Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de Simplex Revisado

Nombre y apellidos:____

- Justifica todas tus respuestas
- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico, excepto calculadores no programables
- Se puede escribir las respuestas en lápiz
- **Duración del Examen: 2h 30minutos**

1. Una compañía dispone de un sistema de producción con 4 máquinas en el que se fabrican 3 tipos de productos. Las máquinas se etiquetan como A, B, C y D mientras que los productos se identifican por P, Q y R. La siguiente tabla incluye los tiempos de fabricación requeridos por unidad de cada tipo de producto en cada máquina. La capacidad semanal de cada máquina es 2.400 minutos.

Tiempo de fabricación en cada máquina (minutos) por unidad de producto

	P	**Q**	**R**
Máquina A	20	10	10
Máquina B	12	28	16
Máquina C	15	6	16
Máquina D	10	15	0

Los beneficios por las ventas de cada producto son una función no lineal de la cantidad vendida. Para linealizar esta función, se identifican 3 segmentos para la función de beneficio de cada producto según las cantidades vendidas de cada uno de ellos y que están limitadas a 100 unidades máximas en cada caso.

Los datos de beneficios para cada tipo de producto en los distintos segmentos se recogen en la siguiente tabla. Para el producto P, el beneficio unitario disminuye con las ventas; en el caso del producto Q el beneficio aumenta con el número de unidades vendidas mientras que en el caso del producto R los beneficios se ajustan a las cantidades indicadas en la tabla para cada segmento de ventas.

Beneficio unitario (€) por tipo de producto

Unidades vendidas	**P**	**Q**	**R**
0 a 30	60	40	20
30 a 60	45	60	70
60 a 100	35	65	30

a) Plantea un modelo matemático de **programación lineal entera** para establecer la **planificación de ventas semanal de los tres tipos de productos** de modo que el beneficio sea máximo. **[2.25 puntos]**

b) La empresa está analizando la posibilidad de ampliar la capacidad de la máquina B. Dicha ampliación supondría, en caso de realizarse, un incremento de su capacidad semanal de 1.000 minutos y un coste de 500 euros semanales. Modifica el modelo de modo que permita decidir si es interesante llevar a cabo la mejora. **[0.5 puntos]**

c) La empresa contempla ahora la posibilidad de ampliar la capacidad de algunas de las cuatro máquinas. Cada ampliación supondría, en caso de realizarse, disponer de 1.000 minutos adicionales y el coste de cada ampliación sería de 500 euros semanales. Además, debe considerarse que, por limitaciones en el presupuesto, no es posible ampliar más de 2 máquinas y que, por sus características técnicas, si se amplia la máquina A no debe ampliarse la C. **[0.75 puntos]**

Nota: considera las modificaciones de los apartados b) y c) de forma independiente. En todos los casos el modelo resultante ha de seguir siendo lineal.

(Puntuación: 3.5 puntos)

2 La compañía InfoVal S.A. desea planificar el ensamblaje de dos nuevos modelos de ordenador: el QNAP i5 y el QNAP i7. Ambos modelos precisan del mismo tipo de carcasa y lector óptico. En el modelo QNAP i5 se ensambla la carcasa con 2 lectores ópticos. En el modelo QNAP i7 se ensambla la carcasa con un lector óptico y además se añade un lector de tarjetas. Se dispone semanalmente de 1.000 lectores ópticos, 500 lectores de tarjetas y de 600 carcasas.

Un QNAP i5 requiere 1 hora de trabajo para su ensamblaje y proporciona un beneficio neto de 200 euros y mientras que un QNAP i7 requiere 1.5 horas de trabajo y su beneficio neto es de 500 euros.

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores, el director de la compañía desea alcanzar las siguientes metas:

- Meta 1. Producir semanalmente 200 ordenadores QNAP i5 como mucho.
- Meta 2. Ensamblar al menos 500 ordenadores en total a la semana.
- Meta 3. Igualar el número de horas totales de trabajo semanal dedicadas al ensamblaje de los dos tipos de ordenador.
- Meta 4. Obtener un beneficio semanal neto de al menos 250.000 euros.

