Nombre y apellidos:____e-mail:______________________

1 Una pequeña empresa fabrica 3 productos: A, B y C usando tres máquinas M1, M2 y M3 de las que dispone 430, 460 y 450 horas/mes respectivamente. La empresa ha asumido el compromiso de producir al menos 90 unidades del producto A cada mes y no puede en ningún caso sobrepasar el tiempo mensual disponible de cada una de las máquinas. Los responsables de la empresa han formulado el siguiente programa lineal para conocer el plan óptimo de fabricación que maximiza el beneficio mensual respetando todas las condiciones enunciadas:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Max} & & z = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a:} & [\text{M1}] & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ & [\text{M2}] & 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ & [\text{M3}] & x_1 + 4x_2 \leq 450 \\ & [\text{DemA}] & x_1 \geq 90 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\},$$

donde x1, x2, x3 son las cantidades de los productos A, B y C. M1, M2 y M3 son las restricciones relativas a la capacidad disponible (horas) de las máquinas.

El modelo se ha resuelto con **LINGO** y la solución óptima y su análisis de sensibilidad se incluyen en el siguiente informe:

```
Variable           Value        Reduced Cost
      X1        90.00000            0.000000
      X2        90.00000            0.000000
      X3        95.00000            0.000000

     Row    Slack or Surplus       Dual Price
       1        1375.000            1.000000
      M1        65.00000            0.000000
      M2        0.000000            2.500000
      M3        0.000000            1.500000
    DemA        0.000000           -5.000000

Ranges in which the basis is unchanged:
                      Objective Coefficient Ranges:
                       Current        Allowable        Allowable
          Variable    Coefficient      Increase         Decrease
                X1     4.000000        5.000000         INFINITY
                X2     6.000000        INFINITY         6.000000
                X3     5.000000        INFINITY         3.333333

                          Righthand Side Ranges:
                       Current        Allowable        Allowable
               Row       RHS           Increase         Decrease
                M1     430.0000        INFINITY         65.00000
                M2     460.0000        130.0000         190.0000
                M3     450.0000        130.0000         360.0000
              DemA     90.00000        63.33333         65.00000
```

Contesta a las siguientes cuestiones **justificando en todos los casos la respuesta**:

a) ¿Cuál es el beneficio máximo que se puede obtener? ¿qué hay que producir para conseguirlo? ¿Cuáles son los cuellos de botella del sistema productivo? Si hubiera que aconsejar una única mejora, ¿sobre qué restricción debería aplicarse? **[0,5 puntos]**

b) El departamento de producción está estudiando una modificación en el proceso de fabricación del producto A que duplicaría su actual beneficio unitario. Si se lleva a cabo la mejora, ¿cambiaría la solución óptima actual? ¿se seguirían produciendo unidades de los tres productos? ¿cuál sería el nuevo valor de la función objetivo y de las variables decisión? Sé tan preciso/-a como lo permita la información facilitada por los informes de Lingo®. **[0,5 puntos]**

c) Debido a un incremento en los costes de los materiales usados en la fabricación del producto C, su beneficio unitario se ha reducido en 4€, ¿qué impacto tendría esta modificación sobre solución óptima y sobre el valor óptimo de la función objetivo? ¿se seguirían produciendo unidades de los tres productos? **[0,5 puntos]**

d) Supongamos que nuevos acuerdos comerciales obligan ahora a producir como mínimo 97 unidades de A al mes, en lugar de las 90 actuales. ¿Cómo afectaría esto al plan de producción óptimo y al beneficio asociado? ¿se seguirían produciendo unidades de los tres productos? Sé tan preciso/-a como lo permita la información facilitada por los informes de Lingo®. **[0,75 puntos]**

e) La empresa ha recibido una oferta de mejora de las prestaciones de M2 con un coste de 300 euros/mes. Dicha operación supondría un incremento de 100 horas de M2. ¿Debe la empresa aceptar la oferta? Y si -con el mismo coste, el aumento de capacidad de M2 fuera de 200 horas/mes, ¿debería aceptarse la oferta? **[0,75 puntos]**

