Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de Simplex Revisado

Nombre y apellidos:_________________________________e-mail:____________________

1 Una ONG desea instalar varios hospitales de campaña en un país, de manera que la población de las 10 regiones en que se divide dicho país pueda recibir asistencia médica. <u>Es posible instalar hasta tres hospitales en cada región.</u> La tabla siguiente especifica qué regiones recibirían asistencia médica al instalar algún hospital en cada una:

Al instalar un hospital en esta región:	recibirían asistencia estas regiones:
1	1 , 2 , 3 , 7 , 8
2	1 , 2 , 3
3	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7
4	3 , 4 , 5
5	3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 9
6	5 , 6 , 9 , 10
7	1 , 3 , 5 , 7 , 8 , 9
8	1 , 7 , 8 , 9
9	5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10
10	6 , 9 , 10

Las regiones 1, 9 y 10 son las más pobladas, y por ello se establece que deben ser cubiertas por al menos cuatro hospitales, cada una. El resto de regiones han de ser cubiertas por al menos tres hospitales, cada una.

a) Formula un modelo lineal que permita a los responsables de logística de la ONG decidir cuántos hospitales instalar y en qué regiones, de manera que se cubran las necesidades de asistencia médica del país con el mínimo número de ellos. [1,7 puntos]

b) El coste estimado de instalar y mantener un hospital en cualquier región es de 25.000 unidades monetarias (u.m.) al año. En cambio, si se instalan dos o más hospitales en una misma región, dicho coste disminuye hasta las 15.000 u.m. por año (y por hospital) en esa región, por razones logísticas.

Reformula el modelo construido en el apartado (a) para que tenga en cuenta esta nueva condición; el objetivo es ahora minimizar el coste total de la instalación y mantenimiento de hospitales. El modelo resultante debe continuar siendo lineal. [0,8 puntos]

(Puntuación: 2,5 puntos)

2 Dado el siguiente modelo lineal:

MAX 4X1 + 7X2 + 3X3
s.a: [R1] 2X1 + X2 + 2X3 ≤ 30
[R2] X1 + 2X2 + 2X3 ≤ 45
X1, X2, X3 ≥ 0

Cuya solución óptima se incluye en la tabla siguiente :

v.básicas	B^{-1}		x_B
X1	2/3	-1/3	5
X2	-1/3	2/3	20
$c_B^t\, B^{-1}$	1/3	10/3	Z=160

responde a las siguientes cuestiones a partir de la tabla de la solución óptima:

a) Calcula el intervalo de análisis de sensibilidad del coeficiente en la función objetivo de X1. ¿Cuáles son las conclusiones de este análisis? [1 punto]

b) Calcula el coste de oportunidad y el intervalo de análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción [R2]. ¿Cuáles son las conclusiones de este análisis? [1 punto]

c) Determina si sería interesante incluir una nueva variable cuyo coeficiente en la función objetivo es 5 y su vector de coeficientes técnicos es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Justifica la respuesta. [0,5 puntos]

(Puntuación: 2,5 puntos)

3 Una empresa tecnológica fabrica microprocesadores de dos niveles de calidad: alta calidad y calidad estándar. Para producirlos utiliza silicio y germanio, de los que diariamente dispone de 48 kilogramos y 4,5 kilogramos, respectivamente. Para realizar un lote de microprocesadores de alta calidad se necesitan 600 gramos de silicio y 50 gramos de germanio, mientras que en el caso de los microprocesadores de calidad estándar, se necesitan 400 gramos de silicio y 50 gramos de germanio por cada lote. Además, por cada lote de alta calidad se obtiene un beneficio de 70 € y por cada lote de calidad estándar se obtiene un beneficio de 40 €. La empresa no tiene dificultad en vender todo lo que se produce.