▪ Plantea un modelo de **Programación por Metas Ponderadas** utilizando el siguiente vector de pesos (W1, W2, W3, W4) = (2, 1, 1, 5).

(Puntuación: 1.5 puntos)

3 Dado el siguiente modelo lineal:

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{Max} & & \boldsymbol{z = 2x_1 + x_2} \\ \boldsymbol{s.a}: & [\boldsymbol{R1}] & \boldsymbol{x_1 + 2x_2 \le 10} \\ & [\boldsymbol{R2}] & \boldsymbol{3x_1 + x_2 \le 10} \\ & [\boldsymbol{R3}] & \boldsymbol{x_1 + x_2 \le 2} \\ & & \boldsymbol{x_1, x_2 \ge 0} \end{array}\right\} (P),$$

cuya solución óptima se incluye en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	0	-1	8
X4	0	1	-3	4
X1	0	0	1	2
$c_B^t\, B^{-1}$	0	0	2	Z=4

a) Calcula el análisis de sensibilidad del coeficiente en la función objetivo de X1 (c1). ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? **[1.25 puntos]**

b) Calcula el análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción 3 (b3). ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? **[1.25 puntos]**

(Puntuación: 2.5 puntos)

4 Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{Max} & & \boldsymbol{z = 4x_1 + 4x_2 + x_3} \\ \boldsymbol{s.a}: & [\boldsymbol{R1}] & \boldsymbol{2x_1 + x_2 + x_3 \le 4} \\ & [\boldsymbol{R2}] & \boldsymbol{x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 4} \\ & & \boldsymbol{x_1, x_2 \ge 0 \text{ } y \text{ } enteras} \\ & & \boldsymbol{x_3 \ge 0} \end{array}\right\} (P),$$

cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
X2	2/3	-1/3	4/3
X3	1/3	1/3	8/3
$c_B^t\, B^{-1}$	3	-1	Z = 8

a) Aplica el algoritmo de **Bifurcación y Acotación** hasta encontrar la primera solución factible del problema (P). Recorre el árbol de soluciones **en profundidad** (técnica de la cota más reciente)**.** <u>En cada nodo empieza acotando superiormente (≤) la variable correspondiente</u>.

b) Dibuja el árbol de soluciones e indica en cada nodo el valor de las variables decisión y de la función objetivo en la solución correspondiente.

(Puntuación: 2.5 puntos)

SOLUCIÓN

1.

a)

VARIABLES:

Las variables hacen referencia a las unidades vendidas de cada tipo de producto y en cada tramo de beneficio. Adicionalmente serán necesarias variables binarias que aseguren la aplicación del beneficio adecuado según el número de unidades vendidas.

P1, Q1, R1: Unidades vendidas el producto P con el beneficio indicado en el segmento 1

P2, Q2, R2: Unidades vendidas el producto P con el beneficio indicado en el segmento 2

P3, Q3, R3: Unidades vendidas el producto P con el beneficio indicado en el segmento 3

Y_{P2} (0,1): 0: Unidades vendidas de P sólo con el beneficio indicado en el segmento 1

1: Unidades vendidas de P con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

Y_{P3} (0,1): 0: Unidades vendidas de P con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

1: Unidades vendidas de P con el beneficio indicado en el segmento 1, 2 y 3

Y_{Q2} (0,1): 0: Unidades vendidas de Q sólo con el beneficio indicado en el segmento 1

1: Unidades vendidas de Q con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

Y_{Q3} (0,1): 0: Unidades vendidas de Q con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

1: Unidades vendidas de Q con el beneficio indicado en el segmento 1, 2 y 3

Y_{R2} (0,1): 0: Unidades vendidas de R sólo con el beneficio indicado en el segmento 1

1: Unidades vendidas de R con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

Y_{R3} (0,1): 0: Unidades vendidas de R con el beneficio indicado en el segmento 1 y 2

1: Unidades vendidas de R con el beneficio indicado en el segmento 1, 2 y 3

(Opcionalmente podríamos definir tres variables continuas adicionales P, Q y R que indicaran el número total de unidades vendidas de cada tipo de producto, independientemente del segmento de beneficio.)