(Puntuación: 3 puntos)

2 Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{lll} Min & & z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.a: & [R1] & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & [R2] & -3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & [R3] & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} (P)$$

a) **Plantea el modelo matemático ampliado** y obtén la **solución básica inicial** a partir de la cual continuaría la aplicación del método simplex de las 2 fases. **[0,5 puntos]**

b) La siguiente tabla corresponde a una Solución Básica del problema (P) obtenida mediante la aplicación del método simplex de las 2 fases del, (donde X3 es la variable de holgura de la restricción [R1] y a3 es la variable artificial asociada a la restricción [R3]):

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	-1/2	0	7
X2	0	1/2	0	3
a3	0	-1/2	1	3
$c_B^t\, B^{-1}$	0	-1/2	1	Z=3

A partir de esta tabla, **realiza UNA iteración del algoritmo simplex de las 2 fases** y obtén la nueva solución básica. **[1,5 puntos]**

c) La solución básica obtenida en b), ¿es óptima para el problema original (P)? Justifica la respuesta. **[1 punto]**

(Puntuación: 3 puntos)

3 Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{lll} Max & & z = 50x_1 + 25x_2 + 20x_3 \\ s.a: & [R1] & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 160 \\ & [R2] & 6x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 180 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Cuya solución óptima es la que se presenta en la siguiente tabla en la que x5 es la variable de holgura de la restricción [R2]:

v.básicas	B^{-1}		x_B
X2	1	0	160
X5	-1	1	20
$c_B^t\, B^{-1}$	25	0	Z=4000

A partir de la solución óptima del problema, resuelve las siguientes situaciones:

a) El coeficiente en la función objetivo de X3 aumenta en 20, ¿la solución óptima cambia? Y ¿el valor de la función objetivo? Calcula el nuevo valor óptimo de las variables y de la función objetivo.**[0,5 puntos]**

b) La parte derecha de la restricción [R1] aumenta en 30, ¿qué efecto tendría sobre la solución óptima actual? Calcula el nuevo valor óptimo de las variables y de la función objetivo. **[1 punto]**

(Puntuación: 1,5 puntos)

4 Se desea conseguir una pintura gris de luminosidad igual a 75% y con un brillo entre 40% y 60%, a partir de la mezcla de hasta cuatro pinturas disponibles:

	Color	Acabado (brillo)	Precio (euros/litro)
Pintura 1	Negro	Mate	16
Pintura 2	Negro	Brillante	14
Pintura 3	Blanco	Mate	18
Pintura 4	Blanco	Brillante	20

El color negro equivale a un 0% de luminosidad, y el blanco a un 100%. El acabado mate equivale a un 0% de brillo, y el acabado brillante equivale a un 100% de brillo.

Ninguna de las pinturas debe constituir más del 50% de la mezcla. La mezcla no debe contener ningún otro ingrediente, y no se producen mermas de producto en el proceso de elaboración.

a) Plantea un modelo lineal que permita determinar la forma más económica de elaborar 5 litros de esta pintura gris, respetando todas las condiciones enunciadas. <u>Especifica claramente variables, función objetivo y restricciones.</u> **[1,5 puntos]**

b) Debido al diferente espesor de las pinturas consideradas, el tiempo que se necesita para elaborar la mezcla dependerá de la cantidad que se emplee de cada una de ellas. En concreto, la máquina mezcladora es capaz de procesar hasta 2 litros de pintura 1 por minuto, o hasta 2,5 de pintura 2, o 3 de pintura 3 o 3,5 de pintura 4.

   Reformula el modelo planteado en el apartado (a), de modo que permita conocer <u>la manera más rápida de elaborar la pintura</u>, sin que el coste sobrepase los 18 euros/litro. Indica claramente qué debe mantenerse y modificarse respecto al modelo original. **[1 punto]**

(Puntuación: 2,5 puntos)

SOLUCIÓN

1.

a) **-** El valor óptimo de la función objetivo es de 4*90 + 6*90 + 5* 95 = 1375 €/mes

- Para obtener este beneficio, hay que producir mensualmente 90 unidades de A, 90 unidades de B y 95 unidades de C.

