Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática etsinf

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y COMPUTACIÓN

Computabilidad y Complejidad

Tema 5: Incomputabilidad. Problemas decidibles e indecidibles.

Índice:

Bibliografía Básica Recomendada

- Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación (Hopcroft, John E., Ullman, Jeffrey D.,Motwani, Rajeev)
- Elements of the theory of computation (Lewis, Harry R., Papadimitriou, Christos H.)
- Teoría de la computación (Brookshear, J. Glenn)

Generalidades

En este tema consideraremos las clases de los lenguajes recursivos, recursivamente enumerables, y no recursivamente enumerables desde el punto de vista de lo qué es o no computable.

Este desarrollo puede trasladarse directamente al estudio de qué problemas de decisión o cuestiones binarias (esto es, del tipo de respuesta: `SÍ` o `NO`) son o no algorítmicamente decidibles. En este contexto, las cuestiones a las que nos referimos son aquellas relativas a objetos de un determinado dominio (grafos, gramáticas, autómatas, expresiones, etc.) susceptibles de ser codificados como palabras en un alfabeto dado. Con esta representación a la cuestión puede asociársele el lenguaje de los códigos de los objetos para los que la respuesta es `SÍ`, y, en consecuencia, cuando la cuestión se aplica a un objeto para obtener la respuesta basta ver si la palabra codificación del objeto pertenece o no al lenguaje asociado a la misma.

Así se tendrá que el lenguaje asociado es:

- recursivo si y sólo si la cuestión es **decidible**, -> es decir, si para siempre

- recursivamente enumerable pero no recursivo si y sólo si la cuestión es **semidecidible**, -> es decir, si es aceptado, sin asegurar que pare.

- no recursivamente enumerable si y sólo si la cuestión es **indecidible**.

Introducción

En esta sección nos ceñiremos exclusivamente a lenguajes definidos sobre el alfabeto $\{0,1\}$.

Proposición: Sea un lenguaje recursivamente enumerable sobre el alfabeto $\{0,1\}$, existe una máquina de Turing con alfabeto de cinta $\{0,1,B\}$ que lo acepta.

De este modo a partir de aquí podemos suponer, mientras no se diga lo contrario, que todas las máquinas de Turing consideradas son deterministas y tienen como alfabeto de cinta $\{0,1,B\}$.

Máquinas de Turing normalizadas

Una máquina de Turing con la cinta acotada por la izquierda o no (podemos adoptar para todas las máquinas consideradas una cualquiera de las dos opciones ya que los resultados son idénticos),

$$M = (\Sigma,\Gamma,Q,f,B,q_1,F)$$

diremos que está normalizada siempre que:

- $\Sigma = \{0,1\}$
- $\Gamma = \{0,1,B\}$
- $Q = \{q_1,...,q_{ñ}\}$
- $F = \{q_2\}$

En consecuencia, para definir una máquina de Turing normalizada sólo es necesario definir su función de transición, ya que a partir de la misma queda también definido su conjunto de estados.

Códigos de máquinas de Turing normalizadas

Sea

$$M = (\Sigma,\Gamma,Q,f,B,q_1,F)$$

una máquina de Turing normalizada.

Una transición

$$f(q_i,a_j) = (q_k,a_m,m_n)$$

puede también representarse como

$$q_i|a_j|q_k|a_m|m_n$$

Si se codifica:

- Cada estado q_i como 0^i, $i=1,...,\tilde{n}$.

- El símbolo
  - 0 como 0
  - 1 como 00
  - B como 000

- El desplazamiento
  - R como 0
  - L como 00

y | como 1 puede una transición representarse como

$$0^i10^j10^k10^m10^n$$

donde

- $j,\ m \in \{1,2,3\}$
- $n \in \{1,2\}$

El conjunto de transiciones t_s, $s = 1,...,r$, de una máquina de Turing normalizada M puede representarse mediante la palabra $x \in \{0,1\}^*$

$$x = t_1 11...11 t_r 111$$

A la palabra x se le denomina un código válido de la máquina M.

Observación: Si una máquina de Turing normalizada M tiene r transiciones, entonces tiene r! códigos válidos.

Observación: En una máquina de Turing normalizada consideraremos que cada estado aparece en al menos una de sus transiciones (con excepción del estado inicial).

Observación: En lo que sigue consideraremos cada x ∈ {0,1}* como un código de máquina de Turing normalizada bien válido bien inválido.

Sea COD el lenguaje de códigos válidos, esto es,

COD = {x ∈ {0,1}*/x es un código válido de alguna máquina de Turing normalizada}

Proposición: El lenguaje COD es un lenguaje recursivo.

