Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de Simplex Revisado

Nombre y apellidos:____________________________________e-mail:____________________

1 En una explotación agropecuaria se está modernizando el sistema de regadío de un riego de superficie a un moderno sistema de riego por aspersión de tipo estacionario fijo enterrado.

La parcela es muy irregular y es necesario instalar un número elevado de aspersores. La parcela se ha dividido en 6 sectores diferentes y existen 8 posibles puntos donde se puede instalar un aspersor. Existen dos tipos de aspersores, el de tipo medio, con un coste de 300 €/unidad y el de tipo grande con un coste de 490 €/unidad. Dependiendo del tipo de aspersor que se instale, más o menos sectores de la parcela quedarán cubiertos.

La tabla siguiente nos indica los sectores de la parcela que quedan cubiertos según se instale un aspersor medio o grande en cada uno de los 8 posibles puntos:

Posibles puntos para los aspersores	Sectores cubiertos con aspersor medio		Sectores cubiertos con aspersor grande		
Punto 1	1		1	2	
Punto 2	4		2	4	5
Punto 3	2	5	2	5	
Punto 4	4	5	2	4	5
Punto 5	2		2	3	5
Punto 6	5	6	3	5	6
Punto 7	3	6	3	6	
Punto 8	6		3	6	

En un punto dado sólo se puede instalar un aspersor, sea de tipo mediano o de tipo grande.

Adicionalmente, debido a restricciones del caudal máximo de agua, tan sólo se pueden instalar como mucho 2 aspersores de tipo grande.

a) Plantea un **modelo de programación lineal**, (explicando con claridad variables, función objetivo y restricciones), que permita determinar los puntos de aspersión a ocupar y con qué tipos de aspersores, de manera que se minimice el coste total de instalación. [1.5 puntos]

b) Se desea tener en cuenta que si se instala un aspersor de tipo medio en el punto 3 también se debe instalar un aspersor del mismo tipo en el punto 6. Modifica el modelo para que incluya esta posibilidad, de modo que el modelo resultante siga siendo lineal. [0.5 puntos]

c) La empresa proveedora de los aspersores aplicaría un descuento de 300 euros en la factura total en el caso de que se instalen al menos 3 aspersores de tipo medio. Detalla qué cambios

realizarías en el modelo construido en el apartado (a) para que tenga en cuenta esta nueva información, de modo que el modelo resultante siga siendo lineal. [0.75 puntos]

d) Se bonificará con 200 euros el hecho de que el sector 2 se cubriera exactamente con 1 aspersor. Modifica el modelo para que considere esta nueva situación, de modo que el modelo resultante siga siendo lineal. Indica claramente las modificaciones en las variables, función objetivo y restricciones que fueran necesarias para modelizar esta nueva situación. [0.75 puntos]

(Puntuación: 3.5 puntos)

2 Una empresa necesita determinar el plan de producción de los tres productos que fabrica: P1, P2 y P3. Estos productos pueden fabricarse en tres ubicaciones: U1, U2 y U3 de las cuales se desea utilizar como mucho dos.
La producción de cada producto genera, respectivamente, un volumen de contaminación de 0,5, 2 y 1 cm^3 por unidad producida, independientemente de la ubicación.

La siguiente tabla recoge, para cada una de las ubicaciones, los ingresos unitarios (euros) de cada producto, la capacidad máxima de producción diaria (unidades) y los volúmenes máximos de contaminación permitidos (cm^3):

	U1	U2	U3
Ingresos por P1 (euros/unidad)	2	4	3
Ingresos por P2 (euros/unidad)	5	3	6
Ingresos por P3 (euros/unidad)	3	4	2
Capacidad máxima de producción (unidades/día)	200	400	300
Volumen máximo de contaminación permitido (cm^3/día)	150	250	200

a) Plantea un **modelo de programación lineal** que permita determinar cuántas unidades diarias de cada producto deben producirse, y en qué ubicaciones, para maximizar los beneficios de la empresa respetando los niveles máximos de contaminación permitidos. [1.5 puntos]

b) La empresa, concienciada con los problemas del medio ambiente, ha establecido un sistema de penalización por la contaminación que pudiera exceder el volumen máximo de contaminación permitido:

	U1	U2	U3
Penalización por contaminación excedente (euros/cm^3)	20	15	10

En este contexto, la empresa decide considerar las siguientes *metas*:

- Los ingresos diarios (sin tener en cuenta las penalizaciones) deben ser de al menos 100 euros.
- No superar el nivel máximo de contaminación de la ubicación.
- No gastar más de 9.000 € al día por exceso de contaminación.

