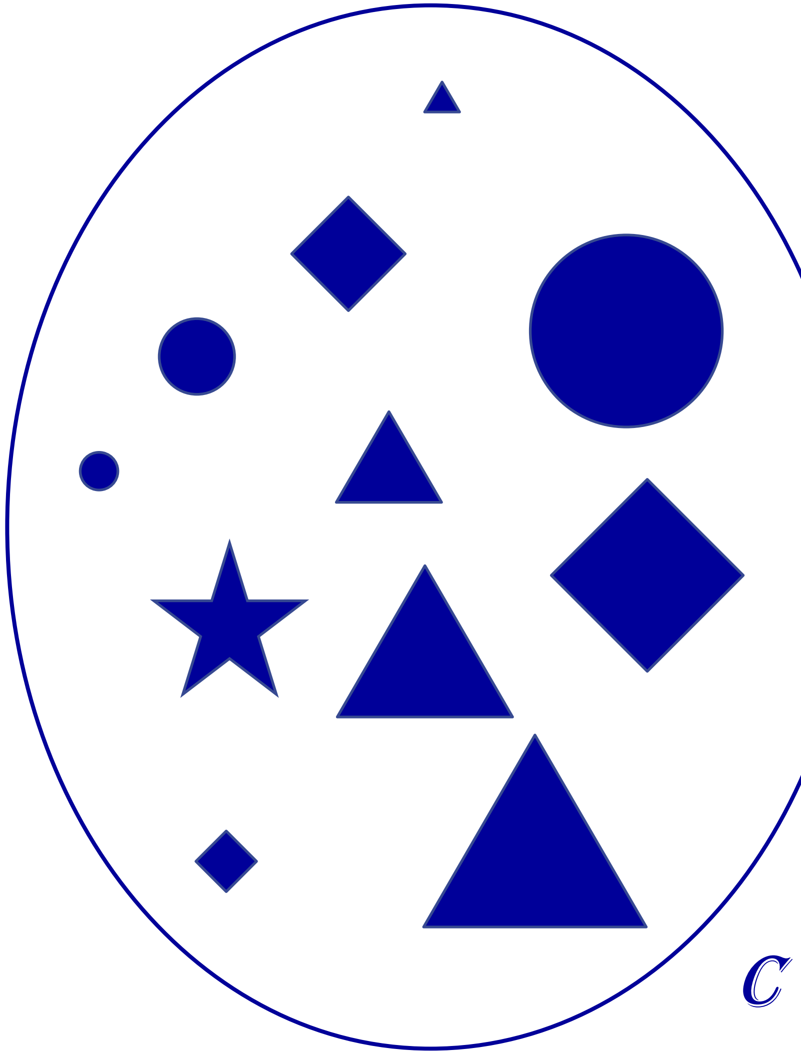
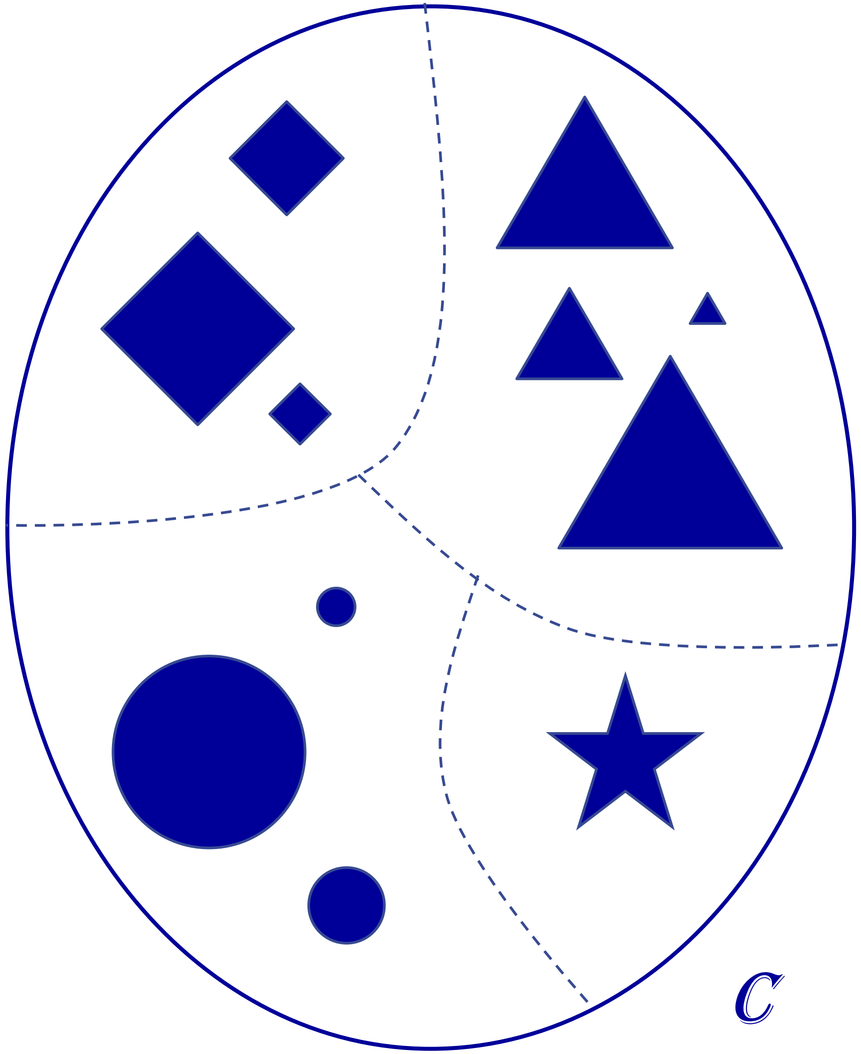
# Relaciones binarias de equivalencia

**Cristina Jordán Lluch**
*Instituto de Matemática Multidisciplinar*
*Departamento de Matemática Aplicada*
*Universitat Politècnica de València*

