Prácticas de Matemática Discreta: Introducción a la teoría de grafos

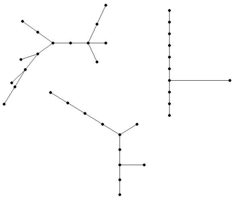
Sesión 5

Conceptos básicos

Definiciones

- La **longitud de un camino** es el número de aristas del camino.
- Un **ciclo** en un grafo es un camino cerrado, simple (es decir, no repite aristas), que no repite vértices (excepto el inicial y el final que coinciden por ser cerrado) y de longitud positiva.
- Un **árbol** es un grafo conexo y acíclico (no contiene ciclos).
- Un **bosque** es un grafo acíclico (es decir, sus componentes conexas son árboles).

El siguiente grafo es un bosque. Cada una de sus 3 componentes conexas es un árbol:



Principales propiedades de los árboles

Definición

En un árbol, los vértices de grado 1 se denominan **hojas**. Los vértices de grado mayor que 1 se denominan **vértices internos**.

Propiedades

1. Los árboles son grafos simples y sin bucles.
2. Un grafo conexo con n vértices es un árbol si y sólo si tiene exactamente $n - 1$ aristas.
3. Todo árbol con más de un vértice tiene, al menos, dos hojas.

Árboles generadores

Definiciones

- Un subgrafo G_1 de un grafo G se dice que es un **subgrafo generador** de G si contiene todos los vértices de G.
- Un **árbol generador** del grafo G es un subgrafo generador de G que además es árbol, es decir, un subgrafo de G que es árbol y contiene todos los vértices de G.

Propiedad

Todo grafo conexo tiene un árbol generador

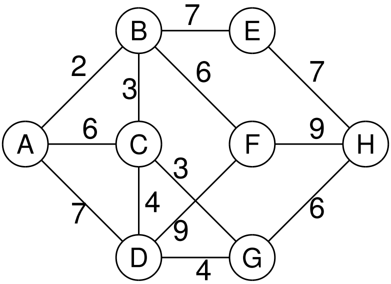
Grafos ponderados

Definición

Un grafo **ponderado** es un grafo en el que cada arista lleva asociado un número llamado peso (o coste).

El **peso** de un grafo es la suma de los pesos de todas las aristas del grafo.

Ejemplo:



Árboles generadores de peso mínimo

Definición

Sea G un grafo ponderado conexo. Un **árbol generador minimal** es un árbol generador de G cuyo peso es menor o igual que el de cualquier otro árbol generador.

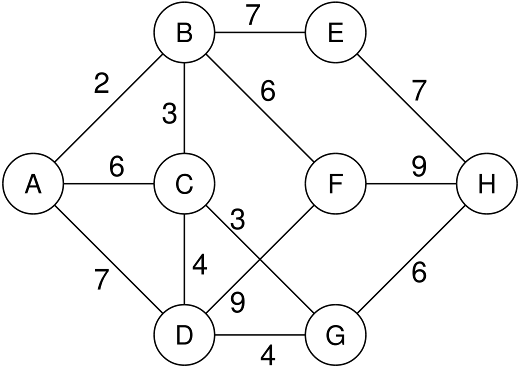
Uno de los algoritmos que se utilizan para encontrar árboles generadores minimales es el de Kruskal, que se basa en la estrategia de ir construyendo un árbol utilizando siempre una arista de peso mínimo de entre las disponibles.

Algoritmo de Kruskal

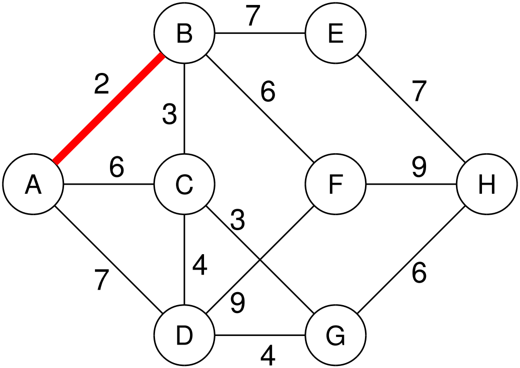
1. Elegimos una arista cualquiera que sea de peso mínimo
2. Vamos añadiendo nuevas aristas de peso mínimo (elegidas entre las que todavía no han sido utilizadas) con la condición de que no se produzca un ciclo. No es necesario que los subgrafos que vamos obteniendo sean conexos.
3. El proceso termina cuando ya no es posible añadir ninguna arista sin obtener un ciclo.

