EJERCICIOS RESUELTOS

TEMA 2. FORMULACIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

2.1 Minimización de costes de promoción [2]. Una compañía decide realizar una serie de acciones comerciales con el fin de captar nuevos clientes. La compañía puede realizar dos tipos de acciones: anuncios en televisión y anuncios en radio; y desea captar a dos tipos de cliente: jóvenes y adultos.

Cada spot emitido en televisión supone un coste de 25 euros, y se estima que conseguirá atraer a 12,5 clientes jóvenes y 9 adultos. Cada cuña emitida en radio conlleva un coste de 8 euros, y se estima que atraerá a 8 clientes jóvenes y 10 adultos.

El objetivo de la campaña es captar a un mínimo de 1000 clientes jóvenes y otros 1000 adultos. Además, se desea que el dinero invertido en publicidad en radio sea como mucho el doble del invertido en televisión.

Plantea un problema lineal que permita diseñar una estrategia de promoción lo más barata posible, cumpliendo con todas las condiciones enunciadas.

2.2 Mezclas de harinas [2]. Se ha suministrado a un almacén 2.000 kg de harina del tipo 1 y 1.000 kg de harina del tipo 2. Con ellos se hacen tres clases de mezclas: una mezcla A con triple cantidad del primer tipo de harina que del segundo; una mezcla B, en la que se emplea el triple del segundo tipo que del primero; y una tercera mezcla C, en la que se emplea la cuarta parte del segundo tipo que del primero. Por cada kilogramo que se vende de la clase A se ganan 20 u.m., por cada uno de la clase B se ganan 24 u.m., y 30 u.m. por cada kilogramo de la clase C.

Plantea un modelo lineal que nos diga cuántos kilogramos de cada mezcla se deben hacer con la harina suministrada al almacén, para que el volumen de las ventas sea máximo.

2.3 Elaboración de conservas caseras [2]. Una empresa elabora y comercializa dos tipos de conservas caseras A y B, cada uno de ellos en dos niveles de calidad: superior y normal. La empresa obtiene un beneficio de 250 y 100 euros con cada lote de conservas A de calidad superior y normal, respectivamente, mientras que cada lote de B de calidad superior y normal le reporta un beneficio de 100 y 50 euros, respectivamente.

Todas las conservas se elaboran de manera tradicional en un único departamento, que trabaja 150 horas a la semana. Por otro lado, la cantidad disponible de materia prima usada para la fabricación de las conservas es prácticamente ilimitada, a excepción del conservante alimentario, del cual sólo es posible almacenar y usar 8 kilogramos semanales, por motivos sanitarios.

La tabla siguiente muestra las cantidades de recurso que se precisan en la elaboración de un lote de conservas, según el tipo y la calidad.

	A Superior	A Normal	B Superior	B Normal
Tiempo de elaboración (horas/lote)	20	10	15	10
Conservante (Kg/lote)	0,5	1,5	1	1

Partiendo de estos datos, plantea un modelo lineal que ayude a los responsables de la empresa a decidir cómo debe planificarse la producción de conservas, teniendo en cuenta que todo lo producido puede venderse, y que se han comprometido a elaborar al menos 5 lotes de conservas tipo B a la semana.

2.4 Planificación de recursos en una empresa de traducción de textos [2]. Eres la persona responsable de una empresa pequeña que se dedica a la traducción de textos. Actualmente, se traducen en la empresa textos de los siguientes tipos:

- Textos legales y jurídicos.
- Textos científicos.

El staff está dividido en tres departamentos (correspondientes a las fases o etapas por las que pasa todo documento que ha de ser traducido), que son los siguientes:

- Recepción de textos, compuesto por 2 personas.

- Traducción, formado por 20 personas.
- Revisión, integrado por 8 personas.

Por término medio, cada empleado del departamento de recepción es capaz de gestionar —es decir, recibir y asignar al traductor más adecuado que esté disponible— 90 documentos a la semana, de cualquier tipo.

Cada documento de tipo legal o jurídico tarda en ser traducido 1 día. En cambio, cada documento científico se traduce en 1 día y medio.

Tras la traducción, los textos pasan a ser revisados. En un día, un revisor es capaz de revisar hasta 2 documentos de tipo legal o jurídico, o bien hasta 4 documentos científicos.

Todos los traductores son capaces de traducir cualquier tipo de documento. Igualmente, todos los empleados del departamento de revisión pueden revisar textos de cualquier tipo.

Cada texto legal o jurídico traducido produce un beneficio neto a la empresa de 12 euros, mientras que cada documento de tipo científico deja un beneficio neto de 4,5 euros.

En la empresa se trabaja 5 días por semana.

A partir de estos datos, plantea un modelo de Programación Lineal que te permita, como responsable de la empresa, saber cuál sería la mejor planificación semanal, es decir, cuántos documentos deberían gestionarse semanalmente de cada tipo para maximizar el beneficio de la empresa.

2.5 Producción de zumo de naranja [2]. La firma Medina&Ruano, SA produce zumo de naranja a partir de la mezcla de hasta cinco zumos que adquiere a granel.

La tabla siguiente muestra las características relevantes de cada uno de los zumos que pueden formar parte de la mezcla, de los cuales tres de ellos proceden directamente de naranjas exprimidas, y los otros dos son concentrados reconstituidos.

	Zumos				
	1	2	3	4	5
Origen	Naranjas exprimidas			Concentrado reconstit.	
Grados brix(1)	12,3	12,2	11,9	11,4	11,6
Ácido cítrico (g/l)	10,5	8,7	9,3	7,7	7,2
Vitamina C (mg/100 ml)	47,6	67,5	25,5	79,1	81,6
Limoneno (ppm)(2)	99	79	86	20,3	61
Coste (€/litro)	0,40	0,53	0,62	0,18	0,21

(1) Los grados brix son una medida indirecta de la concentración de zumo de naranja.

(2) El limoneno es un compuesto aromático característico de los zumos de naranja. Se suele medir su concentración en partes por millón (ppm).

Los criterios de calidad que ha de cumplir el producto final son los siguientes:

- Concentración de zumo de naranja: al menos 12 grados brix.
- Acidez: no más de 9 gramos de ácido cítrico por cada litro de producto.
- Vitamina C: al menos 60 mg/100 ml.
- Aromas: entre 80 y 85 ppm de limoneno.

Además, se desea que no más de la mitad de la mezcla provenga de zumo concentrado.

A partir de esta información, plantea un modelo lineal —variables, función objetivo y restricciones— que permita a los responsables de Medina&Ruano, SA decidir cuál debe ser la formulación (por cada litro) del producto final para que su coste sea el menor posible.

Soluciones Ejercicios Tema 2

2.1 Minimización de costes de promoción

VARIABLES:

Las variables de un modelo de optimización tienen que ver con la decisión a tomar. Aquí se pide decidir cuántas acciones de televisión y de radio realizar; por tanto:

x_1 = Cantidad de spots de televisión a contratar.

x_2 = Cantidad de cuñas de radio a contratar.

FUNCIÓN OBJETIVO:

El objetivo es planificar la campaña del modo más barato posible. Dado que sabemos el coste que tiene cada acción comercial de televisión y radio, podemos expresar fácilmente el coste total de la campaña como función de las variables:

[coste] Min $z = 25x_1 + 8x_2$ (euros)

RESTRICCIONES:

Por un lado nos piden captar a un mínimo de 1000 nuevos clientes jóvenes y 1000 adultos. Como nos dan la estimación de cuántos clientes nuevos de cada tipo es capaz de atraer cada spot de televisión y cada cuña de radio, podemos construir fácilmente dos restricciones que modelizan dichas condiciones:

[jóvenes] $12{,}5x_1 + 8x_2 \geq 1000$

[adultos] $9x_1 + 10x_2 \geq 1000$

Por último, nos piden no gastar más dinero en radio que el doble de lo invertido en televisión. El gasto en radio es igual a $8x_2$ euros y el gasto en televisión es $25x_1$ euros (véase la función objetivo). Por tanto:

[gasto TV y radio] $8x_2 \leq 2 \cdot 25x_1$

Uniendo todo lo anterior, junto con la condición de no negatividad de las variables, obtenemos el siguiente modelo lineal de minimización:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min} & z = 25x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a:} & 12{,}5x_1 + 8x_2 \geq 1000 \\ & 9x_1 + 10x_2 \geq 1000 \\ & 50x_1 - 8x_2 \geq 0 \\ & x_1\,, x_2 \ \geq 0 \end{array}\right\}.$$

2.2 Mezclas de harinas

Para que sea más fácil modelizar, "traducimos" lo que nos dicen en el enunciado acerca de la composición de cada mezcla. Si la mezcla A lleva 3 veces más harina 1 que 2, entonces necesariamente la mezcla A está formada en un 75% por harina 1 y en un 25% por harina 2. Razonando igual con el resto de mezclas, tenemos:

Mezcla	Proporción de harina 1	Proporción de harina 2
A	75%	25%
B	25%	75%
C	80%	20%

NOTA: Es decir, en este problema NO podemos "elegir" o "decidir" cuánta cantidad de harina destinamos a cada tipo de mezcla, ya que las proporciones están fijadas.