a) Plantea un modelo matemático multiobjetivo (indicando claramente variables, funciones objetivo y restricciones) que permita a la empresa maximizar tanto su beneficio como el volumen de producción (cantidad de lotes) diario. [0,5 puntos]

b) Utilizando el método gráfico, obtén la matriz de pagos del problema multiobjetivo planteado en el apartado (a). A partir de la matriz de pagos, identifica el punto ideal y el punto antiideal del problema. Justifica tu respuesta. [0,4 puntos]

c) A partir de la resolución gráfica del apartado b), identifica el conjunto de soluciones eficientes o frontera de Pareto. Justifica tu respuesta. [0,4 puntos]

d) La empresa se está planteando como metas la obtención de al menos 5.500 € de beneficio y la producción de al menos 85 lotes de microprocesadores. Plantea un modelo de programación por metas ponderadas que permita determinar la solución con este nuevo planteamiento, teniendo en cuenta que el cumplimiento de la meta asociada al beneficio es cinco veces más importante que el cumplimiento de la meta asociada a los lotes de producción. [0,7 puntos]

(Puntuación: 2 puntos)

4 Dado el siguiente programa lineal:

MIN Z= X1 - 2X2 +2X3
s.a: X1 + X2 – 2X3 ≤ 4
X1 - X2 – X3 ≥ 3
X1, X2, X3 ≥ 0 y enteras;

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
X2	1/2	-1/2	1/2
X1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t\ B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

a) Calcula la solución óptima entera del problema aplicando el algoritmo de **Bifurcación y Acotación. Para** Recorrer el árbol de soluciones utiliza la **técnica del nodo de creación más reciente (en profundidad).** Comienza bifurcando con respecto a la variable X1 y en cada nodo empieza acotando superiormente (≤) las variables.

Dibuja el árbol de soluciones e indica en cada nodo el valor de las variables decisión y de la función objetivo en la solución correspondiente. [2,5 puntos]

b) Explica cómo habría sido el proceso de búsqueda en caso de haber aplicado la **técnica de la mejor cota (en anchura)**. ¿Cuál habría sido en este caso la solución óptima? [0,5 puntos]

(Puntuación: 3 puntos)

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1:

a)

VARIABLES

Se pide un modelo que permita decidir cuántos hospitales instalar en cada región:

$x_i =$ Cantidad de hospitales a instalar en la región i, $\quad i = 1, \ldots, 10$.

FUNCIÓN OBJETIVO

Minimizar el número de hospitales a instalar:

[Hospitales] $\quad \text{Min } z = x_1 + \cdots x_{10}$ (cantidad de hospitales)

RESTRICCIONES

Restricciones propias de un problema de cubrimiento, teniendo en cuenta que las regiones 1, 9 y 10 requieren estar cubiertas por al menos tres hospitales y el resto por al menos dos:

$$\begin{array}{lr}
[\text{Región } 1] & x_1 + x_2 + x_3 + x_7 + x_8 \geq 4 \\
[\text{Región } 2] & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\
[\text{Región } 3] & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 3 \\
[\text{Región } 4] & x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\
[\text{Región } 5] & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_9 \geq 3 \\
[\text{Región } 6] & x_5 + x_6 + x_9 + x_{10} \geq 3 \\
[\text{Región } 7] & x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 3 \\
[\text{Región } 8] & x_1 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 3 \\
[\text{Región } 9] & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 4 \\
[\text{Región } 10] & x_6 + x_9 + x_{10} \geq 4
\end{array}$$

Como mucho, se puede instalar dos hospitales en cada región:

[Cantidad máxima i] $\qquad x_i \leq 3, \ \forall i$

Naturaleza de las variables:

$$x_i \geq 0 \text{y entera}, \forall i$$

b)

Modificaciones a realizar en el modelo del apartado (a), para adaptarlo a las nuevas condiciones enunciadas en el apartado (b):

VARIABLES

Podemos tratar este apartado como un problema de costes no lineales. Además de las variables ya definidas, añadimos las siguientes variables al modelo del apartado (a):

– x_{i1} = Cantidad de hospitales a instalar en la región i con precio 1.

