# Tema 6

## Grafos y Estructuras de Partición

# Objetivos

- Estudio de la representación de una relación binaria entre los datos de una colección mediante la estructura ***Grafo*** y algunas de sus aplicaciones más significativas
- Reutilización de modelos ya estudiados para representar grafos y para explorarlos
- Desarrollo de estructuras de datos eficientes para agrupar n elementos distintos en una colección de k conjuntos disjuntos $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ con dos tipos de operaciones:
  - Unión de dos conjuntos disjuntos
  - Búsqueda para saber a qué conjunto pertenece un elemento

# Bibliografía

Michael T. Goodrich and Roberto Tamassia. "*Data Structures & Algorithms in Java*" (4th edition), John Wiley & Sons, 2005

(capítulo 13 y apartado 6 del capítulo 11)

# Contenidos

# 1. Introducción

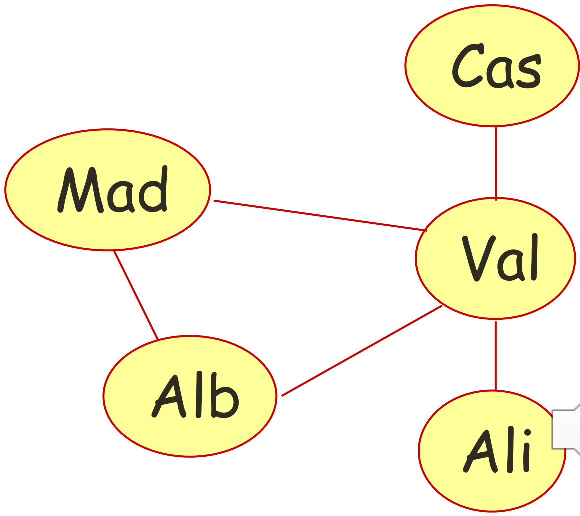
## *Relaciones entre los datos de la colección*

- Relación binaria entre los datos de la colección:
  - Una relación $R$ sobre un conjunto $V$ se define como un conjunto de pares $(a, b)$ / $a, b \in V$
  - Si $(a, b) \in R$, se escribe "$a\ R\ b$" y denota que $a$ está relacionado con $b$

**Ejemplo:** grafo cuyos ***vértices*** ($V$) se relacionan vía ***aristas*** ($A$)

$V$ = {Cas, Val, Ali, Mad, Alb}

$R$ = {(Cas,Val), (Val,Ali), (Val,Alb), (Mad,Alb), (Mad,Val)}

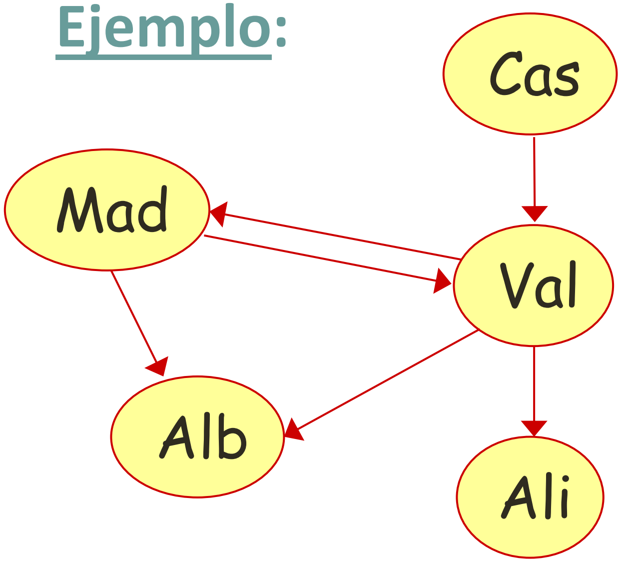


# 1. Introducción

## *Grafos dirigidos (Digrafos)*

- Un **grafo dirigido** (*gd*) es un par $G = (V, A)$
  - $V$ es un conjunto finito de ***vértices*** (o nodos o puntos)
  - $A$ es un conjunto de ***aristas*** (o arcos) dirigidas, donde una ar*ista* es un par ordenado de vértices $(u, v)$: $u \rightarrow v$