VARIABLES:

x_i = Cantidad a fabricar de mezcla tipo *i* (kg); *i* = A, B, C.

FUNCIÓN OBJETIVO:

Max $z = 20x_{\text{A}} + 24x_{\text{B}} + 30x_{\text{C}}$ u.m.

RESTRICCIONES:

[harina 1] $0{,}75x_{\text{A}} + 0{,}25x_{\text{B}} + 0{,}80x_{\text{C}} \leq 2000$

[harina 2] $0{,}25x_{\text{A}} + 0{,}75x_{\text{B}} + 0{,}20x_{\text{C}} \leq 1000$

$x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{C}} \geq 0$

2.3 Elaboración de conservas caseras

VARIABLES:

a_1 = Cantidad a fabricar de conserva tipo A, calidad superior (lotes/semana).

a_2 = Cantidad a fabricar de conserva tipo A, calidad normal (lotes/semana).

b_1 y b_2 se definen análogamente para la conserva tipo B.

FUNCIÓN OBJETIVO y RESTRICCIONES:

$$\left.\begin{array}{llrl}
\text{Max} & z = 250a_1 + 100a_2 + 100b_1 + 50b_2 & & \text{[beneficio]} \\
\text{s.a.:} & 20a_1 + 10a_2 + 15b_1 + 10b_2 & \leq 150 & \text{[tiempo elaboración]} \\
 & 0{,}5a_1 + 1{,}5a_2 + b_1 + b_2 & \leq 8 & \text{[conservante]} \\
 & b_1 + b_2 & \geq 5 & \text{[demanda conserva B]} \\
 & a_1, a_2, b_1, b_2 & \geq 0 &
\end{array}\right\}.$$

2.4 Planificación de recursos en una empresa de traducción de textos

VARIABLES:

Se desea saber cuál sería la planificación semanal óptima, en cuanto a qué cantidad convendría traducir de cada tipo de documento. Por tanto:

x_{L} = Cantidad de textos legales a traducir (unidades/semana).

x_{C} = Cantidad de textos científicos a traducir (unidades/semana).

FUNCIÓN OBJETIVO:

Se desea determinar la planificación de trabajo óptima desde el punto de vista del beneficio de la empresa:

[beneficio] Max $z = 12x_{\mathrm{L}} + 4{,}5x_{\mathrm{C}}$ (euros/semana).

RESTRICCIONES:

Tres restricciones, una por cada departamento (la capacidad de trabajo de cada departamento es un recurso, y por tanto genera una restricción).

<u>Departamento de recepción:</u> Dispone de dos empleados, cuya capacidad de trabajo viene expresada directamente en número de documentos que son capaces de procesar (90 a la semana). Por tanto:

[recepción] $x_{\mathrm{L}} + x_{\mathrm{C}} \leq 2 \cdot 90.$

<u>Departamento de traducción:</u> Consta de 20 personas, cada una de ellas trabajando 5 días a la semana; es decir, la capacidad de trabajo del departamento de traducción equivale a 5·20=100 días/semana. Sabemos cuánto tiempo (en días) tarda en ser traducido cada documento legal y cada documento científico (1 y 1,5 días, respectivamente). La restricción se construye como "días necesarios menor o igual que días disponibles":

[traducción] $x_{\mathrm{L}} + 1{,}5x_{\mathrm{C}} \leq 5 \cdot 20.$

<u>Departamento de revisión:</u> La restricción se construye de manera similar a la anterior. Sólo hay que prestar atención a cómo nos dan la información: si en un día un revisor es capaz de revisar hasta 2 documentos legales, eso significa que cada documento legal ocupa 0,5 días del tiempo de un revisor; análogamente, si un revisor es capaz de gestionar hasta 4 documentos científicos al día, eso quiere decir que cada documento científico tarda 0,25 días en ser revisado. Tenemos 8 revisores trabajando 5 días a la semana; por tanto:

[revisión] $0{,}5x_{\mathrm{L}} + 0{,}25x_{\mathrm{C}} \leq 5 \cdot 8.$

Y, finalmente, añadimos la condición de no negatividad:

$$x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{C}} \geq 0.$$

2.5 Producción de zumo de naranja

VARIABLES:

x_i = Cantidad a utilizar de zumo i por cada litro de mezcla (litros/litro de mezcla); i = 1,..., 5.

FUNCIÓN OBJETIVO:

Minimizar costes:

[coste] Min $z = 0{,}40x_1 + \cdots + 0{,}21x_5$ (euros/litro de mezcla).

RESTRICCIONES:

Criterios de calidad del producto final:

[concentración] $12{,}3x_1 + \cdots + 11{,}6x_5 \geq 12(x_1 + \cdots + x_5)$,

[acidez] $10{,}5x_1 + \cdots + 7{,}2x_5 \leq 9(x_1 + \cdots + x_5)$,

[vitamina C] $47{,}6x_1 + \cdots + 81{,}6x_5 \geq 60(x_1 + \cdots + x_5)$,

[aroma] $80(x_1 + \cdots + x_5) \leq 99x_1 + \cdots + 61x_5 \leq 85(x_1 + \cdots + x_5)$.

Equilibrio entre zumo natural y concentrado:

[natural vs conc.] $x_4 + x_5 \leq 0{,}5(x_1 + \cdots + x_5)$,

o equivalentemente:

[natural vs conc.'] $x_4 + x_5 \leq x_1 + x_2 + x_3$.

Por último, no hay que olvidar que estamos buscando la formulación óptima de un litro de mezcla, es decir:

[litro] $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$.

Naturaleza de las variables: [no negatividad] x_1 ,..., $x_5 \geq 0$.

EJERCICIOS RESUELTOS

TEMA 3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1 [1] Una empresa dedicada a la comercialización de equipos informáticos vende tres productos A, B y C con un P.V.P. de 100, 150 y 200 Euros, respectivamente. Dichos productos tienen unos costes de 90, 140 y 195 Euros, respectivamente. Existen restricciones de mínima y máxima venta así como de espacio de almacén y capacidad de transporte tal y como se muestra en el siguiente modelo lineal donde se busca maximizar el beneficio semanal (P.V.P.-Coste):

```
MAX= (100-90)*A + (150-140)*B + (200-195)*C;
[ALMACEN]  4*A + 6*B + 10*C <= 10000;
[TRANSPORTE] A + B + C <= 1400;
[Ventas_min_A] A >=425;            [ Ventas_max_A] A <=500;
[Ventas_min_B] B >=150;            [Ventas_max_B] B <=200;
[Ventas_min_C] C >=450;            [Ventas_max_C] C <= 800;
```

Tras resolver el modelo, los informes proporcionados por LINGO son los siguientes:

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                              10400.00

                               Variable           Value        Reduced Cost
                                      A        500.0000            0.000000
                                      B        200.0000            0.000000
                                      C        680.0000            0.000000

                                    Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                      1        10400.00            1.000000
                                ALMACEN        0.000000           0.5000000
                             TRANSPORTE        20.00000            0.000000
                           VENTAS_MIN_A        75.00000            0.000000
                           VENTAS_MAX_A        0.000000            8.000000
                           VENTAS_MIN_B        50.00000            0.000000
                           VENTAS_MAX_B        0.000000            7.000000
                           VENTAS_MIN_C        230.0000            0.000000
                           VENTAS_MAX_C        120.0000            0.000000
```

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                                  Objective Coefficient Ranges:

                              Current           Allowable        Allowable
                   Variable   Coefficient       Increase         Decrease
                          A   10.00000          INFINITY         8.000000
                          B   10.00000          INFINITY         7.000000
                          C   5.000000          11.66667         5.000000

                                      Righthand Side Ranges:

                              Current           Allowable        Allowable
                        Row   RHS               Increase         Decrease
                    ALMACEN   10000.00          200.0000         2300.000
                 TRANSPORTE   1400.000          INFINITY         20.00000
               VENTAS_MIN_A   425.0000          75.00000         INFINITY
               VENTAS_MAX_A   500.0000          33.33333         75.00000
               VENTAS_MIN_B   150.0000          50.00000         INFINITY
               VENTAS_MAX_B   200.0000          50.00000         50.00000
               VENTAS_MIN_C   450.0000          230.0000         INFINITY
               VENTAS_MAX_C   800.0000          INFINITY         120.0000
```

Basándote en dichos informes, responde detalladamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el beneficio semanal máximo para la empresa? ¿Cuál es el plan óptimo de ventas? ¿Cuáles son los cuellos de botella del sistema? Ordénalos según su importancia. Justifica las respuestas.

b) Existe una propuesta de ampliación del almacén de modo que pasaría a tener un espacio disponible de 12.000 m^2. Sabiendo que el coste de dicha ampliación sería de 90 Euros semanal ¿recomendarías esta ampliación?

c) Tienes que emitir un informe sobre la rentabilidad de los tres productos de acuerdo a sus ventas mínimas y máximas semanales, indica qué cotas modificarías y cómo (aumentar o disminuir) para mejorar el beneficio semanal. Justifica la respuesta.

d) El director de ventas está analizando la posibilidad de comprar las unidades del producto C a otro proveedor lo cual disminuiría el coste de cada unidad en 5 Euros, ¿cómo afectaría a la solución óptima actual? Calcular el nuevo valor de la función objetivo y de las variables.

e) El mismo director de ventas está interesado en conocer ahora el intervalo dentro del cual puede variar el **coste** del producto A sin que el plan óptimo de ventas cambie. Calcula dicho intervalo.

