Computación de Altas Prestaciones

Teoría: Sesión 14

1

CAP-MUIinf

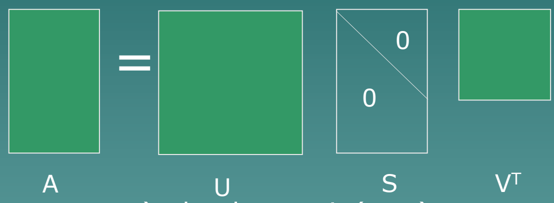
Contenido

1. La descomposición SVD.
2. Interpretación geométrica de la SVD.
3. Aplicaciones de la SVD.

2

1. La descomposición SVD

- La descomposición SVD (Singular Value Decomposition) descompone la matriz A $\in \Re^{m x n}$ en el producto de $U \cdot S \cdot V^T$, donde U $\in \Re^{m x m}$ y V $\in \Re^{n x n}$ son matrices ortogonales y S $\in \Re^{m x n}$ es una matriz diagonal.

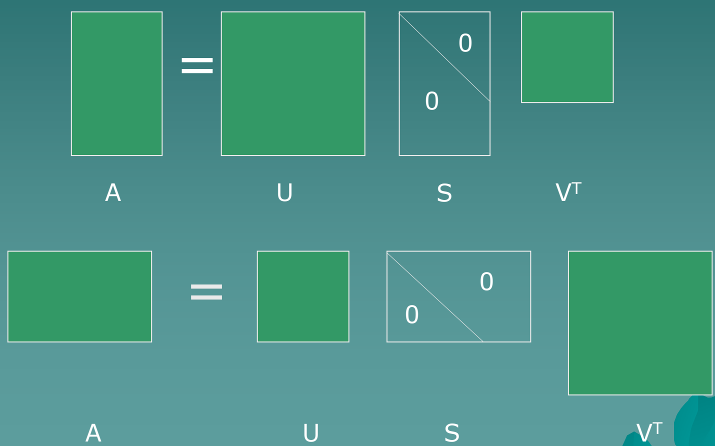


- S=diag(σ_1, σ_2, …., σ_p), donde p=min(m,n).
- A σ_1, σ_2, …., σ_p se le denominan valores singulares de A y se cumple que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots \geq \sigma_p \geq 0$.
- Las columnas de U se llaman vectores singulares de A por la izquierda.
- Las columnas de V se llaman vectores singulares de A por la derecha.

3

1. La descomposición SVD

- La descomposición SVD se puede calcular independientemente de las dimensiones de la matriz A.



4

1. La descomposición SVD

- Ejemplo:

A =

3	4	1
5	2	1
7	3	2
2	1	4

```
>> [U,S,V]=svd(A)
U =

   -0.4177    0.2038   -0.8847    0.0364
   -0.4852    0.2151    0.3111    0.7884
   -0.7048    0.1407    0.3402   -0.6064
   -0.3056   -0.9447   -0.0694    0.0970

S =

   11.0990         0         0
         0    3.2575         0
         0         0    2.2805
         0         0         0

V =

   -0.8310    0.2403    0.5016
   -0.4560    0.2220   -0.8619
   -0.3185   -0.9450   -0.0749
```

5

CAP-MUIinf

1. La descomposición SVD

- Ejemplo:

A =

2	1	4	6
3	5	-1	2
4	1	5	8

```
>> [U,S,V]=svd(A)
U =

   -0.5704    0.1778    0.8019
   -0.2482   -0.9680    0.0380
   -0.7830    0.1774   -0.5962

S =

   13.0755         0         0         0
         0    5.5117         0         0
         0         0    0.8068         0

V =

   -0.3837   -0.3336   -0.8267   -0.2408
   -0.1984   -0.8136    0.4905   -0.2408
   -0.4549    0.4655    0.2336   -0.7223
   -0.7787    0.0998    0.1459    0.6019
```