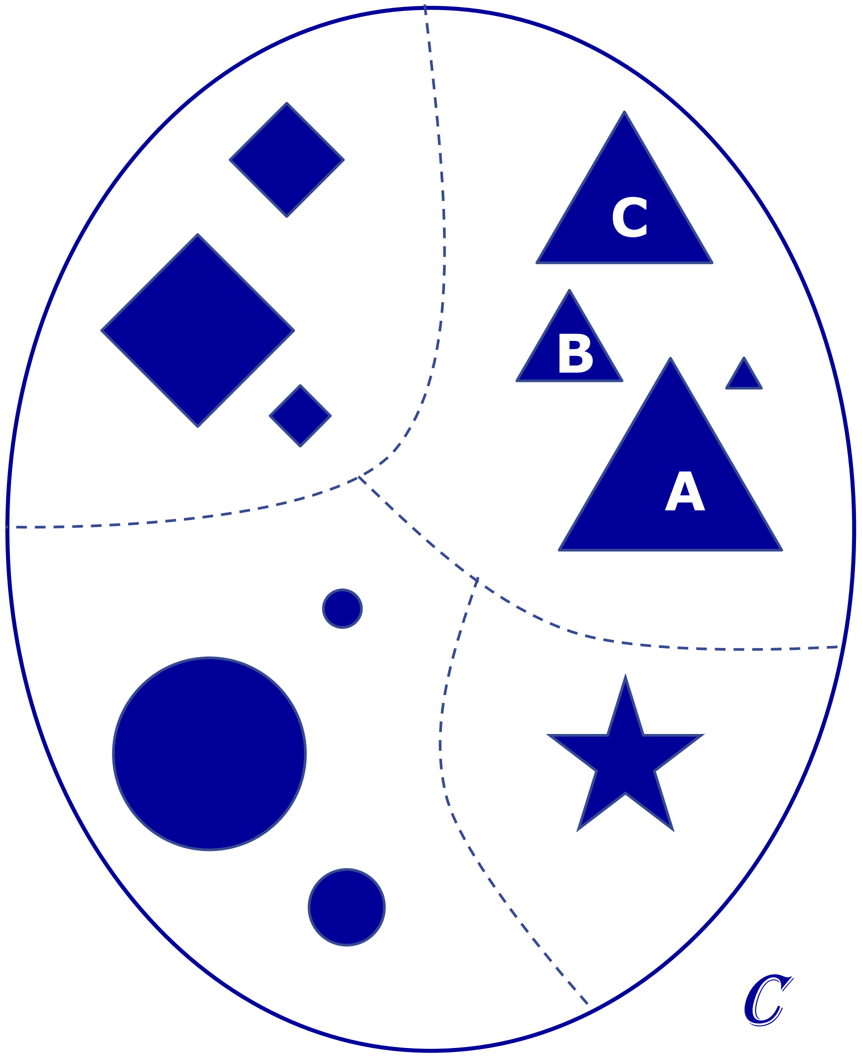
# Ejemplo




¿Qué figuras tienen la misma forma?

# Ejemplo




***"Tener la misma forma que"***

A tiene la misma forma que A

A tiene la misma forma que B $\longrightarrow$ B tiene la misma forma que A

A tiene la misma forma que B y
B tiene la misma forma que C $\longrightarrow$ A tiene la misma forma que C

# Propiedades de la relaciones binarias

Sea R una relación en CxC.
Se dice que

*(En $\mathcal{C}$: $\forall A,B \in \mathcal{C}$ A R B si A tiene la misma forma que B)*

- R es **reflexiva** si $\forall x \in C$ x R x
  *(A tiene la misma forma que A)*
- R es **simétrica** si $\forall x,y \in C$ x R y entonces y R x
  *(A tiene la misma forma que B entonces B tiene la misma forma que A)*
- R es **transitiva** si $\forall x,y,z \in C$ x R y y y R z entonces x R z
  *(A tiene la misma forma que B y B tiene la misma forma que C entonces A tiene la misma forma que C)*

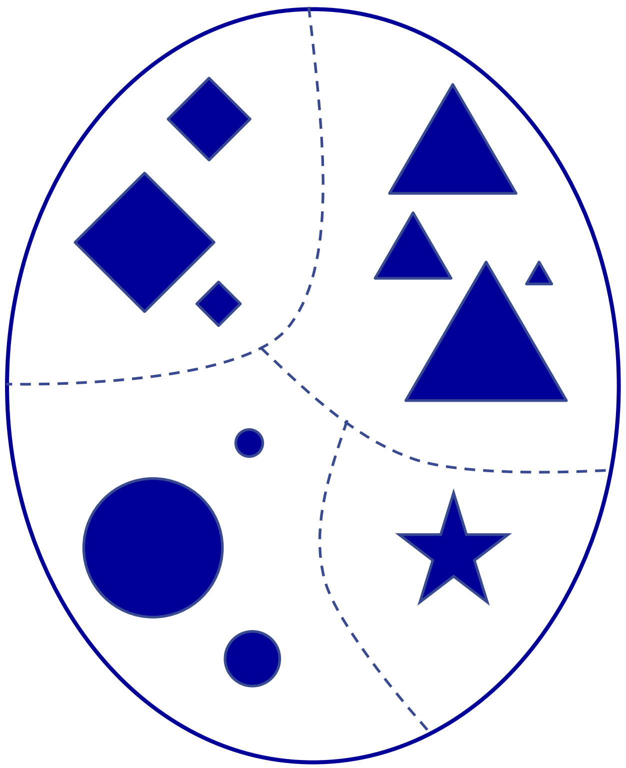
**Definición**

Sea R una relación en CxC.

Se dice que R es **relación binaria de equivalencia** si es reflexiva simétrica y transitiva.

# Ejemplo

**Sea el conjunto C y**
**la relación "tener la misma forma que "**



Llamamos

Clase ▲ = conjunto formado por todas las figuras de C que tienen la misma forma que ▲

Clase ★ = conjunto formado por todas las figuras de C que tienen la misma forma que ★

Clase ● = conjunto formado por todas las figuras de C que tienen la misma forma que ●

Clase ◆ = conjunto formado por todas las figuras de C que tienen la misma forma que ◆

# Relación binaria de equivalencia

Sea R una relación en CxC.

Se dice que R es **relación binaria de equivalencia** si es reflexiva simétrica y transitiva.

- Sea R una relación de equivalencia en C.