- Los cuellos de botella son las restricciones con holgura igual a cero. En este caso las restricciones M2, M3 y DemA.

- La mejora debería aplicarse sobre la restricción DemA ya que tiene un coste de oportunidad más alto en valor absoluto. Concretamente, convendría reducir la demanda mínima de A ya que se trata de una restricción cuello de botella mayor e igual

b) El beneficio actual del producto A es de 4 €/unidad. Duplicar el beneficio de A implicaría disponer de un beneficio de 8 €/unidad. Este incremento de 4€ del beneficio de A se encuentra dentro de los límites del análisis de sensibilidad, por tanto:

- La solución óptima no cambiará y por tanto se seguirían produciendo los mismos tipos de productos y en las mismas cantidades.
- El valor óptimo de la función objetivo mejorará en 4*90 = 360€. Por tanto, el nuevo valor óptimo de la función objetivo será: 1375 + 360 = 1735€.

c) El beneficio de C se ha reducido en 4€. Este decremento **no** se encuentra dentro de los límites del análisis de sensibilidad, por tanto:

- La solución óptima habrá cambiado. No podemos asegurar que se produzcan unidades de los tres productos en la nueva solución.
- El valor óptimo de la función objetivo habrá empeorado al menos en 3.33*95 = 316.35

d) Se incrementa la demanda de A en 7 unidades. Esta modificación se encuentra dentro de los límites del análisis de sensibilidad y por tanto:

- El coste de oportunidad -5 es contante y podemos predecir el nuevo valor óptimo de la función objetivo. Como estamos incrementando un bi de una restricción mayor o igual, esta modificación implicará empeorar el beneficio óptimo en 5*7 = 35€. Esto implica que se reducirá el valor óptimo de la función objetivo y el nuevo beneficio será: 1375 – 35 = 1340€.
- Al modificar el bi de una restricción cuello de botella, la solución óptima actual cambiará. No se puede predecir el nuevo valor óptimo de las variables.
- La base óptima permanecerá constante y por tanto se seguirán produciendo unidades de los tres productos.

e) Un incremento de 100 horas de capacidad de M2 se encuentra dentro del análisis de sensibilidad de M2 y por tanto el valor óptimo de la función objetivo se vería mejorado en 2.5*100 = 250€/mes. Como el coste es de 300€/mes, la oferta NO debe aceptarse.

Un incremento de 200 horas de capacidad de M2 NO se encuentra dentro del análisis de sensibilidad de M2 y por tanto el coste de oportunidad no será constante en todo el rango de incremento de bi de la restricción M2. Sin embargo, hasta un incremento de 130 horas, el coste de oportunidad será de 2.5 obteniéndose una mejora de al menos 130*2.5 = 325€/mes. Incremento mínimo del beneficio que es superior al coste y por tanto, en este caso la oferta SI se debe aceptarse.

2.

a)

El modelo ampliado correspondiente el programa lineal planteado es el siguiente:

Min 3 X1 + 2 X2

s.a: [R_1] 2 X1 + X2 + X3 = 10

[R_2] -3 X1 + 2 X2 + a2 = 6

[R_3] X1 + X2 – X4 + a3 = 6

X1, X2, X3, X4, Xa, Xb ≥ 0

Dado que el modelo incluye variables artificiales es necesario aplicar el método simplex de las 2 Fases. La SB0 del algoritmo simplex de 2 fases para el modelo planteado es la siguiente :

FASE 1 : Minimizar Z = a2 + a3

SBF_0:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	0	0	10
a2	0	1	0	6
a3	0	0	1	6
$c_B^t\ B^{-1}$	0	1	1	Z=12

SBF_0: ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) ; $z = 0$

b) Partimos de la SB:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	-1/2	0	7
X2	0	1/2	0	3
a3	0	-1/2	1	3
$c_B^t\ B^{-1}$	0	-1/2	1	Z=3

Esta SB corresponde todavía a la Fase 1 del algoritmo puesto que incluye como VB una variable artificial.