Ejemplo

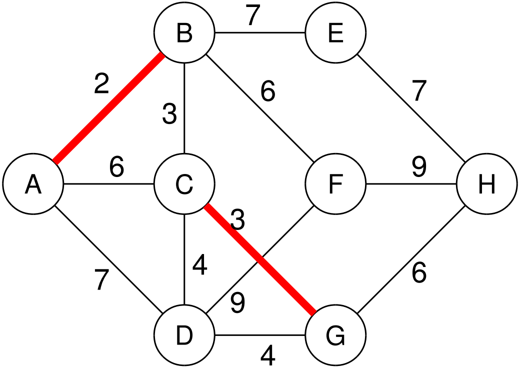
Queremos calcular un árbol generador de peso mínimo en el siguiente grafo:



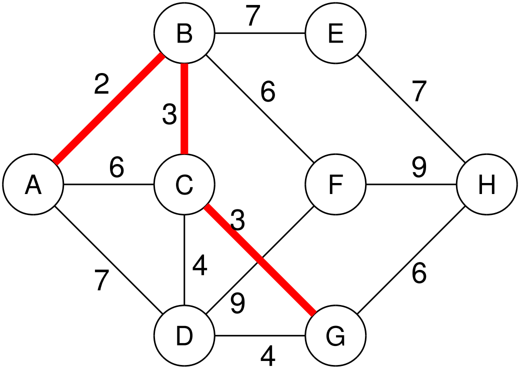
Ejemplo



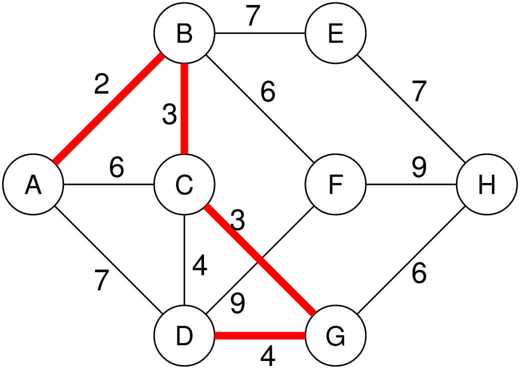
Ejemplo



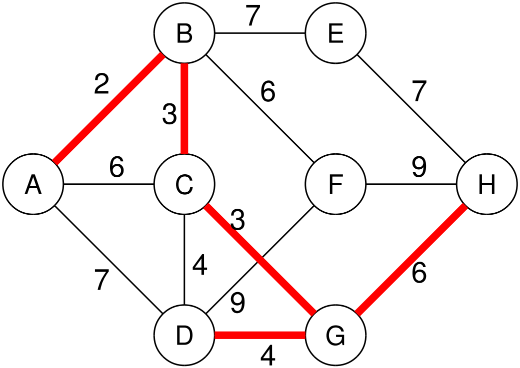
Ejemplo



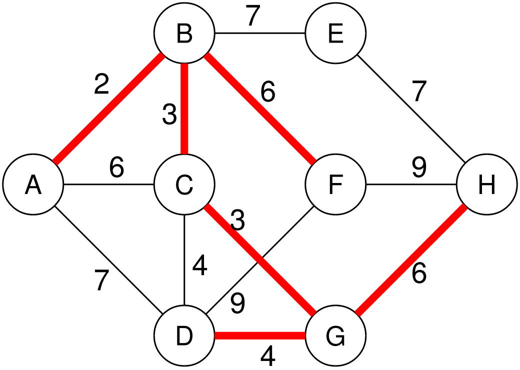
Ejemplo



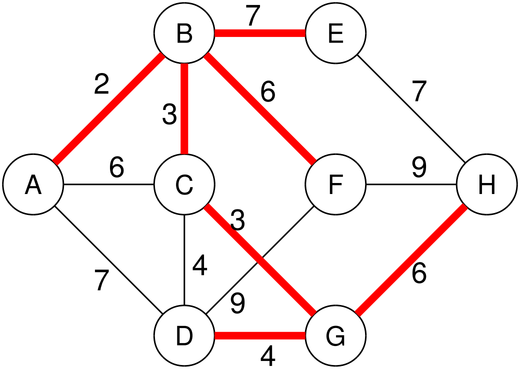
Ejemplo



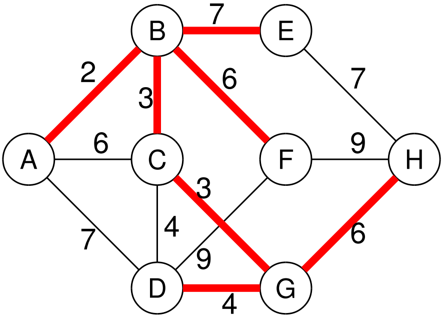
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



Peso del árbol obtenido $= 2 + 3 + 3 + 4 + 6 + 6 + 7 = 31$

Notas

- Si en el algoritmo de Kruskal cambiamos **peso mínimo** por **peso máximo** al elegir las aristas obtenemos un árbol generador maximal del grafo conexo, es decir, un árbol generador del grafo cuyo peso es mayor o igual que el de cualquier otro árbol generador.
- En el caso de que el grafo no sea conexo, se puede aplicar el algoritmo de Kruskal a cada componente conexa para obtener un bosque generador minimal (o maximal).