– x_{i2} = Cantidad de hospitales a instalar en la región i con precio 2.

– δ_i = Binaria. Vale 1 si se activa el precio 2 para la región i; vale 0 en otro caso.

$i = 1, \dots, 10.$

Se mantienen también las variables originales.

FUNCIÓN OBJETIVO

Ahora el objetivo es minimizar el coste total de la instalación de hospitales. Sustituimos la función objetivo del apartado (a) por la siguiente:

$$\text{Min } z = 25\sum_{i=1}^{10} x_{i1} + 15\sum_{i=1}^{10} x_{i2} \text{ (miles de u.m./año)}$$

RESTRICCIONES

Mantenemos las restricciones del apartado (a).

Añadimos las siguientes restricciones para poner en relación las variables nuevas y las originales:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2}, \quad \forall i.$$

Añadimos las siguientes restricciones para asegurarnos de que cada precio sólo se activa cuando corresponde:

$$x_{i1} \leq 2(1 - \delta_i) \qquad \forall i$$

$$2\delta_i \leq x_{i2} \leq 3\delta_i \qquad \forall i$$

(las restricciones [Cantidad máxima i] del apartado (a) podrían ser eliminadas)

Naturaleza de las nuevas variables introducidas en este apartado:

$x_{i1}, x_{i2} \geq 0$ y enteras, $\forall i$ $\qquad$ δ_i binaria, $\forall i$

EJERCICIO 2:

a) A.S. de C1:

Como X1 es VB en la solución óptima un cambio en su coeficiente en la función objetivo afecta a los cj-zj de todas las VNB:

$Cj\text{-}Zj = cj - (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$(c^t_B\, B^{-1}) = (c1, 7) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (2/3c1\text{-}7/3, \text{-}1/3c1\text{+}14/3)$

$Cx3\text{-}Zx3 \le 0 \rightarrow 3 - (2/3c1\text{-}7/3, \text{-}1/3c1\text{+}14/3)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 - (2/3c1\text{+}14/3) \le 0 \rightarrow c1 \ge \text{-}5/2$

$Cx4\text{-}Zx4 \le 0 \rightarrow 0 - (2/3c1\text{-}7/3, \text{-}1/3c1\text{+}14/3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - (2/3c1\text{-}7/3) \le 0 \rightarrow c1 \ge 7/2$

$Cx5\text{-}Zx5 \le 0 \rightarrow 0 - (2/3c1\text{-}7/3, \text{-}1/3c1\text{+}14/3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - (\text{-}1/3c1\text{+}14/3) \le 0 \rightarrow c1 \le 14$

Mientras $7/2 \le c1 \le 14$:

1. La solución actual seguirá siendo óptima.
2. Como X1 es VB el valor de la función objetivo cambia en función del valor de c1: Z=140+5 c1.
3. En los límites, existen soluciones alternativas.

b) Coste de oportunidad de b2:

El coste de oportunidad de la segunda restricción es el valor del Cj-Zj de la variable de holgura asociada.

$Cx5\text{-}Zx5 = 0 - (1/3, 10/3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{-}10/3$; como la restricción es $\le$ el coste de oportunidad de la restricción es favorable al criterio de la función objetivo (en el informe de Lingo aparecerá con signo positivo).

El coste de oportunidad de la restricción será válido mientras no se produzca cambio de base. La base se mantendrá mientras la solución siga siendo factible, por tanto:

$$\mathbf{X_B = B^{-1}\, b} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 - 1/3b2 \\ -10 + 2/3b2 \end{pmatrix}$$

La solución es factible mientras todas las variables tienen valor ≥ 0, es decir,

$X1 = 20-1/3b2 \geq 0 \rightarrow b2 \leq 60$

$X2 = -10 + 2/3b2 \geq 0 \rightarrow b2 \geq 15$

Por tanto, mientras $15 \leq b2 \leq 60$:

1. El coste de oportunidad será constante e igual a 10/3.
2. Cambiará la solución óptima pero no habrá cambio de base.
3. En los valores extremos del intervalo, la solución básica será degenerada.

c) Introducción de una nueva variable:

Para saber si sería interesante la inclusión de la nueva variable debemos calcular su cj-zj y comprobar si la solución actual sigue siendo óptima:

$$C_{nueva}-Z_{nueva} = 5 - (1/3, 10/3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$$

Al considerar la nueva variable la solución actual sigue siendo óptima, por tanto NO interesa su inclusión.

