EJERCICIOS ADICIONALES MODELIZACIÓN
(AULA Y LABORATORIO)

Ejercicio AULA 1

En el departamento de pintura de una fábrica de vehículos se desea conseguir una pintura gris de luminosidad igual a 75% y con un brillo entre 40% y 60%, a partir de la mezcla de hasta cuatro pinturas disponibles:

	Color	Acabado (brillo)	Precio (euros/litro)
Pintura 1	Negro	Mate	14
Pintura 2	Negro	Brillante	17
Pintura 3	Blanco	Mate	12
Pintura 4	Blanco	Brillante	22

El color negro equivale a un 0% de luminosidad, y el blanco a un 100%. El acabado mate equivale a un 0% de brillo, y el acabado brillante equivale a un 100% de brillo.

Ninguna de las pinturas debe constituir más del 50% de la mezcla. La mezcla no debe contener ningún otro ingrediente, y no se producen mermas de producto en el proceso de elaboración.

Plantear un **modelo lineal** que permita determinar la forma más económica de elaborar 7 litros de esta pintura gris, respetando todas las condiciones enunciadas. <u>Especificar claramente variables, función objetivo y restricciones.</u>

Ejercicio AULA 2

Una empresa puede fabricar hasta tres productos alimenticios, 1, 2 y 3, a partir de dos materias primas A y B. De acuerdo con los precios de mercado y los costes de producción actuales, el beneficio neto que la empresa obtiene con la venta los productos 1 y 2 es de 20 y 10 euros/Kg, respectivamente, mientras que la venta de del producto 3 genera unas pérdidas netas de 5 euros/Kg (es decir, un beneficio neto de −5 euros/Kg).

La cantidad necesaria de cada materia prima para fabricar cada producto se indica en la tabla siguiente:

	Materia prima A (unidades/Kg)	Materia prima B (unidades/Kg)
Producto 1	10	15
Producto 2	20	15
Producto 3	30	0

Se dispone de 50.000 unidades de la materia prima A para la próxima semana. Por otro lado, debido a problemas imprevistos, NO hay existencias de materia prima B, pero la fabricación de cada kilogramo de producto 3 genera un residuo del cual se pueden extraer (sin coste alguno) 5 unidades de materia prima B.

Por otro lado, para cumplir con los protocolos de calidad, todo el producto fabricado debe ser inspeccionado previamente a su venta. En una hora es posible inspeccionar hasta 5 Kg de producto 1, hasta 15 Kg de producto 2 o hasta 30 de producto 3. La capacidad de inspección es de 96 horas semanales.

Suponiendo que toda cantidad fabricada de producto será vendida, plantea un modelo de Programación Lineal que, teniendo en cuenta todas las condiciones enunciadas, permita a la compañía determinar el plan de producción que maximizaría el beneficio de la próxima semana. Especifica claramente: variables, función objetivo y restricciones.

Ejercicio LABORATORIO 1

En un parque natural deben establecerse turnos de vigilancia para las 24 horas del día, todos los días de la semana.
Con el fin de organizar mejor los turnos, un día se ha dividido en seis franjas de 4 horas: de las 00:00 a las 04:00, de 04:00 a 08:00, de 08:00 a 12:00, etc. En cada franja horaria se han definido las necesidades mínimas de los dos tipos de empleado existentes (Responsables e Informadores) para asegurar una vigilancia efectiva del parque natural.
En la tabla siguiente se detalla dicha información.

	Franja horaria					
	0–4h	4–8h	8–12h	12–16h	16–20h	20–24h
Responsables	1	2	4	4	2	2
Informadores	2	4	8	10	6	3

Cualquier empleado ha de trabajar 8 horas consecutivas, comenzando su turno al principio de una de las franjas en que se ha dividido el día, incluida la última franja del día (es decir, es posible comenzar a trabajar a las 20:00 de un día y terminar a las 04:00 del día siguiente).
El sueldo estándar de un vigilante Responsable es de 6,25 €/hora, y el de un Informador es 3,75 €/hora. Las horas trabajadas entre las 20:00 y las 04:00 se pagan un 40% más caras.

a) Plantea un **modelo de programación lineal con LINGO** que permita a los gestores del parque decidir cuántos empleados de cada tipo contratar en cada turno, de modo que se cubran las necesidades de vigilancia con el mínimo coste.

b) **Obtén con LINGO el valor óptimo de la función objetivo y el valor óptimo de cada variable decisión** del modelo de programación planteado en el apartado a).