Reformula el modelo del apartado (a) como un modelo de programación lineal por metas, (explicando con claridad variables, función objetivo y restricciones) que permita determinar cuántas unidades diarias de cada producto deben producirse y en qué ubicaciones.
[1.5 puntos]

(Puntuación: 3 puntos)

3 Dado el siguiente programa lineal:

MAX Z= 4X1 + 3X2
s.a. 3X1+ 4X2 $\leq$ 12
4X1 + 2X2 $\leq$ 9
X1, X2 $\geq$ 0 y **enteras**

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}		x_B
X2	2/5	-3/10	21/10
X1	-1/5	2/5	12/10
$c_B^t\, B^{-1}$	2/5	7/10	Z=111/10

a) Aplica el algoritmo de **Bifurcación y Acotación** hasta encontrar la primera solución entera. Empieza la aplicación del algoritmo bifurcando en la solución óptima continua la variable X2. Utiliza como **técnica** de **selección del nodo a explorar** la del **nodo de mejor cota**. En cada nodo empezar acotando superiormente las variables ($\leq$). [2 puntos]

b) La solución encontrada, ¿es óptima? Justifica tu respuesta y en caso negativo, indica cómo seguiría el proceso de búsqueda de la solución. [0.75 puntos]

c) En un problema de programación lineal entera resuelto mediante el algoritmo de bifurcación y acotación, explica brevemente en qué casos un nodo del árbol no se ramifica (y, por lo tanto, no da lugar a dos nuevos nodos con sus correspondientes problemas). [0.75 puntos]

(Puntuación: 3.5 puntos)

etsinf II- Técnicas de Optimización - 2º Parcial (16 Junio 2015)

SOLUCIÓN

1.

a)

```
!Variables: Mi: 1: Se instala un aspersor Mediano en el punto i. 0: en
caso contrario
            Gi: 1: Se instala un aspersor Grande en el punto i. 0: en
caso contrario;

[Costes]MIN=300*(M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8)+490*(G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8);

!Todos los sectores han de estar cubiertos;
[S1] M1+G1 >=1;
[S2] G1+G2+G3+G4+G5+M3+M5 >=1;
[S3] G5+G6+G7+G8+M7 >=1;
[S4] G2+G4+M2+M4>=1;
[S5] G2+G3+G4+G5+G6+M3+M4+M6>=1;
[S6] G6+G7+G8+M6+M7+M8 >=1;

!En cada punto se puede instalar como mucho un aspersor sea de tipo
grande o mediano;
[Max1_1]G1+M1<=1;
[Max1_2]G2+M2<=1;
[Max1_3]G3+M3<=1;
[Max1_4]G4+M4<=1;
[Max1_5]G5+M5<=1;
[Max1_6]G6+M6<=1;

!Solo se pueden instalar 2 aspersores Grandes;
[Max2_G] G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8<=2;

!Las variables son binarias;
@BIN(G1);@BIN(G2);@BIN(G3);@BIN(G4);@BIN(G5);@BIN(G6);@BIN(G7);@BIN(G8);
@BIN(M1);@BIN(M2);@BIN(M3);@BIN(M4);@BIN(M5);@BIN(M6);@BIN(M7);@BIN(M8);
```

b) La instalación de M3 está condicionada a la de M6: **M3 <= M6**

c) Dado que el descuento se puede aplicar o no, se define una nueva variable:

YDesc: 1 si se aplica el descuento; 0 en caso contrario

Esta variable se añade a la función objetivo de modo que se descontarían 300€ del coste en caso de que se instalen al menos 3 aspersores de tipo medio:

```
MIN=300*(M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8)+490*(G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8)-
300YDesc;
```

Para controlar que el descuento se aplica en caso de que se hayan instalado al menos 3 aspersores de tipo medio es necesario añadir la siguiente restricción:

```
M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8 >= 3*YDesc;
```


d) Es necesario identificar el exceso de aspersores respecto al valor 1 requerido que cubren el sector 2; definimos la variable H2 que es la holgura de la restricción de cubrimiento del sector 2:

```
[S2] G1+G2+G3+G4+G5+M3+M5-H2=1;
```

Además se define una variable YDesc2: 1 si hay más de 1 aspersor cubriendo el sector 2; 0: en caso contrario

Es necesario vincular a la variable H2 y a la variable binaria asociada:

```
H2 <= 100*YDesc2;
```

Por último, en la función se incluirá el descuento que se aplicará en caso de que no haya exceso de aspersores en el sector 2:

```
MIN=300*(M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8)+490*(G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8) -
200*(1-YDesc2);
```

Nota: en la función objetivo aparece la variable complementaria de YDesc2 puesto que esta variable es =1 en caso de que efectivamente haya exceso de aspersores.