En este contexto a cada palabra $x \in \{0,1\}^*$ se le puede asociar una máquina de Turing M_x y un lenguaje L_x sobre el alfabeto $\{0,1\}$ del modo que sigue:

M_x es:

- ⇨ M, si x es un código válido de la máquina de Turing normalizada M,
- ⇨ un máquina inválida, totalmente bloqueada, incapaz, por tanto, de realizar transiciones; y que, en consecuencia, reconoce el lenguaje vacío.

y

$L_x = L(M_x)$, esto es:

- ⇨ L(M), si x es un código válido de la máquina de Turing normalizada M,
- ⇨ $\varnothing$, en otro caso.

Un lenguaje no recursivamente enumerable: el lenguaje `Diagonal`

Definimos el lenguaje al que denominaremos `Diagonal` y que denotaremos por `DIA` como

$$\mathtt{DIA} = \{x \in \{0,1\}^* / \ x \notin L_x\}$$

Proposición: El lenguaje `DIA` no es recursivamente enumerable.

El lenguaje `Universal`. La máquina de Turing `Universal`

Una máquina de Turing universal, denotada por `MTU`, reconoce un lenguaje que seguidamente definiremos y que denominaremos lenguaje `Universal` y que denotaremos mediante `UNI`.

Como pasos necesarios para la definición de `UNI` realizaremos algunas definiciones previas.

Sean las aplicaciones

$$c: \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^* \qquad \text{código}$$

$$d: \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^* \qquad \text{dato}$$

de modo que para cada $x \in \{0,1\}^*$:

- $x = c(x)d(x)$
- $c(x) =$
  - u, si $u \in COD$ y $\exists z: x = uz$
  - x, en otro caso

Definimos ahora el lenguaje `Universal` como:

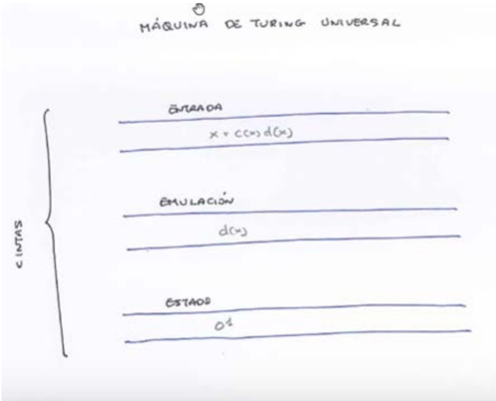
$$\mathtt{UNI} = \{x \in \{0,1\}^* / \ d(x) \in L_{C(x)}\}$$

Propiedad: Dada una máquina de Turing normalizada M y una palabra $x \in \{0,1\}^*$:

$x \in L(M) \Leftrightarrow c_M x \in \mathtt{UNI}$, donde c_M es cualquier código válido de M.

Proposición: El lenguaje `UNI` es recursivamente enumerable ya que $L(\mathtt{MTU}) = \mathtt{UNI}$.

Seguidamente pasamos a definir la `MTU`.



Inicialmente definiremos una máquina con tres cintas que denominaremos MTU′, y cuyo objetivo para una entrada x es, si $c(x) \in COD$, emular a la máquina codificada en $c(x)$ con la entrada $d(x)$. Las cintas de esta máquina reciben los nombres de: entrada, emulación y estado.

Esta máquina opera como sigue: En la cinta de entrada se escribe la palabra x que la máquina debe analizar. En primer lugar la máquina calcula $c(x)$; si $c(x) \notin COD$ termina deteniéndose y rechazando, en otro caso calcula $d(x)$, la copia en la cinta de emulación y coloca su cabezal al principio de la palabra copiada, y escribe 0 en la cinta de estado.

En la cinta de estado en cada momento aparece escrita una palabra de la forma 0^i que representa el estado q_i en el que la máquina codificada en $c(x)$ se encuentra en cada etapa de la emulación.

La emulación se realiza por pasos de la forma que sigue: a partir del símbolo leído por el cabezal de la cinta de emulación y del estado codificado en la cinta de estado busca la transición asociada en `c(x)` –sobre la cinta de entrada–; si no la encuentra termina rechazando, en otro caso la lleva a cabo: *1)* modificando el contenido de la cinta de emulación escribiendo el símbolo especificado y deplazando el cabezal, y *2)* actualizando el estado en la cinta de estado; seguidamente comprueba si este estado es final en cuyo caso termina aceptando, en otro caso repite este paso.