EJERCICIO 3:

a)

VARIABLES:

x1: número de lotes de microprocesadores de alta calidad a fabricar (lotes/día)

x2: número de lotes de microprocesadores de calidad estándar a fabricar (lotes/día)

FUNCIÓN OBJETIVO:

Eff = Max (70x1 + 40 x2 ; x1+x2)

RESTRICCIONES:

[Si] 600x1+ 400x2 ≤ 48000 (gramos)

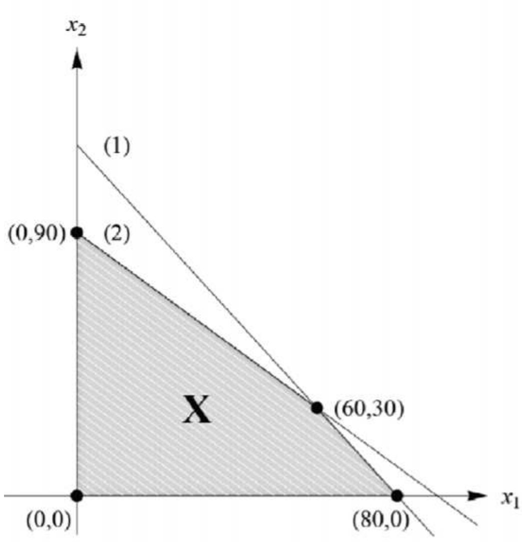
[Ge] 50x1+ 50x2 ≤ 4500 (gramos)

[No_negatividad] x1, x2 ≥ 0

b)

La matriz de pagos es una matriz cuadrada de dimensión igual al número de objetivos. Cada fila de la matriz incluye los valores correspondientes a la optimización de uno de los objetivos. En concreto, la diagonal principal incluye el valor óptimo de cada objetivo mientras que los demás elementos de la fila resultan de evaluar los demás objetivos en la solución óptima del objetivo de esta fila.

Por tanto, para poder obtener los valores de la matriz de pagos, hay que encontrar la solución óptima del problema para cada objetivo. Como se trata de un problema con dos variables decisión, utilizaremos la resolución gráfica:



Evaluamos el valor de cada objetivo en cada solución básica factible:

Solución		$f_i(x)$	
x1	**x2**	**f1(x)**	**f2(X)**
0	0	0	0
80	0	5600	80
60	30	5400	90
0	90	3600	90

Por tanto, la **matriz de pagos** es:

Matriz de pagos		
OPTIMIZAR	**Beneficio**	**Lotes a producir**
Beneficio	5600	80
Lotes a producir	5400	90

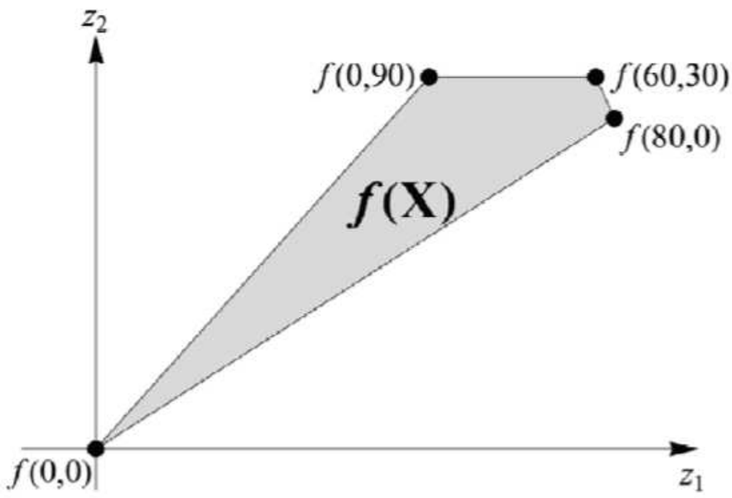
NOTA: La solución (f1, f2)=(3.600, 90) no forma parte de la matriz de pagos puesto que no es una solución eficiente al estar dominada por la solución (5.400, 90)

