Correspondencias

Cristina Jordán Lluch
Instituto de Matemáticas Multidisciplinar
Departamento de Matemática Aplicada

Índice

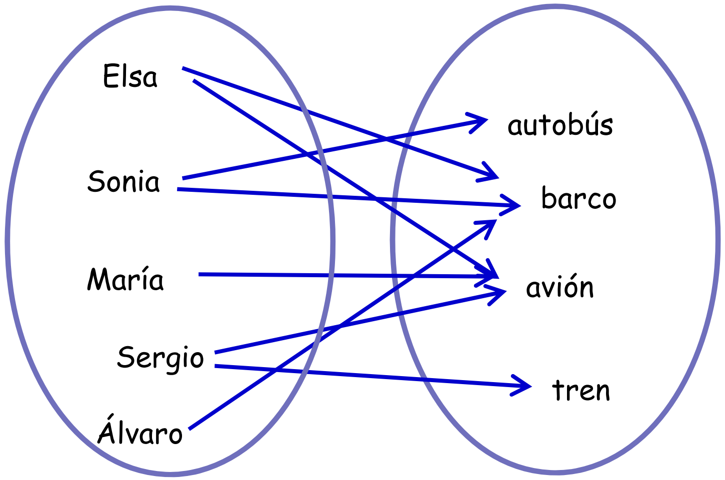
Contenido

Introducción

Ejemplo 1

Representa con un gráfico las preferencias del siguiente grupo de amigos a la hora de elegir transporte para sus próximas vacaciones:

- Elsa prefiere barco o avión
- Sonia se decanta por el autobús o barco
- María siempre quiere viajar en avión
- A Sergio le gustaría viajar en tren o en avión
- Álvaro ha decidido que quiere probar el barco

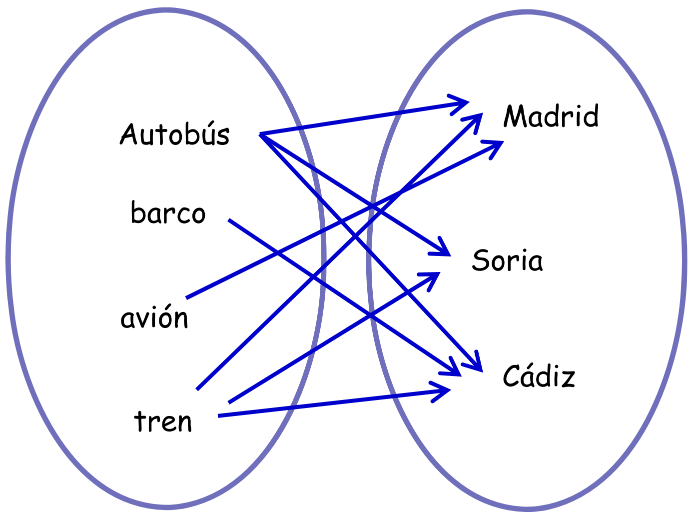


Introducción

Ejemplo 2

Representa con un gráfico las posibilidades de utilizar un determinado transporte para llegar a diferentes ciudades, en concreto:

- A Madrid puedes ir en tren, avión o autobús
- A Cádiz puedes llegar utilizando el autobús, el tren o el barco
- Soria se puede visitar si vas en autobús o tren



