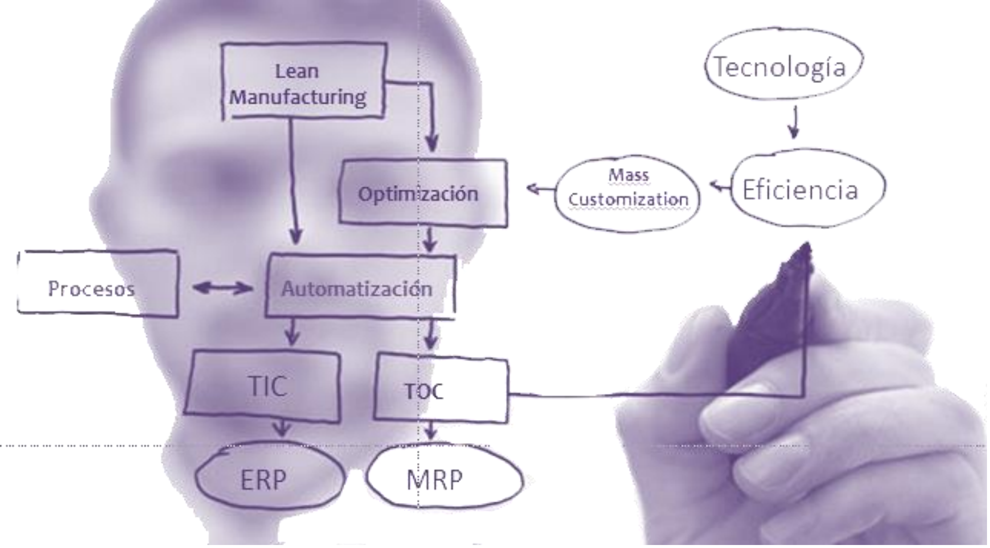


DEIOAC-UPV

4. Análisis de Sensibilidad

Objetivos

Al finalizar el tema, deberás ser capaz de:

- Interpretar los informes de análisis de sensibilidad que proporciona el software de optimización.
- Diferenciar el efecto de una modificación del coeficiente en la función objetivo de una variable de la modificación del lado derecho de una restricción.
- Predecir cuánto puede cambiar un único coeficiente en la función objetivo sin que se modifique la solución óptima.
- Predecir cuánto puede cambiar el valor del lado derecho de una única restricción sin que se modifique su coste de oportunidad y se pueda predecir el valor de la función objetivo.

CONTENIDOS

4.1 Introducción

4.2 Análisis de Sensibilidad: Método Gráfico

- 4.2.1 A. S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)
- 4.2.2 A. S. Segundo miembro restricciones (bi)

4.3 Análisis de Sensibilidad (Generalización)

4.4 Análisis de sensibilidad con el software de optimización LINGO©

4.5 CASOS de aplicación

4.6 Análisis de Sensibilidad con Simplex

- 4.6.1 A. S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)
- 4.6.2 A. S. Segundo miembro restricciones (bi)

4.1 Introducción

- Las aplicaciones reales requieren dedicar un esfuerzo importante a la recopilación de los datos (parámetros) del modelo. Aún así, es posible que los datos sean estimaciones y como tales pueden ser imprecisos.
- El análisis what-if se hace después de haber encontrado la solución óptima para la versión original del problema. Proporciona información relevante para el proceso de toma de decisiones.
- Los coeficientes en la función objetivo representan habitualmente cantidades que han sido estimadas durante la elaboración del modelo. Podrían ser imprecisas de modo que es interesante determinar el efecto si esas estimaciones fueran inexactas.
- El lado derecho de las restricciones corresponde con frecuencia a decisiones gerenciales.
- En ambos casos es relevante disponer de información que permita predecir el efecto en cambios de estos parámetros en la solución óptima actual.

4.1 Introducción

Ventajas del análisis What-if:

1. Con frecuencia en el momento de elaborar el modelo la mayoría de los parámetros del modelo son estimaciones de cantidades que no pueden determinarse de forma precisa. El análisis what-if revela cuán precisa ha de ser su estimación para evitar obtener una solución óptima equivocada, y por tanto **identifica los parámetros sensibles** (aquellos parámetros que requieren atención especial para refinar su estimación porque pequeños cambios en su valor pueden implicar un cambio de solución óptima).

2. Las empresas trabajan en un entorno dinámico en el que las condiciones cambian frecuentemente. El análisis what-if indica de forma inmediata si un cambio en un parámetro cambia la solución óptima. A este tipo de análisis what-if se le llama *análisis de sensibilidad* porque implica determinar si la solución óptima es sensible al valor de cada parámetro.

4.1 Introducción

Además de estos dos tipos de análisis (pasivos), el análisis what-if va más allá en una aproximación proactiva,

3. Ciertos parámetros del modelo representan decisiones empresariales y el análisis what-if es una guía valiosa para la gerencia respecto al impacto de modificar estas políticas.

   Una vez que el modelo se ha resuelto, es interesante analizar el efecto de alterar esas decisiones de política empresarial en distintas direcciones para ver si pueden mejorarse. El análisis what-if es una guía valiosa para determinar el efecto de alterar esas decisiones condicionadas por la política de la empresa.

4.1 Introducción

Análisis de sensibilidad

- El ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD (A.S.) proporciona herramientas para estudiar la variación de la
  - solución óptima
  - valor óptimo de la función objetivo
  - la base óptima

ante **cambios en 1 parámetro** (**Ci** o **bi**) del problema original

(SIN RESOLVER DE NUEVO EL MODELO) una vez obtenida la solución óptima)

4.1 Introducción

Análisis de sensibilidad

- A.S. COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO (C_i)
- A.S. VECTOR RECURSOS (b_i)

4.2 Análisis de Sensibilidad: Método Gráfico

FORMULACIÓN DEL PROGRAMA LINEAL

Determinar los valores de las variables:

$X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$

que optimicen, maximicen en este caso (en otros puede ser minimizar) la ***función objetivo***:

Max $3X_1 + 5X_2$ (miles de €)

y verifiquen las ***restricciones:***

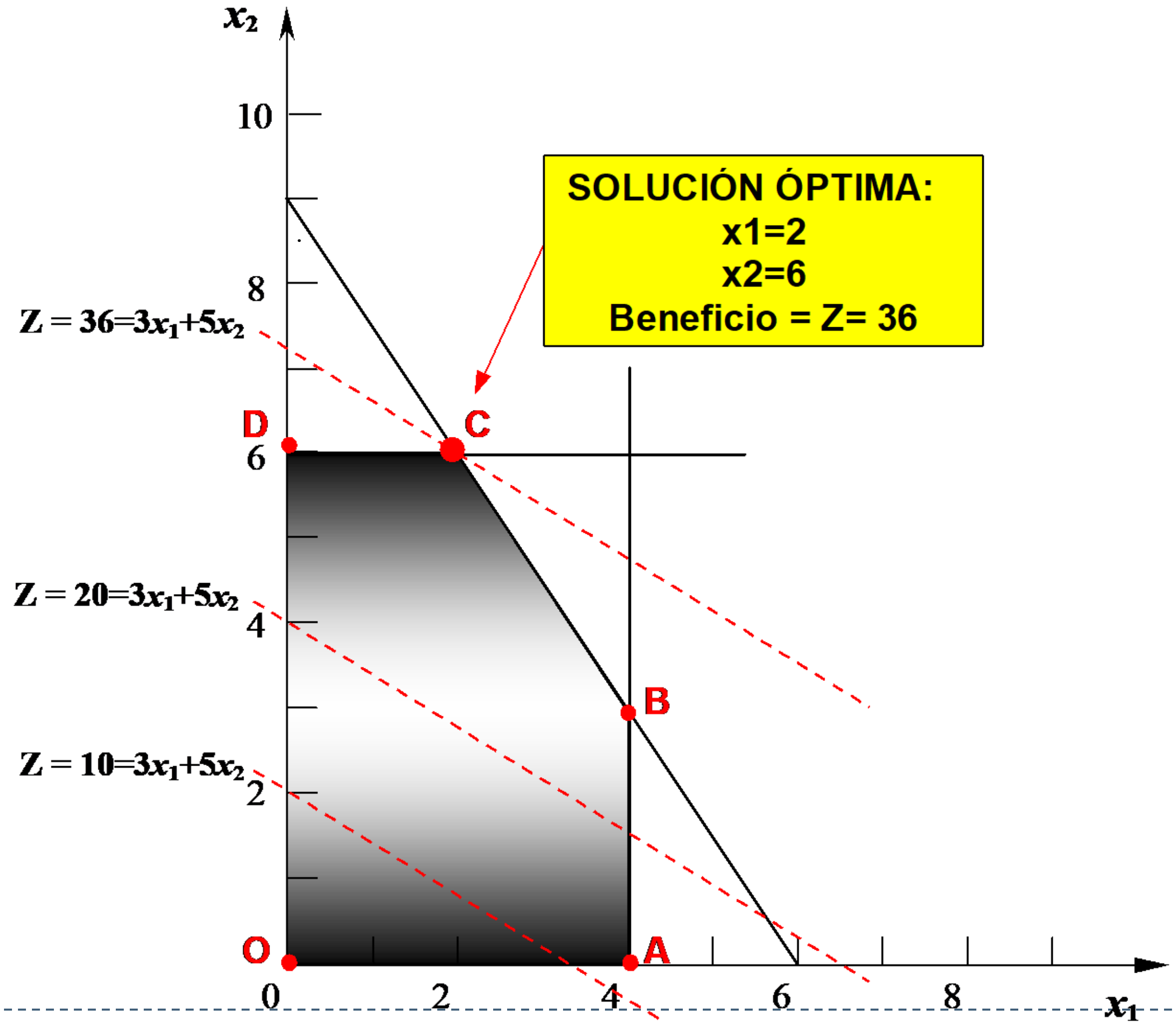
$X_1 \leq 4$ **(Departamento 1)**

$2X_2 \leq 12$ **(Departamento 2)**

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$ **(Departamento 3)**

4.2 Análisis de Sensibilidad: Método Gráfico

SOLUCIÓN GRÁFICA: MAXIMIZAR BENEFICIO



4.2.1 A. S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE Ci

- **Observación:** La modificación del coeficiente de una variable en la función objetivo implica cambiar la pendiente de la función objetivo
- Si el cambio es suficientemente grande habrá cambio de solución óptima