Partiendo de la matriz de pagos, el punto ideal se construye a partir de los elementos de la diagonal principal de la matriz de pagos; el punto antiideal se construye tomando los peores valores de cada columna.

Ideal (5600, 90); anti-ideal (5400, 80)

c)

Para identificar el conjunto eficiente es necesario representar las soluciones del problema en el espacio de los objetivos. En este caso la representación de las soluciones al problema en el espacio de los objetivos sería la siguiente:



Por lo que el conjunto eficiente estará formado por todas las soluciones comprendidas en el segmento f(80,0) y f(60,30). Este conjunto de soluciones configura la frontera de Pareto ya que no es posible mejorar un objetivo sin empeorar el otro objetivo.

d)

Para formular el problema como un problema de metas incluiremos en el modelo la meta de beneficio y de producción. En cada una de las metas hay que definir las variables desviación. Las variables de desviación no deseada de cada una de las metas ponderadas por su importancia formarán parte de la función objetivo.

En particular, el modelo resultante es:

VARIABLES:

x1: número de microprocesadores de Alta calidad a fabricar (lotes/semana)

x2: número de microprocesadores de calidad estándar a fabricar (lotes/semana)

FUNCIÓN OBJETIVO:

Min= 5N1 + N2;

RESTRICCIONES:

[Si] 600x1+ 400x2 ≤ 48000 (gramos)

[Ge] 50x1+ 50x2 ≤ 4500 (gramos)

[Meta_Bº] 70x1 + 40 x2 – P1 + N1 = 5500 (euros)

[Meta_produccion] x1 + x2 – P2 + N2 = 85 (lotes)

[No_negatividad] x1, x2, P1, N1, P2, N2 ≥ 0

EJERCICIO 4:

a)

P0:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
X2	1/2	-1/2	1/2
X1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t\, B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

P0: X1=7/2; X2=1/2; Z=5/2 (Z*=+inf)

P1 = P0 + X1≤3; X1=3-u1; u1 ≤ 3

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X3, X4 y X5.

- $Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X1 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X4 →**JE=X4.** El pivote del cambio de base será ½. Sale de la base la variable que alcanza la cota, X1 que será reemplazada en el modelo por u1.

Modelo Equivalente con $x1=3-u_1$

MIN3-u1 -2x2 + 2 X3
$-u_1 + X_2 - 2x3 \le 1$
$-u_1 - X_2 - X_3 \ge 0$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z = 3 + C_B^t\, X_B = 3 + (-2,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 < Z^*, \text{ actualizamos } Z^*=3$$

P1: (u1, x2, x3, x4)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	0	-1	0
X4	1	1	1
$c_B^t\, B^{-1}$			**3**

- Como la solución es entera esta es una hoja del árbol de soluciones. Dado que el valor de la función objetivo es mejor que el de la mejor cota hasta el momento, actualizamos dicha cota: Z*= 3.
- Volvemos a P0 para generar y resolver el otro problema que resulta de acotar X1 a su entero superior:

P2 = P0(X1,X2,X3,X4,X5) + X1 ≥ 4; X1 = 4 +l_1 ; l_1≥ 0

- Necesitamos incrementar X1, para ello analizamos las VNB en P0: X3, X4 y X5:

$$Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix};\ Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};\ Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