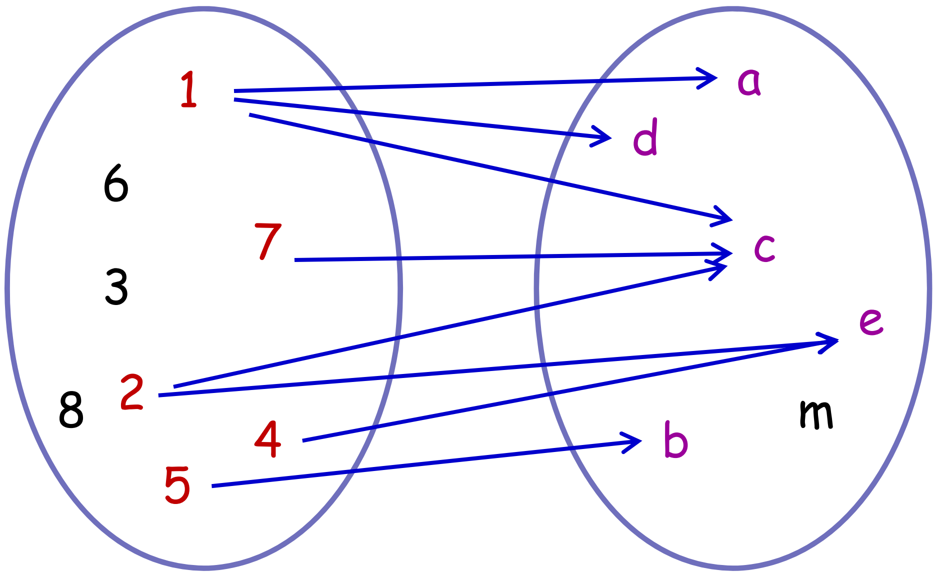
Introducción

Ejemplo 3

Correspondencia

$$A \xrightarrow{f} B$$

Conjunto inicial — Conjunto final



Conjuntos de imágenes

$f(1) = \{ a, d, c \}$
$f(2) = \{ e, c \}$
$f(3) = \varnothing$
$f(4) = \{ e \}$
$f(5) = \{ b \}$
$f(6) = \varnothing$
$f(7) = \{ c \}$
$f(8) = \varnothing$

Conjuntos de antiimágenes

$f^{-1}(a) = \{ 1 \}$
$f^{-1}(b) = \{ 5 \}$
$f^{-1}(c) = \{ 1, 2, 7 \}$
$f^{-1}(d) = \{ 1 \}$
$f^{-1}(e) = \{ 2, 4 \}$
$f^{-1}(m) = \varnothing$

$Dom(f) = \{ 1, 2, 4, 5, 7 \}$

$Im(f) = \{ a, b, c, d, e \}$

…… asociado a ………

f(♜) = ♞ se lee ♞ es imagen de ♜, o ♜ es antiimagen de ♞

f⁻¹(♜) = ♞ se lee ♞ es antiimagen de ♜

Correspondencia

Correspondencia

Dados dos conjuntos A y B, se denomina **correspondencia** entre A y B a una asociación de elementos de A con elementos de B.

Notación $f : A \longrightarrow B$

- A se llama **conjunto inicial** y B **conjunto final**.
- Si a un elemento $a \in A$ se le asocia otro elemento $b \in B$, se dice que b es una **imagen** de a, o que a es una **antiimagen** de b.

- $f(a)$ = Conjunto de las imágenes de a.
- $f^{-1}(b)$ = Conjunto de las antiimágenes de b.

- **Dominio** de f = $\mathrm{Dom}(f) = \{ a \in A \,/\, f(a) \neq \emptyset \}$
- **Rango**, o **imagen** de f = $\mathrm{Rang}(f) =$
  $= \mathrm{Im}(f) = f(A) = \{ b \in B \,/\, f^{-1}(b) \neq \emptyset \}$

Correspondencia. Ejercicio

En relación a los ejemplos 1 y 2 anteriores, si f es la correspondencia que determina las preferencias de nuestros amigos y g la que determina el medio de transporte que nos puede llevar a a Cádiz, Madrid o Soria:

1.- Define por comprensión y por extensión los conjuntos inicial y final de cada una de las dos correspondencias definidas, f y g.

2.- ¿Qué nombre recibe en términos de correspondencias los medios de transporte elegidos por Elsa?

3.- ¿Qué nombre recibe en términos de correspondencias los medios de transporte elegidos con los que se puede llegar a Soria?

4. - Determina f(Elsa). En términos de correspondencia, ¿qué nombre recibe? ¿Qué interpretación tiene en el contexto del problema planteado?

5.- Determina f^{-1} (avión). En términos de correspondencia, ¿qué nombre recibe? ¿Qué interpretación tiene en el contexto del problema planteado?

6.- Determina g(avión). En términos de correspondencia, ¿qué nombre recibe? ¿Qué interpretación tiene en el contexto del problema planteado?

7.- Determina g^{-1}(Cádiz). En términos de correspondencia, ¿qué nombre recibe? ¿Qué interpretación tiene en el contexto del problema planteado?

8.- Define por comprensión y por extensión los conjuntos Dom(f), Dom(g), Im(f) e Im(g).

