

LLIÇÓ 8: LA MATRIU INVERSA

IDEES CLAU, DEFINICIONS, PROPIETATS, MÈTODES...

Matrius invertibles

- Una matriu quadrada A és *invertible* si i només si existeix una matriu B amb $AB = I$
- Si A és invertible llavors, la *inversa* de A és l'única matriu A^{-1} per a la qual $AA^{-1} = I$

Càlcul de la inversa

$$\left[A \mid I \right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[I \mid A^{-1} \right]$$

Propietats

Si A és invertible llavors,

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- A i A^{-1} són productes de matrius elementals

Inversa del producte

- A_1A_2 és invertible si i només si A_1 i A_2 són invertibles i $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$
- $A_1A_2 \dots A_p$ és invertible si i només si A_1, A_2, \dots, A_p són invertibles i

$$(A_1A_2 \dots A_p)^{-1} = A_p^{-1} \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

Caracteritzacions

Si A és una matriu quadrada $n \times n$, totes les afirmacions següents són equivalents:

1. A és invertible
2. $\boxed{\text{rang } A = n}$
3. La forma esglaonada reduïda de A és la matriu identitat
4. Existeix B amb $AB = I$
5. Existeix B amb $BA = I$
6. A és producte de matrius elementals
7. Les files de A són linealment independents
8. Les columnes de A són linealment independents
9. L'equació matricial $AX = I$ és compatible
10. Per a qualsevol vector \vec{b} el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ és determinat
11. El sistema lineal $A\vec{x} = \vec{0}$ és determinat
12. $\text{Nul } A = \{\vec{0}\}$

Caracteritzacions futures

Si A és una matriu quadrada $n \times n$, totes les afirmacions següents són equivalents:

1. A és invertible
13. El determinant de A no és zero
14. L'espai columna de A és $\text{Col } A = \mathbb{K}^n$
15. L'espai nul de la matriu transposada A^t és $\text{Nul } A^t = \{\vec{0}\}$
16. L'espai fila de A és $\text{Fil } A = \mathbb{K}^n$
17. El nucli de l'aplicació lineal $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ és $\text{Nuc } f = \{\vec{0}\}$
18. L'aplicació lineal $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ és injectiva
19. L'aplicació lineal $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ és suprajectiva
20. L'aplicació lineal $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ és bijectiva
21. El nombre 0 no és valor propi de A
22. El nombre 0 no és valor singular de A