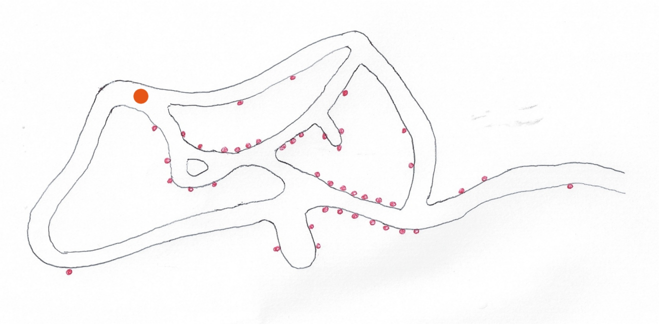
# Prácticas de Matemática Discreta: Introducción a la teoría de grafos

## Sesión 4
## Problema del Cartero Chino

# Planteamiento del problema

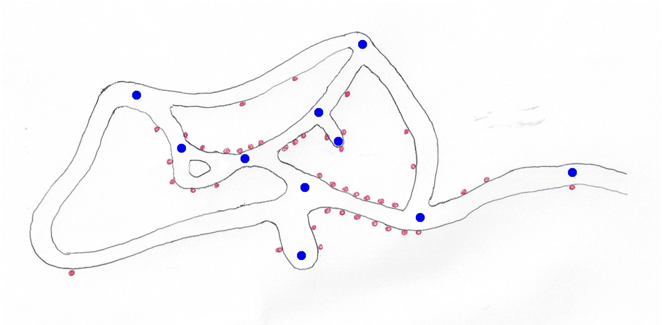
Un cartero rural sale de la central de correos (que se encuentra, aproximadamente, en el lugar del plano señalado por el punto naranja) y debe repartir el correo por todas las casas del pueblo, volviendo finalmente a la central. ¿Qué recorrido ha de hacer para cumplir con su cometido en el menor tiempo posible?



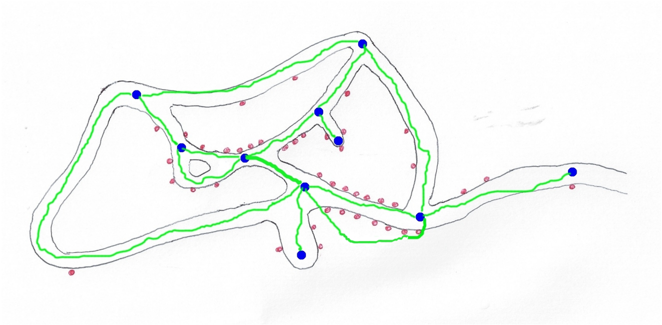
Hemos representado mediante puntos rojos las entradas de todas las viviendas del pueblo.

# Modelización usando teoría de grafos

El objetivo consiste en representar la situación mediante un grafo que me permita interpretar nuestro problema en términos de teoría de grafos. Los vértices del grafo representarán las intersecciones entre las calles:

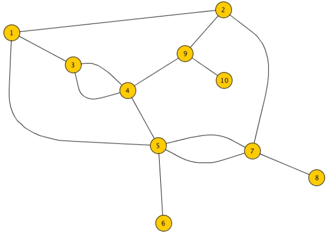


Y las aristas representarán los diferentes tramos de calles:



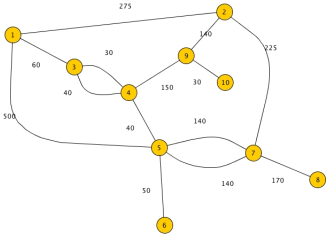
OBSERVACIÓN: Si una calle sólo posee portales de viviendas sólo en uno de sus lados, la representaremos mediante una sola arista (ya que, para repartir las cartas, el cartero sólo necesita recorrerla una vez). Lo mismo ocurre si la calle posee portales a ambos lados, pero se trata de una calle muy corta (es coherente que el cartero pueda repartir las cartas recorriéndola de una sola vez en zig-zag). Sin embargo, si una calle es larga y tiene portales en ambos lados, es mejor repartir las cartas primero en un lado y luego en otro. Se recorrería, así, dos veces y, por tanto, debería representarse mediante dos aristas.

Se tiene, por tanto, el siguiente grafo:




Si el grafo fuera euleriano, un camino euleriano cerrado sería la solución al problema (se recorrerían todas las calles exactamente una vez, llegando al punto de partida). Sin embargo no lo es, puesto que no todos los vértices del grafo son de grado par. Por tanto, en el recorrido buscado, deberán recorrerse algunas calles (aristas) más de una vez procurando, eso sí, que las “repeticiones” nos ocupen el menor **tiempo** posible. Como el factor tiempo es relevante en este problema, deberemos ponderar las aristas del grafo con el tiempo que se tarda en recorrerlas (o con su **longitud**, que es directamente proporcional al tiempo).

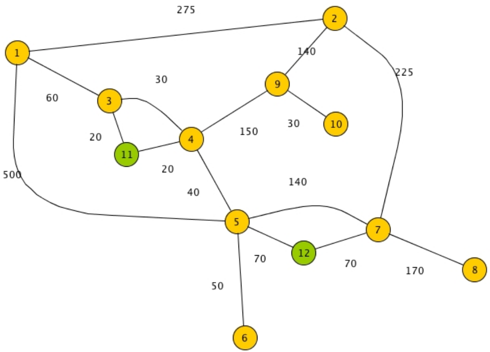
Ponderando cada arista con la longitud del tramo de calle que le corresponde, tenemos el siguiente grafo ponderado (que nos proporciona una información añadida):




Para resolver el problema podemos proceder de manera similar al algoritmo de cálculo de un camino euleriano abierto: se añadirán algunas aristas "ficticias" hasta que todos los vértices del grafo tengan grado par para "eulerizar" el grafo (es decir, convertirlo en uno euleriano). Una vez hecho esto aplicaremos el algoritmo de Hierholzer para calcular un camino euleriano cerrado. Obviamente la suma de los pesos de las aristas ficticias que se añadan ha de ser la menor posible.

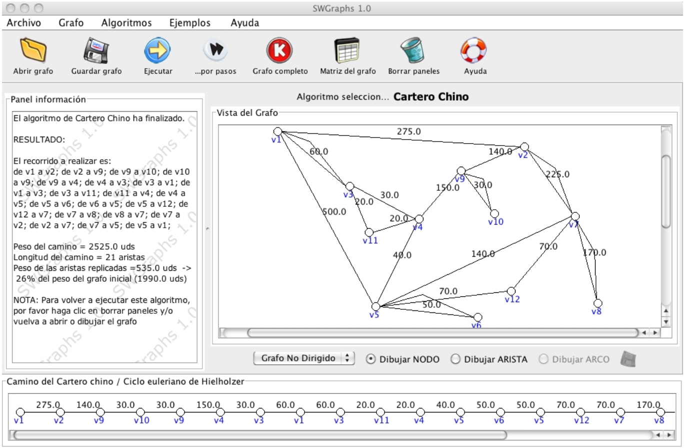
**No entraremos en los detalles de este algoritmo. Nos limitaremos a modelizar el problema y dejaremos que el "trabajo sucio" lo realice SWGraphs**.

Como SWGraphs no admite aristas paralelas, si entre dos vértices hay dos aristas "desdoblaremos" una de ellas añadiendo un vértice ficticio "en medio" y convirtiéndola en dos aristas "ficticias" **del mismo peso** (la mitad del peso de la arista inicial):



# Resolución

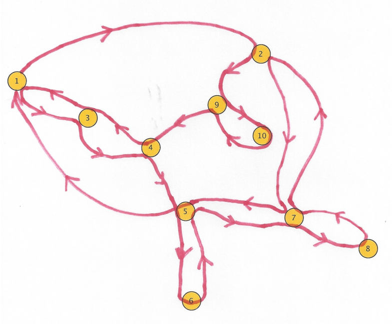
Introduciremos el grafo ponderado en SWGraphs y le aplicaremos el algoritmo “Cartero chino”:




En la parte izquierda de la pantalla (y también en la parte inferior) aparece el camino que debe recorrer el cartero para dedicar el menor tiempo posible, así como la distancia total recorrida.

# Solución

Más explícitamente, el recorrido será el siguiente:




Observa que hay calles que se recorren dos veces.

# Síntesis

El **problema del cartero chino** consiste en, dado un grafo ponderado conexo, encontrar un camino cerrado de peso mínimo que recorra todas las aristas del grafo (puede que más de una vez).

Si el grafo es euleriano, la solución se obtiene calculando un camino euleriano cerrado mediante el algoritmo de Hierholzer. En caso contrario, habrá aristas que deberán recorrerse más de una vez.

Como este problema fue estudiado por el matemático chino Meigu Guan en 1962, se ha popularizado con el nombre de **problema del cartero chino**.