Correspondencia inversa

Correspondencia inversa

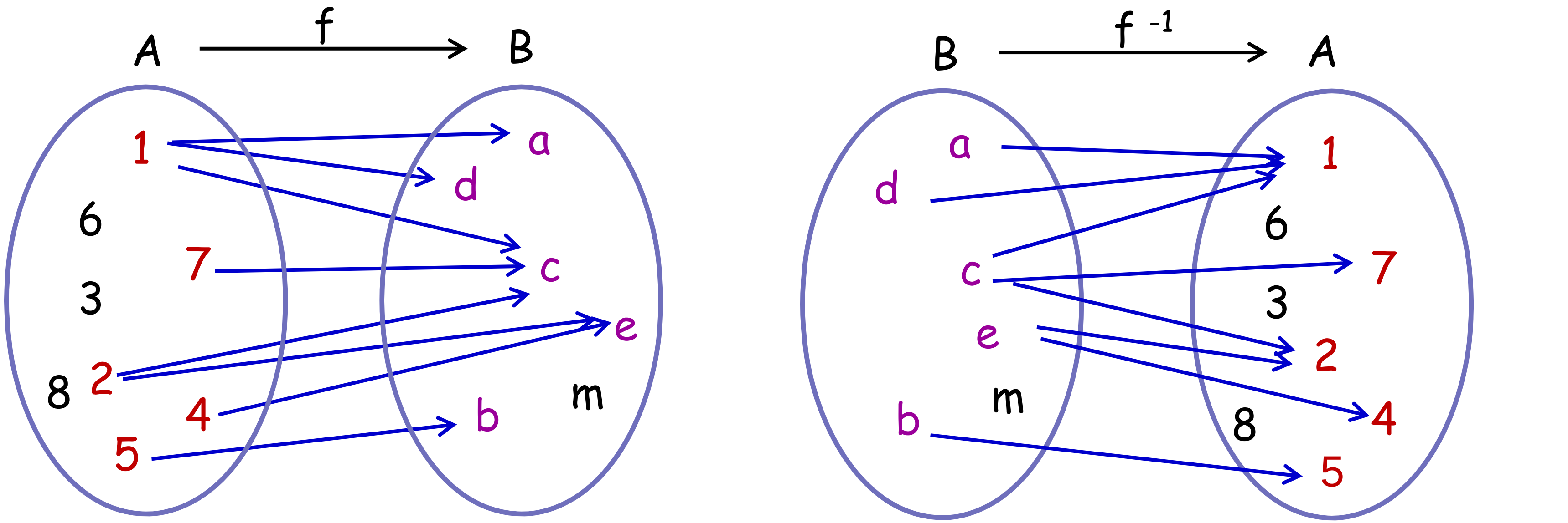
Dada una correspodencia $f : A \longrightarrow B$, llamamos **correspondencia inversa** de f a la correspondencia $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que

$$\forall b \in B \quad f^{-1}(b) = \{ a \in A \ / \ b = f(a) \}$$

Correspondencia inversa

Ejemplo 3

La correspondencia inversa de la correspondencia f del primer ejemplo es



Correspondencia inversa

Ejercicio

En relación a los ejemplos anteriores, si f es la correspondencia que determina las preferencias de nuestros amigos y g la que determina el medio de transporte que nos puede llevar a a Cádiz, Madrid o Soria:

1.- Define por comprensión y por extensión los conjuntos inicial y final de f^{-1} y g^{-1}.