Para obtener la siguiente SB es necesario determinar en primer lugar la optimalidad de la SBF_0 y para ello es necesario calcular los cj-zj de las variables no básicas, X1 y X4:

$z_j = (c^t_B B^{-1})\, a_j$

$z_{x1} = (c^t_B B^{-1})\, a_{x1} = (0,-1/2,1)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3/2 + 1 = 5/2;\ \ c_{x1} - z_{x1} = -5/2$

$z_{x4} = (c^t_B B^{-1})\, a_{x4} = (0,-1/2,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1;\ c_{x4} - z_{x4} = 1$

Todavía hay Cj-Zj negativos, por lo que la solución actual no es óptima y en la siguiente iteración entra en la base X1

$y_{x1} = B^{-1}\, a_{x1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

y sale a3:

v.básicas	B^{-1}			x_B	y_{x1}	$\hat{b}_i/\hat{a}_{i,\mathrm{JE}}$
X3	1	-1/2	0	7	7/2	2
X2	0	1/2	0	3	-3/2	-
a3	0	-1/2	1	3	5/2	6/5
$c_B^t B^{-1}$	0	-1/2	1	Z=3		

Calculamos el valor de B^{-1} y a partir de ésta, la nueva SB:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & 1/5 & 3/5 \\ 0 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

SBF_2:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	1/5	-7/5	14/5
X2	0	1/5	3/5	24/5
X1	0	-1/5	2/5	6/5
$c_B^t B^{-1}$	0	0	0	Z=0

SBF_2: ($x_1 = 6/5$, $x_2 = 24/5$) ; $z = 0$

Solución Óptima FASE 1

c)

La solución que hemos obtenido en el apartado b) es óptima para la fase 1 del algoritmo puesto que ya no incluye como VBásica ninguna variable artificial. Para saber si es óptima para el problema original debemos cambiar a la función objetivo inicial, es decir, pasar a la fase 2 del algoritmo.

FASE 2 : Minimizar Z = 3x1 + 2x2

El objetivo de la fase 2 es optimizar la función objetivo del problema original, de modo que es necesario recalcular el valor de la función objetivo y el criterio de optimalidad.

Partiendo de la SB actual, la nueva tabla del simplex revisado es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	1/5	-7/5	14/5
X2	0	1/5	3/5	24/5
X1	0	-1/5	2/5	6/5
$c_B^t\, B^{-1}$	0	-1/5	12/5	Z=66/5

SBF_2: (x_1 = 6/5 , x_2 = 24/5) ; z = 66/5

Para determinar si la SB_2 es solución óptima es necesario calcular los cj-zj de las VNB, en este caso únicamente X4:

$$z_{x4} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = (0,1/5,12/5)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = -12/5;\ \mathbf{c_{x4} - z_{x4} = 12/5}$$

La tabla a la que llegamos corresponde a una SBF que cumple el criterio de optimalidad en un problema de minimización ya que $C_j - Z_j \geq 0\ \forall$ VNB. Por tanto, la SB del apartado b) ***es*** solución óptima del problema.

Sol. óptima: (x_1^* = 6/5 , x_2^* = 24/5).

Valor óptimo de la función objetivo: z^* = 66/5.

3.

a) **c'₃= 40**

para saber si la solución actual sigue siendo óptima es necesario recalcular las condiciones de optimalidad para las variables no básicas:

$c_{x1} - z_{x1} = 50 - 100 = -50$

$$z_{x1} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x1} = (25,0)\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = 100$$

c_{x3}- z_{x3} = **40** – 50 = -10

$z_{x3} = (c^t_B B^{-1})\, a_{\mathbf{x3}} = (25,0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 50$

c_{x4}- z_{x4} = 0-25 = -25

$z_{x4} = (c^t_B B^{-1})\, a_{\mathbf{x4}} = (25,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 25$

Dado que el problema es de maximización y Cj-Zj ≤ 0 ∀ VNB, podemos afirmar que cuando el coeficiente de X3 pasa a ser 40, la solución actual sigue siendo óptima. En cuanto al valor de la función objetivo, tampoco cambia porque X3 es VNB en la solución óptima.