**Ejemplo:**



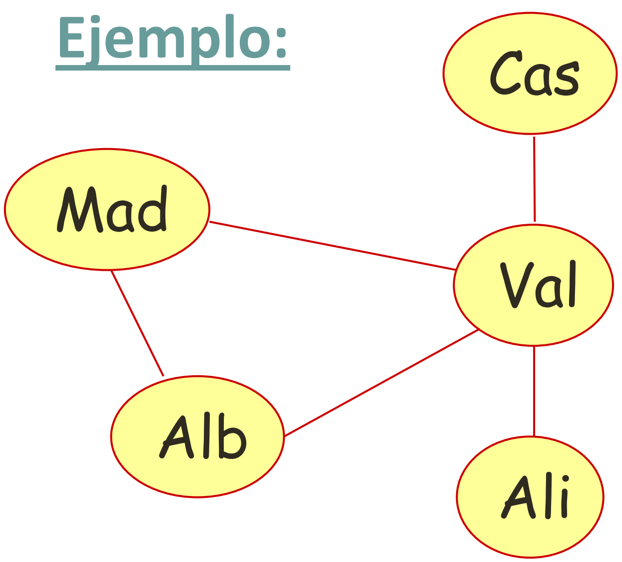

$$V = \{\text{Cas, Val, Ali, Alb, Mad}\}$$
$$|V| = 5$$
$$A = \{(\text{Cas,Val}), (\text{Val,Mad}), (\text{Val,Alb}), (\text{Val,Ali}), (\text{Mad,Val}), (\text{Mad,Alb})\}$$
$$|A| = 6$$

# 1. Introducción

## *Grafos no dirigidos (Grafos)*

- Un **grafo no dirigido** (*gnd*) es un par $G = (V, A)$
  - $V$ es un conjunto finito de ***vértices***
  - $A$ es un conjunto de ***aristas*** (o arcos) no dirigidas, donde una *arista* es un par no ordenado de vértices $(u,v) = (v,u)$, $u \neq v$: $u$ —— $v$

**Ejemplo:**




$V = \{\text{Cas, Val, Ali, Alb, Mad}\}$

$|V| = 5$

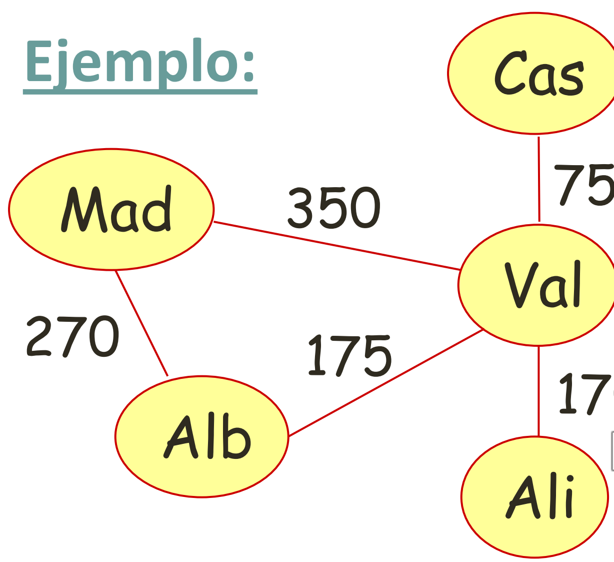
$A = \{(\text{Cas,Val}), (\text{Val,Ali}), (\text{Val,Mad}), (\text{Val,Alb}), (\text{Mad,Alb})\}$

$|A| = 5$

# 1. Introducción
## *Grafos etiquetados*

- Un **grafo *etiquetado*** es un grafo $G = (V, A)$ sobre el que se define una función $f: A \rightarrow E$, donde $E$ es un conjunto cuyas componentes se llaman ***etiquetas***
  - *Nota*: la función de etiquetado se puede definir también sobre $V$, el conjunto de vértices
- Un **grafo *ponderado*** es un grafo etiquetado con números reales ($A \equiv \Re$)