c) Indica **como modificarías el modelo matemático del apartado a)** de modo que se considere la posibilidad de utilizar adicionalmente un nuevo tipo de vigilante «mixto» que trabajaría en el turno de 08:00 a 16:00, cobra sueldo de vigilante responsable y puede trabajar las 4 primeras horas de Responsable y las 4 últimas de Informador o bien las 4 primeras horas de Informador y las 4 últimas de Responsable.
Reformula el modelo para que tenga en cuenta esta nueva posibilidad.
No se pide la solución óptima con LINGO

Ejercicio LABORATORIO 2

El área de servicios informáticos de la Universidad debe organizar un dispositivo de refuerzo para atender las incidencias de los usuarios. Existen dos tipos de empleado: los sénior pueden atender 10 incidencias por hora, con un coste de 120 euros/hora; los aprendices pueden atender 6 incidencias por hora, con un coste de 70 euros/hora.
La franja de tiempo en la que se necesita reforzar la atención es de 10:00 a 17:00. La tabla siguiente muestra los posibles turnos para un empleado de refuerzo, y la cantidad total de incidencias que se espera tener que atender en cada franja horaria.

Franja horaria	Turno A	Turno B	Turno C	Turno D	Cantidad de incidencias a atender
10:00–11:00	×				60
11:00–12:00	×	×			90
12:00–13:00	×	×	×		100
13:00–14:00	×	×	×	×	60
14:00–15:00		×	×	×	50
15:00–16:00			×	×	60
16:00–17:00				×	30

El número total de empleados sénior y aprendices disponibles para refuerzo son 12 y 8, respectivamente.

a) **Formula un modelo de programación lineal en LINGO** (indicando claramente variables, función objetivo y restricciones) que permita determinar la forma de organizar el dispositivo de refuerzo de la manera menos costosa posible.

b) **Obtén con LINGO el valor óptimo de la función objetivo y el valor óptimo de cada variable decisión** del modelo de programación planteado en el apartado a).

c) Indica que *añadirías o eliminarías* en el modelo construido en el apartado (a) para que contemple la siguiente **condición adicional**: en cada franja horaria de 12 a 15, debe haber trabajando al menos un empleado sénior por cada dos aprendices. El modelo resultante debe continuar siendo **lineal**.

No se pide la solución óptima con LINGO

SOLUCIONES

Ejercicio AULA 1

Se trata de un problema de mezclas con cuatro posibles ingredientes.

Variables
El modelo debe permitir conocer qué cantidad de cada ingrediente hay que emplear:
x_i = litros de pintura i a incluir en la mezcla $\quad i = 1, \dots, 4$.

Función objetivo
Se desea conocer la mezcla de mínimo coste:
$[\text{Coste}]\text{Min } z = 14x_1 + 17x_2 + 12x_3 + 22x_4$ (euros)

NOTA: También se puede considerar que la función objetivo viene expresada en euros/litro.

Restricciones
[Luminosidad] $\quad x_3 + x_4 = 0{,}75(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$
[Brillo_LI] $\quad x_2 + x_4 \geq 0{,}40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$
[Brillo_LS] $\quad x_2 + x_4 \leq 0{,}60(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$
[Proporción] $\quad x_i \leq 0{,}50(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, $\quad$ para $i = 1, \dots, 4$.
[7 litros de mezcla] $\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
[Naturaleza de las vars.] $\quad x_i \geq 0$, $\quad$ para $i = 1, \dots, 4$.

NOTA: NO sería correcto expresar la restricción [Luminosidad] como $\frac{x_3+x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4} = 0{,}75$, ya que el modelo dejaría de ser *lineal*, lo cual se exige en el enunciado. Lo mismo se puede decir para las restricciones [Brillo] y [Proporción].

Ejercicio AULA 2

Variables:
x_i = Cantidad a fabricar de producto i (kilogramos/semana); $i = 1, \dots, 3$.

Función objetivo. Maximizar beneficios:
Max $z = 20\,x_1 + 10\,x_2 - 5\,x_3$ (euros/semana).