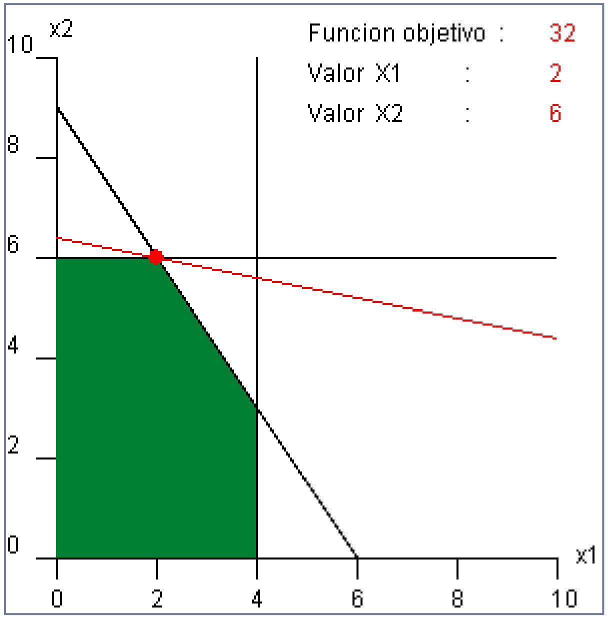
OBJETIVO:

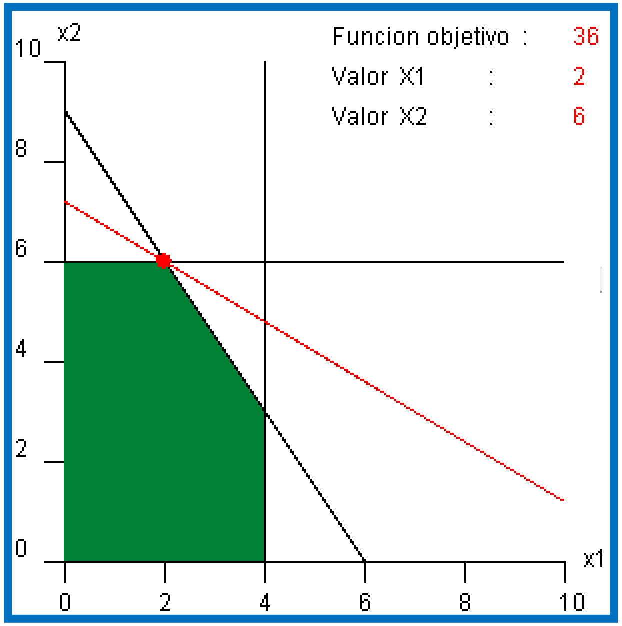
Determinar el intervalo de variación de C_i dentro del cual la solución óptima o plan óptimo de producción (valor de las variables decisión y de holgura) **NO CAMBIA**.

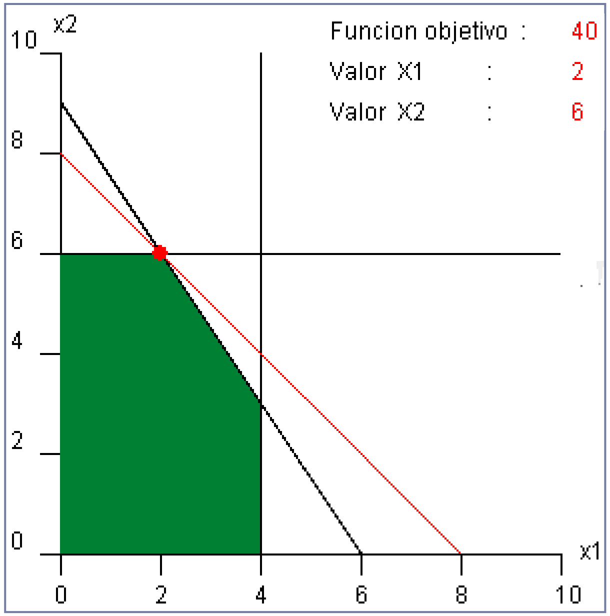
El valor óptimo de la función objetivo puede cambiar

Análisis de sensibilidad de **Cx1**:

Modelo Original







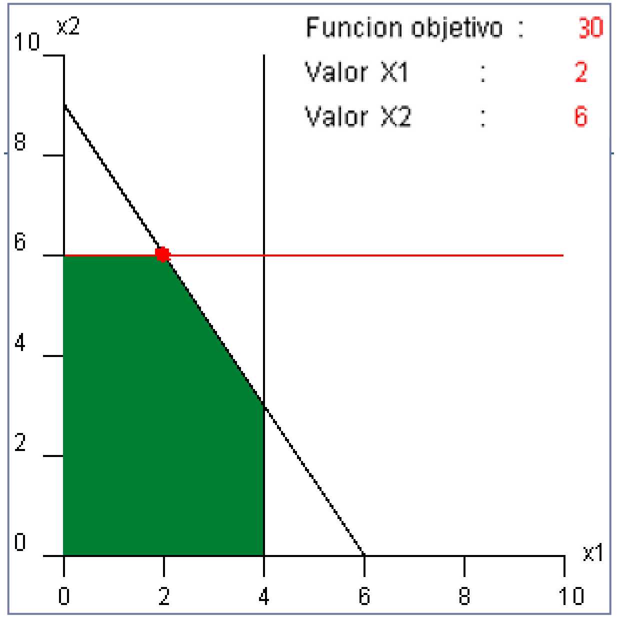
MAX Z = **1** X1 + 5 X2

MAX Z = **3** X1 + 5 X2

MAX Z = **5** X1 + 5 X2

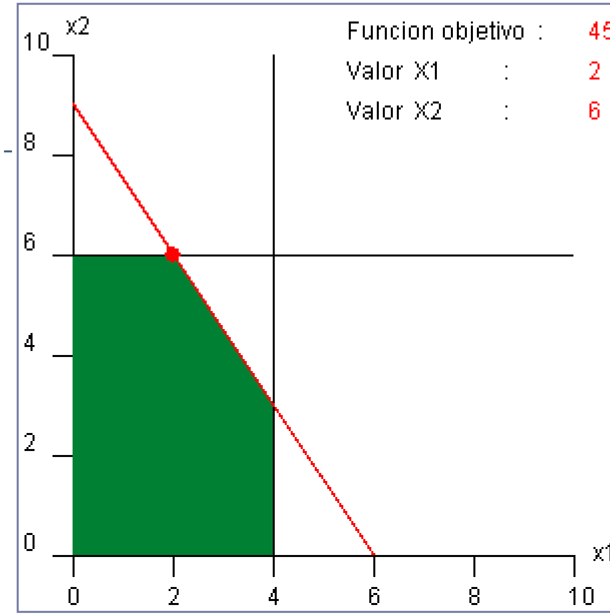
↓ Cx1 en 2

↑ Cx1 en 2

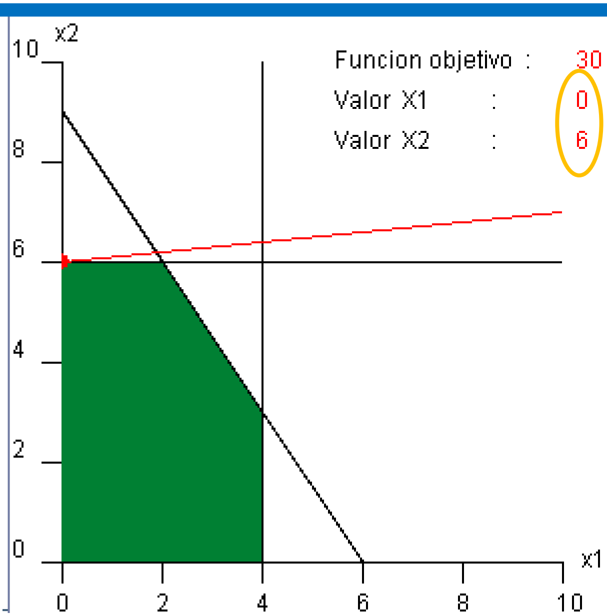


MAX Z = **0** X1 + 5 X2

Límites ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

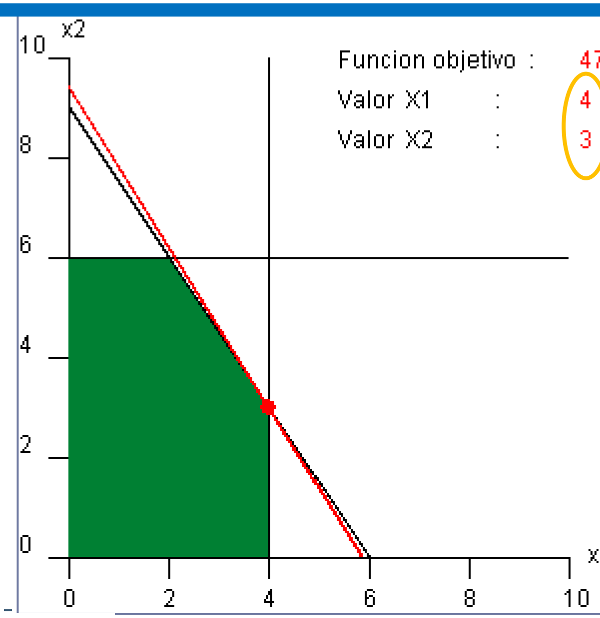


MAX Z = **7.5** X1 + 5 X2



MAX Z = **-0.5** X1 + 5 X2

FUERA DE Límites ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD



MAX Z = **8** X1 + 5 X2

4.2.1 A. S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

CONCLUSIONES Análisis de Sensibilidad Cx1:

Mientras **Cx1 ∈ [0 , … , 7.5]**

1. la solución óptima **NO CAMBIA** (solución óptima en punto **C** (X1=2, X2=6))
2. **SÍ CAMBIA** el **VALOR ÓPTIMO DE LA FUNCIÓN OBJETIVO, si es VB.**
3. Para los **valores extremos del intervalo**, existen soluciones ÓPTIMAS alternativas (por tanto, **infinitas soluciones ÓPTIMAS**) todas con el mismo valor ÓPTIMO de la función objetivo

4.2.1 A. S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

Cambios en un coef. de la función objetivo (c_j)

En resumen, un cambio en un c_j *puede*:

- no afectar a la solución óptima pero, en general, sí al beneficio/coste; o
- provocar un cambio de solución óptima (y por tanto de beneficio/coste óptimo), tratándose de un cambio a otro vértice de la RF.
- Si sólo se modifica un c_j, es posible determinar el rango o intervalo dentro del cual éste puede variar sin que cambie el vértice óptimo.
- En los extremos de ese intervalo, se da el caso de infinitas soluciones óptimas.

4.2.2 A. S. Segundo miembro restricciones (bi)

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE bi

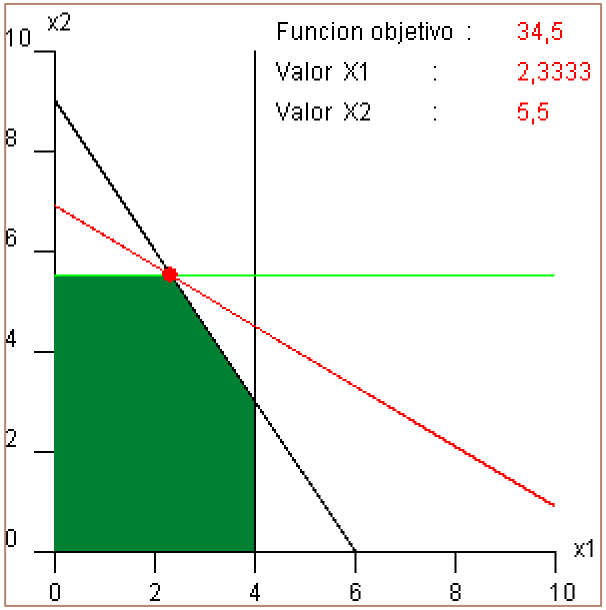
COSTE DE OPORTUNIDAD de una **RESTRICCIÓN**:

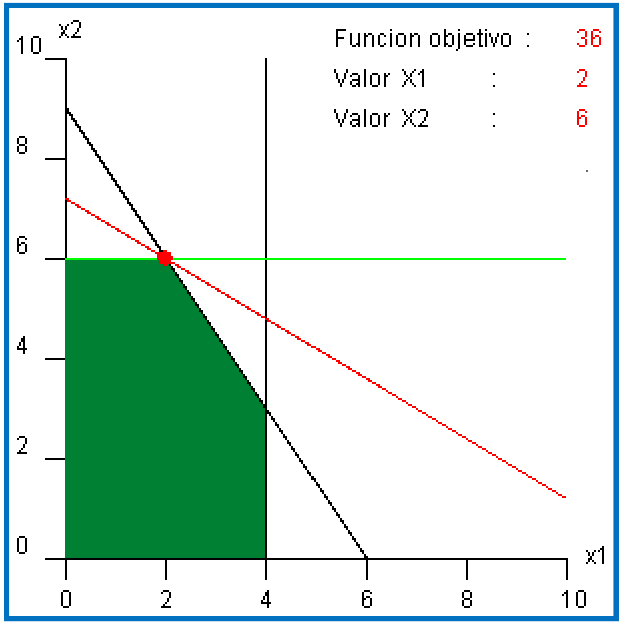
- "**VARIACIÓN**" del valor ÓPTIMO de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción

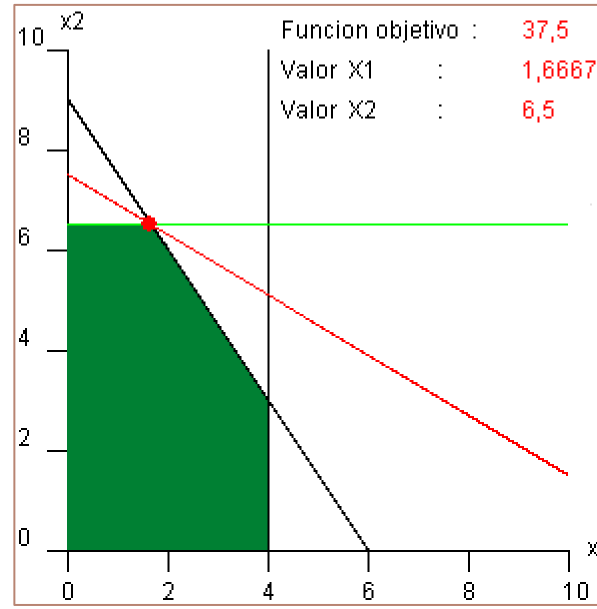
- **OBJETIVO:**
  - Determinar el intervalo de variación de b_i dentro del cual el **COSTE DE OPORTUNIDAD** es **CONSTANTE**
    - En este intervalo,
      - La **base óptima** (variables con valor cero y variables con valor distinto de cero) permanece constante
      - **Se puede predecir el nuevo valor óptimo de la función objetivo**
      - **La Solución Óptima puede cambiar**

Análisis de sensibilidad de **b2**:

Modelo Original







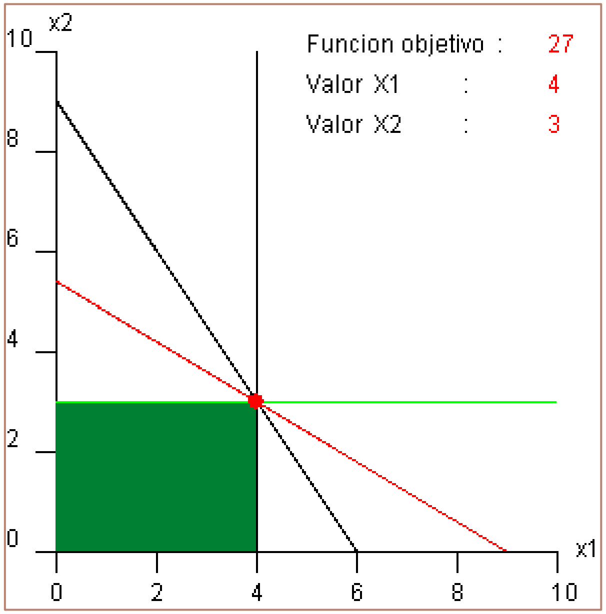
[Depto2] **2 X2 ≤ 11**

[Depto2] **2 X2 ≤ 12**

[Depto2] **2 X2 ≤ 13**

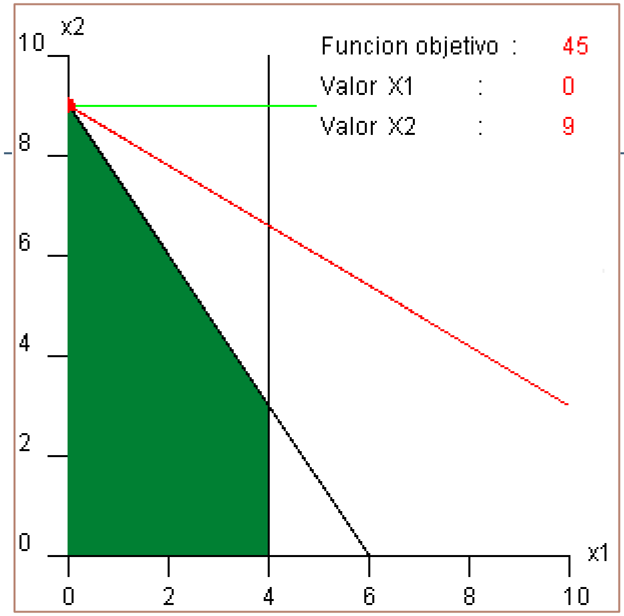
↓ b2 en 1

↑ b2 en 1

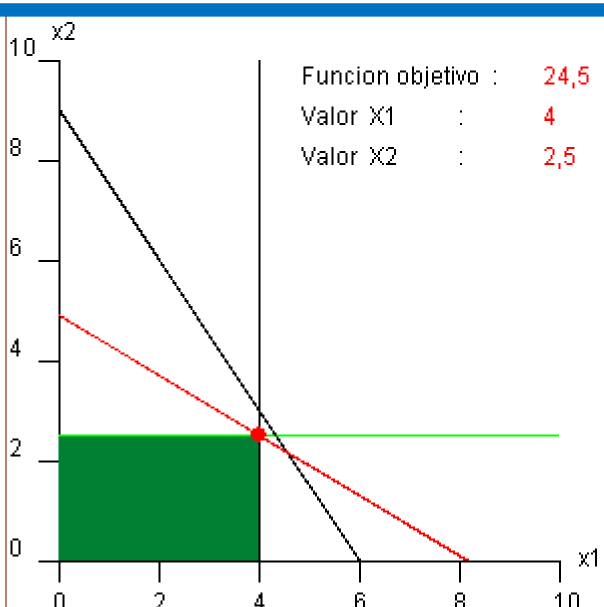


[Depto2] **2 X2 ≤ 6**

Límites ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

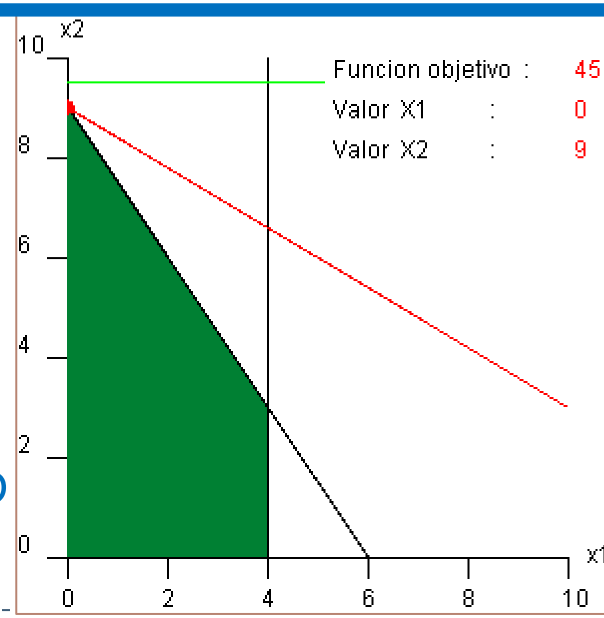


[Depto2] **2 X2 ≤ 18**



[Depto2] **2 X2 ≤ 5**

FUERA DE Límites ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD



[Depto2] **2 X2 ≤ 19**

CONCLUSIONES Análisis de Sensibilidad b2:

Mientras **b2 ∈ [6 , ... , 18]** :

1. El **COSTE DE OPORTUNIDAD** es **CONSTANTE** (**+1.5**) y se puede predecir el nuevo valor óptimo de la función objetivo.
2. La solución óptima cambia al ser la restricción cuello de botella del sistema optimizado
3. El valor óptimo de la función objetivo cambia ya que cambia la solución óptima (se puede recalcular su valor)
4. La **base óptima** permanece constante (variables con valor cero o distinto de cero).

4.2.2 A. S. Segundo miembro restricciones (bi)

- El **coste de oportunidad** de una restricción que no se verifica estrictamente en la Solución óptima es $= 0$
- El **coste de oportunidad** de una restricción que se verifica estrictamente en la Solución Óptima es en general $\neq 0$
- Los **costes de oportunidad** proporcionan a la gerencia una valiosa información acerca de los beneficios que pueden obtenerse al suavizar las restricciones. Si estos beneficios superan el coste que provoca suavizar una restricción dada, entonces dichos cambios son interesantes

4.2.2 A. S. Segundo miembro restricción (bi)

COSTE DE OPORTUNIDAD de una **RESTRICCIÓN**: "**VARIACIÓN**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción

- **COSTE DE OPORTUNIDAD** de una **RESTRICCIÓN ≤**
  - "**MEJORA**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción
    - **MEJORA**: si **MAX** → aumento en el valor de la F.O.

      si **MIN** → disminución en el valor de la F.O.
- **COSTE DE OPORTUNIDAD** de una **RESTRICCIÓN ≥**
  - "**EMPEORAMIENTO**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción
    - **EMPEORAMIENTO**: si **MAX** → disminución en el valor de la F.O.

      si **MIN** → aumento en el valor de la F.O.

4.3 Análisis de sensibilidad (generalización)

Análisis de sensibilidad **Ci**

- **OBJETIVO y CONCLUSIONES:**
  - Determinar el intervalo de variación de C_i (intervalo de análisis de sensibilidad) **Ci_limite_inf ... Ci_limite_sup** / ***Si*** **Ci ∈ [Ci_limite_inf,...,Ci_limite_sup] :**

1. La solución óptima (valor de las variables decisión y de holgura) **NO CAMBIA**.
2. El valor óptimo de la Función Objetivo puede cambiar
   - Si Ci está asociado a una variable que en la solución óptima es distinta de cero → El valor óptimo de la Función Objetivo cambia
   - En caso contrario → El valor óptimo de la Función Objetivo NO cambia
3. En Los límites, **Ci=Ci_limite_inf** y **Ci=Ci_limite_sup**, hay infinitas soluciones óptimas con mismo valor óptimo de la función objetivo

4.3 Análisis de sensibilidad (generalización)

Análisis de sensibilidad **bi**

- **OBJETIVO y CONCLUSIONES:**
  - Determinar el intervalo de variación de b_i (intervalo de análisis de sensibilidad)

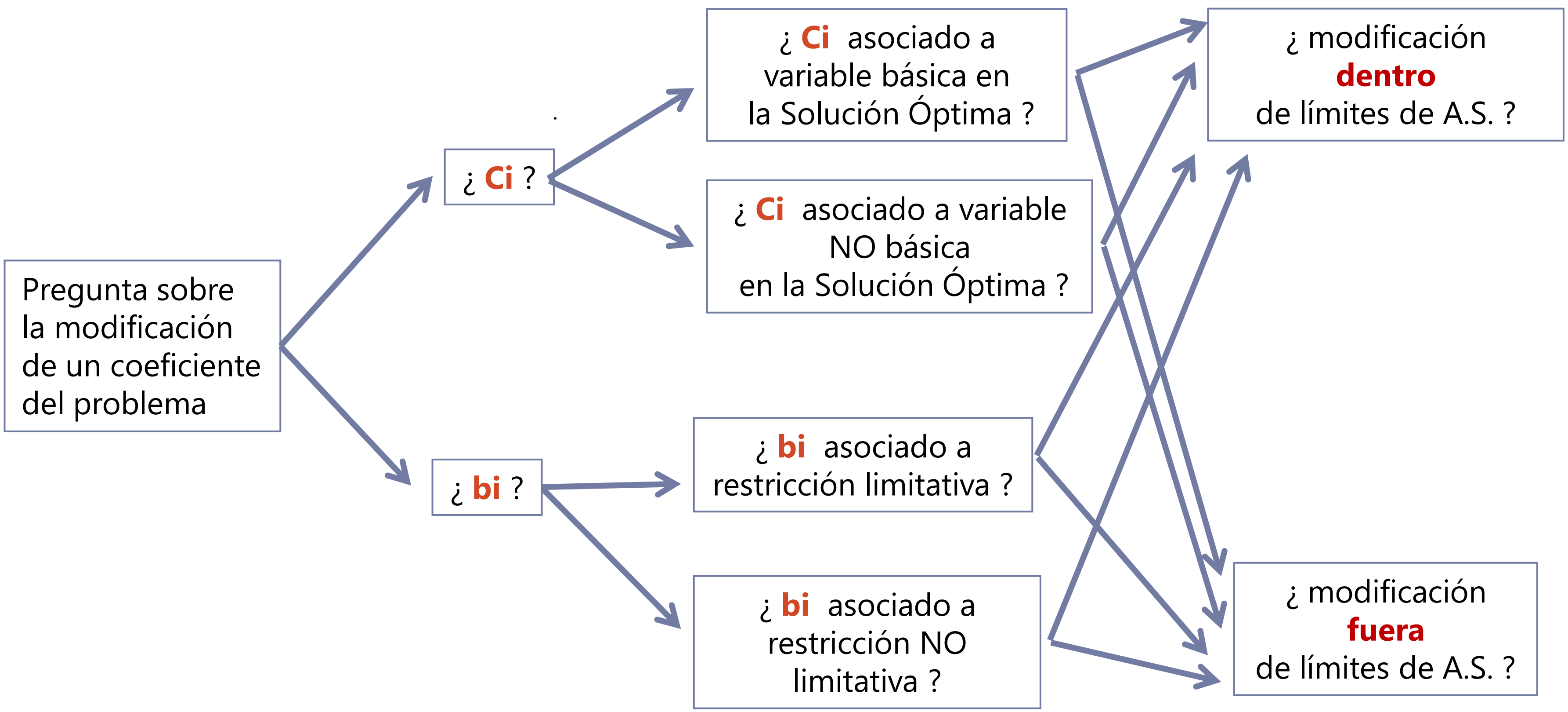
    $\boxed{\textbf{bi\_limite\_inf ... bi\_limite\_sup}}$ **/** ***Si*** **bi ∈ bi_limite_inf ... bi_limite_sup :**

1. El **COSTE DE OPORTUNIDAD** es **CONSTANTE** y se puede predecir el nuevo valor óptimo de la función objetivo.
2. La solución óptima puede cambiar.
   - Si bi está asociado a una restricción limitativa (cuello de botella) → La solución óptima cambia
   - Si bi está asociado a una restricción de holgura → La solución óptima no cambia
3. La base óptima permanece constante (variables con valor cero o distinto de cero).

4.3 Análisis de sensibilidad (generalización)

Aplicación del Análisis de Sensibilidad (limite_inf … limite_sup)

- ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD: Un análisis de **triple** bifurcación



4.3 Análisis de sensibilidad (generalización)

Aplicación del Análisis de Sensibilidad (limite_inf ... limite_sup)

La cuestión que nos plantean, ¿hace referencia a la modificación de un Ci o bi dentro del intervalo de análisis de sensibilidad?

Es un Ci:

Ci asociado a una **variable** que en la solución óptima es **distinta de cero**:

- Solución Óptima NO cambia.
- Valor óptimo de la Función Objetivo SI cambia (se puede recalcular)

Ci asociado a una **variable** que en la solución óptima es **igual a cero**:

- Solución Óptima NO cambia.
- Valor óptimo de la Función Objetivo NO cambia

En ambos casos, en los límites hay infinitas soluciones óptimas con mismo valor óptimo de la función objetivo.

4.3 Análisis de sensibilidad (generalización)

Aplicación del Análisis de Sensibilidad (limite_inf … limite_sup)

La cuestión que nos plantean, ¿hace referencia a la modificación de un Ci o bi dentro del intervalo de análisis de sensibilidad?

Es un bi:

Restricción **limitativa (cuello de botella)**:

- La Solución Óptima SI cambia (con la información del Solver de EXCEL® no sabemos cuál es)
- El valor óptimo de la Función Objetivo SI cambia (se puede recalcular)
- El Coste de Oportunidad NO cambia
- La base óptima NO cambia

Restricción **de holgura (NO cuello de botella)**:

- La Solución Óptima NO cambia
- El valor óptimo de la Función Objetivo NO cambia
- El Coste de Oportunidad NO cambia y es CERO
- La base óptima NO cambia

4.4 Análisis de sensibilidad con el software de optimización LINGO©

```
!EJEMPLO1: UN EJEMPLO DE PLANIFICACIÓN DE LA
  PRODUCCION;
[OBJ] MAX = 3 * X1 + 5 * X2;
[DEPTO1] X1 <= 4;
[DEPTO2] 2*X2 <= 12;
[DEPTO3] 3*X1 + 2*X2 <= 18;
```

SOLUCIÓN ÓPTIMA

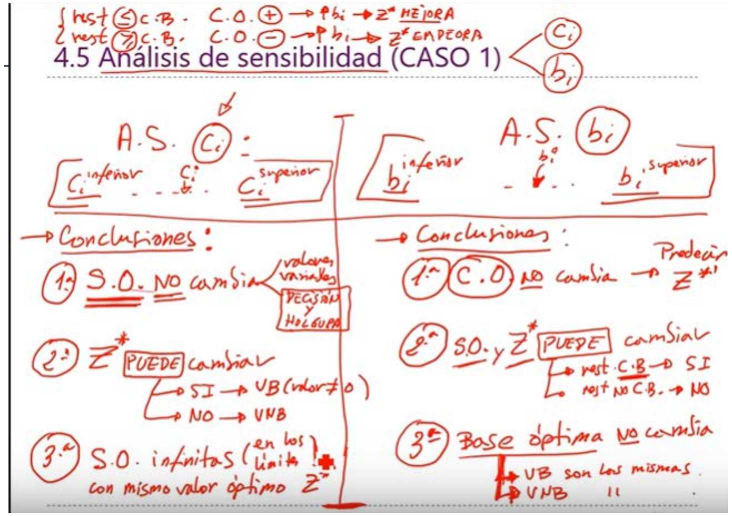
```
Objective value:                    36.00000
```
(VALOR FUNCION OBJETIVO)

……………………………………VALOR VARIABLES……………………………………

Variable	Value	Reduced Cost (COSTE REDUCIDO)
X1	2.000000	0.0000000
X2	6.000000	0.0000000

……………………………………VALOR RESTRICCIONES……………………………………

Row	Slack or Surplus (HOLGURA)	Dual Price (COSTE DE OPORTUNIDAD)
OBJ	36.00000	1.000000
DEPTO1	2.000000	0.0000000
DEPTO2	0.0000000	1.500000
DEPTO3	0.0000000	1.000000



COSTE REDUCIDO

2 INTERPRETACIONES:

1. Cuánto debería mejorar el coeficiente en la función objetivo de una variable que es cero en la solución óptima actual, para que interesara que dicha variable fuese distinta de cero.

2. Empeoramiento en el valor óptimo en la función objetivo por incremento unitario del valor de la variable.

4.4 Análisis de sensibilidad con el software de optimización LINGO©

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges (A.S.COEFICIENTES F.O.)

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	3.000000	4.500000	3.000000
X2	5.000000	INFINITY	3.000000

Righthand Side Ranges (A.S. 2º MIEMBRO RESTRICCIONES)

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
DEPTO1	4.000000	INFINITY	2.000000
DEPTO2	12.00000	6.000000	6.000000
DEPTO3	18.00000	6.000000	6.000000

4.4 Análisis de sensibilidad con el software de optimización LINGO©

CUESTIONES:

Sol. óptima no cambia (está dentro del rango) y
$Z^* = (3 + 4)X1 + 5X2 = 7X1 + 5X2 = 7(2) + 5(6) = 14 + 30 = 44$

1. ¿Qué impacto tendría sobre el plan óptimo de producción y sobre el valor óptimo de la función objetivo un incremento de 4 (miles de €) en el beneficio asociado a las placas base tipo 1?

   Sol. óptima cambia

2. Idem si el incremento fuera de 5 (miles de €). $Z^* >= 36 + 4,5X1 = 36 + 4,5(2)$

3. ¿Qué impacto tendría sobre el plan óptimo de producción y sobre el valor óptimo de la función objetivo un incremento de 4 horas en la capacidad del departamento 2? Y si el incremento fuera de 8 horas?

   S cambia $Z^* = 36 + 4(1,5)$

   No estaría dentro de los límites, F.O >= $36 + 6(1,5)$

4. ¿Qué impacto tendría sobre el plan óptimo de producción y el valor óptimo de la función objetivo un incremento de 10 horas en la capacidad del departamento 1?

   No modificaría ni la solución óptima, ni la función objetivo.

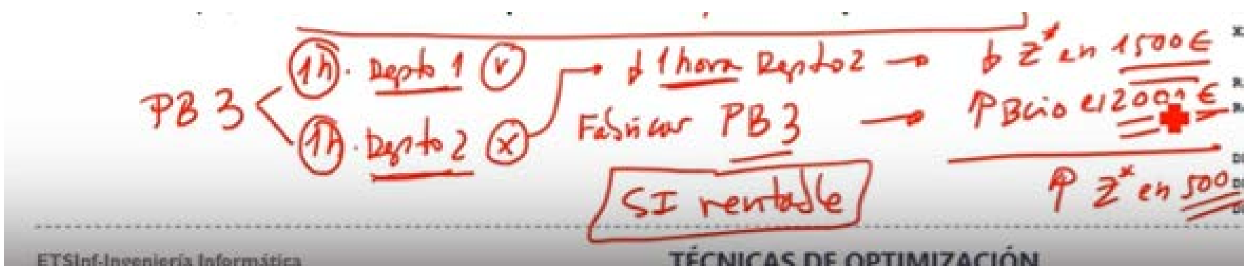
5. Se dispone de una partida presupuestaria para aumentar la capacidad de un departamento. ¿Cuál de los tres departamentos mejorarías? Justifica la respuesta.

   El departamento 2, y después el departamento 3. Habría que mirar, en valor absoluto, de mayor a menor, sus *Dual Price*.

CUESTIONES:

6. Nos plantean la posibilidad de fabricar semanalmente un tercer tipo de placa base que requeriría 1 hora del departamento de Producción y 1 hora en el departamento de Calidad. Este nuevo tipo de placa base no necesita pasar por el departamento de Montaje. El beneficio de cada lote de la nueva placa base es de 2000€.

   Teniendo en cuenta la información de la solución óptima actual, ¿sería rentable producir el nuevo producto?



4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

La empresa Ikehay se dedica a la fabricación de muebles manufacturados. Durante el próximo periodo productivo, la gerencia está considerando fabricar mesas de comedor, sillas de comedor y muebles libreros. El tiempo requerido de cada pieza en cada una de las dos etapas de producción (ensamblado y acabado), la cantidad de madera requerida (madera de cerezo) y el beneficio unitario se incluyen en la tabla siguiente junto con la cantidad disponible de cada recurso en el próximo periodo de producción.

	Mesas	Sillas	Libreros	Disponibilidad
Ensamblado (min)	80	40	50	8100
Acabado (min)	30	20	30	4500
Madera (libras)	80	10	50	9000
Beneficio unitario (€)	360	125	300	

Para determinar cuál debe ser el plan de producción que maximice el beneficio cumpliendo la disponibilidad de madera y de los dos departamentos de producción se ha planteado el siguiente modelo de programación lineal:

```
MAX= 360*x1+ 125*x2 + 300*x3;
[Ensamblado]      80 *x1 + 40* x2 + 50 *x3 <= 8100;
[Acabado]         30 *x1 + 20 *x2 + 30 *x3 <= 4500;
[Madera]          80 *x1 + 10* x2 + 50 *x3 <= 9000;
```

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

- A continuación se incluye el informe de solución óptima y su correspondiente análisis de sensibilidad:

```
Objective value:                              46200.00

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        20.00000            0.000000
                                    X2        0.000000            88.33333
                                    X3        130.0000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        46200.00            1.000000
                            ENSAMBLADO        0.000000            2.000000
                               ACABADO        0.000000            6.666667
                                MADERA        900.0000            0.000000

Ranges in which the basis is unchanged:

                                      Objective Coefficient Ranges:
                                        Current        Allowable        Allowable
                          Variable    Coefficient       Increase         Decrease
                                X1       360.0000       120.0000         60.00000
                                X2       125.0000       88.33333         INFINITY
                                X3       300.0000       60.00000         75.00000

                                          Righthand Side Ranges:
                                        Current        Allowable        Allowable
                               Row          RHS         Increase         Decrease
                        ENSAMBLADO     8100.000        900.0000         600.0000
                           ACABADO     4500.000        360.0000         1462.500
                            MADERA     9000.000        INFINITY         900.0000
```

C_i

b_i

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

A partir de la información de la solución óptima y análisis de sensibilidad, deseamos analizar las siguientes situaciones:

a) *El beneficio por mesa no estaba bien estimado y en realidad resulta 100 euros mayor. Este incremento ¿cambiará las cantidades óptimas producidas? ¿Qué podemos decir acerca del cambio en el beneficio total?*

   Y si el incremento fuera de 120 euros? ¿cambiará las cantidades óptimas producidas? ¿Qué podemos decir acerca del cambio en el beneficio total?

   Y si el incremento fuera de 150 euros?

b) *Supongamos que el beneficio por silla se incrementa en 100 euros. Esta modificación, ¿supondrá un cambio en las cantidades óptimas producidas? ¿Qué podemos decir acerca del cambio en el beneficio total?*

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

c) *Se plantea a la empresa la posibilidad de alquilar maquinaria adicional en el departamento de Acabado, a un precio de 1.700 euros al mes. Dicha operación supondría una capacidad extra de trabajo equivalente a 300 minutos. ¿Debe la empresa aceptar la oferta?*

   Y si la oferta fuese ampliar en 400 minutos, con un coste de 2.700 euros?

d) *Un trabajador del departamento de ensamblado está enfermo por lo que se dispone de 8 horas menos en dicho departamento. ¿Cuánto afectará esto al beneficio total? ¿Cambiarán las cantidades óptimas producidas?*

e) *Explicar porqué el coste de oportunidad de la restricción de Madera es cero*

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

a) El beneficio por mesa no estaba bien estimado y en realidad resulta 100 euros mayor. Este incremento ¿cambiará las cantidades óptimas producidas? ¿Qué podemos decir acerca del cambio en el beneficio total?

No. El incremento de 100€ está dentro de rangos (incremento permitido: 120€). Por tanto podemos afirmar que las cantidades óptimas siguen siendo las mismas.

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	360.0000	120.0000	60.00000
X2	125.0000	88.33333	INFINITY
X3	300.0000	60.00000	75.00000

En cuanto al beneficio total, se incrementará puesto que se siguen fabricando el mismo número de mesas pero con un beneficio unitario mayor.

El nuevo beneficio total es 20*100 = 2000€ mayor, es decir:

Beneficio= 20*460 + 130*300 = 48.200€

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

Y si el incremento fuera de 120 euros, ¿cambiará las cantidades óptimas producidas? ¿Qué podemos decir acerca del cambio en el beneficio total?

No. El incremento de 120€ está dentro de rangos (incremento permitido: 120€). Por tanto podemos afirmar que las cantidades óptimas siguen siendo las mismas.

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	360.0000	120.0000	60.00000
X2	125.0000	88.33333	INFINITY
X3	300.0000	60.00000	75.00000

En cuanto al beneficio total, se incrementará puesto que se siguen fabricando el mismo número de mesas pero con un beneficio unitario mayor.

El **incremento** del beneficio total es 20*120= 2.400€ , es decir:

Beneficio= 46.200 + 2.400 =48.600€

La solución óptima NO será única ⇒ infinitas soluciones óptimas

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

Y si el incremento fuera de 150 euros?

- Máximo incremento que puede sufrir c_{Mesas} sin que varíe la solución óptima (columna 'Aumentar Permisible'): 120 euros.

- Como $\boldsymbol{\Delta c_{\text{Mesas}} = 150 > 120}$ $\Rightarrow$ estamos «**fuera de rangos**» $\Rightarrow$ **La solución óptima SÍ cambia**, **y también la base**; el plan óptimo original deja de ser óptimo con las nuevas condiciones.
- Podríamos recalcular la solución si dispusiéramos de la **tabla óptima** resultante de aplicar el algoritmo **Simplex** al problema original.
- La nueva solución óptima será *mejor* que la anterior; proporcionará un mayor valor de la función objetivo (VFO). Podemos obtener, por tanto, **UNA COTA INFERIOR** para el nuevo valor óptimo de la función objetivo:

$$Z^{*\prime} \geq z^* + \Delta c_{\text{Mesas}} \textit{Mesas} = 46.200 + \mathbf{150} \cdot 20 = \mathbf{49.200\ euros}$$

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

b) Supongamos que el beneficio por silla se incrementa en 100 euros. Esta modificación, ¿supondrá un cambio en las cantidades óptimas producidas? ¿Qué podemos decir acerca del cambio en el beneficio total?

Sí. El incremento de 100€ está fuera de rangos; el incremento máximo del beneficio unitario de las silla dentro del cual se mantiene la solución óptima es 88.33€.

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	360.0000	120.0000	60.00000
X2	125.0000	88.33333	INFINITY
X3	300.0000	60.00000	75.00000

Por tanto, la modificación considerada implica que las cantidades óptimas producidas cambien. El beneficio aumentará pero no podemos determinarlo sin resolver de nuevo el modelo.

Nota: Podríamos haber llegado a las mismas conclusiones analizando el Coste Reducido de X2.

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

c) Se plantea a la empresa la posibilidad de alquilar maquinaria adicional en el departamento de Acabado, a un precio de 1.700 euros al mes. Dicha operación supondría una capacidad extra de trabajo equivalente a 300 minutos. ¿Debe la empresa aceptar la oferta?

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
ENSAMBLADO	8100.000	900.0000	600.0000
ACABADO	4500.000	360.0000	1462.500
MADERA	9000.000	INFINITY	900.0000

- $\boldsymbol{\Delta b_2}$ **= 300** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{b_2'}$ = $b_2 + \Delta b_2$ = **4.800 minutos**.
- **Coste de oportunidad** (Precio Sombra) de la restricción :

  C.Op.([Tiempo]) = **6,66667 euros/minuto**.
- Al tratarse de una restricción con coste de oportunidad distinto de cero, podemos afirmar que **la solución óptima cambiará.**
- Por tratarse de un coste de oportunidad positivo y plantearse un incremento del lado derecho, la nueva solución óptima presentará un **beneficio mayor que el original**.

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

- INCREMENTO máximo que puede sufrir b_2 sin que varíen la base óptima ni el coste de oportunidad de la restricción (columna 'Permisible Aumentar'): **360 minutos.**

- Como $\mathbf{\Delta b_2 = 300 \leq 360}$ $\Rightarrow$ estamos «**dentro de rangos**» $\Rightarrow$ **La solución óptima SÍ cambia**, pero **NO la base**, y **el coste de oportunidad de la restricción sigue siendo válido**.

- Como es válido el coste de oportunidad, podemos calcular el incremento del beneficio, si ***dispusiéramos*** de esos **300 minutos extra** de trabajo:

$$\Delta z^* = \text{C.Op.([Tiempo])} \cdot \Delta b_2 = 6{,}667 \cdot 300 = 2000 \textbf{ euros.}$$

Como $\Delta z^* = 2.000 > 1.700$ $\Rightarrow$ La empresa debe aceptar la oferta (lo que es capaz de ganar de más con esa maquinaria adicional supera a lo que le cuesta alquilarla).

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

¿Y si la oferta fuese ampliar en 400 minutos, con un coste de 2.700 euros?

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
ENSAMBLADO	8100.000	900.0000	600.0000
ACABADO	4500.000	360.0000	1462.500
MADERA	9000.000	INFINITY	900.0000

- $\boldsymbol{\Delta b_2 = 400} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b_2'} = b_2 + \Delta b_2 = \mathbf{4.900\ minutos}$.
- **Coste de oportunidad** (Precio Sombra) de la restricción:

  C.Op.([Tiempo]) = **6,6667 euros/minuto**.

- Al tratarse de una restricción con coste de oportunidad distinto de cero, podemos afirmar que **la solución óptima cambiará**.

- Además, por tratarse de un **coste de oportunidad positivo** y plantearse un incremento del lado derecho, la nueva solución óptima presentará un **beneficio mayor que el original**.

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

- Como Δb_2 **= 400 > 360** $\Rightarrow$ estamos «**fuera de rangos**» $\Rightarrow$ **La solución óptima cambia**, y **también cambian la base y el coste de oportunidad de la restricción**.

- Como ya **NO es válido el coste de oportunidad**, **NO podemos calcular el incremento exacto del beneficio**, dispusiéramos de 400 minutos extra de trabajo al mes.

- Pero sí podemos calcular la mejora correspondiente al aumento «dentro de rangos», y esto nos proporciona una **COTA INFERIOR** de la mejora total.

  Variación de Z* >= 360·6,67 = 2.401,2

pero TAMBIÉN se puede asegurar una **COTA SUPERIOR** para la variación del valor óptimo de la función objetivo:

Variación de Z* <= 400·6,67 = 2.668

porque los 40 minutos que están fuera de rangos aportarán MENOS de 6,67 euros cada uno (*rendimientos marginales decrecientes*)

- Y con ello, en ese apartado sí que sería posible afirmar que la oferta **NO es rentable, ya que 2.668 < 2.700.**

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

d) Un trabajador del departamento de ensamblado está enfermo por lo que se dispone de 8 horas menos en dicho departamento. ¿Cuánto afectará esto al beneficio total? ¿Cambiarán las cantidades óptimas producidas?

El decremento de 8 horas = 480 minutos está dentro de rangos puesto que es inferior al decremento permitido (600 minutos) para la restricción del departamento de ensamblado.

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
ENSAMBLADO	8100.000	900.0000	600.0000

Por tanto, el coste de oportunidad de esta restricción se mantiene constante e igual a 2€. El cambio en el beneficio total es: 2€*(-480minutos)=-960€ de modo que el beneficio total disminuye en 960€ por lo que pasa a ser:

Beneficio Total = 46200 – 960 = 45.240€

Puesto que la modificación está dentro de rangos, NO hay cambio de base y por tanto se seguirán fabricando los mismos tipos de productos (mesas y libreros) **PERO en cantidades distintas** ya que la solución óptima actual usaba toda la capacidad de ensamblado, las cantidades producidas deben cambiar con la disminución del tiempo de ensamblado.

4.5 Análisis de sensibilidad (CASO 1)

e) Explicar porqué el coste de oportunidad de la restricción de Madera es cero

La solución óptima actual utiliza sólo 8.100 de las 9.000 libras de madera. Por tanto quedan 900 libras de madera sin utilizar (tal como indica la holgura de la restricción de Madera). Disponer de madera adicional o prescindir de una pequeña cantidad no cambiará la solución óptima ni tampoco el valor del beneficio total puesto que la solución óptima no está utilizando toda la madera.

4.6 Análisis de sensibilidad con Simplex

- El objetivo de esta sección es el **cálculo de los intervalos** en los que pueden cambiar el vector de costes/recursos y mantenerse la optimalidad/factibilidad
- También es posible estudiar el efecto de modificaciones discretas de los parámetros del problema, cambio de un vector de costes/recursos por otro vector de costes/recursos
- Formalmente, tendremos un problema de optimización inicial:

Optimizar $Z = c^t x$

s.a: $Ax = b$

$x \geq 0$

... con una solución óptima x^* obtenida previamente

4.6 Análisis de sensibilidad con Simplex

- **Nos fijaremos en la expresiones del simplex revisado:**

  - El valor de las variables básicas (FACTIBILIDAD):

$$X_B = B^{-1}\,b$$

  - Prueba de **optimalidad** (c_j-z_j): (OPTIMALIDAD)

$$z_j = c^t_B\,y_j = (c^t_B\,B^{-1})\,a_j$$

  - El vector y_{JE} asociado a la variable que entra en la base:

$$Y_{JE} = B^{-1}\,a_j$$

  - Valor de la Función Objetivo:

$$Z = c^t_B\,x_B$$

4.6 Análisis de sensibilidad con Simplex

- El cálculo del análisis de sensibilidad **parte siempre de la solución óptima del problema original**.
- En general, **una modificación de los parámetros del modelo** provocará que al considerar como **solución inicial** la **base óptima del problema original**, ésta **deje de ser óptima** o **factible**:

A. La modificación **c'** del vector de costes original **c** únicamente supone una modificación en $c' - c'^{t}_{B} B^{-1} a$. Por tanto, la solución inicial del problema modificado, la construida con **la base óptima** del problema original, **mantiene la factibilidad** PERO **puede perder la optimalidad**.

El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad implica determinar el intervalo de variación del coeficiente en cuestión de modo que se mantienen las ***condiciones de optimalidad***

4.6.2 Análisis de sensibilidad con Simplex

B. La modificación **b'** del vector de recursos **b** únicamente supone una modificación en $\mathbf{x_B = B^{-1}b'}$. Por tanto, **la solución inicial** del problema modificado, la construida con la base óptima del problema original, **mantiene la optimalidad** PERO **puede perder la factibilidad**.

*El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad implica determinar el intervalo de variación del segundo miembro en cuestión de modo que se mantienen las **condiciones de factibilidad***

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

- Para ilustrar el cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad de los parámetros de un modelo de programación lineal utilizaremos el problema de *producción de componentes informáticos*:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Max } 3x1 + 5x2 & & & & & & \\
\text{s.a:} & & & & & & \\
x1 & & + x3 & & & = & 4 \\
 & 2\,x2 & & + x4 & & = & 12 \\
3\,x1 & + 2\,x2 & & & + x5 & = & 18 \\
\end{array}
$$

$x1, x2, x3, x4, x5 \geq 0$

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

- Cuya solución óptima es la que se muestra en la siguiente tabla:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\, B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

VNB = X4, X5

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

- La modificación de un coeficiente en la función objetivo:
  - **No afecta** a la región factible
  - **No afecta** a la factibilidad de la solución actual
  - **Puede afectar** a la optimalidad de la solución
  - **Puede afectar** al valor de la función objetivo

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

OBJETIVO del análisis de sensibilidad de los coeficientes en la función objetivo: determinar el intervalo de variación de dichos coeficientes en el que no hay cambio de solución óptima.

Vamos a considerar dos situaciones:

1. Solo se modifican coeficientes en la función objetivo de **variables no básicas** en la solución óptima
2. Solo se modifican coeficientes en la función objetivo de **variables básicas** en la solución óptima

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

1. Análisis de sensibilidad de un coeficiente de la función objetivo asociado a una **variable no básica**:

- La modificación del $\mathbf{c_j}$ de una variable no básica que pasa a ser $\mathbf{c'_j = c_j + \Delta c_j}$ implica que al recalcular los $c_j - z_j = c_j - (c_B^t B^{-1} a_j)$ de las **VNB**, la parte $\mathbf{c_B^t B^{-1} a_j}$ **NO cambia** ya que xj es variable no básica y por tanto no aparece en c_B

- **La modificación del c_j de una Variable No Básica sólo afecta al cálculo de su propio $c_j - z_j$**

En la solución óptima de nuestro problema ejemplo, las VNB son x4 y x5

Intervalo de Análisis de sensibilidad de c_{x4}:

La solución óptima actual seguirá siendo la misma ante cambios en c_{x4} mientras: $c_{x4}-z_{x4}= c_{x4}- (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} \leq 0$ **(MAX)**

En la solución óptima, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, 3)\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 3/2, 1) \leftarrow \text{Cte.}$$

$$z_{x4} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = (0, 3/2, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

$$c_{x4}-z_{x4} \leq 0 \rightarrow c_{x4}-3/2 \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x4} \leq 3/2}$$

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

Mientras **$c_{x4} \leq 3/2$:**

1. La solución óptima **NO CAMBIA**
2. El valor de la función objetivo **NO CAMBIA** ya que x4 es no básica
3. En el límite, es decir cuando $c_{x4}=3/2$, hay **SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS** y por tanto infinitas soluciones

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

Ejercicio Propuesto:

- Calcular el intervalo de variación de c_{x5} en el que la solución óptima no cambia. ¿Cuál es el valor de la función objetivo mientras c_{x5} varía en ese intervalo?

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

2. Análisis de sensibilidad de un coeficiente de la función objetivo asociado a una **variable básica**:

- La modificación del $\mathbf{c_i}$ de una variable básica que pasa a ser $\mathbf{c'_i = c_i + \Delta c_i}$ implica que al recalcular los $c_j - z_j = c_j - (c_B^t B^{-1} a_j)$ de las **VNB**, la parte $\mathbf{c_B^t B^{-1} a_j}$ **CAMBIA** ya que xi es variable básica y aparece en c_B

- **La modificación del c_i de una variable básica afecta al cálculo de los $c_j - z_j$ de las variables no básicas**

En la solución óptima de nuestro problema ejemplo, las VNB son x4 y x5

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

Intervalo de Análisis de sensibilidad de c_{x1}:

La solución óptima actual seguirá siendo la misma ante cambios en c_{x1} mientras **$c_{x4}-z_{x4} \leq 0$ y $c_{x5}-z_{x5} \leq 0$ (porque Max)**

En la solución óptima, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, c_{x1}) \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0,\ 5/2-1/3\, c_{x1},\ 1/3\, c_{x1})$$

$$z_{x4} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = (0,\ 5/2-1/3\, c_{x1},\ 1/3\, c_{x1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5/2 - 1/3\, c_{x1}$$

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

$$z_{x5} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x5} = (0,\ 5/2-1/3\ c_{x1},\ 1/3\ c_{x1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/3\ c_{x1}$$

$$c_{x4}-z_{x4} \leq 0 \rightarrow 0-5/2+1/3\ c_{x1} \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x1} \leq 15/2=7.5}$$

$$c_{x5}-z_{x5} \leq 0 \rightarrow 0-1/3\ c_{x1} \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x1} \geq 0}$$

Mientras **$0 \leq c_{x1} \leq 7.5$:**

1. La solución óptima **NO CAMBIA**
2. El valor de la función objetivo **CAMBIA: $Z=30+2c_{x1}$**
3. En los límites, es decir cuando $c_{x1}=0$ o $c_{x1}=7.5$, hay **SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS** y por tanto infinitas soluciones

4.6.1 A.S. Coeficientes de la función objetivo (Ci)

Ejercicio Propuesto:

- Calcular el intervalo de variación de c_{x2} en el que no cambia la solución óptima

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

- **Nos fijaremos en la expresiones del simplex revisado:**

  - El valor de las variables básicas (FACTIBILIDAD):

$$X_B = B^{-1} b$$

  - Prueba de **optimalidad** (c_j-z_j): (OPTIMALIDAD)

$$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$$

  - El vector y_{JE} asociado a la variable que entra en la base:

$$Y_{JE} = B^{-1} a_j$$

  - Valor de la Función Objetivo:

$$Z = c^t_B\, x_B$$

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

- En general, **una modificación de los parámetros del modelo** provocará que al considerar como **solución inicial** la **base óptima del problema original**, ésta **deje de ser óptima** o **factible**:

B. La modificación **b'** del vector de recursos **b** únicamente supone una modificación en $\mathbf{x_B = B^{-1}b'}$. Por tanto, **la solución inicial** del problema modificado, la construida con la base óptima del problema original, **mantiene la optimalidad** PERO **puede perder la factibilidad**.

El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad implica determinar el intervalo de variación del segundo miembro en cuestión de modo que se mantienen las ***condiciones de factibilidad***

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

- Para ilustrar el cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad de los parámetros de un modelo de programación lineal utilizaremos el problema de *producción de componentes informáticos*:

$$\text{Max } 3x1 + 5x2$$

s.a:

$$\begin{array}{llllll} x1 & & + x3 & & & = 4 \\ & 2\,x2 & & + x4 & & = 12 \\ 3\,x1 & + 2\,x2 & & & + x5 & = 18 \end{array}$$

$$x1, x2, x3, x4, x5 \geq 0$$

- Cuya solución óptima es la que se muestra en la siguiente tabla:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

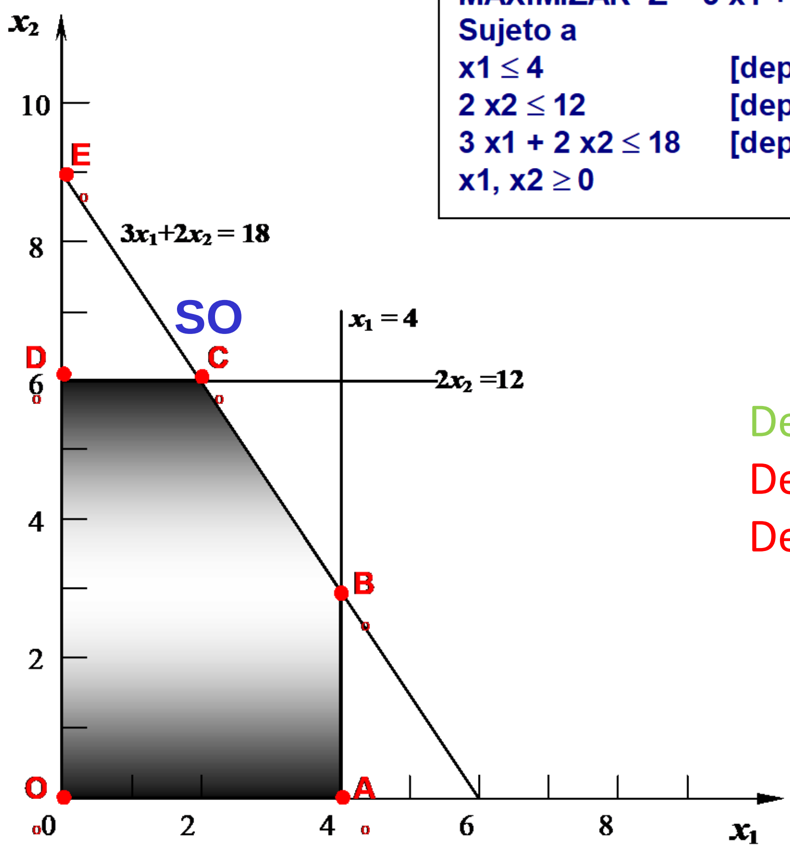
$\boxed{\textbf{VNB = X4, X5}}$

✍

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

MAXIMIZAR $Z = 3x1 + 5x2$
Sujeto a

$x1 \leq 4$	[depto. 1]
$2x2 \leq 12$	[depto. 2]
$3x1 + 2x2 \leq 18$	[depto. 3]
$x1, x2 \geq 0$	



Depto 1: Restricción de Holgura
Depto2: Restricción Limitativa
Depto 3: Restricción Limitativa

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

- La modificación del segundo miembro de una restricción (vector recursos):
  - **Afecta** (en general) a la región factible
  - **Puede afectar** a la factibilidad de la solución actual
  - **No afecta** a la optimalidad de la solución
  - **Afecta** (en general) al valor de la función objetivo

OBJETIVO: calcular el intervalo en el que puede variar el segundo miembro de una restricción y **mantenerse constante el coste de oportunidad**

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

- Al modificar **b en b'** **se mantendrá el coste de oportunidad** y el **plan de producción** **mientras se mantenga la factibilidad de la solución ($x_B \geq 0$)**

¡La condición de FACTIBILIDAD es independiente del criterio de la Función Objetivo!

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

1. Intervalo de Análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción del departamento 2, b2:

[depto.2] 2 x2 + x4 = **12**

- La solución óptima del problema original es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\, B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

PASO 1: Calcular C.O.

- En esta solución, el coste de oportunidad de la restricción 2 es:

$c_{x4}-z_{x4} = c_{x4} - (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4}$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, 3)\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 3/2, 1)$$

$$z_{x4} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = (0, 3/2, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

$c_{x4}-z_{x4} = c_{x4} - (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = 0 - 3/2 = - 3/2$

- Como la restricción es de tipo '$\leq$' el coste de oportunidad es

$\boxed{+ 3/2}$

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

PASO 2: Calcular Intervalo

- Al modificar el segundo miembro de la restricción 2 el coste de oportunidad se mantendrá constante mientras se mantenga la factibilidad, es decir:

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ \boxed{b2'} \\ 18 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ b2' \\ 18 \end{pmatrix} \geq 0$$

$x3'^* = 4 + 1/3\ b2' - 6 \geq 0 \rightarrow -2 + 1/3\ b_2' \geq 0 \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{b_2' \geq 6}}$

$x2'^* = 1/2\ b_2' \geq 0 \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{b_2' \geq 0}}$

$x1'^* = -1/3\ b_2' + 6 \geq 0 \rightarrow$ $\mathbf{b_2' \leq 18}$

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

- La **solución** sigue siendo **factible** siempre que las tres **variables básicas** sigan siendo **no negativas**, por tanto la solución sigue siendo factible mientras: $\boxed{6 \leq b'_2 \leq 18}$

1. El coste de oportunidad es constante e igual a **+3/2**
2. La solución óptima cambia (ya que restricción Limitativa)

   El valor de la función objetivo cambia (se puede recalcular con el coste de oportunidad)
3. La base óptima es constante

2. Intervalo de Análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción del departamento 1, b1:

[depto.1] x1 + x3 = **4**

- La solución óptima del problema original es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

PASO 1: Calcular C.O.

- En esta solución, el coste de oportunidad de la **restricción 1** es:

$$c_{x3}-z_{x3} = c_{x3} - (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x3} = 0 - (0, 3/2, 1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

- Como se trata de una **restricción no limitativa en la solución óptima** $\rightarrow$

$\boxed{\textbf{C.O. = 0}}$

PASO 2: Calcular Intervalo

- Al modificar el segundo miembro de la restricción 1 el coste de oportunidad se mantendrá constante mientras se mantenga la factibilidad, es decir:

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{b1'} \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \geq 0$$

$x3'^* = b1' + 4 - 6 \geq 0 \rightarrow b_1' - 2 \geq 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{b_1' \geq 2}}$

$x2'^* = 6 \geq 0$

$x1'^* = -4 + 6 \geq 0$

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

- Mientras $\boxed{2 \leq b'_1 < +\propto}$:

1. El coste de oportunidad es constante e igual a **0**
2. La solución óptima NO cambia (ya que es restricción de Holgura)

   El valor de la función objetivo NO cambia (ya que restricción de Holgura)
3. El base óptima es constante

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

En síntesis:

- Para cualquier $\mathbf{b_i}$, su intervalo de análisis de sensibilidad es el intervalo de valores en el que la solución óptima se mantiene factible. Así, el coste de oportunidad de b_i sigue siendo válido para evaluar el efecto del cambio en b_i sobre Z sólo si b_i sigue dentro de este intervalo permisible. Los valores óptimos de las variables básicas se obtienen a partir de la fórmula:

$$\mathbf{x'^*_B = B^{-1}b'}$$

- El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad está basado en el hecho de encontrar el intervalo de valores de b_i tales que $\mathbf{x'^*_B \geq 0}$

4.6.2 A.S. Segundo miembro restricciones (bi)

Ejercicio Propuesto:

- Calcular el intervalo de variación de b_3 en el que el coste de oportunidad es constante