Combinatoria

Cristina Jordán Lluch
Instituto de Matemáticas Multidisciplinar
Grupo de Modelización Físico-Matemática

Índice

Contenido

Principios básicos

Regla de la suma

Si para realizar una tarea podemos optar por dos vías distintas A y B

- La forma A puede realizarse de m formas distintas
- La forma B puede realizarse de m formas distintas

entonces

La tarea propuesta se puede llevar a cabo de $m+n$ formas distintas.

Regla del producto

Si

- C es un suceso que se puede descomponer en dos etapas, A y B
- A y B son independientes entre sí
- A se puede realizar de m formas distintas
- B se puede realizar de n formas, independientemente del resultado de A,

entonces,

la tarea C se podrá realizar de $m \cdot n$ formas distintas

Principios básicos

Ejemplos

1.- De entre tres obras de Cervantes y dos de Lope de Vega debemos escoger uno para hacer un trabajo en clase de Literatura. ¿Entre cuántos trabajos puedo elegir?

2.- Una caja contiene 5 cartas distintas de una baraja española. Se extraen dos cartas al azar. Si se realiza la extracción con reposición, ¿de cuántas maneras distintas es posible realizarlo?

3.- En una tienda de ropa hay camisas de hombre en 4 tallas diferentes y en tres colores distintos cada talla. ¿Cuántos tipos diferentes de camisas hay en la tienda?

4.- Para viajar de Buenos Aires a San Pablo se puede optar por tres compañías aéreas o por cinco empresas de autobús. ¿De cuántas maneras diferentes se puede contratar el viaje?

Variaciones, combinaciones

Clasificación

Factores a tener en cuenta a la hora de contar el número de elementos de un conjunto generado a partir de un conjunto *C* son:

- Si importa (variaciones) o no (combinaciones) el orden para que dos agrupaciones de elementos del conjunto *C* se consideren distintas
  En caso de que importe, hay que distinguir entre si se consideran
  - todos los elementos (permutaciones) o
  - parte de ellos
- Si los elementos del conjunto se pueden repetir o no.

En función de ello consideraremos:

- Variaciones, variaciones con repetición. Permutaciones
- Combinaciones, combinaciones con repetición

Variaciones

Variaciones

- Se llama **variación de m elementos tomados de n en n (o variación de orden n)** de un conjunto formado por m elementos distintos, a todo grupo ordenado formado por n elementos de los m dados.
- Dos variaciones de orden m se consideran distintas si difieren en
  a) Alguno de sus elementos o
  b) El orden de sus elementos

Notación El **número** de variaciones de m elementos tomados de n en n se denota $V_{m,n}$

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

Ejemplo

A={1,2,3}
La variaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2 son:

{1, 2}, {1, 3}, {2, 1}, {2, 3}, {3, 1}, {3, 2}

El número de variaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2 es $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$

Variaciones

Variaciones con repetición

- Se llama **variación con repetición** de m elementos tomados de n en n, a cualquier conjunto ordenado de n elementos tomados de entre los del conjunto original. Los elementos pueden aparecer repetidos.
- Dos variaciones con repetición de orden m se consideran distintas si difieren en
  a) Alguno de sus elementos
  b) El número de repeticiones de cada uno de sus elementos o
  c) El orden de sus elementos

Notación El **número** de variaciones de m elementos tomados de n en n se denota $VR_{m,n}$ o $V^R_{m,n}$

Ejemplo

$$\boxed{VR_{m,n} = m^n}$$

A={1,2,3}

La variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2 son:

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}

El número de variaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2 es $V_{3,2} = 3^2=9$

Variaciones

Permutaciones

- Se llama **permutación de orden m**, a una variación de m elementos tomados de m en m

Notación El **número** de permutaciones de m elementos se denota con P_m

$$\boxed{P_m = m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Ejemplo

A={1,2,3}
La permutaciones de 3 elementos son:

{1, 2, 3}, {1, 3, 2}, {2, 1, 3}, {2, 3, 1}, {3, 1, 2}, {3, 2, 1}

El número de variaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2 es $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Variaciones

Permutaciones con repetición

Se llama **permutación con repetición** de un conjunto de m elementos de los que α son iguales entre sí, β son iguales entre sí, …, δ son iguales entre sí, ($\alpha + \beta + \delta + \ldots = m$) a toda permutación que pueda formarse en dicho conjunto.

Notación El **número** de permutaciones **con repetición** de un conjunto de m elementos (con repeticiones respectivas $\alpha, \beta, \ldots, \delta$) se denota $P^{\alpha, \beta, \ldots, \delta}_{m}$

$$P^{\alpha, \beta, \ldots, \delta}_{m} = \frac{m!}{\alpha!\, \beta! \cdot \ldots \cdot \delta!}$$

Ejemplo

¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar con las letras de la palabra MATEMATICA?