**Ejemplo:**



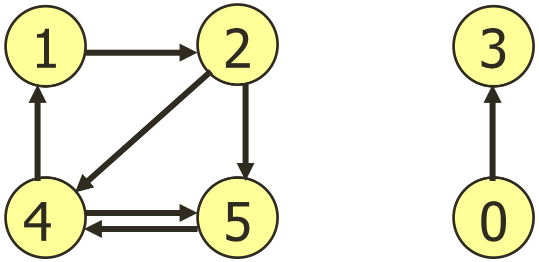
# 1. Introducción

## *Relaciones de adyacencia*

- Sea $G = (V, A)$ un grafo. Si $(u, v) \in A$, decimos que el vértice $v$ es adyacente al vértice $u$

**Ejemplo:**

el vértice 2 es adyacente al 1



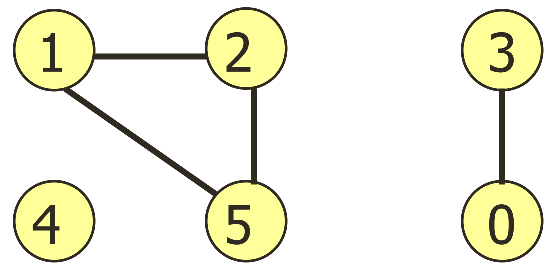

- En un grafo no dirigido la relación es simétrica

# 1. Introducción

## *Grado de un vértice*

- El ***grado de un vértice*** en un grafo no dirigido es el número de aristas que inciden sobre él (o de vértices adyacentes)

**Ejemplo:** el grado del vértice 2 es 2



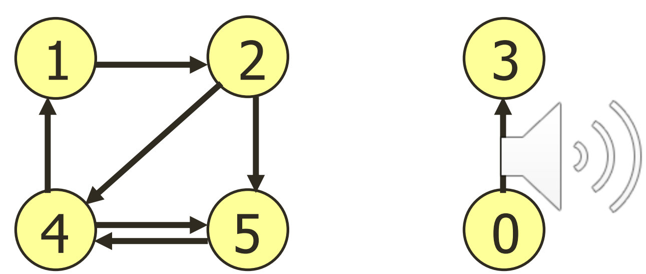

- El grado de un vértice en un grafo dirigido es la suma de:
  - El número de aristas que salen de él (*grado de salida*)
  - El número de aristas que entran en él (*grado de entrada*)

**Ejemplo:** el grado de entrada de 2 es 1

+ el grado de salida de 2 es 2

---

el grado del vértice 2 es 3

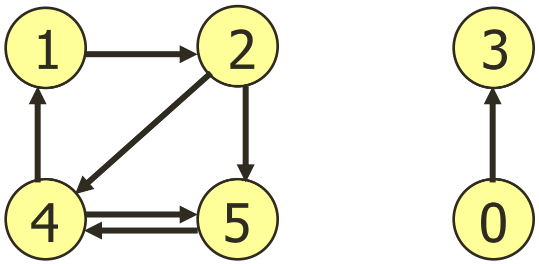


# 1. Introducción

## *Grado de un grafo*

- El ***grado de un grafo*** es el de su vértice de grado máximo

**Ejemplo:**




El grado de este grafo es 4 (el grado del vértice 4)

# 1. Introducción

## *Caminos*

- Un ***camino*** de longitud $k$ desde $u$ a $u'$ en un grafo $G = (V, A)$ es una secuencia de vértices $\langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ tal que:
  - $v_0 = u$ y $v_k = u'$
  - $\forall\ i : 1...k : (v_{i-1}, v_i) \in A$
  - La longitud $k$ del camino es el número de aristas
  - La longitud del camino con pesos es la suma de los pesos de las aristas que forman el camino
- Si hay un camino $P$ desde $u$ hasta $u'$, decimos que $u'$ es ***alcanzable*** desde $u$ vía $P$