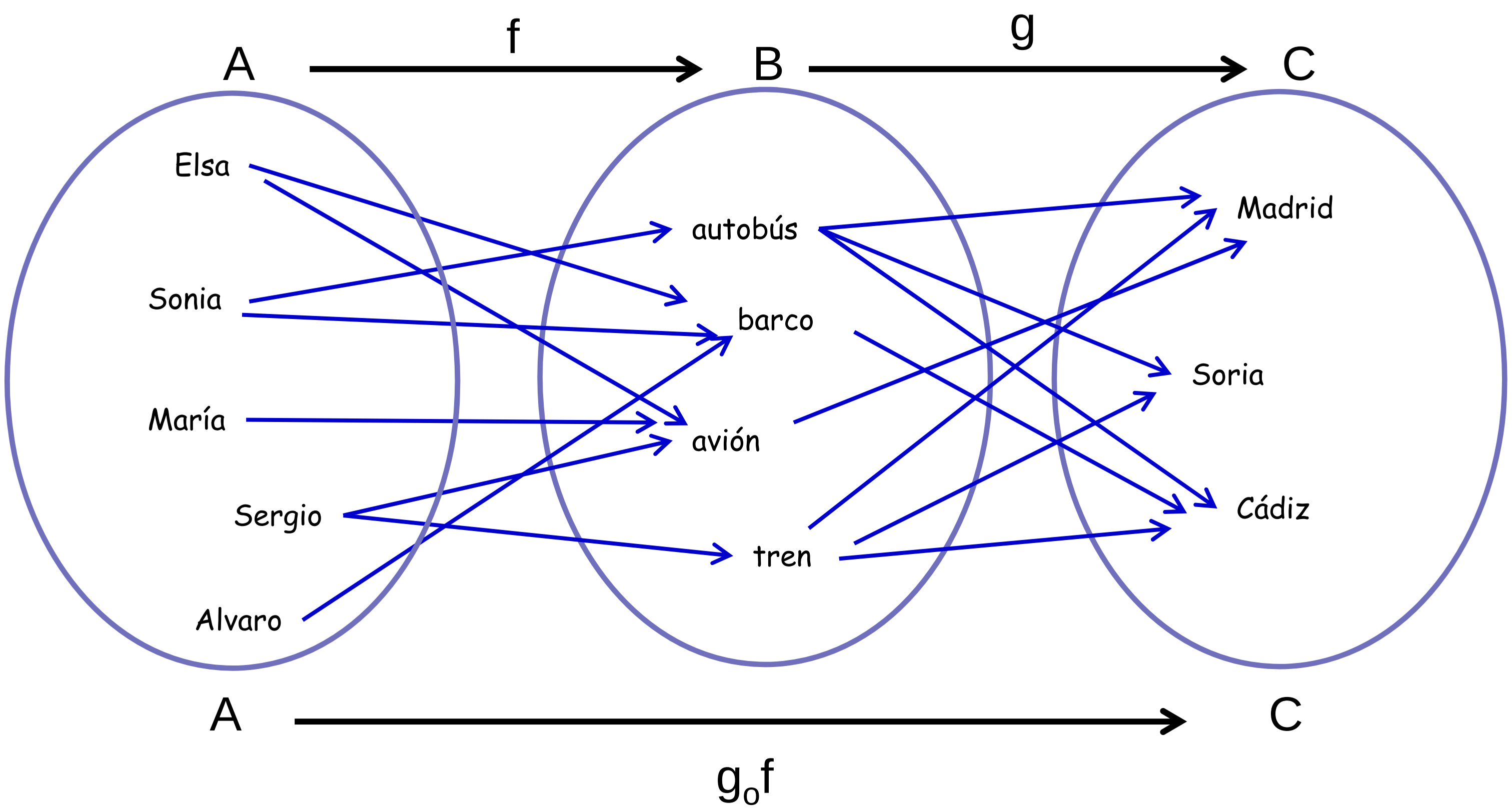
2.- Define mediante pares las correspondencia f y su inversa f^{-1}. Idem con g y g^{-1}.

3.- Da una interpretación en el contexto real a las correspondencias inversas f^{-1} y g^{-1}.

