Prácticas de Matemática Discreta: Introducción a la teoría de grafos

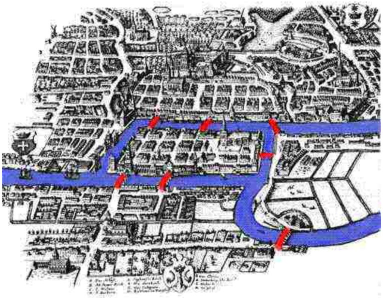
Sesión 1: Introducción

Leonard Euler (1707-1783)

La teoría de grafos está considerada como una de las ramas más modernas de las Matemáticas. No fue hasta el año 1936 cuando apareció publicado el primer texto que desarrollaba la Teoría de Grafos como una teoría madura. Sin embargo, sus orígenes se remontan a los tiempos de Leonard Euler, quien resolvió el famoso **problema de los puentes de Königsberg**...

Problema de los puentes de Königsberg

Por la antigua ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia) pasa el río Pregel. En la época de Euler existían 7 puentes que comunicaban las islas y las dos orillas del río:

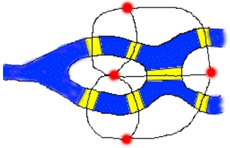


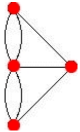
Problema

¿Es posible recorrer los 7 puentes sin pasar dos veces por el mismo y volviendo al punto de partida?

Interpretación del problema usando "grafos"

Euler enfocó el problema representando cada parte de tierra mediante un punto y cada puente, mediante una línea que une dos puntos:





Con esta nueva representación, el problema de los puentes de Königsberg se reduce a la siguiente cuestión:

Problema

¿Es posible recorrer ese gráfico con un trazo continuo, sin repetir las líneas y volviendo al punto de partida?

En 1736, Euler publicó un artículo en el que resolvía este problema en el caso general. Ese trabajo se considera el nacimiento de la Teoría de Grafos.

Concepto de grafo

Se llama grafo (no dirigido) a una terna (V, A, f) donde:

1. V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se denominan vértices.
2. A es un conjunto finito cuyos elementos se denominan aristas.
3. f es una asignación (llamada aplicación de incidencia) que a cada arista e le asigna un subconjunto de vértices formado por 1 ó 2 elementos (es decir, $f(e) = \{v_i, v_j\}$ o $f(e) = \{v_i\}$, donde v_i y v_j son vértices). A esos vértices se le llama *extremo/s* de la arista.

Representación gráfica

Los vértices se representan gráficamente como puntos del plano y cada arista como una curva que une sus extremos.

Ejemplo

Consideremos el grafo dado por la terna $G = (V, A, f)$, donde

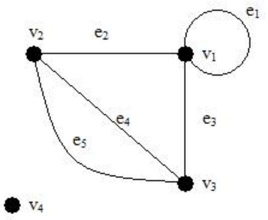
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

y la aplicación de incidencia f está definida de la siguiente manera:

$$f(e_1) = \{v_1\}, \;\; f(e_2) = \{v_1, v_2\}, \;\; f(e_3) = \{v_1, v_3\},$$

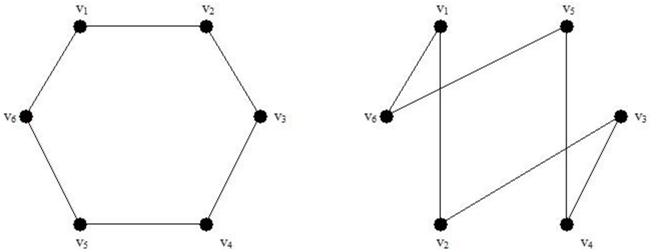
$$f(e_4) = \{v_2, v_3\}, \;\; f(e_5) = \{v_2, v_3\}$$

Este grafo puede representarse por medio del siguiente diagrama:



Distintas representaciones de un mismo grafo

Observemos que un mismo grafo admite distintas representaciones gráficas:

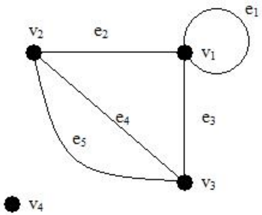


Aclaración

Más adelante estudiaremos otro tipo de grafos: los grafos dirigidos. Hasta entonces, y mientras no se indique lo contrario,

> cuando hablemos de grafo nos referiremos a
>
> grafo no dirigido.

Ejemplo y algunas definiciones



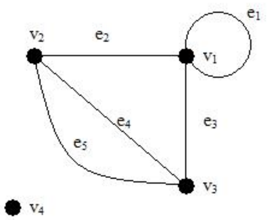
- Dos **vértices** $v, w \in V$ se dice que son ***adyacentes*** si existe una arista e que los une. En el ejemplo, v_1 y v_3 son adyacentes. En este caso diremos también que v_1 y v_3 son ***incidentes con*** e_3, o que e_3 *es incidente con* v_1 *y* v_3.
- Dos **aristas** se dice que son ***paralelas*** si tienen los mismos extremos. En el ejemplo, e_4 y e_5 son aristas paralelas. Un grafo sin aristas paralelas se dice que es ***simple***.
- La arista e_1 es un ***bucle*** (o *lazo*), es decir, una arista que une un vértice consigo mismo.
- v_4 es un ***vértice aislado***, es decir, no es incidente con ninguna arista.

Matriz de adyacencia de un grafo

Definición

Sea $G = (V, A, f)$ un grafo, con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. La **matriz de adyacencia** de G es la matriz cuadrada $M_A = (m_{ij})$ de tamaño $n \times n$ tal que m_{ij} es el número de aristas distintas con extremos v_i y v_j.

Ejemplo:



$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

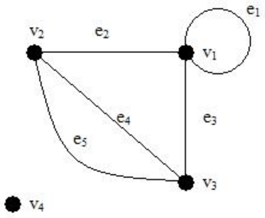
Matriz de incidencia de un grafo

Definición

Sea G un grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ y conjunto de aristas $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. La **matriz de incidencia** de G se define como la matriz $M_I = (m_{ij})$, de tamaño $m \times n$ dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es extremo de } e_j \text{ y } e_j \text{ no es bucle,} \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } e_j, \\ 2 & \text{si } e_j \text{ es un bucle de extremo } v_i. \end{cases}$$

Ejemplo:

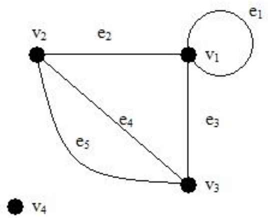


$$M_I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grado de un vértice

Definición

El **grado** de un vértice v, denotado $\deg(v)$, es el número de aristas que inciden en él (contándolas 2 veces cuando son bucles).



En este grafo:

- $\deg(v_1) = 4$
- $\deg(v_2) = 3$
- $\deg(v_3) = 3$
- $\deg(v_4) = 0.$

Grafos ponderados

Definición

Un grafo **ponderado** es un grafo en el que cada arista lleva asociado un número llamado peso (o coste).