FUNCION OBJETIVO:
La función objetivo expresada en términos de las variables es **lineal**.

MAX Z = 60 P1 + 45 P2 + 35 P3 + 40 Q1 + 60 Q2 + 65 Q3 + 20 R1 + 70 R2 + 70 R3

RESTRICCIONES:

- Capacidad de las máquinas:

  [MAQ A] 20(P1+P2+P3) + 10(Q1+Q2+Q3) + 10(R1+R2+R3) <= 2400
  [MAQ B] 12(P1+P2+P3) + 28(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400
  [MAQ C] 15(P1+P2+P3) + 6(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400
  [MAQ D] 10(P1+P2+P3) + 15(Q1+Q2+Q3) + 0(R1+R2+R3) <= 2400

- Para que el modelo represente correctamente las funciones de beneficio no lineales, los segmentos de beneficio deben utilizarse en el orden correcto. Es decir, las ventas del primer segmento deben estar en su valor máximo para que se aplique el beneficio del segundo segmento y tanto el primero como el segundo deben haberse cubierto antes de que el tercer segmento se aplique.

  Para ello necesitamos utilizar las **variables binarias** en el modelo. Estas variables controlarán el orden en el que los beneficios unitarios se utilizarán en la solución según el número de unidades vendidas.

[Producto P]
$30\ Y_{P2} <= P1 <= 30$
$30\ Y_{P3} <= P2 <= 30\ Y_{P2}$
$0 <= P3 <= 40\ Y_{P3}$

[Producto Q]
$30\ Y_{Q2} <= Q1 <= 30$
$30\ Y_{Q3} <= Q2 <= 30\ Y_{Q2}$
$0 <= Q3 <= 40\ Y_{Q3}$

[Producto R]
$30\ Y_{R2} <= R1 <= 30$
$30\ Y_{R3} <= R2 <= 30\ Y_{R2}$
$0 <= R3 <= 40\ Y_{R3}$

[No_negatividad] P1, Q1, R1, P2, Q2, R2, P3, Q3, R3 >= 0

* Nota: Por los datos de los tramos de beneficio no todas las variables binarias son indispensables. La formulación de las restricciones con el número mínimo de variables binarias es la siguiente:

[Restricciones de segmentos de beneficios]
[Producto P] (En este caso NO es necesario el uso de vBinarias ya que los beneficios son decrecientes)
P1 <= 30
P2 <= 30
P3 <= 40
[Producto Q]
$30\ Y_{Q2} <= Q1 <= 30$

$30\ Y_{Q3} <= Q2 <= 30\ Y_{Q2}$

$0 <= Q3 <= 40\ Y_{Q3}$

[Producto R] (solo es indispensable controlar que el beneficio del segundo tramo solo se usa a partir de las 30 primeras unidades fabricadas)

$30\ Y_{R2} <= R1 <= 30$

$0 <= R2 <= 30\ Y_{R2}$

$0 <= R3 <= 40\ Y_{R2}$

b)

Las modificaciones a añadir el modelo del apartado a) son las siguientes:

VARIABLES adicionales:

Y_B (0,1): 0: No se realiza la ampliación de la maquina B

1: Se realiza la ampliación de la maquina B

FUNCIÓN OBJETIVO:

$MAX\ Z = 60\ P1 + 45\ P2 + 35\ P3 + 40\ Q1 + 60\ Q2 + 65\ Q3 + 20\ R1 + 70\ R2 + 70\ R3 - 500\ Y_B$

RESTRICCIONES:

[MAQ B] $12(P1+P2+P3) + 28(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000\ Y_B$

El resto del modelo se queda igual.

c)

Dado que en este caso es posible realizar la ampliación en cualquiera de los 4 tipos de máquinas, las modificaciones a realizar en el modelo se concretan en:

VARIABLES adicionales:

Yi (0,1): 0: No se realiza la ampliación de la maquina i i= A, B, C, D

1: Se realiza la ampliación de la maquina i

$MAX\ Z = 60\ P1 + 45\ P2 + 35\ P3 + 40\ Q1 + 60\ Q2 + 65\ Q3 + 20\ R1 + 70\ R2 + 70\ R3 - 500\ (Y_A + Y_B + Y_C + Y_D)$

RESTRICCIONES:

[MAQ A] $20(P1+P2+P3) + 10(Q1+Q2+Q3) + 10(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000\ Y_A$

[MAQ B] $12(P1+P2+P3) + 28(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000\ Y_B$

[MAQ C] $15(P1+P2+P3) + 6(Q1+Q2+Q3) + 16(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000\ Y_C$

[MAQ D] $10(P1+P2+P3) + 15(Q1+Q2+Q3) + 0(R1+R2+R3) <= 2400 + 1000\ Y_D$

$Y_A + Y_B + Y_C + Y_D \leq 2$

$Y_A + Y_C \leq 1$

2.

VARIABLES DECISIÓN:

X1: Unidades ensambladas semanalmente del ordenador QNAP i5

X2: Unidades ensambladas semanalmente del ordenador QNAP i7

FUNCIÓN OBJETIVO:
MIN Z = 2 P1 + 1 N2 + 1 (P3 + N3) + 5 N4

RESTRICCIONES:
[Restricciones del problema]
[lectores_ópticos] 2X1 +X2 <= 1000
[lector_tarjeta] X2 <= 500
[carcasas] X1+X2 <= 600

[Metas]
[M1] X1 – P1 + N1 = 200
[M2] X1 + X2 – P2 + N2 = 500
[M3] X1 – 1.5X2 – P3 + N3 = 0
[M4] 200X1 + 500X2 – P4 + N4 =250000

[No negatividad de las variables]
X1, X2, N1, P1, N2, P2, N3, P3, N4, P4 >=0

3.

a) Análisis de sensibilidad de c1: Intervalo de variación de c1 en el que la solución actual sigue siendo óptima.

Como x1 es VB en la solución optima, es necesario recalcular $c_B^t\, B^{-1}$ y los cj-zj $\forall$j VNB:

$$c_B^t\, B^{-1} = (0,0,c1)\, B^{-1} = (0,0,c1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,c1)$$

$$c_{x2} - z_{x2} = 1 - (0,0,c1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \le 0 \rightarrow 1 - c1 \le 0 \rightarrow c1 \ge 1$$

$c_{x5} - z_{x5} = 0 - (0, 0, c1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \rightarrow 0\text{-}c1 \leq 0 \rightarrow c1 \geq 0$

Conclusiones: Mientras c1 $\in$ [1, .. +∞):

1. La solución actual sigue siendo óptima
2. El valor de la función objetivo cambia y lo hace según la expresión: Z=2c1
3. En los límites, existen soluciones óptimas alternativas.

b)

Para realizar el análisis de sensibilidad de b3, calculamos en primer lugar el coste de oportunidad de la restricción y a continuación el intervalo en el que dicho coste de oportunidad y el plan de producción se mantienes constantes.

- Coste de oportunidad de la restricción b3:

$$c_{x5} - z_{x5} = 0 - (0, 0, 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 2 = -2$$

Como se trata de una restricción ≤, el coste de oportunidad es favorable al criterio de la función objetivo. Por tanto C.O.=+2

- Intervalo en el que el coste de oportunidad y el plan de producción se mantienen constantes:

$$x'^* = x^* + B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta b3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - \Delta b3 \\ 4 - 3\Delta b3 \\ 2 + \Delta b3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$8 - \Delta b3 \geq 0 \rightarrow \Delta b3 \leq 8$

$4 - 3\Delta b3 \geq 0 \rightarrow \Delta b3 \leq 4/3$

$2 + \Delta b3 \geq 0 \rightarrow \Delta b3 \geq -2$

Conclusiones: Mientras b3 $\in$ [0,..10/3)

- El coste de oportunidad es constante e igual a 2
- La solución óptima cambia puesto que la restricción es limitativa. También cambia el valor de la función objetivo y su valor se puede calcular.
- No hay cambio de solución básica.
- En los límites, la solución es degenerada

4.