Composición de correspondencias

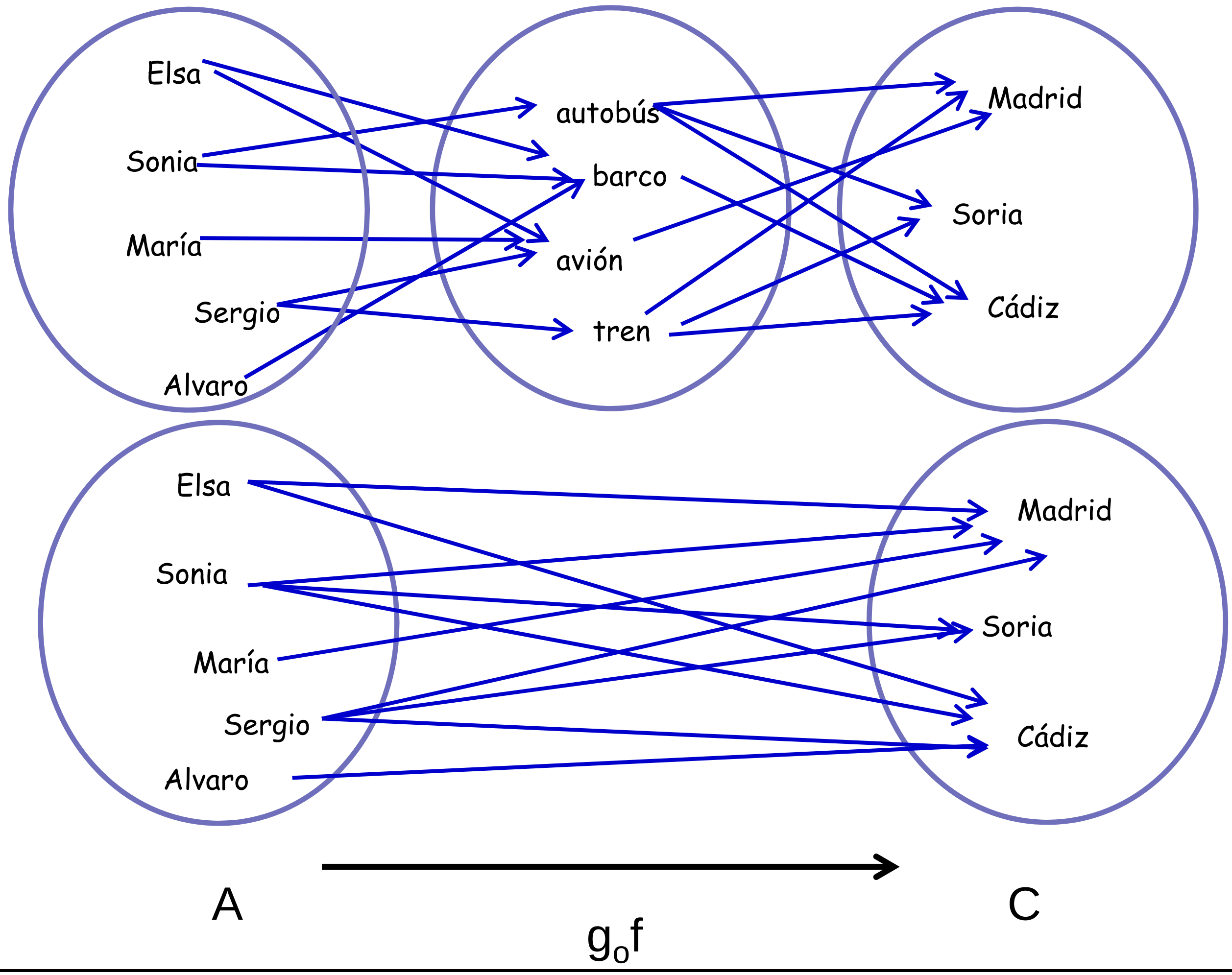
Ejemplo

Teniendo en cuenta los datos anteriores sobre preferencias de medio de transporte y posibles formas de llegar a Soria, Cádiz y Madrid indica que sitios podrían visitar cada uno de nuestros amigos.



Composición de correspondencias

Ejemplo



Composición de correspondencias

Composición

Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos correspondencias.
La **composición de g y f** es la correspondencia $g_o f : A \longrightarrow C$ definida

$$(g_o f)(a) = g (f (a)) \text{ para todo } a \in A.$$

- Dicho de otra manera, es aquella correspondencia tal que

$$(g_o f)(a) = \{ c \in C \ / \ \exists\, b \in B \text{ de manera que } c = g(b) \text{ y } b = f(a) \}$$

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
a & \longrightarrow & b=f(a) & \longrightarrow & c=g(b) \\
a & & \xrightarrow[g_o f]{\hspace{6em}} & & c
\end{array}$$

Ejercicio

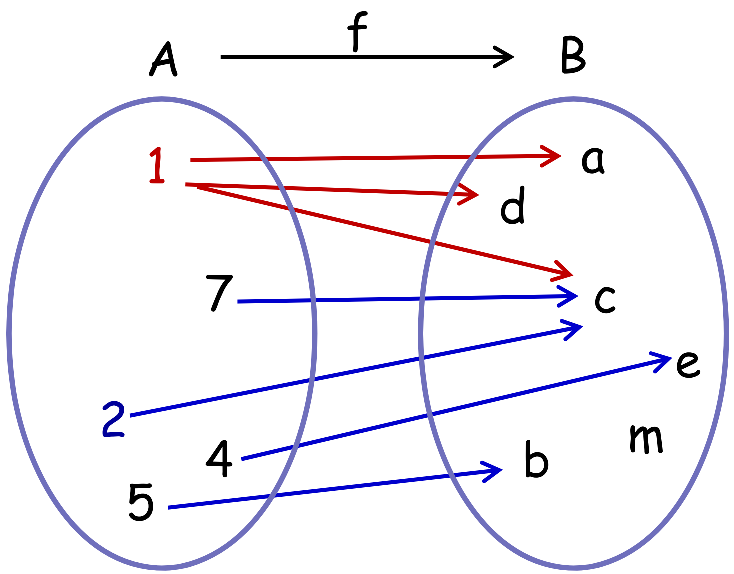
Obtén la composición $g_o f$ de las correspondencias definidas en el ejemplo 3