En consecuencia, en el caso en que $c(x) \in COD$ la MTU' emula la computación realizada por la máquina codificada en $c(x)$ con la entrada $d(x)$; así

$$L(MTU') = UNI.$$

Una MTU es la MTU' transformada en una máquina equivalente normalizada.

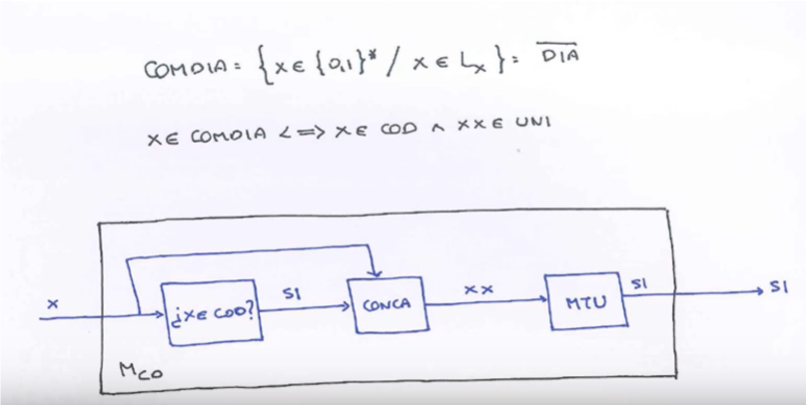
Observación: Nótese que, en consecuencia, una MTU también tendrá sus correspondientes códigos.

Sea COMDIA el lenguaje complementario de DIA, esto es,

$$\mathrm{COMDIA} = \{x \in \{0,1\}^*/\ x \in L_x\}$$

Proposición: El lenguaje COMDIA es recursivamente enumerable pero no es recursivo.

Proposición: El lenguaje UNI no es recursivo.



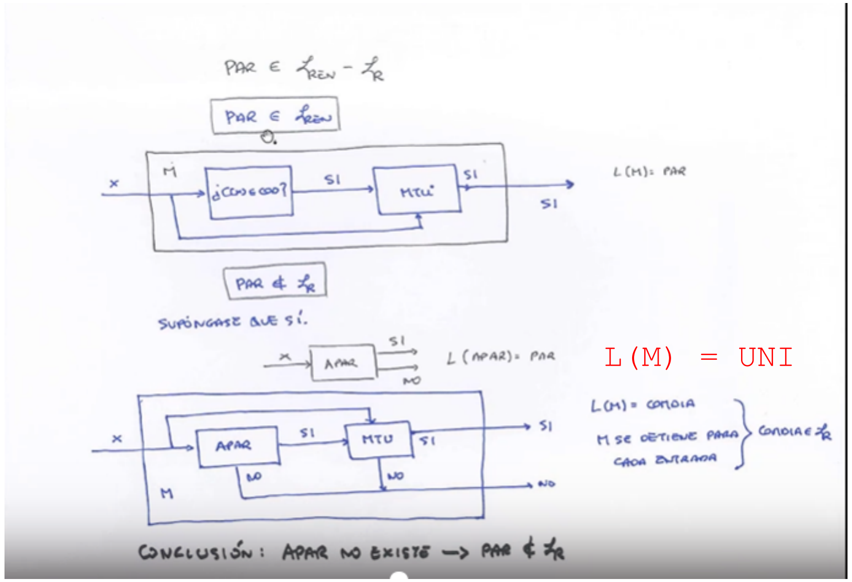
Algunos ejercicios sobre lenguajes recursivamente enumerables, y no recursivamente enumerables

Ejercicio: Sea el lenguaje

PAR = {x ∈ {0,1}*/ c(x) ∈ COD ∧ la máquina codificada en c(x) se detiene con la entrada d(x)}

Demuestre que:

- PAR es recursivamente enumerable.
- PAR no es recursivo

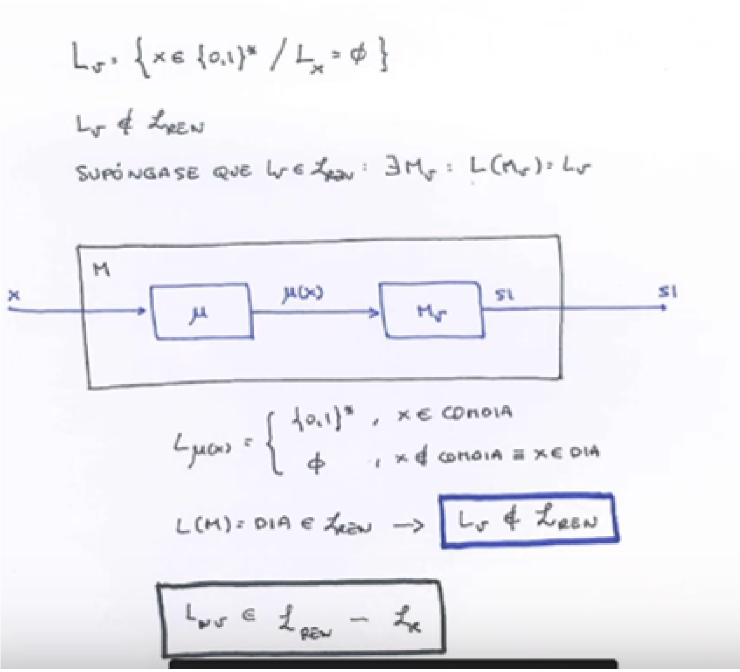


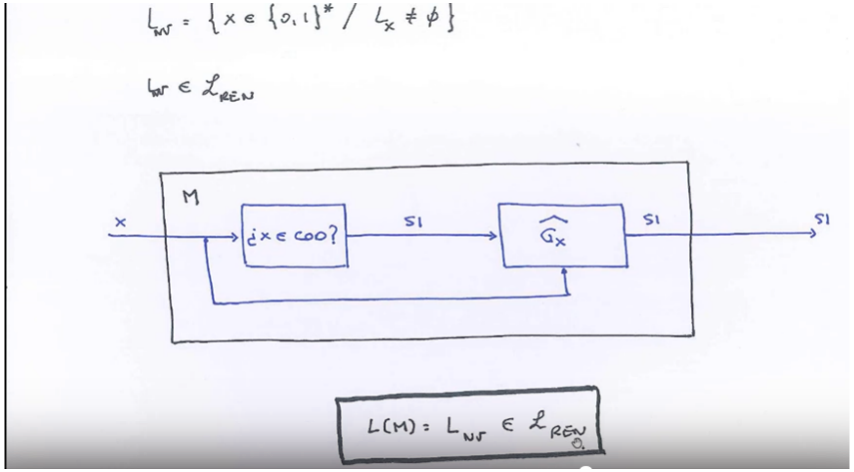
Ejercicio: Sean los lenguajes:

$$L_v = \{x \in \{0,1\}^* / \ L_x = \varnothing\} \text{ y } L_{nv} = \{x \in \{0,1\}^* / \ L_x \neq \varnothing\}$$

Demuestre que:

- L_{nv} es recusivamente enumerable.
- L_v no es recursivamente enumerable.





El teorema de Rice

El teorema de Rice permite contestar de un modo sistemático y directo a la pregunta de si una determinada cuestión sobre el lenguaje reconocido por una máquina de Turing es o no decidible.

Así, en lo que sique trataremos sobre cuestiones del tipo: "para la máquina de Turing M ¿cumple L(M) la propiedad P?". Donde, por ejemplo, la propiedad P podría referirse a la finitud del lenguaje.

Seguidamente introduciremos la noción de propiedad de los lenguajes recursivamente enumerables sobre el alfabeto {0,1}. Y más específicamente la noción de propiedad no trivial.

Sea $\mathcal{L}_{REN}(\{0,1\}^*) = \{L \subseteq \{0,1\}^* / L \in \mathcal{L}_{REN}\}$.

Dada una propiedad P sobre lenguajes $L \subseteq \{0,1\}^*$, definimos

$$\mathcal{P} = \{L \in \mathcal{L}_{REN}(\{0,1\}^*) \,/\, L \text{ cumple } P\}$$

ahora la cuestión inicial da lugar al lenguaje

$$L_{\mathcal{P}} = \{x \in \{0,1\}^* / \, L_x \in \mathcal{P}\}$$

Si x es un código válido de la máquina de Turing M, se tiene que

"para la máquina de Turing M ¿cumple L(M) la propiedad P?"

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in L_{\mathcal{P}}$$

Diremos que una propiedad P de los lenguajes recursivamente enumerables es trivial si

$$\mathcal{P} = \emptyset \quad \vee \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}_{\mathrm{REN}}(\{0,1\}^*)$$

en otro caso diremos que es no trivial.

Teorema de Rice: Cualquier propiedad P no trivial de los lenguajes recursivamente enumerables no es decidible, esto es, $L_{\mathcal{P}}$ no es recursivo.

Ejemplos: No son decidibles las siguientes cuestiones:

- La máquina de Turing `M` reconoce un lenguaje `finito`.
- La máquina de Turing `M` reconoce un lenguaje `infinito`.
- La máquina de Turing `M` reconoce un lenguaje `regular`.

`incontextual`