Restricciones:
[Mat. prima A] $10\,x_1 + 20\,x_2 + 30\,x_3 \leq 50.000$
[Mat. prima B] $15\,x_1 + 15\,x_2 - 5\,x_3 \leq 0$
[Inspección] $x_1/5 + x_2/15 + x_3/30 \leq 96$
[No negatividad] $\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ejercicio LABORATORIO 1

a)
MODELO MATEMÁTICO:

```
MIN = 60*RA + 50*RB + 50*RC + 50*RD + 60*RE + 70*RF
+ 36*IA + 30*IB + 30*IC + 30*ID + 36*IE + 42*IF;

[respons0_4h]      RF + RA   >= 1;
[respons4_8h]      RA + RB   >= 2;
[respons8_12h]     RB + RC   >= 4;
[respons12_16h]    RC + RD   >= 4;
[respons16_20h]    RD + RE   >= 2;
[respons20_24h]    RE + RF   >= 2;

[inform0_4h]       IF + IA   >= 2;
[inform4_8h]       IA + IB   >= 4;
[inform8_12h]      IB + IC   >= 8;
[inform12_16h]     IC + ID   >= 10;
[inform16_20h]     ID + IE   >= 6;
[inform20_24h]     IE + IF   >= 3;
```

b)

```
SOLUCIÓN ÓPTIMA:

Global optimal solution found.
Objective value:  970.0000

Variable      Value        Reduced Cost
RA         1.000000            0.000000
RB         1.000000            0.000000
RC         4.000000            0.000000
RD         0.000000            0.000000
RE         2.000000            0.000000
RF         0.000000            0.000000
IA         2.000000            0.000000
IB         2.000000            0.000000
IC         7.000000            0.000000
ID         3.000000            0.000000
IE         3.000000            0.000000
IF         0.000000            0.000000
```

c)

w_{C1} = Cantidad de vigilantes «mixtos» contratados para el turno C (Responsable de 8:00 a 12:00 e Informador de 12:00 a 16:00).
w_{C2} = Cantidad de vigilantes «mixtos» contratados para el turno C (Informador de 8:00 a 12:00 y Responsable de 12:00 a 16:00)

Min $z = 60\, x_A + \ldots + 42\, y_F + 50\, (w_{C1} + w_{C2})$ euros/día

[respons. 8–12h]	$x_B + x_C + w_{C1} \geq$	4
[respons. 12–16h]	$x_C + x_D + w_{C2} \geq$	4
[inform. 8–12h]	$y_B + y_C + w_{C2} \geq$	8
[inform. 12–16h]	$y_C + y_D + w_{C1} \geq$	10

[naturaleza de las variables] $x_A, \ldots, x_F, y_A, \ldots, y_F, w_{C1}, w_{C2} \geq 0$ y enteras

Ejercicio LABORATORIO 2

a)

MODELO MATEMÁTICO:

! VARIABLES:

Si = Cantidad de empleados sénior con turno `i`.

Ai = Cantidad de empleados aprendices con turno `i`.

i = A, …, D.

! FUNCIÓN OBJETIVO;

MIN = 120*4*(SA + SB + SC + SD) + 70*4*(AA + AB + AC + AD);

! RESTRICCIONES;

[10:00 - 11:00] 10*SA + 6*AA >= 60;

[11:00 – 12:00] 10*(SA + SB) + 6*(AA + AB) >= 90;

[12:00 – 13:00] 10*(SA + SB + SC) + 6*(AA + AB + AC) >= 100;

[13:00 – 14:00] 10*(SA + SB + SC + SD) + 6*(AA + AB + AC + AD) >= 60;

[14:00 – 15:00] 10*(SB + SC + SD) + 6*(AB + AC + AD) >= 50;

[15:00 – 16:00] 10*(SC + SD) + 6*(AC + AD) >= 60;

[16:00 – 17:00] 10*SD + 6*AD >= 30;

[Sénior] SA + SB + SC + SD <= 12;

[Aprendices] AA + AB +AC + AD <= 8;

@GIN(SA);@GIN(SB);@GIN(SC);@GIN(SD);

@GIN(AA);@GIN(AB);@GIN(AC);@GIN(AD);

b)

SOLUCIÓN ÓPTIMA:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:  7160.000

Variable     Value        Reduced Cost
SA        5.000000            480.0000
SB        1.000000            480.0000
SC        3.000000            480.0000
SD        3.000000            480.0000
AA        5.000000            280.0000
AB        0.000000            280.0000
AC        0.000000            280.0000
AD        0.000000            280.0000
```

c)

MODELO MATEMÁTICO:

Añadimos las siguientes restricciones:

```
! Relación entre tipos de trabajadores;
```

[12:00 – 13:00] 2*(SA + SB + SC) >= (AA + AB + AC);

[13:00 – 14:00] 2*(SA + SB + SC + SD) >=(AA + AB + AC + AD);

[14:00 – 15:00] 2*(SB + SC + SD) >= (AB + AC + AD);