# 1. Introducción

## *Caminos simples y ciclos*

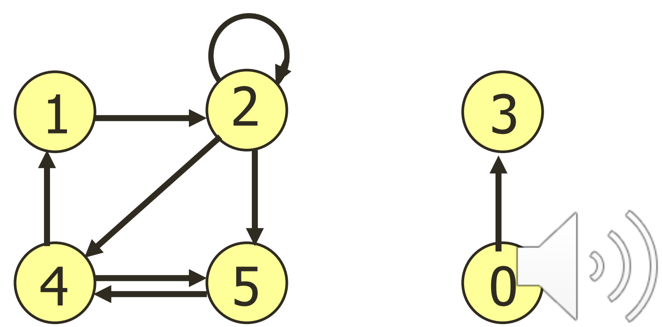
- Un ***ciclo*** es un camino $\langle v_0, v_1, ..., v_k\rangle$ que:
  - Empieza y acaba en el mismo vértice ($v_0 = v_k$)
  - Contiene al menos una arista
- Un camino es ***simple*** si todos sus vértices son distintos
- Un ***bucle*** es un ciclo de longitud 1
- Un grafo es ***acíclico*** si no contiene ciclos

**Ejemplo:**

$\langle 1, 2, 5, 4\rangle$ es un camino simple (longitud 3)

$\langle 1, 2, 5, 4, 1\rangle$ es un ciclo de longitud 4

$\langle 2, 2\rangle$ es un ciclo de longitud 1, un bucle



# 1. Introducción

## *Ejercicios*

**Ejercicio.** Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido con pesos:

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{((0,1), 2), ((0,3), 1), ((1,3), 3), ((1,4), 10), ((2,0), 4),$
$((2,5), 5), ((3,2), 2), ((3,4), 2), ((3,5), 8), ((3,6), 4),$
$((4,6), 6), ((6,5), 1) \}$

**Se pide:**

a) $|V|$ y $|A|$

b) Vértices adyacentes a cada uno de los vértices

c) Grado de cada vértice y del grafo

d) Caminos simples desde 0 a 6, y su longitud con y sin pesos

e) Vértices alcanzables desde 0

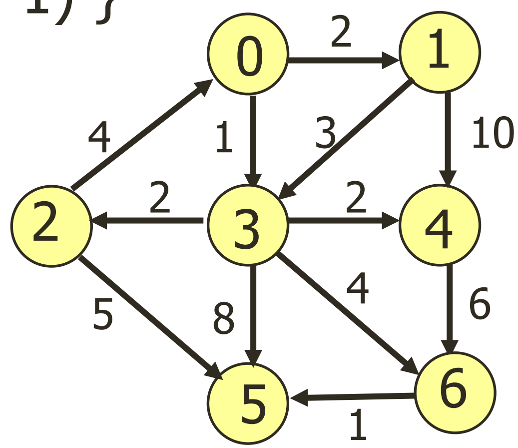
f) Caminos mínimos desde 0 al resto de vértices

g) ¿Tiene ciclos?

**Ejercicio.** Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido con pesos:

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{((0,1), 2), ((0,3), 1), ((1,3), 3), ((1,4), 10), ((2,0), 4),$
$((2,5), 5), ((3,2), 2), ((3,4), 2), ((3,5), 8), ((3,6), 4),$
$((4,6), 6), ((6,5), 1)\ \}$




