Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de SIMPLEX REVISADO

Nombre y apellidos:_____________________________________e-mail:____________________

Ejercicio 1 3,5 puntos

Con el fin de hacer frente a un incremento imprevisto de la demanda, una empresa se plantea la posibilidad de ampliar temporalmente la capacidad de producción de algunas de sus factorías.

En concreto, los clientes 1 y 2 demandan exactamente 2.000 y 3.000 toneladas de producto. La tabla siguiente muestra, para cada una de las cinco factorías, el stock disponible actualmente, el coste que tendría ampliar temporalmente su capacidad, y el incremento productivo que supondría dicha ampliación, en caso de realizarse.

	Stock disponible (toneladas)	Coste de la ampliación (euros)	Incremento productivo que supondría la ampliación (toneladas)
Factoría 1	400	50.000	500
Factoría 2	300	60.000	1.000
Factoría 3	200	70.000	1.500
Factoría 4	100	80.000	2.000
Factoría 5	0	90.000	2.500

Los costes de envío de la mercancía desde cada factoría a cada cliente se muestran en la siguiente tabla.

Costes de envío (euros/tonelada)	Cliente 1	Cliente 2
Factoría 1	1.000	5.000
Factoría 2	1.500	4.000
Factoría 3	2.000	3.000
Factoría 4	2.500	2.000
Factoría 5	3.000	1.000

a) Formula un modelo lineal (indicando claramente variables, función objetivo y restricciones) que permita a la empresa conocer la forma más barata de hacer frente a los pedidos de los clientes 1 y 2, utilizando el stock disponible y el incremento productivo generado por las ampliaciones que se lleven a cabo. **[1,25 puntos]**

Explica qué hay que modificar, eliminar o añadir en el modelo del apartado (a) para que incluya las siguientes condiciones adicionales, teniendo en cuenta que el modelo resultante debe continuar siendo lineal, en cada caso:

b) Pueden realizarse, como mucho, tres de las cinco ampliaciones. **[0,5 puntos]**

c) La empresa se plantea enviar al cliente 2 una cantidad de producto inferior a la demandada (hasta un máximo de 200 toneladas menos). Se sabe que, en caso de que la demanda total no satisfecha sea menor de 50 toneladas, cada tonelada que se deje de servir a este cliente supondrá un coste de 1.900 euros para la empresa (en concepto de pérdidas de ingresos y penalización por demanda no satisfecha), mientras que, en el caso de que la demanda total no satisfecha supere esta cantidad, cada tonelada que se deje de servir a este cliente supondrá un coste de 2.000 euros. **[1 punto]**

d) Si se realizan las ampliaciones 1 y 2 (las dos), el coste total conjunto de las dos ampliaciones será de 100.000 euros (es decir, 10.000 euros inferior a la suma de lo que cuesta cada una por separado). **[0,75 puntos]**

Ejercicio 2 — 3 puntos

Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{\textit{Min}} & & z = 20x_1 + 30x_2 + 16\,x_3 \\ \textbf{\textit{s.a:}} & [R1] & \frac{5}{2}x_1 + 3\,x_2 + x_3 \geq 3 \\ & [R2] & x_1 + 3\,x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución óptima se incluye en la siguiente tabla,

V. Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	2/3	-1/3	2/3
x_3	-1	1	1
$c_B^t\, B^{-1}$	4	6	Z = 36

a) Calcula el intervalo de análisis de sensibilidad del coeficiente en la función objetivo de x_1. ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? **[1,5 puntos]**

b) Calcula el coste de oportunidad asociado a la restricción [R2] así como el intervalo de análisis de sensibilidad del segundo miembro de dicha restricción. ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? **[1,5 puntos]**

Ejercicio 3 3,5 puntos

Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{Min} & \boldsymbol{z = x_1 - 2x_2 + 2x_3} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{[R1]\ \ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4} \\ & \boldsymbol{[R2]\ \ x_1 - x_2 - x_3 \ge 3} \\ & \boldsymbol{x_1, x_2, x_3 \ge 0\ y\ enteras} \end{array}\right\} (P),$$

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	1/2	-1/2	1/2
x_1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t\ B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

a) Aplica el algoritmo de Bifurcación y Acotación (B&B) hasta encontrar la **primera solución factible** del problema (P). Recorre el árbol de soluciones utilizando la **técnica de la mejor cota (en anchura).** Comenzar bifurcando la variable X1 y, en cada nodo, empezar acotando inferiormente (≥) las variables.

Dibuja el árbol de soluciones generado y en cada nodo, indica el valor de las variables decisión y de la función objetivo. **[2,25 puntos]**

b) La solución encontrada en a), ¿es óptima? Justifica tu respuesta. En caso de que no lo sea, explica cómo continuaría el proceso de búsqueda de la solución óptima. **[0,75 puntos]**

c) Explica cómo habría sido el proceso de búsqueda en caso de haber aplicado la técnica del **nodo de creación más reciente (en profundidad)**. ¿Cuál habría sido en este caso la solución óptima? **[0,5 puntos]**

SOLUCIÓN

1.

a)

Variables

$\delta_i =$ Binaria. Vale 1 si se realiza la ampliación de la factoría i; vale 0 en caso contrario.

$x_{ij} =$ Cantidad de producto que se enviará desde la factoría i al cliente j (toneladas).

$i = 1, \dots, 5; \quad j = 1, 2.$

Función objetivo

Min $\quad z = \begin{aligned}[t] &50\delta_1 + 60\delta_2 + 70\delta_3 + 80\delta_4 + 90\delta_5 + \\ &x_{11} + 5x_{12} + 1{,}5x_{21} + 4x_{22} + 2x_{31} + 3x_{32} + \\ &2{,}5x_{41} + 2x_{42} + 3x_{51} + x_{52} \end{aligned}$ (miles de euros)

Restricciones

Cada factoría puede enviar una determinada cantidad como máximo, en función de si se realiza o no la ampliación:

[Oferta 1] $\quad x_{11} + x_{12} \leq 400 + 500\delta_1$

[Oferta 2] $\quad x_{21} + x_{22} \leq 300 + 1.000\delta_2$

[Oferta 3] $\quad x_{31} + x_{32} \leq 200 + 1.500\delta_3$

[Oferta 4] $\quad x_{41} + x_{42} \leq 100 + 2.000\delta_4$

[Oferta 5] $\quad x_{51} + x_{52} \leq 2.500\delta_5$

Cada cliente debe recibir la cantidad de producto que solicita:

[Demanda 1] $\quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 2000$

[Demanda 2] $\quad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 3000$

Naturaleza de las variables:

$x_{ij} \geq 0$, para todo i y todo j.

δ_i binaria, para todo i.

b)

Añadimos la siguiente <u>restricción</u>: $\quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 \leq 3$

c)

Añadimos las siguientes variables:

$h_{21} =$ Demanda del cliente 2 no satisfecha, con tarifa 1 (toneladas).

$h_{22} =$ Demanda del cliente 2 no satisfecha, con tarifa 2 (toneladas).

$\delta_{C2} =$ Binaria. Vale 1 si se activa la tarifa 2 para la demanda no satisfecha del cliente 2; vale 0 en caso contrario.

Modificamos la función objetivo para añadir los costes de la demanda no satisfecha:

$$z = \cdots + 1{,}9h_{21} + 2h_{22}.$$

Modificamos la restricción de la demanda del cliente 2:

[Demanda 2] $\quad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + h_{21} + h_{22} = 3000$

La tarifa 1 de demanda no satisfecha se activa sólo si dejamos de servir entre 0 y 50 unidades; a partir de ahí, hasta 200, se activa la 2 (PARA TODAS LAS UNIDADES no servidas). Por tanto:

[Tarifa 1] $\quad h_{21} \leq 50(1 - \delta_{C2})$

[Tarifa 2] $\quad 50\delta_{C2} \leq h_{22} \leq 200\delta_{C2}$

Naturaleza de las nuevas variables:

$$h_{21}, h_{22} \geq 0$$

δ_{C2} binaria

d)

Añadimos la siguiente variable:

$\delta_{12} =$ Binaria. Vale 1 si se realizan las dos ampliaciones 1 y 2; vale 0 en caso contrario.

Modificamos la función objetivo añadiendo el siguiente término:

$$z = \cdots - 10\delta_{12},$$

lo que representa el hecho de que, en caso de realizar las dos ampliaciones, el coste se reduce en 10.000 euros respecto a la suma de los dos costes por separado.

Añadimos la siguiente restricción:

[Ampliaciones 1 y 2] $\quad 2\delta_{12} \leq \delta_1 + \delta_2$

Esta restricción tiene el efecto que buscamos: si $\delta_{12} = 1$ (es decir, si queremos 'tener derecho al descuento'), entonces necesariamente se tiene que cumplir $\delta_1 + \delta_2 = 2$ (es decir, se tienen que realizar las dos ampliaciones).

NOTA: Debido al papel que tiene δ_{12} en la función objetivo, la restricción [Ampliaciones 1 y 2] que hemos añadido es suficiente. También podría haberse expresado de la siguiente forma, más 'completa', aunque el lado derecho NO es estrictamente necesario en este caso:

[Ampliaciones 1 y 2] $\quad 2\delta_{12} \leq \delta_1 + \delta_2 \leq 1 + \delta_{12}.$

Naturaleza de la nueva variable añadida:

δ_{12} binaria.

MODELIZACIÓN ALTERNATIVA (apartado (d))

Añadimos la siguiente variable:

$\delta_{12} =$ Binaria. Vale 1 si se realizan las dos ampliaciones 1 y 2; vale 0 en caso contrario.

Modificamos el significado de las variables δ_1 y δ_2:

$\delta_1 =$ Binaria. Vale 1 si se realiza la ampliación de la factoría 1, pero NO la 2; vale 0 en cualquier otro caso.

$\delta_2 =$ Binaria. Vale 1 si se realiza la ampliación de la factoría 2, pero NO la 1; vale 0 en cualquier otro caso.

Modificamos la función objetivo añadiendo el siguiente término:

$$z = \cdots + 100\delta_{12}.$$

Modificamos las restricciones siguientes:

[Oferta 1] $\quad x_{11} + x_{12} \leq 400 + 500(\delta_1 + \delta_{12})$

[Oferta 2] $\quad x_{21} + x_{22} \leq 300 + 1.000(\delta_2 + \delta_{12})$

Añadimos las siguientes restricciones:

[Ampliación 1] $\quad \delta_1 + \delta_{12} \leq 1$

[Ampliación 2] $\quad \delta_2 + \delta_{12} \leq 1$

Naturaleza de la nueva variable añadida:

δ_{12} binaria.

2.

a)

Como X1 es variable no básica, una modificación en su coeficiente en la función objetivo afectará solo a su Cj-Zj. La solución actual seguirá siendo solución óptima siempre que Cj-Zj $\geq 0 \forall j$, es decir:

$$C_1 - Z_1 = C_1 - (4 \cdot 5/2 + 6 \cdot 1) = C_1 - 16 \geq 0 \rightarrow C_1 \geq 16$$

Por tanto, mientras $C_1 \in [16, +\infty)$:

- La solución óptima No cambia (es decir las variables básicas seguirán con el mismo valor)
- No cambia el valor de la función objetivo puesto que x1 es Variable No Básica en la solución óptima.
- En los límites del intervalo existen soluciones alternativas.

b)

El coste de oportunidad de la Restricción [R2] corresponde al Cj-Zj de la variable de holgura de la restricción. Sea h_2 la variable de holgura de la restricción [R2], el coste de oportunidad es:

$Zh_2 = c_B^t B^{-1} a h_2 = (4, 6)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -6$; $Ch_2 - Zh_2 = 6$

Teniendo en cuenta que se trata de una restricción de tipo ≥, el coste de oportunidad es desfavorable a la función objetivo, es decir, el incremento del lado derecho de la restricción implicará un empeoramiento (incremento) del valor de la función objetivo igual a 6.

El análisis de sensibilidad del segundo miembro de una restricción determina el intervalo en el que puede variar dicho coeficiente y mantenerse constante el coste de oportunidad de la restricción. Esto ocurrirá mientras la solución óptima actual siga siendo factible, es decir:

$$X_B'^* = B^{-1} b' = B^{-1}(b+\Delta b) = X_B^* + B^{-1}\Delta b \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + B^{-1}\Delta b = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x_2' = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Delta b_2 \geq 0 \rightarrow \Delta b_2 \leq 2$$

$$x_3' = 1 + \Delta b_2 \geq 0 \rightarrow \Delta b_2 \geq -1$$

Dado que b2 = 4 + Δb_2, entonces $\Delta b_2 = b_2 - 4$ por tanto,

Mientras b2 $\in$ [3,..., 6]:

- El coste de oportunidad se mantiene constante e igual a –6
- La solución óptima y el valor de la función objetivo cambian puesto que la restricción [R2] es limitativa en la solución óptima

- Se mantiene la misma solución básica.

3.

a)

P0:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	1/2	-1/2	1/2
x_1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t\ B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

P0: X1=7/2; X2=1/2; Z=5/2 (Z*=+inf)

P1=P0(X1,X2,X3,X4,X5) + X1 ≥ 4; X1 = 4 +l_1 ; l_1≥ 0

- Necesitamos incrementar X1, para ello VNB en P0: X3, X4 y X5:

$$Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix};\ Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};\ Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

  - Para incrementar el valor de X1 necesitamos αij<0, por tanto nos sirven tanto X3 como X5. Aplicamos el criterio del dual para escoger la variable JE:

$$\min \left\{ \left| \frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}} \right| \ \middle|\ y_{xk} < 0 \right.$$

$$z_{x3} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x3} = (-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1/2 \rightarrow c_{x3} - z_{x3} = 5/2$$

$$z_{x5} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x5} = (-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3/2 \rightarrow c_{x5} - z_{x5} = 3/2$$

entonces, min{5/3, 3}=5/3 →**JE:x3**

Modelo Equivalente con x1=4+l1

MIN Z= 4+l1 -2x2 + 2 X3
l_1 + X_2– 2x3 ≤ 0
l_1- X_2 –X_3≥ -1

  - B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + C_B^t X_B = 4 + (-2,2) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 10/3$$