P0:

V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	2/3	-1/3	4/3
X3	1/3	1/3	8/3
$c_B^t B^{-1}$	3	-1	**Z=8**

P0: X1=0; X2=4/3; X3=8/3; Z=8 (Z*=-inf)

a)

P1 = P0 + X2≤ 1; X2=1-u_{x2}; u_{x2}≤ 1

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X2

VNB en P0: X1, X4, X5.

- $Y_{X1} = B^{-1} a_{X1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1} a_{X5} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X2 necesitamos $\alpha_{X2,j}>0$, por tanto nos sirven X1, X4 y X5. Escogeremos la variable que consigue el objetivo (decrementar X2) de la forma más eficiente posible. Para ello necesitamos calcular el Cj-Zj de cada una de ellas y escoger la que verifica:

  $$\text{Min } \{ |(cj-zj)/ \alpha_{X2,j} |, \forall\ \alpha_{X2,j}< 0 \}$$

- $Z_{x1}= C_B^tB^{-1}a_{X1} = (3, -1) \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} =5 \rightarrow C_{x1} - Z_{x1}= 4-5 = -1$
- $Z_{x4}= C_B^tB^{-1}a_{X4} = (3, -1) \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =3 \rightarrow C_{x4} - Z_{x4}= 0-3 = -3$
- $Z_{x5}= C_B^tB^{-1}a_{X5} = (3, -1) \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} =1 \rightarrow C_{x5} - Z_{x5}= 0-1 = -1$

Entonces: Min {|(-1)/1|, |(-3)/2/3|, |(-1)/1/3|} =1 →**JE: X1**

- B^{-1} de la nueva solución:

  $$B^{-1}_{P2} = \begin{pmatrix}2/3 & -1/3\\-1/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X1, X3; VNB= u_{X2}, X4,X5

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix}2/3 & -1/3\\-1/3 & 2/3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\7/3\end{pmatrix}$$

$Z = 4 + C_B^t X_B = 4 + (4,1) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = 23/3$

P1: (x1, u_{x2}, x3, x4, x5)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X1	2/3	-1/3	1/3
X3	-1/3	2/3	7/3
$c_B^t B^{-1}$	7/3	-2/3	**Z=23/3**

- Dado que esta solución no es factible para el problema original (ya que se requiere que tanto x1 como x2 tomen valor entero) y que el criterio para recorrer el árbol es cota más reciente, el proceso de búsqueda continúa a partir de P1. Dado que X1 es la única variable que ha de ser entera y todavía no lo es, el proceso sigue bifurcando X1:

P2 = P1 + X1≤ 0; X1=0-u_{x1}; u_{x1}≤ 0

- A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

- Como VNB en P2: $\mathbf{u_{x2}}$, X4, X5, calculamos:

$Y\mathbf{u}_{x2} = B^{-1} a_{ux2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1} a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

Para decrementar el valor de X1 necesitamos $\alpha_{X1,j}$>0, por tanto debemos escoger entre X4 y X5 la variable que es capaz de conseguirlo del modo más eficiente posible. Para ello necesitaremos en primer lugar calcular sus Cj-Zj:

- $Z_{x4} = C_B^t B^{-1} a_{X4} = (7/3, -2/3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 7/3 \rightarrow C_{x4} - Z_{x4} = 0 - 7/3 = -7/3$
- $Z_{x5} = C_B^t B^{-1} a_{X5} = (7/3, -2/3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2/3 \rightarrow C_{x5} - Z_{x5} = 0 - 2/3 = -2/3$

Entonces: Min {|(-7/3)/2/3|, |(-2/3)/1/3|} =2 →**JE: X5**

- B^{-1} de la nueva solución:

$B^{-1}_{P4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$Z = 4 + C_B^t X_B = 4 + (0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 > Z^* \rightarrow Z^* = 7$

Como en esta solución tanto X1 como X2 son enteras, la solución es factible para el problema original (puesto que se requiere que x1 y x2 sean enteras; x3 también toma un valor entero aunque no era necesario para que la solución fuese factible para el problema original) y por tanto una hoja del árbol de soluciones. La solución entera sería:

X1=0; X2=1; X3=3 y Z=7

b)

- El árbol de soluciones generado es el de la siguiente figura: