Definición de camino y tipos de caminos

Un **camino** (de longitud n) en un grafo es una secuencia ordenada

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$$

de manera que:

a) $v_0, v_1, \ldots, v_n$ son vértices del grafo,

b) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son aristas del grafo,

c) v_{i-1} y v_i son los extremos de e_i para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Diremos que v_0 es el *vértice inicial* y que v_n el *vértice final* del camino.

- Un **camino** es **cerrado** si los vértices inicial y final coinciden.
- Un **camino** es **simple** si no contiene aristas repetidas.

Vértices conectados

Dos **vértices** u y v de un grafo G se dice que están **conectados** si existe un camino en el grafo cuyos vértices inicial y final son u y v.

Componentes conexas y grafo conexo

- La **componente conexa** de un vértice v de G es el (sub)grafo cuyos vértices son aquellos que están conectados con v y cuyas aristas son las aristas de G incidentes con estos vértices.

- Un **grafo** es **conexo** si sólo tiene 1 componente conexa, es decir, si dos vértices cualesquiera del grafo están conectados.

Caminos y grafos eulerianos

Definición

- Un camino en un grafo se dice que es un **camino euleriano** si es simple (es decir, no repite aristas) y contiene a todas las aristas del grafo.
- Un **grafo** es **euleriano** si contiene un camino euleriano cerrado.

Existencia de un camino euleriano cerrado

Teorema de Euler (parte 1)

Sea G un grafo conexo. G es un grafo euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

Teorema de Euler (parte 2)

Sea G un grafo conexo que no es euleriano. Entonces G contiene un camino euleriano no cerrado si y sólo si G tiene exactamente dos vértices de grado impar.

1.

Consideremos el grafo $G = (V, A, \phi)$, cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, el de aristas, $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ y la función de incidencia,

$$\begin{array}{llll} \phi(a_1) = \{v_1, v_2\} & \phi(a_2) = \{v_1, v_3\} & \phi(a_3) = \{v_1, v_4\} & \phi(a_4) = \{v_1, v_5\} \\ \phi(a_5) = \{v_2, v_3\} & \phi(a_6) = \{v_2, v_4\} & \phi(a_7) = \{v_2, v_5\} & \phi(a_8) = \{v_3, v_4\} \end{array}$$
$$\phi(a_9) = \{v_3, v_5\} \quad \phi(a_{10}) = \{v_3, v_5\}$$

Contesta las siguientes cuestiones justificando tu respuesta:

a) ¿Es un grafo simple?

b) ¿Tiene lazos (o bucles)?

c) ¿Cuál es la lista de los grados?

d) ¿ Es completo?

e) ¿Es un grafo regular?

f) ¿Es conexo?

g) ¿Es euleriano?

2

Dibuja el grafo correspondiente. Si es euleriano encuentra un camino euleriano.

3
. Determina si las siguientes listas pueden corresponder o no a las listas de los grados de todos los vértices de un grafo simple y sin bucles. En caso afirmativo, dibuja un grafo con dichas características y, en caso contrario, justifica porqué dicho grafo no puede existir.

$7,6,5,4,3,3,2$ $6,6,5,4,3,3,2$ $6,2,2,3,3,3,3$