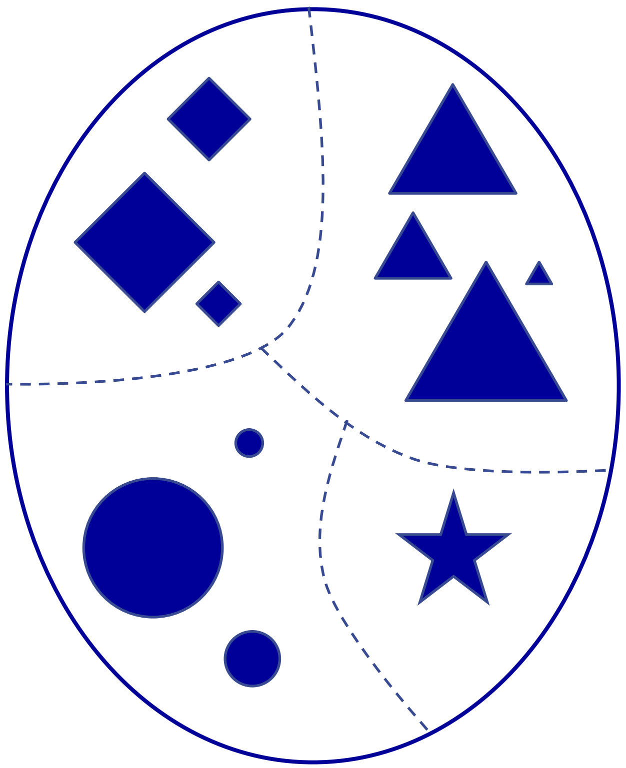
  Llamamos **clase de equivalencia** del elemento $a \in C$ respecto de R al subconjunto de C formado por todos los elementos x de C tal que $x\,R\,a$ ó $a\,R\,x$

  Notación $[a] = [a]_R = \bar{a}$

  Representación simbólica de la definición $[a] = \{ x \in C \,/\, x\,R\,a \}$

# Ejemplo

**Sea el conjunto C y**
**la relación "tener la misma forma que "**



Llamamos

Clase ▲ = conjunto formado por todas las figuras de C que tienen la misma forma que ▲

Clase ★ = conjunto formado por todas las figuras de C que tienen la misma forma que ★

Clase ● = conjunto formado por todas las figuras de C que tienen la misma forma que ●

Clase ◆ = conjunto formado por todas las figuras de C que tienen la misma forma que ◆

- El conjunto {Clase ▲ , Clase ★ , Clase ● , Clase ◆ } se llama conjunto cociente de C respecto de la relación R= tener la misma forma que

# Relación binaria de equivalencia

Sea R una relación en CxC.

Se dice que R es **relación binaria de equivalencia** si es reflexiva simétrica y transitiva.

- Sea R una relación de equivalencia en C.

  Llamamos **clase de equivalencia** del elemento $a \in C$ respecto de R al subconjunto de C formado por todos los elementos x de C tal que $x R a$ ó $a R x$

  Notación $[a] = [a]_R = \bar{a}$

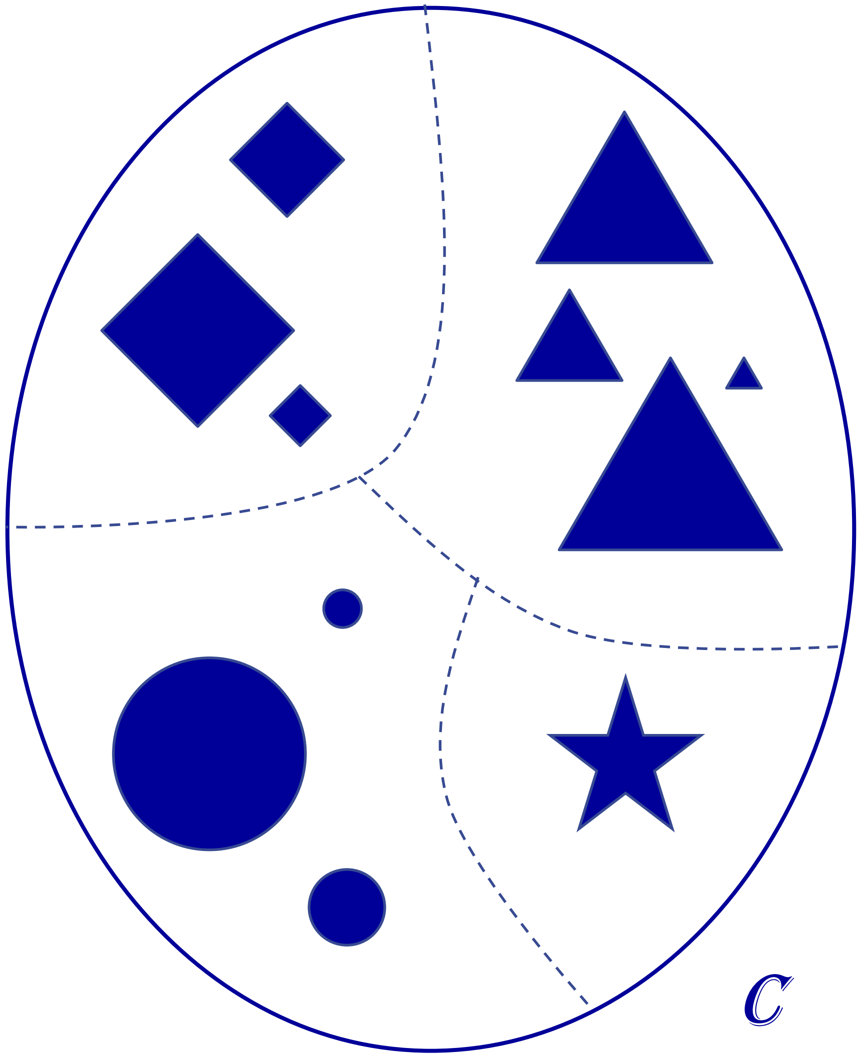
  Representación simbólica de la definición $[a] = \{ x \in C / x R a \}$

- Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de la relación R, se le denomina **conjunto cociente** y se denota por

  Notación C/R

  Representación simbólica de la definición $C/R = \{ [a] / a \in C \}$

# Ejemplo




**Observamos**

Dados dos elementos de C,

- *Si tienen la misma forma están en la misma caja y si están en la misma caja tienen la misma forma*

# Propiedades de una RBE

Sea R una relación binaria de equivalencia en CxC.