3.2 [1] A continuación se presenta el modelo de programación lineal planteado para planificar la producción en una empresa de embotellado de vinos que comercializa cuatro tipos de vino diferentes. El objetivo consiste en maximizar los beneficios y existen dos tipos de restricciones, las de capacidad de las embotelladoras y las de demanda de los productos. Las variables indican la cantidad a producir de cada tipo de vino, medidas en hectolitros.

```
MAX=255*X1+270*X2+235*X3+300*X4;

[MAQ1] 25*X1+30*X2+25*X3+30*X4<=4600;
[MAQ2] 10*X1+8*X2+8*X3+8*X4<=1500;
[MAQ3] 18*X1+20*X2+17*X3+19*X4<=3800;

[DEM__MAX_VINO1] X1<=60;
[DEM_MIN_VINO2] X2>=20;          [DEM_MAX_VINO2] X2<=30;
[DEM_MIN_VINO3] X3>= 56;         [DEM_MAX_VINO3] X3<=65;
[DEM_MAX_VINO4] X4<=35;
```

Tras resolver el modelo con LINGO se obtiene el siguiente informe:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              44798.00
                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        59.60000            0.000000
                                    X2        22.00000            0.000000
                                    X3        56.00000            0.000000
                                    X4        35.00000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        44798.00            1.000000
                                  MAQ1        0.000000            6.600000
                                  MAQ2        0.000000            9.000000
                                  MAQ3        670.2000            0.000000
                        DEM__MAX_VINO1       0.4000000            0.000000
                         DEM_MIN_VINO2        2.000000            0.000000
                         DEM_MAX_VINO2        8.000000            0.000000
                         DEM_MIN_VINO3        0.000000           -2.000000
                         DEM_MAX_VINO3        9.000000            0.000000
                         DEM_MAX_VINO4        0.000000            30.00000
```

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                          Objective Coefficient Ranges:

                             Current        Allowable        Allowable
             Variable      Coefficient       Increase         Decrease
                   X1       255.0000         82.50000         5.000000
                   X2       270.0000         30.00000         4.000000
                   X3       235.0000         2.000000         INFINITY
                   X4       300.0000         INFINITY         30.00000
```

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
MAQ1	4600.000	80.00000	5.000000
MAQ2	1500.000	1.333333	32.00000
MAQ3	3800.000	INFINITY	670.2000
DEM__MAX_VINO1	60.00000	INFINITY	0.4000000
DEM_MIN_VINO2	20.00000	2.000000	INFINITY
DEM_MAX_VINO2	30.00000	INFINITY	8.000000
DEM_MIN_VINO3	56.00000	4.000000	1.000000
DEM_MAX_VINO3	65.00000	INFINITY	9.000000
DEM_MAX_VINO4	35.00000	2.000000	8.000000

Responde a las siguientes cuestiones justificando en cada caso detalladamente la respuesta:

a) ¿Existen soluciones óptimas alternativas?

b) ¿Cómo varía el beneficio al incrementar la demanda mínima del producto 3? ¿Y al incrementar su demanda máxima?

c) ¿Cuál sería la nueva S.O y el beneficio si se decrementase la capacidad de la máquina 1 en 4 unidades? y si se incrementa la capacidad de la máquina 3 en 10 unidades?

d) ¿Cuál sería la S.O. y el beneficio total obtenido si el beneficio del producto 4 se duplicase?

3.3 [1] En una empresa azulejera se ha desarrollado un modelo de programación lineal para obtener una **planificación de la producción semanal** en la fábrica. Se consideran 4 tipos distintos de azulejos y una serie de restricciones que se comentan a continuación. La empresa dispone de 4 hornos que trabajan las 24 horas del día, 6 días por semana. De igual manera en la empresa existen dos turnos rotatorios de 7 horas durante 6 días a la semana con 5 trabajadores por turno. Los costes de producción semanal no pueden sobrepasar un presupuesto de 325.000 €. De igual manera, la nueva normativa Europea de emisiones limita a 3 Kg. por semana la cantidad de metales pesados que se permite emitir a la atmósfera. Todos estos datos se recogen en la siguiente tabla:

Recurso	Productos				Disponibilidad
	Azulejo 1	Azulejo 2	Azulejo 3	Azulejo 4	
Horno	0,85 min/m^2	0,95 min/m^2	1,1 min/m^2	1,3 min/m^2	4 hornos 24 horas/día 6 días/semana
Personal	0,24 min/m^2	0,26 min/m^2	0,28 min/m^2	0,3 min/m^2	2 turnos 7 horas/turno 6 días/semana 5 trabajadores/turno
Presupuesto	8 €/m^2	9,25 €/m^2	10 €/m^2	14 €/m^2	325.000 €/semana
Emisiones	0,09 grs./m^2	0,06 grs./m^2	0,1 grs./m^2	0,08 grs./m^2	3 Kg./semana

El precio de venta al público para los 4 tipos de azulejos es de 12, 13, 15 y 18 €/m^2 respectivamente. Por motivos técnicos es necesario producir por semana al menos 12000, 8.000, 12.000 m^2 de los azulejos 1, 2 y 3 respectivamente y como máximo 15.000 m^2 de azulejo 1 y 10.000 m^2 de azulejo 2.

El modelo de LINGO que permite maximizar el beneficio semanal obtenido y los resultados del mismo son los siguientes:

```
!Variables: Xi: m² de azulejo que se producen a la semana, donde
i=(1,…,4);
[FO] MAX= 4*X1 + 3.75*X2 + 5*X3 + 4*X4;
! Restricciones;
[HORNO]       0.85*X1 + 0.95*X2 +  1.1* X3 +  1.3* X4 <=  34560;
[PERSONAL]    0.24*X1 + 0.26*X2 +  0.28*X3 +  0.3* X4 <=  25200;
[PRESUPUESTO] 8*    X1 + 9.25*X2 + 10*   X3 + 14*   X4 <= 325000;
[EMISIONES]   0.09*X1 + 0.06*X2 +  0.1* X3 +  0.08*X4 <=   3000;
[DEM_MIN_1] X1 >= 12000;
[DEM_MAX_1] X1 <= 15000;
[DEM_MIN_2] X2 >= 8000;
[DEM_MAX_2] X2 <= 10000;
[DEM_MIN_3] X3 >= 12000;
[DEM_MAX_3] X3 <= 600000;


Global optimal solution found.
 Objective value:                          151500.0

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        12000.00            0.000000
                                    X2        10000.00            0.000000
                                    X3        13200.00            0.000000
                                    X4        0.000000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                    FO        151500.0            1.000000
                                 HORNO        340.0000            0.000000
                              PERSONAL        16024.00            0.000000
                           PRESUPUESTO        4500.000            0.000000
                             EMISIONES        0.000000            50.00000
                             DEM_MIN_1        0.000000          -0.5000000
                             DEM_MAX_1        3000.000            0.000000
                             DEM_MIN_2        2000.000            0.000000
                             DEM_MAX_2        0.000000           0.7500000
                             DEM_MIN_3        1200.000            0.000000
                             DEM_MAX_3        586800.0            0.000000
```

Basándote en este informe, responde detalladamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Existe algún plan de producción donde se fabriquen m² de X4 y se obtenga el mismo beneficio? Justifica tu respuesta.

b) Se está considerando la posibilidad de aumentar el máximo número de m² que la fábrica es capaz de producir de azulejo 1 o de azulejo 2. Suponiendo que el coste de la ampliación es el mismo en cada caso, ¿cuál de las dos alternativas resultaría más rentable? Justifica tu respuesta.

c) Ante el excedente de personal que existe actualmente en la empresa, te han encargado realizar un expediente de regulación de empleo. Los turnos siempre deben tener el mismo número de trabajadores. Con todo esto, ¿de cuántos trabajadores se puede prescindir en cada turno manteniendo la solución óptima actual? Justifica tu respuesta.

d) Una empresa de ingenierías nos ofrece un filtro que es capaz de recuperar un 1% de los metales pesados que se emiten a la atmósfera cada semana. Además, este 1% de metales que se recuperan incluye algunos muy valiosos (titanio, platino) y se podrían vender por un valor de 2.500 € (por semana). La empresa de ingenierías pide 12.000 € por la instalación y mantenimiento de este avanzado filtro cada mes. ¿Crees que interesa instalar este filtro? Justifica tu respuesta.