Aplicaciones

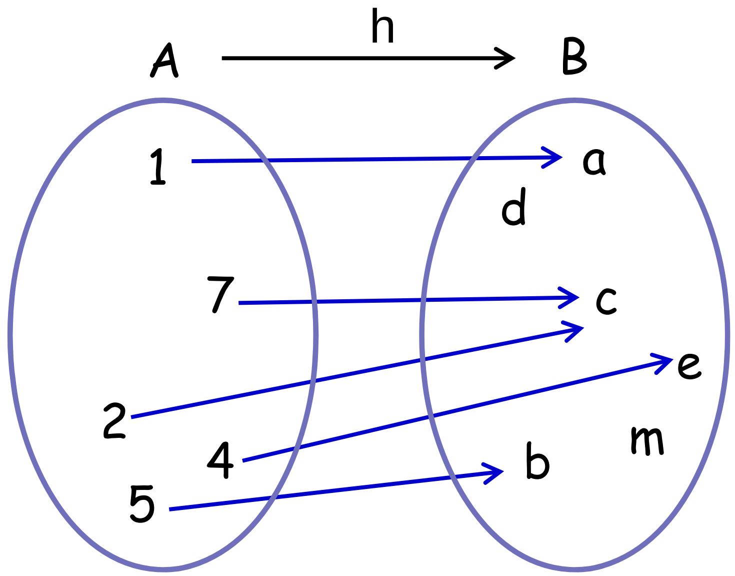
Aplicación

Se dice que una correspondencia $f : A \longrightarrow B$ es una **aplicación** si cualquier elemento de A tiene exactamente una imagen.

Ejemplos



f no es aplicación



h es aplicación

Aplicaciones

Aplicación

Se dice que una correspondencia $f : A \longrightarrow B$ es una **aplicación** si cualquier elemento de A tiene exactamente una imagen.

Aplicación identidad

Dado un conjunto A, se define la aplicación **identidad** en A como aquella aplicación $id_A : A \longrightarrow A$ tal que $id_A(a) = a$ para todo $a \in A$.

Aplicaciones

Aplicación inyectiva

Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **inyectiva** cuando todos los elementos de A tienen imágenes distintas.

- Formulación simbólica

  $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** si $\forall\, a_1, a_2 \in A \quad (a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$

- Nota

  Recordad que

  $$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad (\, a_1 \neq a_2 \;\longrightarrow\; f(\, a_1\,) \neq f(\, a_2\,)\,)$$

  es equivalente a

  $$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad (\, f(\, a_1\,) = f(\, a_2\,) \;\longrightarrow\; a_1 = a_2\,)$$

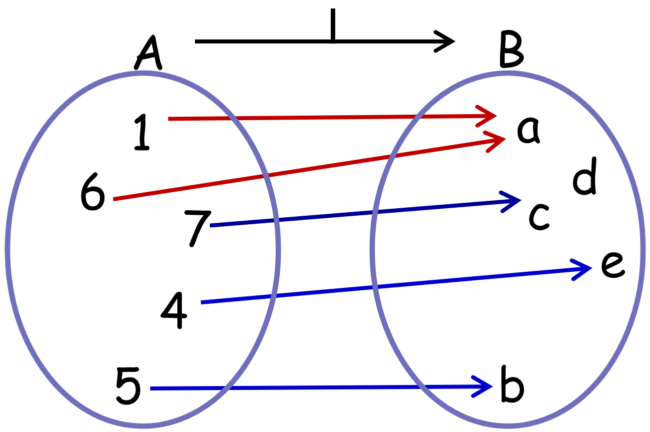
Aplicaciones

Aplicación inyectiva

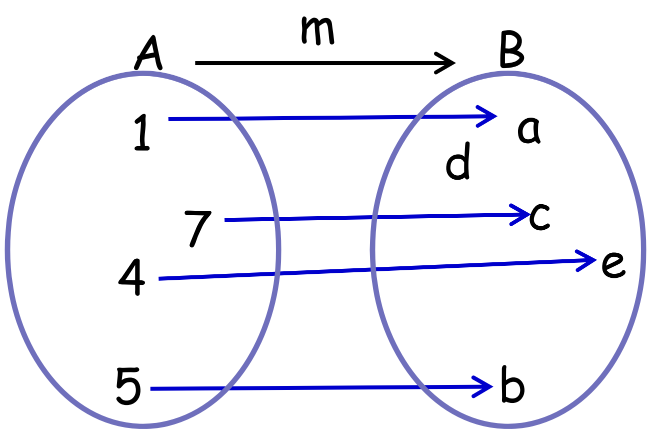
Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **inyectiva** cuando todos los elementos de A tienen imágenes distintas.