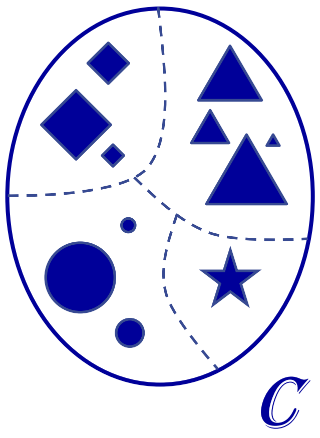
R verifica las siguientes propiedades:

1. $\forall$ a, b $\in$ C $\quad$ a R b $\Leftrightarrow$ [a] = [ b ]

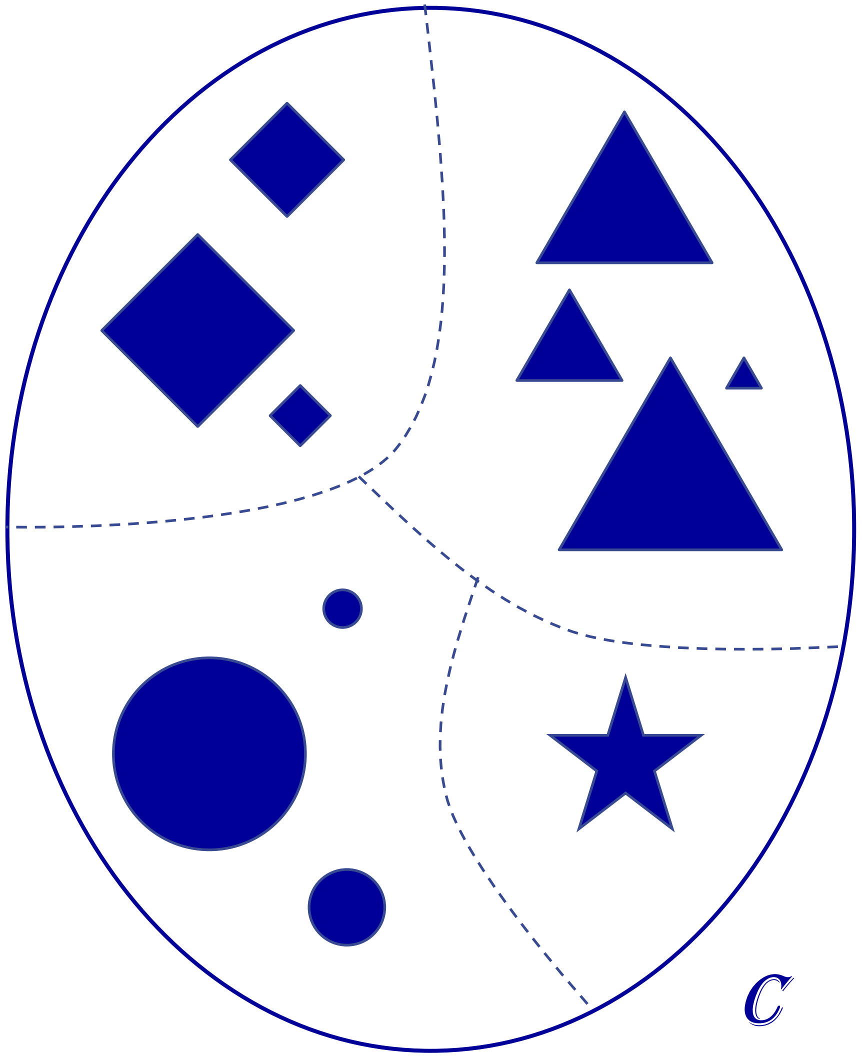
   *Si tienen la misma forma están en la misma caja y si están en la misma caja tienen la misma forma*

   *es decir,*

   *A misma forma que B $\Leftrightarrow$ "caja de A"="caja de B"*



# Ejemplo




**Observamos**

Dados dos elementos de C,

- Si tienen la misma forma están en la misma caja y si están en la misma caja tienen la misma forma

- *la "caja" en la está A es la misma que la "caja" en que está B*
  *o*
  *la "caja" de A y la de B no tienen ningún elemento en común*

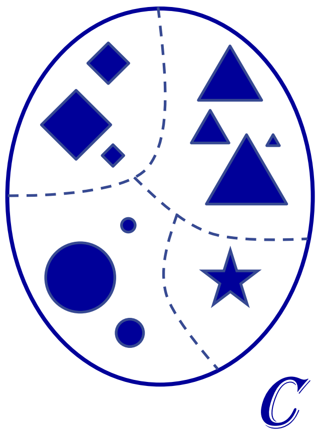
# Propiedades de una RBE

Sea R una relación binaria de equivalencia en CxC.

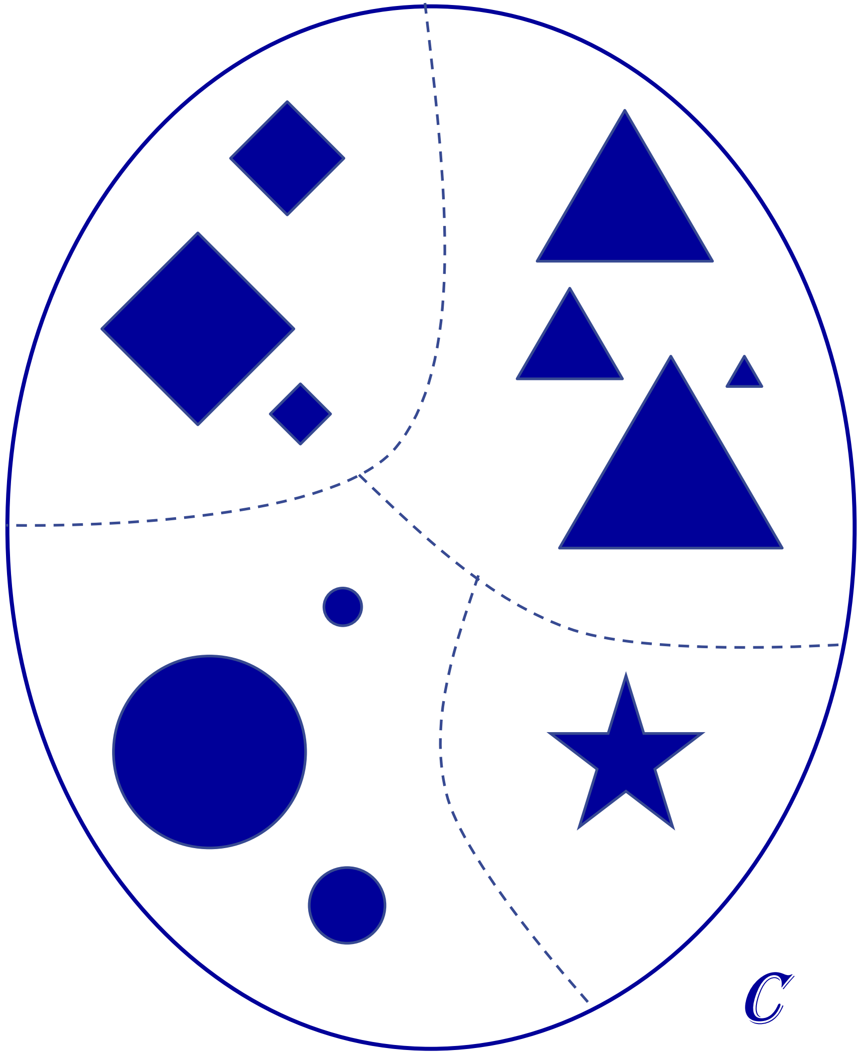
R verifica las siguientes propiedades:

1. $\forall$ a, b $\in$ C    a R b $\Leftrightarrow$ [a] = [ b]
2. $\forall$ a, b $\in$ C   [a] = [ b]   $\vee$  [ a ] $\cap$  [ b] = $\emptyset$

*si considero A y B,*
*la "caja" en la está A es la misma que la "caja" en que está B*
*o*
*la "caja" de A y la de B no tienen ningún elemento en común*



# Ejemplo




**Observamos**

Dados dos elementos de C,

- Si tienen la misma forma están en la misma caja y si están en la misma caja tienen la misma forma
- la "caja" en la está A es la misma que la "caja" en que está B
  o
  la "caja" de A y la de B no tienen ningún elemento en común
- *Cada uno de los elementos está en una "caja" ( i.e., la unión de las cajas da el conjunto total C), ningún elemento está en dos "cajas", y no hay ninguna "caja" vacía.*

# Propiedades de una RBE

Sea R una relación binaria de equivalencia en CxC.

R verifica las siguientes propiedades:

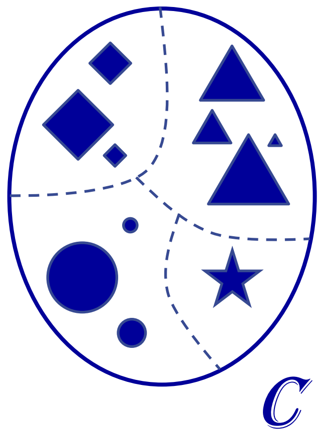
1. $\forall$ a, b $\in$ C  a R b $\Leftrightarrow$ [a] = [ b]
2. $\forall$ a, b $\in$ C  [a] = [ b] $\vee$ [ a ] $\cap$ [ b] = $\emptyset$
3. El conjunto cociente es una partición de C

*(es decir,*  *i)* $\bigcup_{x \in C} [x] = C$

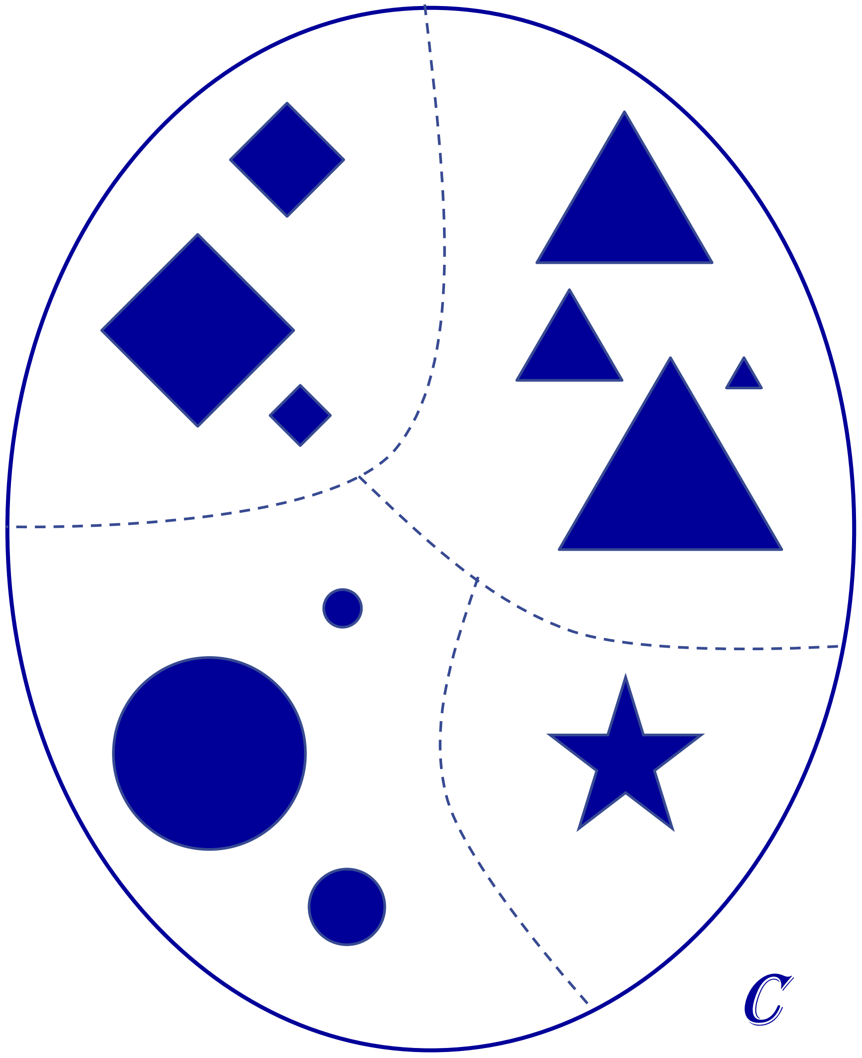
*ii)* $\forall [a], [b] \in C/R \quad [a] \cap [b] = \emptyset$

*iii)* $\forall x \in C \quad [x] = \emptyset$

*Cada uno de los elementos de C está en una "caja"*
*( i.e., la unión de las cajas da el conjunto total C),*
*ningún elemento de C está en dos "cajas",*
*y no hay ninguna "caja" vacía*



# Ejemplo




**Resumiendo**

Si dos elementos están en la misma "caja"

- $\forall$ a, b $\in$ C   a R b $\Leftrightarrow$ [a] = [ b]

Tienen la misma forma

- $\forall$ a, b $\in$ C  [a] = [ b]  $\vee$  [ a ] $\cap$  [ b] = $\emptyset$

Tienen forma distinta a cualquier otro que esté fuera de su "caja"

El conjunto cociente es una partición de C

La unión de los elementos de las distintas "cajas" es el conjunto C,
ningún elemento de C está en dos "cajas" ,
y no hay ninguna "caja" vacía

# Ejemplo de RBE: Congruencia

Dado un número entero positivo m definimos, en el conjunto de los números enteros Z, la siguiente relación binaria:

$$a \ R \ b \ \leftrightarrow \ a - b \text{ es un múltiplo de } m$$

R es una relación de equivalencia, a la que se denomina **relación de congruencia módulo m.**

Notación  Al conjunto cociente Z/R lo denotaremos por $Z_m$

Si [a] es la clase de equivalencia del número entero a, entonces

$$Z_m = \{ [0], [1], [2], \dots ,[m-1] \}$$

Notación  Para esta relación, en lugar de  a R b  se escribe

$$a \equiv b \ (m) \quad \text{o} \quad a \equiv b \ (\text{mod } m)$$

y se lee «a es congruente con b módulo m».