Soluciones Ejercicios Tema 3

3.1

a) El beneficio máximo obtenible es de 10.400 €. Se venderían 500, 200 y 680 uds. de A, B y C, respectivamente.
Los cuellos de botella del sistema, ordenados por magnitud de los C.O. de las restricciones correspondientes son:
1 Ventas máximas de A
2 Ventas máximas de B
3 Capacidad de Almacén

b) No tenemos espacio sobrante (holgura) en el almacén, luego en principio interesa ampliarlo. Una ampliación de 2.000 m^2 se saldría del rango, por lo que en primera instancia no se podría contestar. En cualquier caso, cabe comentar que justo en el límite dentro del cual nuestro C.O. de 0,5 es válido (200) se obtiene un beneficio de 200*0,5=100 Euros, que es superior al coste de la ampliación. Además, aunque previsiblemente nos sobraría almacén, tendríamos la empresa preparada para futuras ampliaciones. Por tanto, la ampliación SI es recomendable.

c) Las ventas mínimas y máximas para los tres productos acotan el valor de las variables decisión, por lo tanto:
A está en su cota superior. Por lo tanto, por cada unidad de más que se vendiese de A por encima del máximo, ganaríamos 8 Euros. Un razonamiento similar se aplica a B con una ganancia de 7 Euros por cada unidad vendida por encima del máximo. Por lo tanto, sería rentable vender MÁS unidades de A y de B.
El caso es diferente para C, dado que se encuentra entre sus dos cotas, por tanto, no interesa vender ni más ni menos, exactamente 680 unidades.

d) El coste de comprar cada unidad de C bajaría de 195 a 190 Euros. Esto significa que igualmente el coeficiente actual de C en la F.O. se incrementaría de 5 a 10.
Si nos fijamos en los rangos, éste incremento está dentro del rango dentro del cual la solución óptima permanece constante. Por tanto, los valores de las variables no cambiarían y la solución actual seguiría siendo la óptima.

El beneficio sí cambiaría, dado que se venden 680 unidades de C y el beneficio aumenta en 5 Euros por unidad, el beneficio semanal se incrementaría en 680*5=3400 Euros.

e) Hemos de tener en cuenta que el intervalo proporcionado por Lingo de máximo incremento de ∞ y máximo decremento de 8 es para el beneficio expresado como P.V.P.-coste. Dado que se quiere obtener el intervalo para el coste, es necesario hacer unos pequeños cálculos.

Máximo coste:
Mínimo valor para el beneficio de 10 (100-90) de acuerdo a los intervalos: 2
Máximo valor para el beneficio de 10 (100-90) de acuerdo a los intervalos: ∞

Por tanto:
Máximo coste 100-Xmax=2 => Xmax=98.
Mínimo coste 100-Xmin=∞ => Xmin=-∞ o mejor, 0 dado que los costes no pueden ser negativos.

Por tanto el coste debe de moverse en el intervalo [0;98] para asegurar que el plan de ventas no cambie.

3.2

a) No. No existen soluciones óptimas alternativas ya que no existe ninguna variable con valor 0 en la solución óptima y coste reducido igual a 0 ni tampoco ninguna restricción que se verifique estrictamente en la solución óptima y cuyo coste de oportunidad sea igual a 0.

b) La variable X_3 está acotada y toma en la solución óptima el valor de su cota inferior, por tanto, al incrementar su cota inferior el beneficio empeorará, es decir, se decrementará en 1.99 uds. por cada unidad que se incremente dicha cota.

Al incrementar su cota superior el beneficio no varía puesto que dicha cota representa una restricción con holgura.

c) Si se decrementa en 4 uds. la capacidad de la máquina 1, puesto que esta nueva capacidad se encuentra dentro del intervalo dado por el análisis de sensibilidad para los segundos miembros de las restricciones, se puede calcular el nuevo valor de la función objetivo (NVFO) utilizando el coste de oportunidad, que en este caso es de 6.6 uds.:

NVFO= 44798 – 4* 6.6 = 44771.6

La nueva solución óptima no la podemos conocer con la información mostrada. Sería necesario resolver de nuevo.

Incrementar la capacidad de la máquina 3 no tiene efecto alguno sobre el valor de la función objetivo ni sobre la solución óptima porque se trata de una restricción de holgura en la solución óptima.

d) Si el beneficio del producto 4 se duplicase, es decir, pasase a ser de 600 uds., puesto que esta modificación se encuentra dentro del intervalo dado por el análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo, la solución óptima seguiría siendo la misma. Lo que sí varia es el valor de la función objetivo, que pasará a ser:

NVFO = 44798 + 300 * 35 = 55298

3.3

---

a) Sí. Estamos en una situación de infinitas soluciones óptimas dado que el azulejo 4 toma valor 0 en la S.O. (VNB) y además su C.R. (Cj-Zj) es 0, luego existen soluciones óptimas alternativas (infinitas).

(No existe posibilidad de que la variable X4 sea VB con valor 0 (solución degenerada) con coste reducido 0 ya que la solución tiene 4 VB, i.e. tantas como restricciones.)

b) Para las dos variables se ha definido cota superior. En la solución óptima se cumple estrictamente la cota superior de x2 y en ese caso le corresponde un coste de oportunidad igual a 0.75, es decir, el beneficio aumentaría a razón de 0.75 por cada m2 que se decidiera fabricar. En el caso del azulejo tipo 1, la cota que se verifica en la solución óptima es la cota inferior, por tanto no interesa aumentar su cota superior ya que no se alcanza en la solución óptima actual.

c) La parte derecha de la restricción de personal está expresada en minutos a la semana. Tenemos una holgura de 16.024 minutos y teniendo en cuenta que disponemos de 2 turnos de 7 horas cada uno y 6 días por semana, de los 5 trabajadores en cada uno de los turnos sobrarían 3 trabajadores dado que 3*2*7*6*60=15.120 y aún quedaría algo de holgura.

O también, de acuerdo al valor de la holgura de la restricción sobran 8.012 minutos en cada turno. Teniendo en cuenta que 1 trabajador supone 2.520 minutos de trabajo, sobran 3 trabajadores en cada turno (2.520*3=7560 minutos).

d) Hoy por hoy la empresa puede emitir 3 Kg. (3000 grs.) de metales pesados a la atmósfera. Si somos capaces de recuperar un 1% de estos metales lo que efectivamente está ocurriendo es que podremos emitir 3030 grs. de metales, dado que 30 se recuperan, por lo que estamos aumentando la parte derecha de la restricción de emisiones en 30 unidades, lo cual queda dentro del intervalo proporcionado por LINGO dentro del cual el C.O. y la base permanecen constantes.

Con esto tenemos que los beneficios aumentarán en 30*50= 1.500 € por semana, a lo que le podemos sumar los 2.500 € que obtenemos por la venta de estos metales pesados. En total cada semana aumentamos los beneficios en 4000 €, o lo que es lo mismo, 16.000 € al mes, lo cual supera ampliamente el coste de instalación y mantenimiento del filtro. Por tanto, **SI INTERESA** instalar el filtro.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

etsinf

EJERCICIOS RESUELTOS

TEMA 4. MODELOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

4.1 [2] Una empresa de fabricación de juguetes está considerando la puesta en marcha de tres nuevos juguetes (1, 2 y 3) para su posible inclusión en la próxima campaña. La preparación de instalaciones para la fabricación de estos modelos tendría unos costes fijos de 25000€, 35000€ y 30000€ respectivamente, y un beneficio unitario de 10€, 15€ y 13€ respectivamente.

La empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo en una de ellas se producirían los juguetes, dependiendo la elección de la maximización del beneficio.

El número de horas que se precisa para producir cada ratón en cada planta es:

	juguete 1	**juguete 2**	**juguete 3**
planta 1	5	4	6
planta 2	4	2	2
planta 3	3	3	2

Las plantas disponen al día 500, 600 y 630 horas de producción respectivamente.

La gerencia ha decidido desarrollar al menos uno de los tres juguetes.

Modelizar el problema **utilizando programación lineal entera** para maximizar el beneficio total.

4.2 [2] Una compañía produce cuatro tipos de productos: P1, P2, P3 y P4. Cada uno de ellos pasa por tres plantas de producción: planta A, planta B y planta C. En cada planta se dispone de una capacidad de 10000 horas semanales de trabajo.
La tabla siguiente muestra el ingreso unitario, en euros, y las horas de trabajo necesarias en cada planta para la producción de una unidad de cada uno de los productos.