P1 (11, x2, x3, x4, x5)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	1/3	-2/3	2/3
X3	-1/3	-1/3	1/3
$c_B^t B^{-1}$			**10/3**

P1: X1=4; X2=1/3; Z=10/3; Z*=+inf

Como utilizamos la técnica de la mejor cota, debemos volver a P0 y generar y resolver P2: P0 + $X1 \leq 1$

P2 = P0 + X1≤3; X1=3-u1; u1 ≤3

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X3, X4 y X5.

- $Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X1 necesitamos $\alpha ij>0$, por tanto sólo nos sirve X4 →**JE=X4.**
- El pivote del cambio de base será ½.
- Sale de la base la variable que alcanza la cota, X1 que será reemplazada en el modelo por u1.

Modelo Equivalente con $x1=3-u_1$

MIN Z = 3-u1 -2x2 + 2 X3
$-u_1 + X_2 - 2x3 \leq 1$
$-u_1 - X_2 - X_3 \geq 0$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Z = 3 + C_B^t\, X_B = 3 + (-2,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 < Z^*$, **actualizamos $Z^*=3$**

P1: (u1, x2, x3, x4)

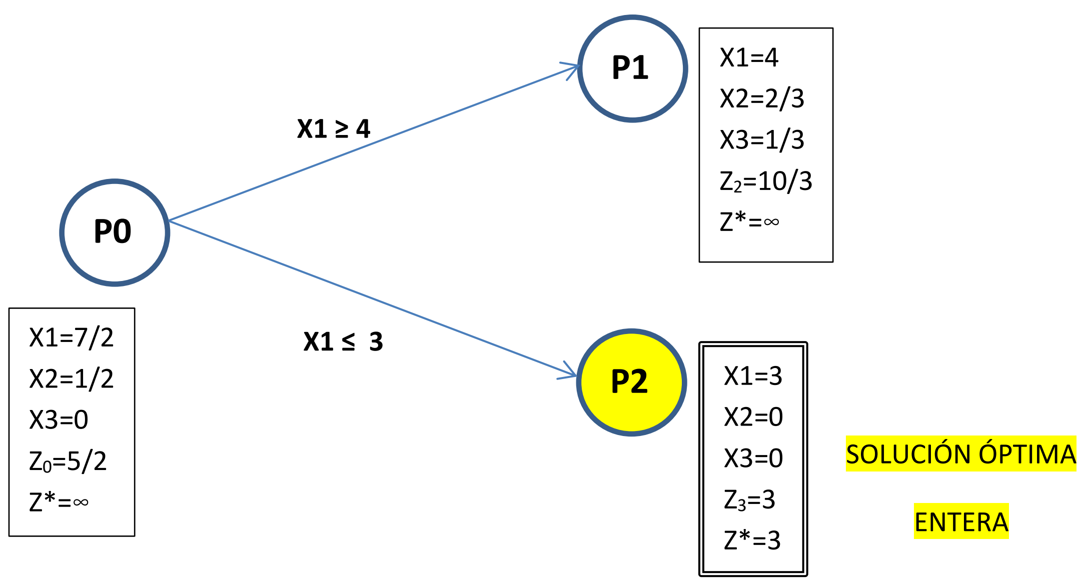
V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	0	-1	0
X4	1	1	1
$c_B^t\, B^{-1}$			**3**

La solución en P2 es:

X1=3; X2=0; X3=0 y Z=3.

Dado que tanto X1 como X2 y X3 toman valor entero, la solución de P2 es solución entera y por tanto solución factible para el problema (P).

El árbol de soluciones que se ha generado es el siguiente:



b)

Como la solución obtenida en P2 es entera, es una hoja del árbol de soluciones. El único nodo que queda abierto es P1, pero como el valor de la función objetivo es peor (mayor) al de la mejor cota ($Z1=10/3 > Z^*=3$) , la solución en P1 se poda de forma que la solución actual (la de P2) es la solución óptima.

c)

En caso de haber aplicado la técnica del nodo de creación más reciente el proceso de búsqueda habría seguido a partir de P_1 hasta alcanzar una hoja. En ese momento habríamos empezado el backtracking hasta llegar de nuevo a P_0 y resolver el problema P_2.

La solución óptima sería la misma que la obtenida en el apartado a).