NB: Para determinar si la solución actual sigue siendo óptima también sería correcto calcular el C.Reducido de X3 en la Solución óptima actual. Teniendo en cuenta el significado del Coste reducido como mejora mínima en el coeficiente en la función objetivo para que interese que una variable forme parte de la solución óptima, dado que c_{x3}- z_{x3} = -30 y la modificación propuesta es un incremento de 20, la conclusión es que X3 seguirá sin formar parte de la solución. La solución óptima se mantiene y también el valor de la función objetivo puesto que X3 es VNoBasica en la solución actual.

b) **b1= 190**

El cambio en la parte derecha de una restricción puede afectar a su factibilidad. Para verificarlo se debe calcular el nuevo valor de las variables:

$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ -10 \end{pmatrix}$

Cuando la parte derecha de la restricción R1 aumenta en 30 la solución deja de ser factible. Para obtener el valor de las variables y de la función objetivo es necesario aplicar el algoritmo dual del simplex y resolver la infactibilidad.

De acuerdo con el algoritmo dual del simplex se elige en primer lugar la variable que sale de la base y en segundo lugar la variable que entra en la base.

La variable que sale de la base es X5 ya que es la única variable negativa.

Para determinar la variable que entra en la base es necesario calcular el vector Y de las variables no básicas:

$Y_{x1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Y_{x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Y_{x4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

A la vista de los vectores Y, la única variable no básica que al entrar en la base conseguiría incrementar el valor de X5 es X4 y por tanto X4 es la variable entrante en la nueva SB. El pivote del cambio de base es -1.

Una vez recalculada la matriz B^{-1}, la nueva SB es la siguiente:

v.básicas	B^{-1}		x_B
X2	0	1	180
X4	1	-1	10
$c_B^t B^{-1}$			Z=4500

La nueva SB es factible y por tanto, de acuerdo con el criterio de optimalidad del algoritmo dual del simplex, es óptima.

4.

a)

Se trata de un problema de mezclas con cuatro posibles ingredientes.

Variables

El modelo debe permitir conocer qué cantidad de cada ingrediente hay que emplear:

x_i = Cantidad/proporción de pintura i a incluir en la mezcla (litros por cada litro de mezcla).

$i = 1, \ldots, 4.$

Función objetivo

Se desea conocer la mezcla de mínimo coste:

[Coste] $\quad \text{Min } z = 16x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 20x_4$ (euros)

NOTA: También se puede considerar que la función objetivo viene expresada en euros/litro.

Restricciones

[Luminosidad] $\quad x_3 + x_4 = 0{,}75(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

[Brillo] $0{,}40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \leq x_2 + x_4 \leq 0{,}60(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

[Proporción] $x_i \leq 0{,}50(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, para $i = 1, \dots, 4$.

[5 litros de mezcla] $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$

[Naturaleza de las vars.] $x_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, 4$.

NOTA: NO sería correcto expresar la restricción [Luminosidad] como $\frac{x_3+x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4} = 0{,}75$, ya que el modelo dejaría de ser *lineal*, lo cual se exige en el enunciado. Lo mismo se puede decir para las restricciones [Brillo] y [Proporción].

b)

Sobre el planteamiento del apartado (a), en este apartado se propone una función objetivo diferente.

Función objetivo

Ahora se desea minimizar el tiempo necesario para realizar la mezcla. Sabemos que se procesa hasta 2 litros de pintura 1 por minuto; es decir, se tarda $1/2$ de minuto en procesar cada litro de pintura 1. Razonando de igual forma con el resto de pinturas, se obtiene la función que representa el tiempo empleado en obtener un litro de mezcla, que es lo que se desea minimizar:

[Tiempo] $\text{Min } z = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2{,}5}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3{,}5}x_4$ (minutos)

NOTA: También se puede considerar que la función objetivo de este apartado viene expresada en minutos/litro.

Restricciones

El coste, función objetivo del modelo original, pasa a ser ahora una restricción; no superar los 18 euros de coste por litro de mezcla:

[Coste] $16x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 20x_4 \leq 18(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

El resto del modelo quedaría igual que en el apartado (a).