	P1	P2	P3	P4
Ingreso unitario	6 €	7 €	8 €	9 €
Planta A	5 horas	3 horas	6 horas	4 horas
Planta B	4 horas	6 horas	3 horas	5 horas
Planta C	5 horas	6 horas	3 horas	2 horas

La empresa ha decidido producir como máximo tres de esos productos, sabiendo que los costes fijos de producción de cada uno de ellos son 2800, 4000, 3800 y 4100 €, respectivamente. Además ha decidido que:

* Se puede producir P2 solo si se produce P3,
* Si no se produce P4 entonces se deben producir P1 y P2.

a) Formular un modelo de **programación lineal entera**, para decidir qué productos deben ser producidos y cuántas unidades de cada uno de ellos, si la empresa pretende maximizar beneficios.

b) La empresa va a ampliar 1000 horas de trabajo en dos de sus plantas. Formular el nuevo modelo de programación lineal entera, para decidir en qué plantas se debe realizar esta ampliación.

4.3 [2] Selección óptima de nuevos empleados. Una empresa dedicada a la venta de maquinaria industrial tiene como clientes principales a 10 grandes factorías, distribuidas por todo el territorio nacional. Para contrarrestar las acciones de la competencia, la empresa se plantea contratar a varios ingenieros recién licenciados que realicen tareas comerciales y visiten dichas factorías regularmente. Se han preseleccionado 8 candidatos, que según su zona de residencia y su currículum cobrarían un sueldo distinto y podrían visitar unas determinadas explotaciones, en caso de ser contratados.

En la siguiente tabla se indica el sueldo de cada candidato en caso de ser contratado, y las explotaciones que podría visitar.

Candidato	Sueldo (euros/mes)	Clientes que podría visitar
1	1.200	1 , 4 , 5
2	2.000	3 , 6
3	1.500	2 , 5 , 6
4	2.500	2 , 3 , 7 , 8
5	1.750	6 , 7 , 9
6	1.500	1 , 5 , 7
7	1.300	8 , 10
8	1.900	4 , 9 , 10

a) Plantea un modelo de programación lineal binaria que permita a los responsables de la empresa decidir a qué ingenieros contratar, de modo que todos los clientes puedan ser visitados con el mínimo coste posible.

b) El cliente 6 está muy descontento con el trato recibido por la empresa en el pasado, así que los responsables se plantean asignarle al menos dos comerciales. Modifica el modelo para que contemple esta nueva condición.

4.4 [2] Establecimiento de turnos de vigilancia. En un parque natural deben establecerse turnos de vigilancia para las 24 horas del día, todos los días de la semana.

Con el fin de organizar mejor los turnos, un día se ha dividido en seis franjas de 4 horas: de las 00:00 a las 04:00, de 04:00 a 08:00, de 08:00 a 12:00, etc. En cada franja horaria se han definido las necesidades mínimas de los dos tipos de empleado existentes (responsables e informadores) para asegurar una vigilancia efectiva del parque natural. En la tabla siguiente se detalla dicha información.

	Franja horaria					
	0–4h	4–8h	8–12h	12–16h	16–20h	20–24h
Responsables	1	2	4	4	2	2
Informadores	2	4	8	10	6	3

Cualquier empleado ha de trabajar 8 horas consecutivas, comenzando su turno al principio de una de las franjas en que se ha dividido el día, incluida la última franja del día (es decir, es posible comenzar a trabajar a las 20:00 de un día y terminar a las 04:00 del día siguiente).

El sueldo estándar de un vigilante responsable es de 6,25 €/hora, y el de un informador es 3,75 €/hora. Las horas trabajadas entre las 20:00 y las 04:00 se pagan un 40% más caras.

a) Enumera mediante una tabla todos los posibles turnos u horarios para un empleado cualquiera.

b) Plantea un modelo de programación lineal entera que permita a los gestores del parque decidir cuántos empleados de cada tipo contratar en cada turno, de modo que se cubran las necesidades de vigilancia con el mínimo coste.

Para ajustarse más a las necesidades de cada franja horaria y ahorrar costes, los gestores del parque consideran la posibilidad de contratar un tipo de vigilante «mixto» que trabajaría en el turno de 08:00 a 16:00, cobraría sueldo de vigilante responsable, y podría realizar tareas de informador o de responsable durante cada una de las dos franjas horarias que abarca su turno (es decir, podría trabajar primero 4 horas como informador y luego 4 horas como responsable, o al revés).

Por supuesto, podrán seguir habiendo responsables e informadores en dicha franja, que únicamente se dedicarían a sus respectivas tareas. Y, obviamente, durante el tiempo que un vigilante «mixto» esté desempeñando tareas de informador, estará dejando de realizar la labor de responsable, y viceversa.

c) Reformula el modelo para que tenga en cuenta esta nueva posibilidad.

Soluciones Ejercicios Tema 4

4.1

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_i = número de juguetes producidos diariamente del tipo i i=1,2,3

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se pone en marcha el juguete tipo } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se produce en la planta } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}(10x_1 - 25000y_1 + 15x_2 - 35000y_2 + 13x_3 - 30000y_3)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ x_i \leq My_i & i = 1, 2, 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 500 + M(1 - z_1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 + M(1 - z_2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 630 + M(1 - z_3) \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \text{ y enteras } i\text{=1, 2, 3} \\ y_i = 0, 1 & i\text{=1, 2, 3} \\ z_j = 0, 1 & j\text{=1, 2, 3} \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

4.2

a) x_i = unidades producidas semanalmente del producto Pi , i =1,...,4

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se produce el producto P}i \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad i = 1,\ldots,4$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } \left[6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 - \left(2800y_1 + 4000y_2 + 3800y_3 + 4100y_4\right)\right]$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 10000 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 10000 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 10000 \\ x_i \le M\ y_i \qquad i = 1,\ldots,4 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 3 \\ y_3 \ge y_2 \\ \left.\begin{array}{l} y_1 + y_4 \ge 1 \\ y_2 + y_4 \ge 1 \end{array}\right\rangle \Leftrightarrow y_1 + y_2 \ge 2\left(1 - y_4\right) \\ x_i \ge 0 \text{ y enteras } i = 1,\ldots,4 \\ y_i = 0,1 \qquad i = 1,\ldots,4 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos las variables de decisión siguientes

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se amplían 1000 horas en la planta } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \qquad j = A, B, C$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } \left[6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 - \left(2800y_1 + 4000y_2 + 3800y_3 + 4100y_4\right)\right]$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 10000 + 1000\, z_A \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 10000 + 1000\, z_B \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 10000 + 1000\, z_C \\ x_i \le M\, y_i \qquad i = 1,\ldots,4 \\ z_A + z_B + z_C = 2 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 3 \\ y_3 \ge y_2 \\ y_1 + y_4 \ge 1 \\ y_2 + y_4 \ge 1 \\ x_i \ge 0 \text{ y enteras } i = 1,\ldots,4 \\ y_i = 0,1 \qquad i = 1,\ldots,4 \\ z_j = 0,1 \qquad j = A, B, C \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

4.3

---

a)

VARIABLES

Las decisiones a tomar son del tipo contratar sí/no a cada uno de los ocho candidatos. Por tanto, definiremos las siguientes variables de tipo binario:

δ_i = Vale 1 si se contrata al ingeniero *i*; vale 0 en caso contrario.

$i = 1,\dots,8$.

FUNCIÓN OBJETIVO

Se trata de realizar la elección de ingenieros que minimice el coste de contratación, es decir:

Min $z = 1{,}2\ \delta_1 + 2{,}0\ \delta_2 + 1{,}5\ \delta_3 + 2{,}5\ \delta_4 + 1{,}75\ \delta_5 + 1{,}5\ \delta_6 + 1{,}3\ \delta_7 + 1{,}9\ \delta_8$ miles de euros al mes.

RESTRICCIONES

La única condición es que debemos contratar a los ingenieros necesarios para que cada cliente pueda ser visitado por al menos uno de ellos. Por tanto, incluiremos una restricción por cada cliente:

[cliente 1] $\delta_1 + \delta_6 \geq 1$

[cliente 2] $\delta_3 + \delta_4 \geq 1$

[cliente 3] $\delta_2 + \delta_4 \geq 1$

[cliente 4] $\delta_1 + \delta_8 \geq 1$

[cliente 5] $\delta_1 + \delta_3 + \delta_6 \geq 1$

[cliente 6] $\delta_2 + \delta_3 + \delta_5 \geq 1$

[cliente 7] $\delta_4 + \delta_5 + \delta_6 \geq 1$

[cliente 8] $\delta_4 + \delta_7 \geq 1$

[cliente 9] $\delta_5 + \delta_8 \geq 1$

[cliente 10] $\delta_7 + \delta_8 \geq 1$

[naturaleza de las variables] $\delta_1, \dots, \delta_8$ binarias.

b)

Simplemente tendríamos que modificar la restricción del cliente 6:

[cliente 6] $\delta_2 + \delta_3 + \delta_5 \geq 2$

De esta manera, al menos dos de las variables binarias están obligadas a valer 1, es decir, al menos se contratará a dos de los comerciales que pueden visitar al cliente 6.