- Formulación simbólica

  $f : A \longrightarrow B$ es **inyectiva** si $\forall\, a_1, a_2 \in A \quad (a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$



l no es inyectiva



m es inyectiva

Aplicaciones

Aplicación sobreyectiva

Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **sobreyectiva** cuando cada uno de los elementos de B tiene al menos una antiimagen.

- Formulación simbólica

$f : A \longrightarrow B$ es **sobreyectiva** si $\forall\ b \in B \quad \exists\ a \in A$ tal que $f(a) = b$

- Nota

Observad que una definición equivalente a la anterior es

$$\mathrm{Im}(f) = B$$

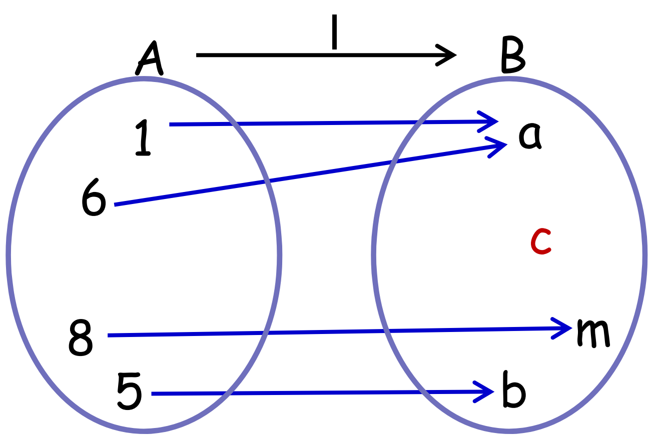
Aplicaciones

Aplicación sobreyectiva

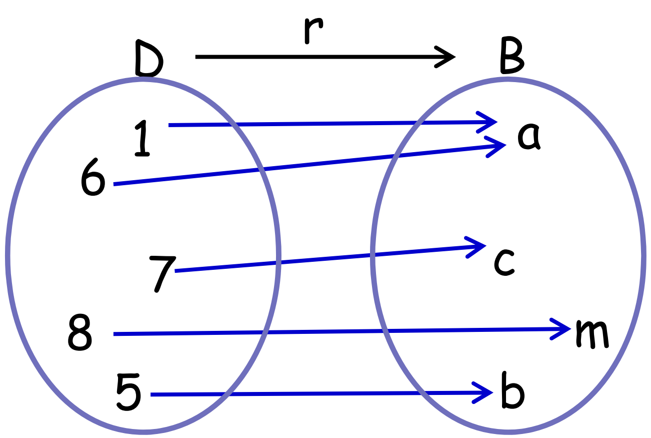
Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **sobreyectiva** cuando cada uno de los elementos de B tiene al menos una antiimagen.

➢ Formulación simbólica

$f : A \longrightarrow B$ es **sobreyectiva** si $\forall\, b \in B \quad \exists\, a \in A$ tal que $f(a) = b$



l no es sobreyectiva



r es sobreyectiva

Aplicaciones

Aplicación sobreyectiva

Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **sobreyectiva** cuando cada uno de los elementos de B tiene al menos una antiimagen.

- Formulación simbólica

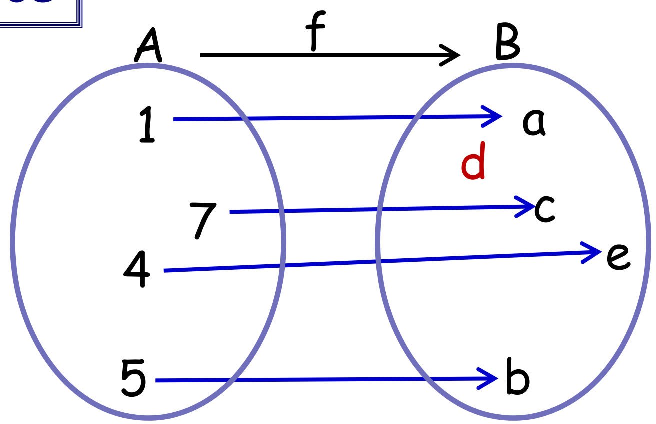
$f : A \longrightarrow B$ es **sobreyectiva** si $\forall\ b \in B \quad \exists\ a \in A$ tal que $f(a) = b$