Nota 2: En la restricción que vincula a H2 y YDesc2, se controla que si H2<>0 entonces YDesc2=1. En caso de la variable H2=0 la variable YDesc2 tendría aparentemente libertad de valer 0 o 1 pero en realidad puesto que a la función objetivo le favorece que YDesc2=0, el comportamiento de la variable binaria sería el necesario para que efectivamente el descuento se aplique.

2.

a)

VARIABLES:

Definimos las variables de decisión siguientes:

X_{ij} =unidades producidas al día de P_j en U_i (i=1,2,3 ; j=1,2,3)

δ_j = Variable binaria. Vale 1 si se elige la ubicación j i; vale 0 en caso contrario (j=1,2,3)

FUNCIÓN OBJETIVO:

MAX $Z = 2X_{11} + 5X_{21} + 3X_{31} + 4X_{12} + 3X_{22} + 4X_{32} + 3X_{13} + 6X_{23} + 2X_{33}$

RESTRICCIONES:

[Capacidad de las ubicaciones y control del número de ubicaciones usadas]

$X11 + X21 + X31 \leq 200\ \delta 1$

$X12 + X22 + X32 \leq 400\ \delta 2$

$X13 + X23 + X33 \leq 300\ \delta 3$

$\delta 1 + \delta 2 + \delta 3 \leq 2$

[No superar el nivel máximo de contaminación]

$0.5\ X11 + 2\ X21 + X31 \leq 150$

$0.5\ X12 + 2\ X22 + X32 \leq 250$

$0.5\ X13 + 2\ X23 + X33 \leq 200$

[Restricciones sobre el dominio de las variables]

$Xij \geq 0$, $(i=1,2,3\ ;\ j=1,2,3)$; $\delta j = 0, 1\ (j=1,2,3)$

b)

VARIABLES:

Además de las variables definidas en el apartado a) definimos las variables de decisión siguientes:

Pi/Ni=variables desviación positivas/negativas (i=0,1,2,3,4)

FUNCIÓN OBJETIVO:

$\text{MIN } Z = N0 + P1 + P2 + P3 + P4$

(Se podría normalizar la función objetivo: $\text{MIN } Z = N0/100 + P1/150 + P2/250 + P3/200 + P4/9000$)

RESTRICCIONES:

[Capacidad de las ubicaciones y control del número de ubicaciones usadas]

$X11 + X21 + X31 \leq 200\ \delta 1$

$X12 + X22 + X32 \leq 400\ \delta 2$

$X13 + X23 + X33 \leq 300\ \delta 3$

$\delta 1 + \delta 2 + \delta 3 \leq 2$

[Metas]

[Meta ingresos diarios]

$2\ X11 + 5\ X21 + 3\ X31 + 4X12 + 3\ X22 + 4\ X32 + 3\ X13 + 6\ X23 + 2\ X33 - P0 + \underline{\underline{N0}} = 100$

[Meta No superar el nivel máximo de contaminación]

$0.5\ X11 + 2\ X21 + X31 - \underline{\underline{P1}} + N1 = 150$

$0.5\ X12 + 2\ X22 + X32 - \underline{\underline{P2}} + N2 = 250$

$0.5\ X13 + 2\ X23 + X33 - \underline{\underline{P3}} + N3 = 200$

[Meta no gastar más de 9000 € al día por exceso de contaminación]

$20\ P1 + 15\ P2 + 10\ P3 - \underline{\underline{P4}} + N4 = 9000$

[Restricciones sobre el dominio de las variables]

$Xij \geq 0$, $(i=1,2,3\ ;\ j=1,2,3)$; $\delta j = 0, 1\ (j=1,2,3)$; $Pi \geq 0$, $Ni \geq 0\ (i=0,1,2,3,4)$

3.

Partimos de la solución en **P0:**

V.Básicas	B^{-1}		X_B
X2	2/5	-3/10	21/10
X1	-1/5	2/5	12/10
$c_B^t\, B^{-1}$	2/5	7/10	**Z=111/10**

P0: X1=12/10; X2=21/10; Z=111/10 (Z*=-inf)

P1=P0(X1, X2, X3, X4) + X2 ≤ 2

X2 = 2 – u2; u2≤2, necesitamos decrementar X2

VNB en P0: X3, X4.

- $Y_{X3} = B^{-1} a_{X3} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ 2/5 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X2 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X3 → **JE=X3**. **La variable IS=x2 que se reemplaza por u2.** El pivote del cambio de base será 2/5
- El modelo equivalente al reemplazar x2 por 2-u2 es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX } Z= 4X1 + 3(2-u2) & \\ \text{s.a.} \quad 3X1+ 4(2-u2) \le 12 & \equiv \\ \quad 4X1 + 2(2-u2) \le 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{MAX } Z= 6 + 4X1 - 3\,u2 \\ 3X1- 4u2 \le 4 \\ 4X1- 2u2 \le 5 \end{array}$$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B_{P1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X3, X1; VNB= X4, u2.