6

CAP-MUIinf

1. La descomposición SVD

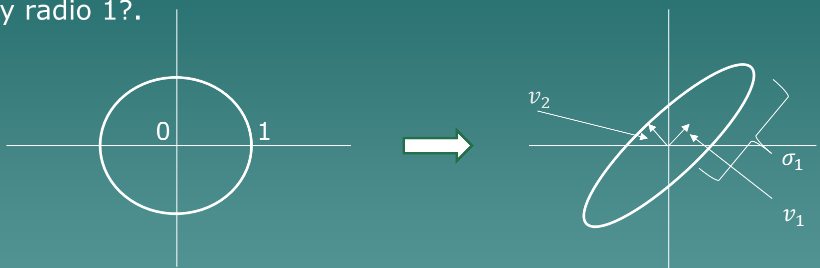
- La descomposición SVD se puede usar para las mismas aplicaciones que las descomposiciones LU, Cholesky o QR: solución de sistemas de ecuaciones lineales o problemas de mínimos cuadrados.
- No obstante, su coste es bastante mayor, por lo que no se emplea en esos casos.
- Se suele usar para problemas de mínimos cuadrados "problemáticos" (rango no completo), o para otras aplicaciones: determinar rango, compresión de datos, etc.

7

CAP-MUIinf

2. Interpretación geométrica de la SVD

- Tomemos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$, ¿cuál es el efecto de multiplicar una matriz A ∈ $\mathbb{R}^{2\times2}$ por los puntos de un círculo de centro 0 y radio 1?.



- El círculo se transforma en una elipse, alineada a lo largo de los vectores singulares (por la derecha) de A.
- Las longitudes de los lados de la elipse son los valores singulares de la matriz.
- Si un valor singular es mayor que 1, a lo largo de ese vector la elipse se alarga; si es menor que 1, a lo largo de ese vector la elipse se comprime.

8

2. Interpretación geométrica de la SVD

- Explicación más detallada de este ejemplo y de los siguientes en: http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-svd
- La SVD permite detectar las "direcciones" principales de cambio que induce una matriz.
- Cuanto más grandes son unos valores singulares respecto a otros, más importantes son sus vectores asociados a la hora de explicar el comportamiento de una matriz (o de los datos almacenados en esa matriz).
- Dicho de otro modo, los valores singulares mayores apuntan a la información más relevante de la matriz.

DSIC DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y COMPUTACIÓN

9

3. Aplicaciones de la SVD: aplicaciones matemáticas

- Cálculo del rango de una matriz: número de valores singulares mayores que 0.
- Cálculo del determinante: $|\det(A)| = \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_n$.
- Los valores singulares son las raíces cuadradas positivas de los valores propios de $A^T \cdot A$.
- Cálculo de la pseudoinversa de una matriz $A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$. Si $A = U \cdot S \cdot V^T$, la pseudoinversa de Moore-Penrose se obtiene como $A^+ = V \cdot S^{-1} \cdot U^T$.
- Cálculo de normas matriciales:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_p^2}$$

$$\|A\|_2 = \sigma_1$$

- Número de condición de una matriz:

$$K(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

DSIC DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y COMPUTACIÓN

10

CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: compresión de datos

- Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con p=min(m,n). Si $A=U \cdot S \cdot V^T$, entonces A se puede escribir como una suma de p matrices de rango 1:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \ldots + \sigma_p u_p v_p^T$$

- Si el rango de A es r<p, entonces se puede simplificar a:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \ldots + \sigma_r u_r v_r^T$$

- La importancia de cada término $\sigma_i u_i v_i^T$ es proporcional al valor singular σ_i. Recordemos que están ordenados.
- Ejemplo para una matriz A de tamaño 4x3:

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 & \sigma_2 u_2 & \sigma_3 u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \sigma_3 u_3 v_3^T$$

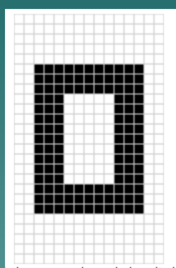
DSIC DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y COMPUTACIÓN

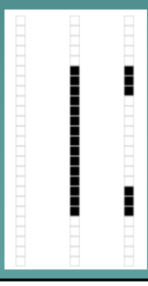
11

CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: compresión de datos

- Queremos transmitir esta imagen de 25 por 15 pixels.





- Ya que sólo tiene tres tipos de columnas, debería ser posible almacenarla de forma más compacta.

