir, si $M_R = M_R - (M_R{}^t - Id)$ *(se considera 0-1=0)*

Equivalencia
R es antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} \subset \Delta$
si y sólo si $M_R = M_R - (M_R{}^t - Id)$

Propiedad transitiva

Ejemplo 5



A={1, 2, 3, 4, 5}
R={(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 5), (4,5), (5,1), (5,3), (5,4)}

a) No es transitiva porque por ejemplo

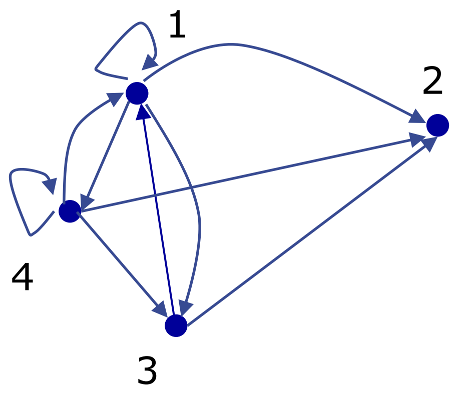
5R3 y 3R5 pero 5¬R5
4R5 y 5R1 pero 4 ¬ R1

b)

$$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cancel{\leq} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R$$

Propiedad transitiva

Ejemplo 6



A={1, 2, 3, 4, 5}
R={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2,2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2)}

$$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_R$$

Propiedad transitiva

Sea R una relación en **AxA**

- Se dice que R es **transitiva** si

$$\forall x,y,z \in A \quad x\,R\,y \;\wedge\; y\,R\,z \quad \text{entonces} \quad x\,R\,z$$

Representación gráfica

Si existe una flecha de i hacia j, y una flecha de j hacia k, entonces hay una flecha de i hacia k.

Representación matricial

La matriz asociada a R, M_R verifica $M_R \odot M_R \leq M_R$ *($\odot$ representa el producto habitual fila por columna con operaciones booleanas)*

Equivalencia

R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subset R$
si y sólo si $M_R \odot M_R \leq M_R$

Resumen propiedades

Sea A un conjunto finito.
Sea $R \subset A \times A$ y sea M la matriz asociada a R.
Sea $\Delta = \{ (x, x) \ / \ x \in A \}$ (la «relación diagonal» de $A \times A$).

- R es reflexiva $\leftrightarrow$ M_R tiene 1 en todas las posiciones de la diagonal principal
  $\leftrightarrow$ $\Delta \subset R$
  $\leftrightarrow$ $I \leq M_R$
- R es simétrica $\leftrightarrow$ $M_R = M_R{}^t$, (es decir, si M_R es simétrica)
  $\leftrightarrow$ $R = R^{-1}$
- R es antisimétrica $\leftrightarrow$ Si $i \neq j$, el elemento (i, j) o el (j, i) de M es 0
  $\leftrightarrow$ $M_{R \cap R^{-1}} \leq Id$
  $\leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subset \Delta$
  $\leftrightarrow$ $M_R = M_R - (M_R{}^t - Id)$ *(se considera 0-1=0)*
- R es transitiva $\leftrightarrow$ $M_R \odot M_R \leq M_R$ *(producto fila por columna booleano)*
  $\leftrightarrow$ $R \,_0\, R \subset R$