

LLIÇÓ 10: MÀTRIS TRIANGULARS. FACTORITZACIONS LU

IDEES CLAU, DEFINICIONS, PROPIETATS, MÈTODES...

Factoritzacions LU

Una *factorització LU estricta* de la matriu quadrada A és la descomposició d'aquesta matriu com un producte $A = LU$ on

1. L és una matriu triangular inferior
2. Totes les entrades de la diagonal principal de L són iguals a 1
3. U és una matriu triangular superior

☞ No sempre hi ha una factorització LU estricta

Factoritzacions LU no estricta

Una *factorització LU no estricta* de la matriu quadrada A és la descomposició d'aquesta matriu com un producte $A = LU$ on

1. L és una permutació de les files d'una matriu triangular inferior
2. L'últim element no nul de cada fila de L és igual a 1
3. U és una matriu triangular superior

☞ Sempre hi ha alguna factorització LU no estricta

Propietats

- La matriu U s'obté aplicant l'algorisme de Gauss
 - ☞ Si la factorització LU és estricta, U s'obté aplicant només operacions elementals del tipus *a una fila sumar-li un múltiple d'una fila anterior*
- La matriu L és invertible

Càlcul simultani de les matrius

Per a calcular B i T simultàniament,

$$\left[A \mid I \right] \xrightarrow{\text{Operacions elementals}} \left[B \mid T \right]$$

Per a calcular B i L simultàniament, comenceu amb $B = A$, $L = I$

- Si permuteu les files i i j en B , en L heu de permutar les columnes i i j
- Si multipliqueu la fila i per α en B , en L heu de dividir la columna i entre α
- Si a la fila i de B li sumeu α per la fila j , a la columna j de L sumeu-li $-\alpha$ per la columna j

Factorització LU estricta. Càlcul ràpid

Per cada operació elemental que feu sobre les files de A , modifiqueu una entrada de la matriu identitat: Comenceu amb $U = A$, $L = I$

- si a la fila i de U li sumeu α per la fila j , escriviu $-\alpha$ a l'entrada (i, j) de L