- Para incrementar el valor de X1 necesitamos αij<0, por tanto nos sirven tanto X3 como X5. Aplicamos el criterio del dual para escoger la variable JE:

$$\min \left\{ \left| \frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}} \right| \;\middle|\; y_{xk} < 0 \right.$$

$$z_{x3} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x3} = (-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1/2 \rightarrow c_{x3} - z_{x3} = 5/2$$

$$z_{x5} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x5} = (-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3/2 \rightarrow c_{x5} - z_{x5} = 3/2$$

entonces, min{5/2, 3}=1 →**JE:x3**

Modelo Equivalente con x1=4+l1

MIN 4+l1 -2x2 + 2 X3
$l_1 + X_2 - 2x_3 \le 0$
$l_1 - X_2 - X_3 \ge -1$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + C_B^t\, X_B = 4 + (-2,2) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 10/3$$

P2 (l1, x2, x3, x4, x5)

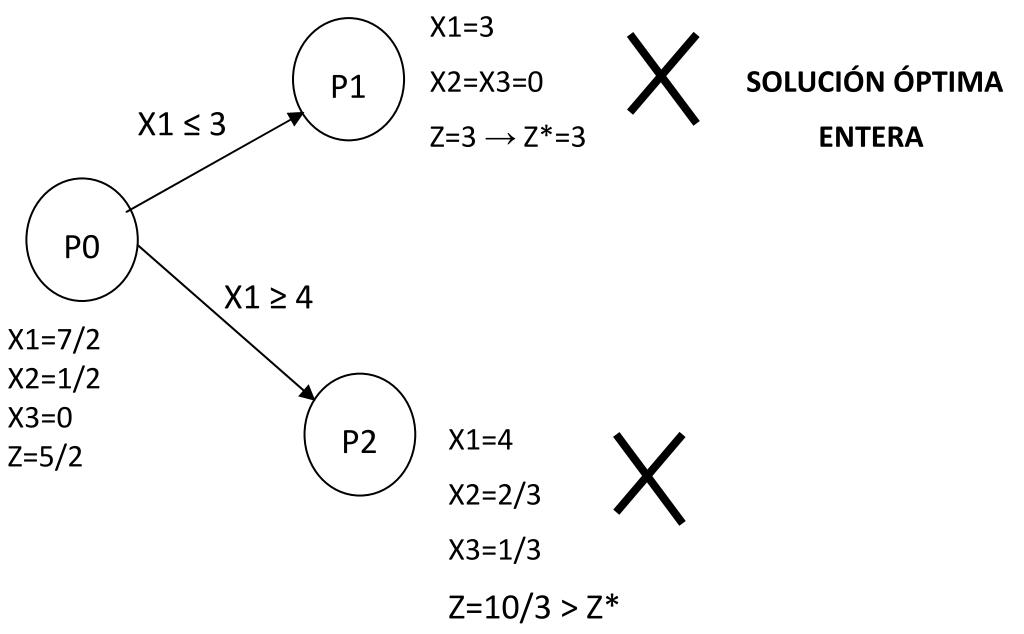
V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	1/3	-2/3	2/3
X3	-1/3	-1/3	1/3
$c_B^t\ B^{-1}$			**10/3**

P2: X1=4; X2=1/3; Z=10/3 > Z* → PODA

La solución en P2 es continua pero como el valor de la función objetivo es peor (mayor) al de la mejor cota, la solución en P2 se poda de forma que la solución entera actual (la de P1) es la solución óptima.

LA SOLUCIÓN ÓPTIMA ES LA OBTENIDA EN EL NODO P1:
X1 = 3; X2 = X3 = 0; Z = 3

El árbol de soluciones sería el siguiente:



b)

En caso de haber aplicado la técnica de la mejor cota, el árbol de soluciones habría sido el mismo.

La solución óptima habría sido, por supuesto, la misma, es decir: **X1 = 3; X2 = X3 = 0 Z = 3**