4.4

a)

Los posibles turnos diferentes para un empleado cualquiera son los siguientes:

Turno	0–4h	4–8h	8–12h	12–16h	16–20h	20–24h
A	•	•				
B		•	•			
C			•	•		
D				•	•	
E					•	•
F	•					•

Todos duran 8 horas consecutivas, comenzando al principio de una de las franjas horarias. En concreto, el turno F comienza a las 20:00 de un día y termina a las 04:00 del día siguiente.

b)

VARIABLES

Definimos las variables propias de un problema de turnos:

x_i = Cantidad de vigilantes responsables contratados para el turno i.

y_i = Cantidad de vigilantes informadores contratados para el turno i.

i = A,…,F.

FUNCIÓN OBJETIVO

Se trata de realizar las contrataciones que minimicen el coste de personal:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad z = {} & 60\, x_A + 50\, x_B + 50\, x_C + 50\, x_D + 60\, x_E + 70\, x_F \\ & + 36\, y_A + 30\, y_B + 30\, y_C + 30\, y_D + 36\, y_E + 42\, y_F \quad \text{euros/día} \end{aligned}$$

Los coeficientes de las variables en la función objetivo se han calculado a partir de la información facilitada en el enunciado:

– Sueldo «estándar» de un responsable: $6{,}25 \cdot 8 = 50$ euros/día

– Sueldo de un responsable con 4 horas «nocturnas» (turnos A y E):
$6{,}25 \cdot 4 + 1{,}40 \cdot 6{,}25 \cdot 4 = 60$ euros/día.

– Sueldo de un responsable con 8 horas «nocturnas» (turno F):
$1{,}40 \cdot 6{,}25 \cdot 8 = 70$ euros/día.

– De manera análoga para los informadores.

RESTRICCIONES

Las únicas restricciones son las clásicas de un problema de turnos: que en cada franja horaria se cubran las necesidades mínimas de personal. Tendremos, por tanto, una restricción por cada franja y por cada tipo de trabajador:

[respons. 0–4h] $\quad x_F + x_A \geq 1$

[respons. 4–8h] $\quad x_A + x_B \geq 2$

[respons. 8–12h] $\quad x_B + x_C \geq 4$

[respons. 12–16h] $\quad x_C + x_D \geq 4$

[respons. 16–20h] $\quad x_D + x_E \geq 2$

[respons. 20–24h] $\quad x_E + x_F \geq 2$

[inform. 0–4h] $\quad y_F + y_A \geq 2$

[inform. 4–8h] $y_A + y_B \geq 4$

[inform. 8–12h] $y_B + y_C \geq 8$

[inform. 12–16h] $y_C + y_D \geq 10$

[inform. 16–20h] $y_D + y_E \geq 6$

[inform. 20–24h] $y_E + y_F \geq 3$

[naturaleza de las variables] $x_A , \dots , x_F , y_A , \dots , y_F \geq 0$ y enteras

c)

En este apartado nos plantean la posibilidad de contratar a un nuevo tipo de empleado para el turno C (de 8 a 16h), con sueldo de responsable (50 euros/día) y al cual se le pueden asignar una de las dos tareas siguientes:

– Tarea 1: Responsable de 8:00 a 12:00 e informador de 12:00 a 16:00.

– Tarea 2: Informador de 8:00 a 12:00 y responsable de 12:00 a 16:00.

Por tanto, definiremos dos nuevas variables enteras, para representar estas nuevas posibilidades en la contratación:

w_{C1} = Cantidad de vigilantes «mixtos» contratados para el turno C y con tarea 1.

w_{C2} = Cantidad de vigilantes «mixtos» contratados para el turno C y con tarea 2.

La función objetivo continuaría respondiendo al criterio de minimizar el gasto de personal; añadiríamos ahora el gasto de este nuevo tipo de empleado:

Min $z = 60\, x_A + \dots + 42\, y_F + 50\, (w_{C1} + w_{C2})$ euros/día

Por último, se verían afectadas las restricciones correspondientes a las franjas horarias en las que estos nuevos empleados aparecen:

[respons. 8–12h] $x_B + x_C + w_{C1} \geq 4$

[respons. 12–16h] $x_C + x_D + w_{C2} \geq 4$

[inform. 8–12h] $y_B + y_C + w_{C2} \geq 8$

[inform. 12–16h] $y_C + y_D + w_{C1} \geq 1$

El resto de restricciones permanecerían igual. Añadiríamos que las dos nuevas variables son también de naturaleza entera:

[naturaleza de las variables] $x_A , \ldots , x_F , y_A , \ldots , y_F , w_{C1} , w_{C2} \geq 0$ y enteras

TEMA 5. MÉTODOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

5.1 [1] ALGORITMO DE BIFURCACIÓN Y ACOTACIÓN:

Explicar la principal ventaja e inconveniente de recorrer el árbol de soluciones según el criterio:

a) Nodo de creación más reciente (en profundidad)

b) Nodo con mejor valor de la función objetivo (en anchura)

5.2 [1] Al aplicar el método «branch-and-bound» (en el que cada nodo se ramifica en dos subproblemas que tienen una restricción $\leq$ o $\geq$ más que el subproblema del que parten) para resolver un problema de optimización entera (pura) con variables x_1 y x_2 y función objetivo $z = 4x_1 - x_2$, se obtiene el árbol 1 (figura 1).

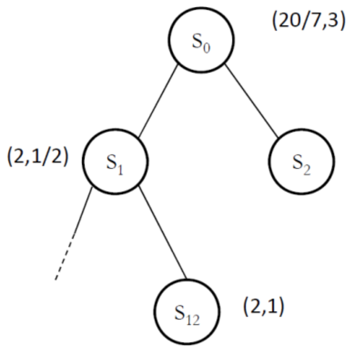


Figura 1. Árbol 1 del método B&B.

Al lado de los nodos S_0, S_1 y S_{12} se muestran las soluciones obtenidas al resolver la relajación lineal de los subproblemas correspondientes (S_2 no se ha resuelto aún). Por ejemplo, al resolver la relajación lineal para el subproblema S_1 se obtiene la solución $(x_1 = 2, x_2 = 1/2)$.

a)

a.1) La información proporcionada en el árbol 1 y la función objetivo dada permiten calcular la cota inferior de la función objetivo de la solución óptima entera. Para cada nodo de los que aparecen resueltos en el árbol de la figura 1, indica si se actualiza la cota inicial de $z^* = -\infty$ y cómo. [0,5 puntos] a.2) El árbol 1 muestra una solución entera factible. ¿Se puede asegurar que sea óptima con la información dada hasta ahora? ¿Por qué? [0,5 puntos]

a.3) Al seguir con la ramificación del subproblema S_1 se obtiene el árbol 2, mostrado en la figura 2 (véase la página siguiente), donde se indican las soluciones de las relajaciones lineales correspondientes a los subproblemas que se ven en el árbol. Actualiza la cota inferior de la solución óptima entera. ¿Puedes identificar ya una solución óptima para el problema, o habría que continuar explorando el árbol? ¿Por qué? [0,5 puntos]

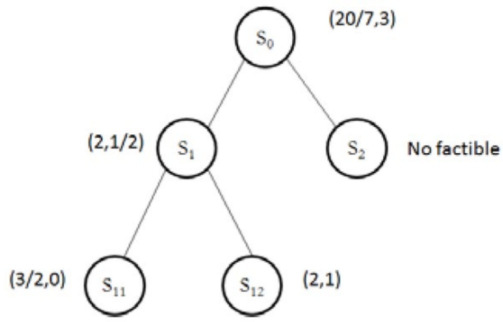
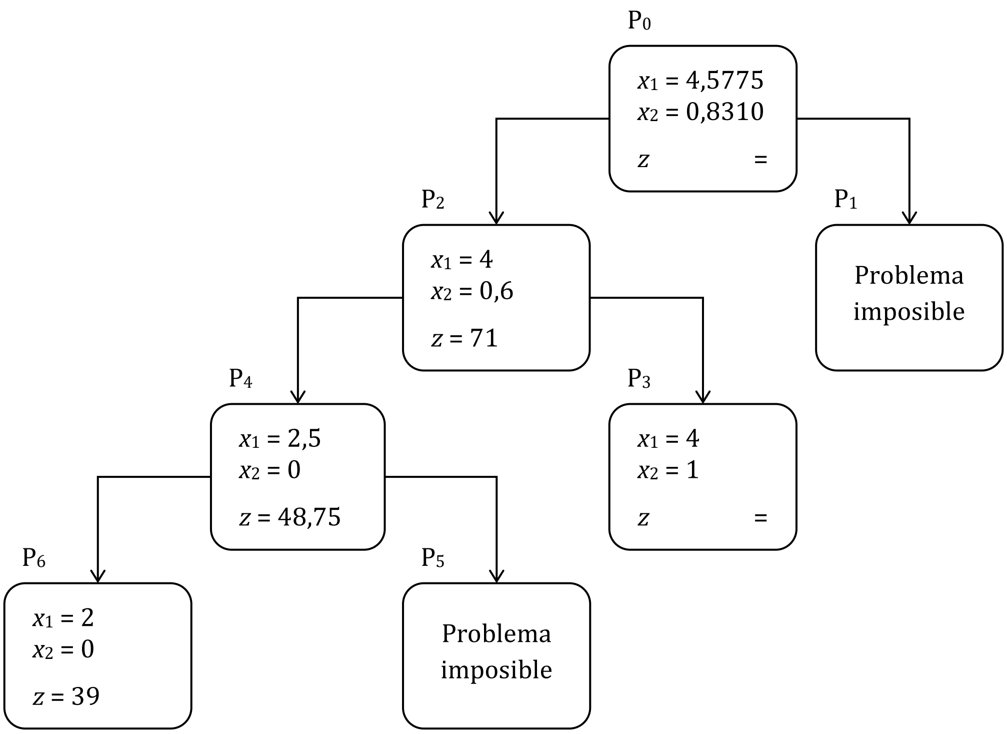