**Se pide:**

a) $|V|$ y $|A|$

b) Vértices adyacentes a cada uno de los vértices

c) Grado de cada vértice y del grafo

d) Caminos simples desde 0 a 6, y su longitud con y sin pesos

e) Vértices alcanzables desde 0

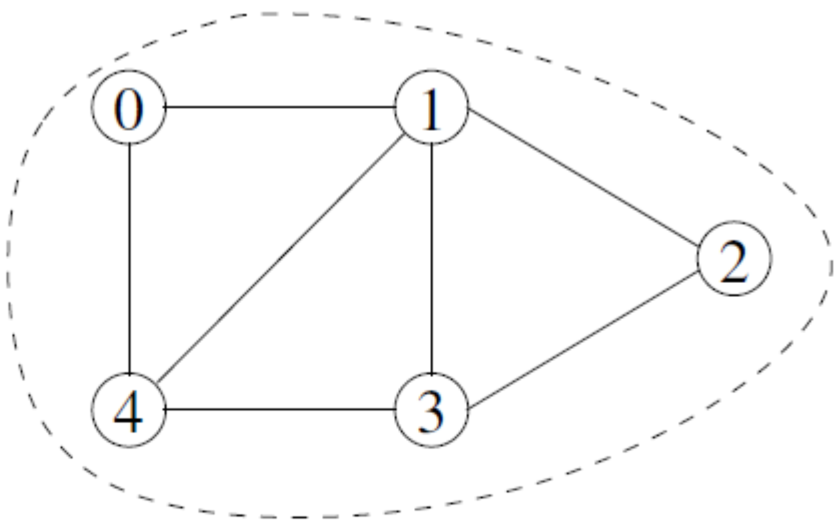
f) Caminos mínimos desde 0 al resto de vértices

g) ¿Tiene ciclos?

# 1. Introducción

## *Componentes conexas*

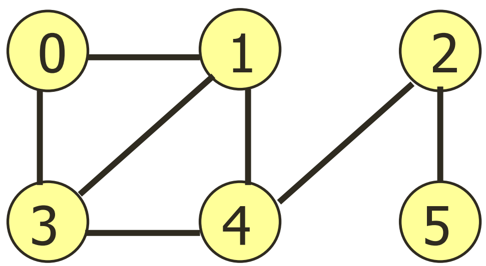
- Las ***componentes conexas*** en un grafo no dirigido son las clases de equivalencia de vértices según la relación "*ser alcanzable*"
  - Un grafo no dirigido es conexo si $\forall u, v \in V$, $v$ es alcanzable desde $u$. Es decir, si tiene una única componente conexa



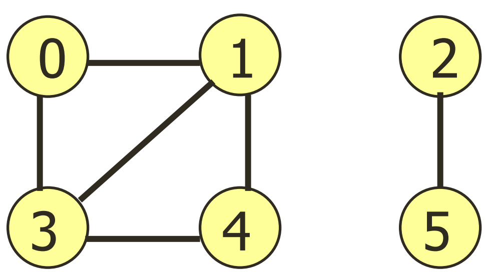

**Ejemplo:** grafo no dirigido conexo

# 1. Introducción

## *Componentes conexas*




**Ejemplo:** grafo no dirigido conexo

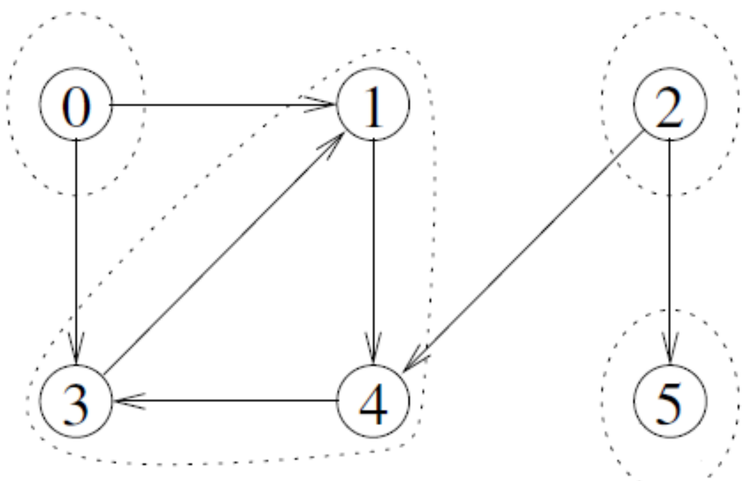



**Ejemplo:** grafo no dirigido NO conexo (2 componentes conexas)

# 1. Introducción

## *Componentes conexas*

- Las ***componentes fuertemente conexas*** en un grafo dirigido son las clases de equivalencia de vértices según la relación "*ser mutuamente alcanzable*"
  - Un grafo dirigido es fuertemente conexo si $\forall u, v \in V$, $v$ es alcanzable desde $u$




Ejemplo: grafo dirigido con 4 componentes fuertemente conexas