# Ejemplos de relaciones binarias de equivalencia

**Cristina Jordán Lluch**
*Instituto de Matemática Multidisciplinar*
*Departamento de Matemática Aplicada*
*Universitat Politècnica de València*

# Recordemos

Sea R una relación en CxC.
Se dice que

- R es **reflexiva** si $\forall\, x \in C \quad x\,R\,x$
- R es **simétrica** si $\forall\, x, y \in C \quad x\,R\,y$ entonces $y\,R\,x$
- R es **transitiva** si $\forall\, x, y, z \in C \quad x\,R\,y \wedge y\,R\,z$ entonces $x\,R\,z$

# Recordemos

Sea R una relación en CxC.

- Se dice que R es **relación binaria de equivalencia** si es reflexiva simétrica y transitiva.

- Sea R una relación de equivalencia en C.

  Llamamos **clase de equivalencia** del elemento $a \in C$ respecto de R al subconjunto de C formado por todos los elementos x de C tal que $x\,R\,a$ ó $a\,R\,x$

  Notación $[a] = [a]_R = \bar{a}$

  Representación simbólica de la definición $[a] = \{ x \in C \,/\, x\,R\,a \}$

- Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de la relación R, se le denomina **conjunto cociente** y se denota por

  Notación C/R

  Representación simbólica de la definición $C/R = \{ [a] \,/\, a \in C \}$

# Ejemplo

*Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

*En $A$ consideramos la relación*

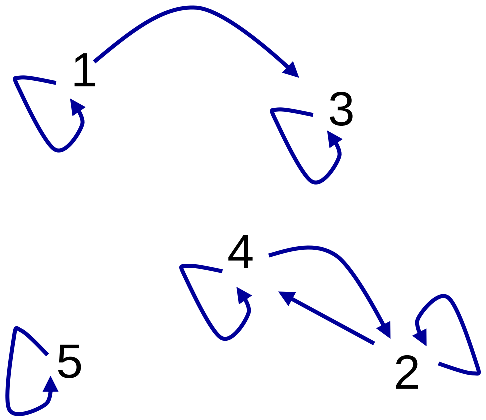
$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (2, 4), (4, 2)\}$$

*a) ¿Es relación binaria de equivalencia?*

*b) En caso afirmativo determina su conjunto cociente*

## Solución

No es relación binaria de equivalencia porque no es simétrica, ya que existe el par (1,3) y no el (3,1)



# Ejemplo

*Sea A = {1, 2, 3, 4, 5}.*

*En A consideramos la relación*

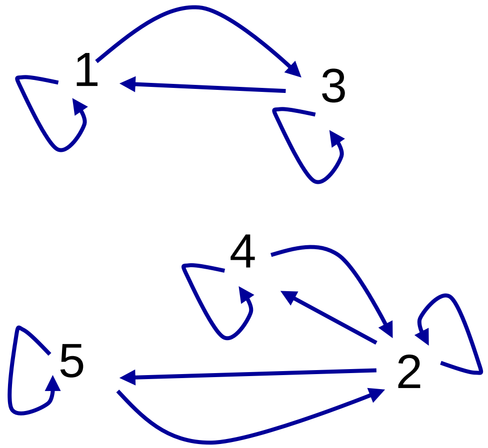
$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (4, 2), (5,2)\}$$

*a) ¿Es relación binaria de equivalencia?*

*b) En caso afirmativo determina su conjunto cociente*

Solución

No es relación binaria de equivalencia porque no es transitiva, ya que existen los pares (4,2) y (2,5) y no el (4,5)



# Ejemplo

*Sea A = {1, 2, 3, 4, 5}.*

*En A consideramos la relación*

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2)\}$$

a) *¿Es relación binaria de equivalencia?*

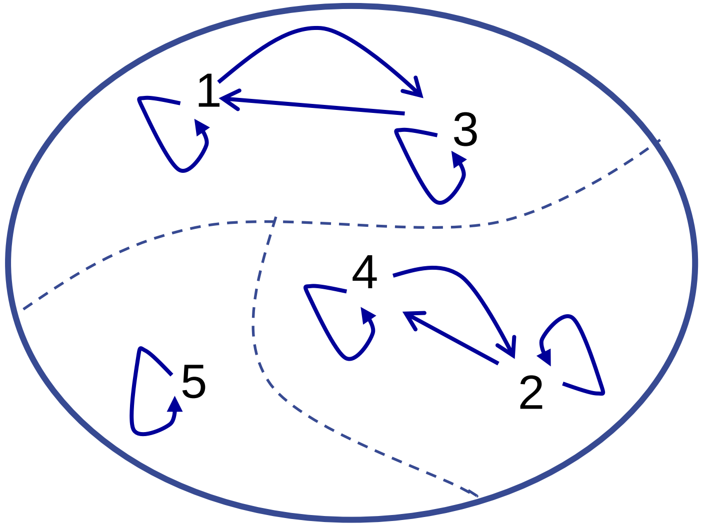
b) *En caso afirmativo determina su conjunto cociente*

## Solución

La relación es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto es de equivalencia

Clases: [1]={1,3}=[3]
[2]={2,4} =[4]
[5]={5}

Conjunto cociente A/R= {[1], [2], [5]}



# Ejemplo

*Sea A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.*

*En A  consideramos la relación*

$$\forall x, y \in A \quad x\,R\,y \longleftrightarrow \text{ x e y tienen el mismo número de divisores}$$

*a) ¿Es relación binaria de equivalencia?*

*b) En caso afirmativo determina su conjunto cociente*

## Solución

La relación es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto es de equivalencia

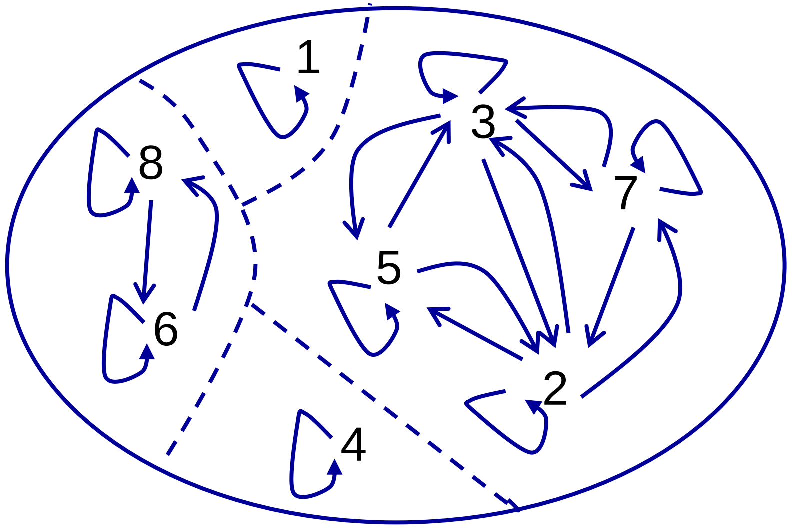
1 tiene 1 divisor
2 tiene 2 divisores
3 tiene 2 divisores
4 tiene 3 divisores
5 tiene 2 divisores
6 tiene 4 divisores
7 tiene 2 divisores
8 tiene 4 divisores

Clases

[1]={1}
[2]={2, 3, 5, 7}
[4]={4}
[6]={6, 8}

Conjunto cociente

A/R={[1], [2], [4], [6]}



# Relaciones de congruencia

**Cristina Jordán Lluch**
*Instituto de Matemática Multidisciplinar*
*Departamento de Matemática Aplicada*
*Universitat Politècnica de València*

# Observaciones

**¿Qué es la división entera de a entre m?**

Ejemplo 1

Si a=14 y m=3 la división entera de 14 entre 3 da como resultado un cociente entero $c_{14}$ y resto $r_{14}$ , es decir,

$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 14 = 4.3 + 2 & 4 \in Z,\ \ 2 \in N, & 0 \leqslant 2 \leqslant 3-1 \\ a = c_a.m + r_a & c_a \in Z,\ \ r_a \in N, & 0 \leqslant r_a \leqslant m-1 \end{array}$$

Ejemplo 2

Si a=-14 y m=3 la división de -14 entre 3 da como resultado un cociente entero $c_{-14}$ y resto $r_{-14}$ , es decir,

$$\begin{array}{r|l} -14 & 3 \\ \cline{2-2} -2 & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} -14 = (-4).3 + (-2\ ) & -4 \in \mathbb{Z}, \\ a = c_a.m + r_a & c_a \in Z \end{array}$$

A fin de que la expresión de a tenga el mismo aspecto que la del ejemplo 1 a sumamos y restamos -3 al segundo miembro

$$-14 = (-4).3 + (-2\ ) = (-4).3 +(-3)+ (-2\ ) -(-3) = = (-5).3 + 1$$

Si llamamos $c_a = -5$, $r_a=1$ podemos escribir $a = c_a.m + r_a$ $\quad c_a \in Z,\ \ r_a \in N,\ \ 0 \leqslant r_a \leqslant m-1$

Por tanto en general,

si a es un número entero y m es un número natural se verifica que

$$\boxed{a = c_a.m + r_a \quad \text{para algún} \quad c_a \in Z,\ \ r_a \in N,\ \ 0 \leqslant r_a \leqslant m-1}$$

# Ejemplo

Consideremos en el conjunto de los números enteros Z, la siguiente relación binaria:

a R b $\leftrightarrow$ a y b tienen el mismo resto al dividir por 3

$$\text{(i.e., } \begin{array}{l|l} a & 3 \\ \hline r & c_a \end{array} \quad y \quad \begin{array}{l|l} b & 3 \\ \hline r & c_b \end{array} \text{)}$$

## Observaciones

$a = c_a.3 + r_a$ para algún $c_a \in Z$, $r_a \in N$, $0 \leqslant r_a \leqslant 3\text{-}1 = 2$

$b = c_b.3 + r_b$ para algún $c_b \in Z$, $r_b \in N$, $0 \leqslant r_b \leqslant 3\text{-}1 = 2$

Luego los únicos restos posibles en este caso son 0, 1 y 2

# Recordemos

Sea R una relación en CxC.

- Se dice que R es **relación binaria de equivalencia** si es reflexiva simétrica y transitiva.

- Sea R una relación de equivalencia en C.

  Llamamos **clase de equivalencia** del elemento $a \in C$ respecto de R al subconjunto de C formado por todos los elementos x de C tal que $x R a$ ó $a R x$

  Notación $[a] = [a]_R = \bar{a}$

  Representación simbólica de la definición $[a] = \{ x \in C / x R a \}$

- Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de la relación R, se le denomina **conjunto cociente** y se denota por

  Notación C/R

  Representación simbólica de la definición $C/R = \{ [a] \; / a \in C \}$

# Ejemplo

Consideremos en el conjunto de los números enteros Z, la siguiente relación binaria:

a R b $\leftrightarrow$ a y b tienen el mismo resto al dividir por 3

*(i.e.,* $\begin{array}{l|l} a & \underline{3} \\ r & c_a \end{array}$ y $\begin{array}{l|l} b & \underline{3} \\ r & c_b \end{array}$ *)*

- R es una relación de equivalencia
- Clases de equivalencia

  [0] = { x $\in$ Z / x y 0 tienen el mismo resto al dividir por 3} =

  = { x $\in$ Z / x tiene resto 0 al dividir por 3} =

  = { ……, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9,……} = {múltiplos de 3}

  [1] = { x $\in$ Z / x y 1 tienen el mismo resto al dividir por 3} =

  = { x $\in$ Z / x tiene resto 1 al dividir por 3} =

  = { ……,-8, -5, -2, 1, 4, 7, ……} = {múltiplos de 3 más 1}

  [2] = { x $\in$ Z / x y 2 tienen el mismo resto al dividir por 3} =

  = { x $\in$ Z / x tiene resto 2 al dividir por 3} =

  = { ……, -7, -4, -1, 2, 5, 8, ……} = {múltiplos de 3 más 2}

- Conjunto cociente Z/R ( lo denotamos con $Z_3$)

  $Z_3$ = { [0], [1], [2]}

# Observaciones

**Propiedad**

Si a y b son dos números enteros, a > b, y m, es un número natural se verifica que

a y b tienen el mismo resto al dividir por m **si y sólo si** $\exists k \in Z$ *tal que* $a - b = km$

# Observaciones

**Sabemos que:**

Si a es un número entero y m es un número natural, se verifica que la división entera de a entre m da a como resultado un cociente entero $c_a$ y resto $r_a$ , es decir,

$$\begin{array}{l|l} a & m \\ \hline r_a & c_a \end{array} \qquad a = c_a.m + r_a \qquad c_a \in Z,\ \ r_a \in N,\ \ 0 \leqslant r_a \leqslant m-1$$

Análogamente con un entero b tendríamos

$$\begin{array}{l|l} b & m \\ \hline r_b & c_b \end{array} \qquad b = c_b.m + r_b \qquad c_b \in Z,\ \ r_b \in N,\ \ 0 \leqslant r_b \leqslant m-1$$

Por tanto,

$$a - b = c_a.m + r_a - c_b.m + r_b\ = (c_a-c_b)\,.\,m +(r_a - r_b) \qquad \text{con} \qquad c_a- c_b \in Z,\ \ r_a - r_b \in N$$

Es decir, podemos afirmar que

$$a – b = (c_a-c_b)\,.\,m +(r_a - r_b) \qquad \text{con} \qquad c_a- c_b \in Z,\ \ r_a - r_b \in N$$

# Observaciones

**Propiedad**

Si a y b son dos números enteros, a > b, y m es un número natural se verifica que

a y b tienen el mismo resto al dividir por m **si y sólo si** $\exists k \in Z$ *tal que* $a - b = km$

*Demostración*

Por la transparencia anterior sabemos que si

$a = c_a.m + r_a \quad c_a \in Z, \; r_a \in N, \quad 0 \leq r_a \leq m-1$ y

$b = c_b.m + r_b \quad c_b \in Z, \; r_b \in N, \quad 0 \leq r_b \leq m-1$ entonces

$$a - b = (c_a - c_b) \, . \, m + (r_a - r_b) \qquad \text{con} \qquad c_a - c_b \in Z, \quad r_a - r_b \in N$$

$\longrightarrow$) **Supongamos que a y b tienen el mismo resto al dividir por m,** es decir, $r_a = r_b$, entonces

$$a - b = (c_a - c_b) \, . \, m$$

Como $c_a$, $c_b \in Z$ entonces $c_a - c_b \in Z$,

si llamamos $k = c_a - c_b$,

**Obtenemos** el resultado buscado $\exists k \in Z$ **tal que** $a - b = k\,m$

# Observaciones

**Propiedad**

Si a y b son dos números enteros, a > b, y m es un número natural se verifica que

a y b tienen el mismo resto al dividir por m **si y sólo si** $\exists k \in Z$ *tal que* $a - b = km$

*Demostración*

Por la transparencia anterior sabemos que si

$a = c_a.m + r_a \qquad c_a \in Z,\ r_a \in N,\ 0 \leq r_a \leq m\text{-}1$ y

$b = c_b.m + r_b \qquad c_b \in Z,\ r_b \in N,\ 0 \leq r_b \leq m\text{-}1$ entonces

$$a - b = (c_a - c_b) . m + (r_a - r_b) \qquad \text{con} \quad c_a - c_b \in Z,\ \ r_a - r_b \in N$$

$\longleftarrow$) **Supongamos que** $\exists k \in Z$ ***tal que*** $a - b = km$, entonces podemos afirmar que

$$k.m = ( c_a - c_b) . m + ( r_a - r_b) \text{ de donde}$$

$$( k - ( c_a - c_b) ) . m = r_a - r_b \quad \text{con} \quad k - ( c_a - c_b) \in Z,\ 0 \leq r_a \leq m\text{-}1,\ 0 \leq r_b \leq m\text{-}1$$

# Observaciones

**Propiedad**

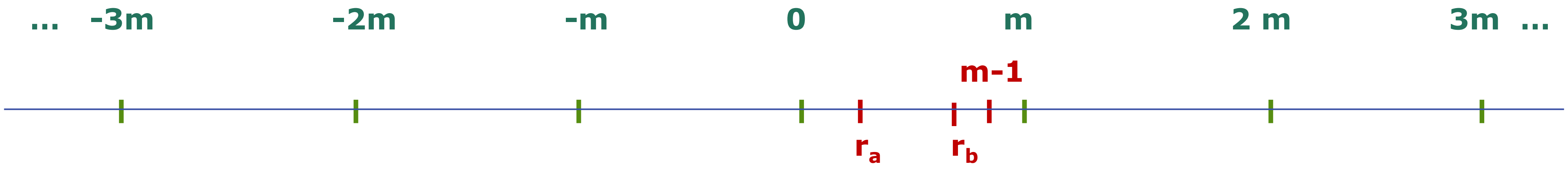
Si a y b son dos números enteros, a > b, y m es un número natural  se verifica que

a  y  b tienen el mismo resto al dividir por m **si y sólo si** $\exists k \in Z$ *tal que* $a - b = km$

*Demostración*

$\longleftarrow$) **Supongamos que $\exists k \in Z$ *tal que* $a - b = km$**, entonces podemos afirmar que

$$(k - (c_a - c_b)) \cdot m = r_a - r_b \quad \text{con} \quad k - (c_a - c_b) \in Z, \ 0 \leqslant r_a \leqslant m\text{-}1, \ 0 \leqslant r_b \leqslant m\text{-}1$$




Por tanto, $r_a - r_b = 0$ , es decir, $r_a = r_b$

**Hemos obtenido** el resultado buscado, **a y b tienen el mismo resto al dividir por m**

# Ejemplo

Consideremos en el conjunto de los números enteros Z, la siguiente relación binaria:

a R b $\leftrightarrow$ a y b tienen el mismo resto al dividir por 3

$$\left(\text{i.e.,}\quad \begin{array}{l|l} a & \underline{3} \\ r & c_a \end{array} \quad y \quad \begin{array}{l|l} b & \underline{3} \\ r & c_b \end{array}\right)$$

$\leftrightarrow$ a – b es múltiplo de 3 ( i.e., $\exists k \in Z$ *tal que* $a - b = 3.k$)

# Relaciones de congruencia

Dado un número entero positivo m, m>1, definimos, en el conjunto de los números enteros Z, la siguiente relación binaria:

a **R** b $\leftrightarrow$ a y b tienen el mismo resto al dividir por m

$\leftrightarrow$ a - b es un múltiplo de m

*(i.e., $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $a-b=km$ )*

- R es una relación de equivalencia, a la que se denomina **relación de congruencia módulo m.**

Notación

- Al conjunto cociente Z/R lo denotamos por $Z_m$

  Si [a] es la clase de equivalencia del número entero a, entonces

  $Z_m$ = { [0], [1], [2], … ,[m -1] }

- Para esta relación, en lugar de a R b se escribe

  $a \equiv b$ (m) o $a \equiv b$ (mod m)

  y se lee «**a es congruente con b módulo m**».