DSIC DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y COMPUTACIÓN

12

3. Aplicaciones de la SVD: compresión de datos

- La representamos como la siguiente matriz, de tamaño 25x15:

$$M = \begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{bmatrix}$$

CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: compresión de datos

- Si calculamos la SVD de esta matriz, comprobamos que tiene sólo 3 valores singulares mayores que 0, por lo cual su rango es 3 (sólo hay 3 columnas linealmente independientes):

  $\sigma_1 = 14.7243,\ \sigma_2 = 5.2166,\ \sigma_3 = 3.3141,\ \sigma_4 = 0,\ \ldots,\ \sigma_{15} = 0$
- Esta información se puede emplear para almacenar la matriz de forma comprimida:

$$A = \sigma_1 u_1 {v_1}^T + \sigma_2 u_2 {v_2}^T + \sigma_3 u_3 {v_3}^T$$

  - 3 vectores u_i de 25 elementos cada uno.
  - 3 vectores v_i de 15 componentes cada uno.
  - 3 valores σ_i.
  - En total 123 valores frente a los 375 de la matriz.
- La descomposición SVD descubre la redundancia presente en la matriz y proporciona un formato para eliminarla.

3. Aplicaciones de la SVD: reducción de ruido

- Supongamos que usamos un escáner para disponer de esta imagen en nuestro ordenador. Sin embargo, el escáner da lugar a imperfecciones sobre la imagen, denominadas "ruido".

- Si representamos la imagen como una matriz de tamaño 25x15 y calculamos sus valores singulares, obtenemos que: $\sigma_1 = 14.15$, $\sigma_2 = 4.67$, $\sigma_3 = 3.00$, $\sigma_4 = 0.21$, $\sigma_5 = 0.19$, …, $\sigma_{15} = 0.05$.

15

CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: reducción de ruido

- Claramente, los 3 primeros valores singulares son los más importantes y asumimos que el resto se deben al ruido de la imagen, con lo cual entendemos que:

$$A \approx \sigma_1 u_1 {v_1}^T + \sigma_2 u_2 {v_2}^T + \sigma_3 u_3 {v_3}^T$$

- Esto conduce a la siguiente imagen, mejorada.

Imagen con ruido

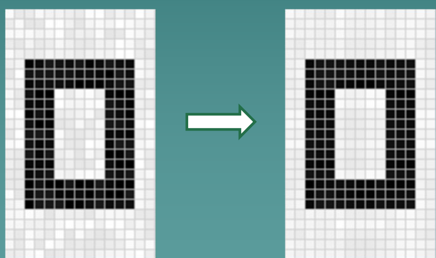


Imagen mejorada

16

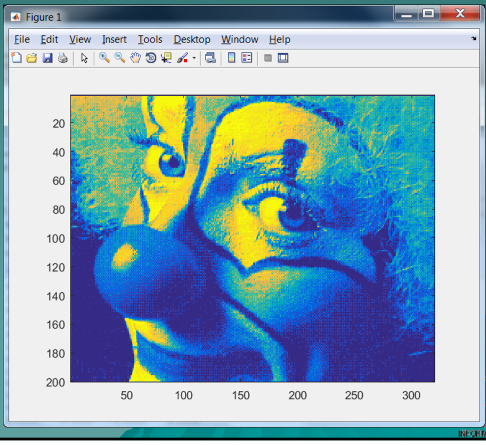
CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: compresión de imágenes

- Ejemplo a partir de matrices de Matlab:

  >> load clown.mat → Proporciona X de tamaño 200 x 320.

  >> imagesc(X)



17

CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: compresión de imágenes o transmisión progresiva

- Calculamos la descomposición SVD:

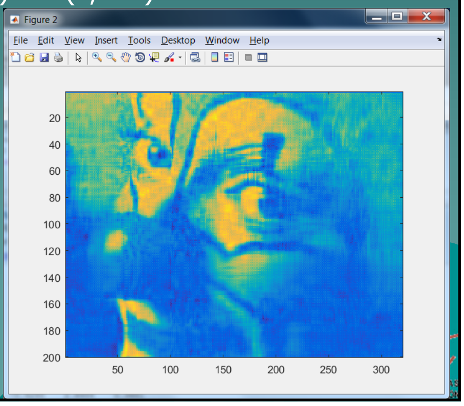
  >> [U,S,V]=svd(X);

- Seleccionamos un número k pequeño (k=20) de valores singulares. Mostramos la imagen con 20 términos:

  >> Y = U(:,1:k) * S(1:k,1:k) * V(:,1:k)'

  >> imagesc(Y)

- Necesitamos:
  - 20 vectores u_i de 200 elementos.
  - 20 vectores v_i de 320 elementos.
  - 20 valores σ_i.
  - En total 10420 datos frente a los 64000 de la matriz.