Tantas como permutaciones de 10 elementos, de los cuales dos aparecen dos veces (la M y la T), otro 3 (la A) y el resto una vez (la E, I y C), por tanto

$$P^{2,2,3,1,1,1}_{10} = \frac{10!}{2!\ 2!\ 3!\ 1!\ 1!\ 1!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

Combinaciones

Combinaciones

- Se llama **combinación de m elementos tomados de n en n (o combinación de orden n)** de un conjunto formado por m elementos distintos, a todo grupo formado por n elementos de los m dados.
- Dos combinaciones de orden n se consideran distintas si difieren en alguno de sus elementos (no importa el orden)

Notación El **número** de combinaciones de m elementos tomados de n en n se denota con $C_{m,n}$

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

Ejemplo

A={1,2,3}

La combinaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2 son:

{1, 2}, {1, 3}, {2, 3},

El número de combinaciones de 3 elementos tomados de 2 en 2 es $C_{3,2}$ =3!/2!

Combinaciones

Combinaciones con repetición

- Se llama **combinación con repetición de m elementos tomados de n en n** de un conjunto formado por m elementos distintos, a todo grupo formado por n elementos, iguales o distintos de los m dados.
- Dos combinaciones con repetición de orden n se consideran iguales si contienen los mismos elementos repetidos el mismo número de veces

Notación El **número** de combinaciones con repetición de orden n se denota con $CR_{m,n}$ o $C^R_{m,n}$

$$C^R_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

Ejemplo

$A=\{1,2,3\}$

La combinaciones con repetición de orden 2 son :

$\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}$

El número de combinaciones con repetición de orden 2 es $CR_{3,2} = \binom{3+2-1}{2}=6$

Principios básicos

Principio de Dirichlet (del palomar o de las casillas)

- Si
  m objetos se colocan en n cajas, $m > n$,
  entonces
  existe al menos una caja que contiene 2 o más objetos

- Si
  m objetos se colocan en n cajas, $m > n$,
  entonces
  existe al menos una caja que contiene el menor entero mayor de m/n (es decir, $\lceil m/n \rceil$) como mínimo

Aplicación de las biyecciones: Cardinales

Cardinal

Llamamos **cardinal** a un símbolo que se asocia a cada conjunto, de manera que dos conjuntos A y B tienen el mismo cardinal si entre ellos existe una biyección .

Notación card(A) o |A|

- Al conjunto {1, 2, 3, … , n } le asociamos el símbolo n, es decir,
  card({1, 2, 3, … , n}) = n
- Si A es el vacío decimos que card(A) = 0
- Si existe un número natural n tal que el conjunto A tiene le mismo cardinal que {1, 2, 3, … , n }, decimos que A es **finito con cardinal n**.
  En vez de usar la expresión card(A)=n utilizamos a menudo
  "número de elementos de A es n"
- En caso contrario, decimos que A es infinito.
  Hay diferentes cardinales infinitos.
  Destacan card($\mathbb{N}$)=$\aleph_0$ y card($\mathbb{R}$)= $\aleph_1$

Aplicación de las biyecciones: Cardinales

Suma de cardinales

- Sean a, b dos números cardinales tal que card(A) = a y card(B) = b siendo $A \cap B = \emptyset$
  Se define la **suma** de a y b como el cardinal a+b asociado al conjunto A U B, es decir, a + b = card(A U B)

Ejemplo

Sean A = {a, b, c}, B = {d, e}.
Son conjuntos disjuntos tales que card(A) = 3, card(B) = 2.
Aplicando la definición anterior

$$2+3 = \mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(\{a, b, c, d, e\})$$

Como según dijimos el cardinal de un conjunto finito coincide con su número de elementos, y AU B tiene 5 elementos, card(A U B)=5

Por tanto, tenemos que el cardinal 2+3 coincide con el 5

En consecuencia la definición dada de la suma de cardinales coincide, en el caso de conjuntos finitos, con la suma de números naturales

Cardinales

Suma de cardinales

Ejemplo

¿Cuál será el cardinal de la unión de los conjuntos $A = \{a,b,c\}$ y $B=\{c,d\}$?
Sabemos que card(A) = 3 = a, card(B) = 2= b , pero A y B no son disjuntos,
Por tanto, la definición anterior no se puede aplicar, es decir,
No podemos afirmar que card(A U B) coincida con a+b

Teorema Inclusión-Exclusión

Sea E el conjunto universal.

a) Si $A, B \subset E$ entonces

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

b) Si $A, B, C \subset E$ entonces

$$card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C).$$