Figura 2. Árbol 2 del método B&B.

b)
Considera el árbol de la figura 2 y supongamos ahora que el orden de generación de los nodos ha sido el que se indica en su numeración (es decir: S_0, S_1, S_2, S_{11} y S_{12}). ¿Qué criterio se ha usado para generar el árbol de soluciones de la figura 2: «mejor cota», o «cota más reciente»? ¿Cómo habría cambiado el árbol (el orden de los nodos) en caso de haber aplicado el otro criterio? [0,5 puntos]

c)
En un problema de programación lineal entera resuelto mediante el algoritmo de bifurcación y acotación («branch-and-bound»), explica brevemente en qué casos un nodo del árbol no se ramifica (y, por lo tanto, no da lugar a dos nuevos nodos con sus correspondientes problemas). [0,5 puntos]

5.3 [2] Se ha aplicado el algoritmo Branch-and-Bound para resolver un problema lineal de maximización con dos variables enteras. El árbol resultante es el siguiente (los nodos están numerados según el orden en que han sido resueltos):



a) Completa la información del árbol: indica qué cota o restricción representa cada rama, así como el valor que va tomando en cada nodo la cota inferior de la solución óptima entera.

b) De acuerdo con el algoritmo Branch-and-Bound, explica si hay en este árbol ramas que no deberían haberse generado y si, por otro lado, falta bifurcar algún nodo. Justifica adecuadamente tu respuesta.

c) Si el árbol está completo, explica cuál es la solución o soluciones óptimas del problema. Si no lo está, indica cuál es la mejor solución entera encontrada.

d) ¿Se corresponde el orden de generación de los nodos con alguna de las técnicas expuestas en la asignatura? Justifica tu respuesta.

e) Dibuja o explica cómo sería el árbol resultante de aplicar el algoritmo Branch-and-Bound en el caso de que al problema se le añadieran las restricciones $2 \leq x_1 \leq 4$ y $2x_2 \leq x_1$. Supón que se mantiene el criterio para recorrer el árbol visto en el apartado (d).

5.4 [1] Dado el siguiente programa lineal:

MIN 2X1 + 3X2
s.a: [R1] X1 + X2 ≥ 3
[R2] X1 + 3X2 ≥ 6
X1, X2 ≥ 0 y enteras

Cuya solución óptima continua se incluye en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}		x_B
X1	3/2	-1/2	3/2
X2	-1/2	1/2	3/2
$c_B^t\, B^{-1}$	3/2	1/2	Z=15/2

Obtener la **solución óptima entera** aplicando el algoritmo de Bifurcación y Acotación. Generar el árbol de soluciones mediante la técnica de la mejor cota y comienza acotando inferiormente (≥) la variable X1.

Soluciones Ejercicios Tema 5

5.1

Técnica del nodo de creación más reciente:

- **Ventaja:** Requiere poca memoria.
- **Desventaja:** Es lento ya que la construcción del árbol de soluciones no va guiada por el valor de la función objetivo.

Técnica de la mejor cota:

- **Ventaja:** Es rápido ya que la construcción del árbol de soluciones va guiada por el valor de la función objetivo.
- **Desventaja:** Requiere mucha memoria

5.2

a)

a.1 S0: Solución no entera. NO acota Z.

S1: Solución no entera. NO acota Z.

S12: Solución entera. Se actualiza cota inferior. Z12 = 4× 2 − 1 = **7 → Z=7**

a.2 No se puede asegurar que sea la solución óptima porque, por ejemplo, el nodo no resuelto correspondiente a la ramificación de S0, es decir, S2 puede ofrecer soluciones enteras mejores que la del nodo S12.

a.3 Los nuevos nodos NO aportan nuevas cotas:

S2: Solución no factible. NO acota Z.

S11: Solución no entera con función objetivo Z11 = 4 × (3/2) 3 −0 = 6. NO acota Z.

La solución óptima es la correspondiente a S12, ya que el nodo S2 no se puede ramificar, ya que corresponde a un problema sin solución factible, y el nodo S11 corresponde a un problema con peor valor de la función objetivo que el valor de la función objetivo de la mejor solución entera encontrada hasta el momento (S12).

b)

Para generar el árbol de la figura 2 se ha utilizado el criterio de la «mejor cota», según el cual el siguiente nodo a bifurcar es el que tiene el mejor valor de la función objetivo continua.

En caso de haber aplicado el criterio de la «cota más reciente», el orden de los subproblemas habría sido S0, S1, S11 y a partir de S11 el proceso habría seguido por esta rama hasta llegar a una hoja del árbol de soluciones. El proceso habría seguido después hasta llegar a generar el problema S12 y, en último lugar, el S2.

c)

Un nodo no se ramifica si cumple alguna de las siguientes condiciones.

1. Si la solución del problema correspondiente a ese nodo es entera.

2. Si el valor de la función objetivo del problema correspondiente a ese nodo es peor que el valor dela función objetivo de la mejor solución entera hasta el momento.

3. Si el problema correspondiente al nodo no tiene solución factible.

5.3

---

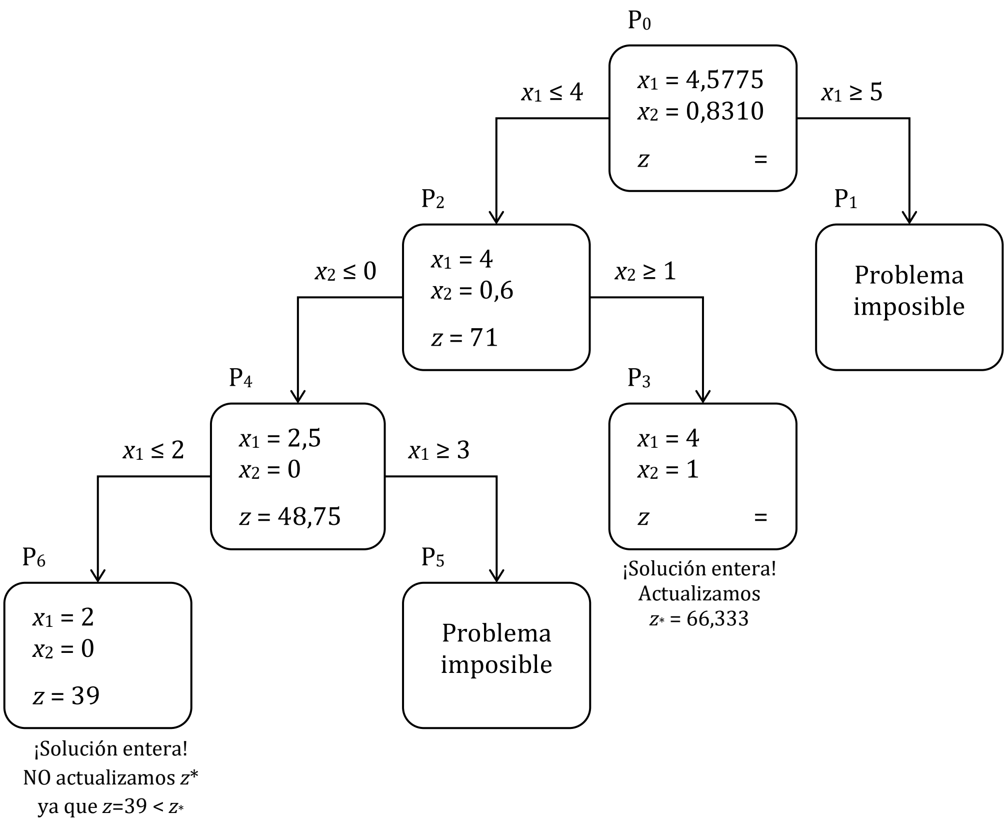
a)

Se pide completar la información del árbol, indicando las cotas en cada rama y las sucesivas actualizaciones de la cota inferior para la solución óptima entera.