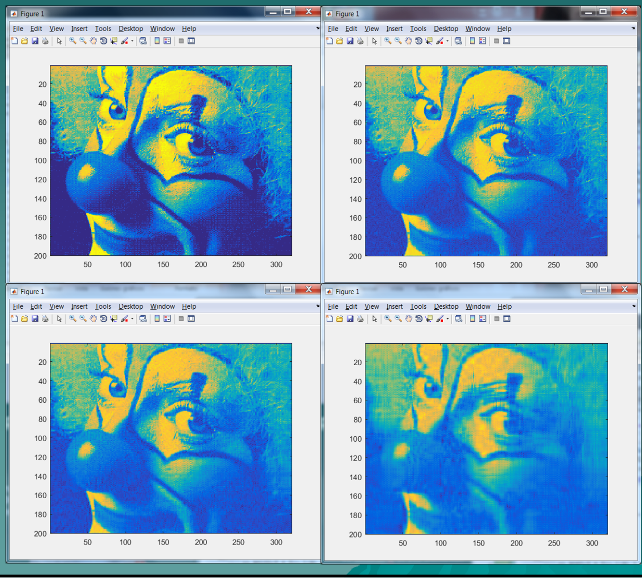
18

CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: compresión de imágenes

Original
64000
datos

k=100
52100
datos



k=60
31260
datos

k=20
10420
datos

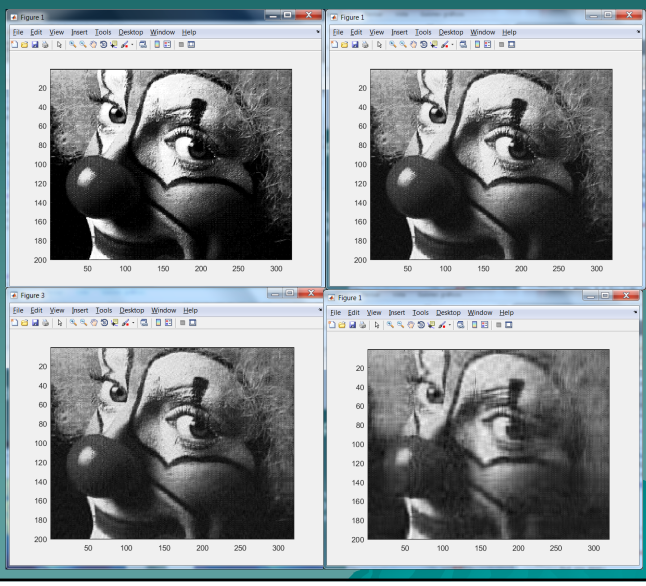
19

CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: compresión de imágenes

Original
64000
datos

k=100
52100
datos



k=60
31260
datos

k=20
10420
datos

20

CAP-MUIinf

3. Aplicaciones de la SVD: recomendaciones

- La SVD permite detectar las "tendencias" o "agrupamientos" más importantes en matrices compuestas por gran cantidad de datos.
- Netflix es una empresa que proporciona, mediante tarifa plana mensual, películas y series de televisión por Internet.
- En el año 2006, organizaron un concurso para intentar mejorar las predicciones de gustos de sus 500.000 abonados sobre sus 18.000 películas.
- Premio de 1.000.000$ para el que mejore su servicio de recomendaciones en un 10% (otorgado en el año 2009 al equipo "BellKor's Pragmatic Chaos"). Artículo del New York Times:

  http://www.nytimes.com/2008/11/23/magazine/23Netflix-t.html?_r=0
- La principal herramienta era la SVD.
- Más aplicaciones:

  https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee16b/sp18/lec/Lecture8B.pdf

21