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

$$Z = 6 + C_B^t X_B = 6 + (0,4)\begin{pmatrix} 1/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} = 6 + 5 = 11$$

P1: (VNB= X4, u2)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X3	1	-3/4	1/4
X1	0	1/4	5/4
$c_B^t\, B^{-1}$			**Z=11**

P1: X1=5/4; X2=2; Z=11 > Z*

Esta solución no es entera y el valor de la función objetivo es peor que el del problema P0. Dado que la técnica para generar y recorrer el árbol es la mejor cota, volvemos a P0 para resolver el otro subproblema: P2

P2=P0(X1, X2, X3, X4) + X2 ≥ 3

X2 = 3 + l2; l2≥0, necesitamos incrementar X2

VNB en P0: X3, X4.

- $Y_{X3} = B^{-1} a_{X3} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ 2/5 \end{pmatrix}$
- Para incrementar el valor de X2 necesitamos αij<0, por tanto sólo nos sirve X4 → **JE=X4. La variable IS=x2 que se reemplaza por l2.** El pivote del cambio de base será -3/10
- El modelo equivalente al reemplazar x2 por 3 + l2 es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX } Z= 4X1 + 3(3 + l2) & \\ \text{s.a.} \quad 3X1+ 4(3 + l2) \le 12 & \equiv \\ \quad 4X1 + 2(3 + l2) \le 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{MAX } Z= 9 + 4X1 + 3\,l2 \\ 3X1+ 4\,l2 \le 0 \\ 4X1 + 2\,l2 \le 3 \end{array}$$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B_{P2}^{-1} = \begin{pmatrix} -4/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X4, X1; VNB= X3, l2.

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} -4/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 9 + C_B^t X_B = 9 + (0, 4)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = 9 + 0 = 9$$

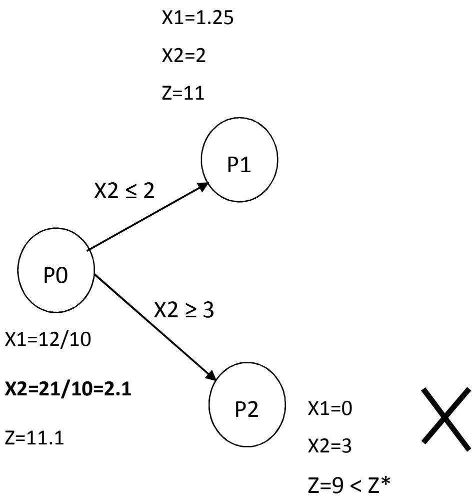
P2: (VNB= X3, l2)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X4	-4/3	1	3
X1	1/3	0	0
$c_B^t B^{-1}$			**Z=9**

Por tanto, la solución en P2 es: **X1=0; X2=3; Z=9**

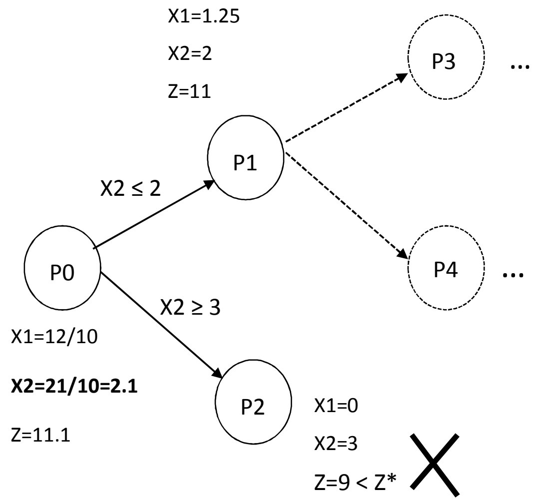
Esta solución es entera y mejor que el mejor valor entero hasta el momento por tanto actualizamos **Z* → Z* = 9**

Hemos encontrado la primera solución entera.



b) La solución encontrada en P2 es entera, sin embargo esta solución podría no ser la solución óptima dado que tenemos abierto el nodo P1 con mejor valor de la función objetivo.

El proceso de búsqueda seguiría a partir de ese problema acotando el valor de x1 a su entero superior e inferior en busca de una solución entera y con mejor valor de la función objetivo que la mejor disponible en este momento.



c) Un nodo no se ramifica si cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. Si la **solución** del problema correspondiente a ese nodo es **entera**.
2. Si el **valor de la función objetivo** del problema correspondiente a ese nodo es **peor** que el valor dela función objetivo de la **mejor solución entera** hasta el momento.
3. Si el problema correspondiente al nodo **no tiene solución factible**.