En la primera bifurcación del árbol, tras la resolución del nodo raíz P0, la variable elegida para bifurcar ha sido $x1$, y no $x2$ (que también era “elegible”). Esto se deduce del hecho de que, en la resolución del nodo P2, es $x1$ la que toma un valor entero (al bifurcar por una variable, dicha variable tomará en la solución de cada nodo "hijo" el valor de la cota añadida sobre ella).

La única actualización de la cota zL para la solución óptima entera se produce en el nodo P3. La resolución de ese subproblema genera una solución entera al problema, con z = 66,3333. Por eso, a partir de ese momento se rechazará cualquier nodo que ofrezca una solución (entera o no) con z peor (inferior, en este caso) a z* = 66,3333.

En la resolución del subproblema P6 se encuentra una nueva solución entera, que NO mejora la mejor (y única) solución entera encontrada hasta ese momento; por ello, no se actualiza el valor de z*.



b)

Nos piden que validemos el árbol construido. Concretamente, se desea saber si falta bifurcar algún nodo y si, por otro lado, existen nodos que no deberían haber llegado a generarse.

El algoritmo Branch-and-Bound indica que debe saturarse un nodo cuando en él sucede una de las tres siguientes situaciones:

1. Se obtiene una solución entera.
2. El problema es imposible.
3. La solución obtenida NO es entera pero es PEOR (o no es mejor) que la mejor solución entera encontrada hasta el momento.

Según los criterios 1 y 2 enunciados, todos los nodos terminales del árbol están saturados de manera justificada: los nodos P3 y P6 presentan sendas soluciones enteras, mientras que los subproblemas P1 y P5 son imposibles. Esto quiere decir que NO hay ninguna rama pendiente de bifurcar; no falta bifurcar ningún nodo.

Sin embargo, según el criterio 3, el nodo P4 también debería haber sido saturado, ya que la solución obtenida en dicho nodo es peor que la mejor solución entera que se ha encontrado hasta ese momento ($z = 48{,}75 < z^* = 66{,}3333$, y estamos maximizando). Por tanto, dicho nodo NO debería haberse bifurcado. Es decir, "sobran" los nodos P5 y P6.

ATENCIÓN: Incluso si el árbol se ha generado siguiendo la estrategia de la "cota más reciente" (o "recorrer el árbol en profundidad"), el tercer criterio para cerrar un nodo ("la solución obtenida NO es entera pero es PEOR que la mejor solución entera encontrada hasta el momento") debe aplicarse cuando corresponda. Los tres motivos para cerrar un nodo expuestos se aplican siempre, independientemente de qué estrategia concreta se siga para recorrer el árbol ("cota más reciente", "mejor cota", etc.); son propios del algoritmo Branch-and-Bound en sí.

---

c)

El árbol está completo (incluso con nodos de más, según se ha visto en el apartado anterior), y la mejor solución entera encontrada tras explorar toda la región factible es la producida por el nodo P3, es decir:

Solución óptima entera: ($x1^* = 4$, $x2^* = 1$) , $z^* = 66,3333$.

Es la única solución óptima entera, ya que no hemos encontrado en la exploración ningún otro punto que proporcione el mismo valor para la función objetivo.

[×]

d)

Se pide deducir cuál de las dos estrategias estudiadas en la asignatura para recorrer el árbol es la que se ha utilizado en este ejercicio.

En este caso, el orden en que se han ido generando los nodos coincide tanto con el criterio de la "mejor cota" como con el de la "cota más reciente".

Coincide con el criterio de la "mejor corta" porque en cada iteración se ha tomado para ser bifurcado el nodo "abierto" con el mejor valor de z (en realidad, sólo hay un nodo "abierto" en cada paso) y se han generado y resuelto sus dos nodos "hijo".

Coincide también con el criterio de la "cota más reciente" porque se ha recorrido el árbol de manera "mecánica", profundizando siempre primero en la "rama" de la derecha o de "≥" hasta cerrarla, y siguiendo después por la última "rama" abierta pendiente de generar.

Es decir, en este caso ambas estrategias producen el mismo árbol.

En realidad, como en cada bifurcación uno de los dos nodos "hijo" acaba siendo "saturado", no hay ocasión de descartar ninguno de los dos criterios: el árbol construido es "compatible" con cualquiera de los dos.

[×]

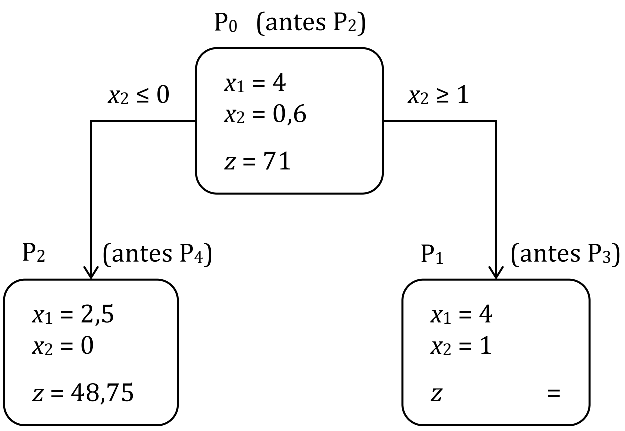
e)

Se añaden al problema las restricciones $2 \leq x1 \leq 4$ y $2x2 \leq x1$.

La restricción $x1 \leq 4$ directamente eliminaría los nodos P0 y P1, que son los únicos que incumplen por completo la nueva cota superior impuesta para x1. Es decir, al resolver el problema lineal asociado al problema entero, directamente se obtendría como nodo "raíz" el nodo P2 (dicho de otro modo: exigir $x1 \leq 4$ nos sitúa directamente en el nodo P2).

Las restricciones $x1 \geq 2$ y $2x2 \leq x1$ puede que "eliminen" soluciones de la región factible, pero NO influyen en el árbol ni en la solución final, ya que no afectan a las soluciones obtenidas en cada paso del algoritmo (las soluciones que se obtenían en cada nodo, a partir de P2, ya cumplen esas nuevas restricciones). Por tanto, en cada nodo a partir de P2 la solución se mantendrá igual, y ningún nodo será eliminado como resultado de añadir estas dos nuevas condiciones.

En resumen, si volvemos a aplicar el algoritmo para el problema con las nuevas restricciones, manteniendo el mismo orden para generar las ramas y eliminando también los nodos que, como resultado del apartado (b), sabemos que no deberían haberse generado, el árbol resultante sería el siguiente:



[×]

5.4

P0:

V.básicas	B^{-1}		X_B
X1	3/2	-1/2	3/2
X2	-1/2	1/2	3/2
$c_B^t\ B^{-1}$	3/2	1/2	**Z=15/2**

P0: X1=3/2; X2=3/2; Z=15/2 (Z*=+inf)

P1=P0(X1, X2, X3, X4) + X1≥ 2

X1 = 2 + l_1; necesitamos incrementar X1

VNB en P0: X3, X4.

- $Y_{X3} = B^{-1}\, a_{X3} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}\, a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para incrementar el valor de X1 necesitamos αij<0, por tanto sólo nos sirve X3 → **JE=X3.** El pivote del cambio de base será -3/2
- B^{-1} de la nueva solución:

  $B_{P1}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

- Variables: VB= X3, X2; VNB= X4, l_1

  $X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

  $Z = 4 + C_B^t\, X_B = 4 + (0,3) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = 8$

P1: (l1, x2, x3, x4)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X3	-1	1/3	1/3
X2	0	1/3	4/3
$c_B^t\ B^{-1}$			**8**

P1: X1=2; X2=4/3; Z=8

Como utilizamos la técnica de la mejor cota, debemos volver a P0 y generar y resolver P2: P0 + X1≤ 1

P2 = P0 + X1≤ 1; X1=1-u1; u1 ≤ 1

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X3, X4.

- $Y_{X3} = B^{-1} a_{X3} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X1 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X4 → **JE=X4.** El pivote del cambio de base será ½. Sale de la base la variable que alcanza la cota, X1 que será reemplazada en el modelo por u1
- B^{-1} de la nueva solución:

  $B^{-1}_{P2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Variables: VB= X4, X2; VNB= X3, u_1

  $X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $Z = 2 + C_B^t X_B = 2 + (0,3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 < Z^*$, actualizamos Z*=8

P1: (u1, x2, x3, x4)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X4	3	-1	1
X2	1	0	2
$c_B^t B^{-1}$			**8**

- Como la solución es entera esta es una hoja del árbol de soluciones. El único nodo que queda abierto es el de P1, pero como el valor de la función objetivo es igual al de la mejor cota, la solución actual (la de P2) es la solución óptima ya que a partir de P1 no es posible encontrar soluciones enteras con mejor valor de la función objetivo.

LA SOLUCIÓN ÓPTIMA ES LA OBTENIDA EN EL NODO P2:

X1 = 1; X2 = 2; Z = 8

Fuentes

[1] Apuntes Docentes Pilar Tormos y Antonio Lova (2015). Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad. Universitat Politècnica de València.

[2] Apuntes Docentes Vicent Giner (2015). Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad. Universitat Politècnica de València.