Aplicación biyectiva

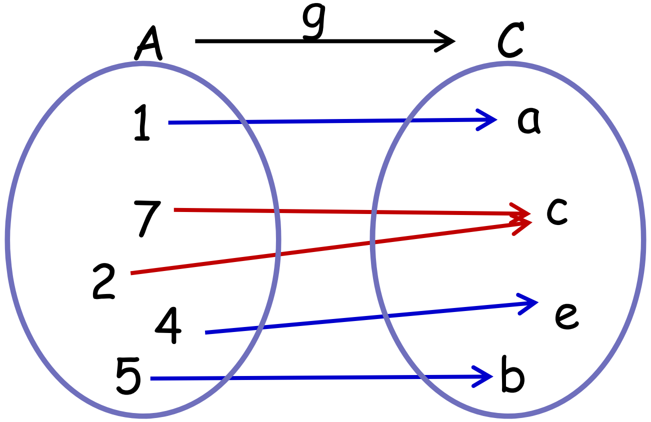
Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **biyectiva** cuando es inyectiva y sobreyectiva

Aplicaciones

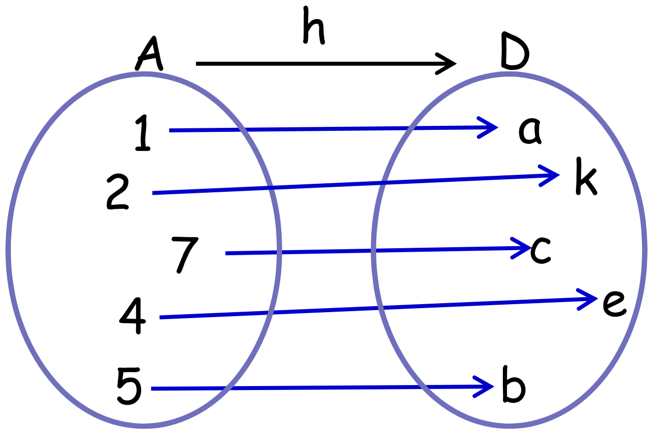
Ejemplos



f es inyectiva, no sobreyectiva

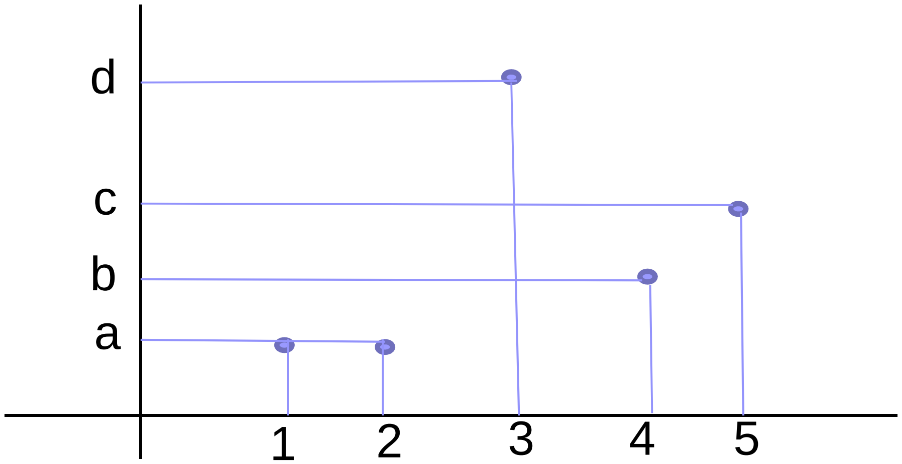


g es sobreyectiva, no inyectiva



h es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva)

Representación cartesiana de aplicaciones

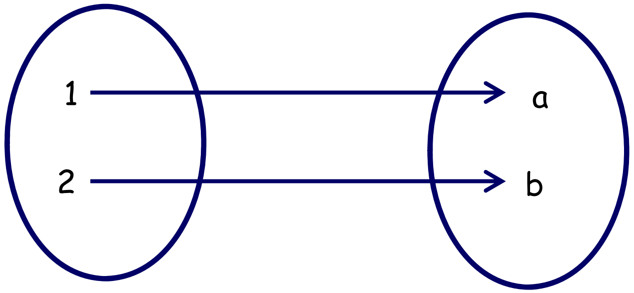


Aplicación de las biyecciones: Cardinales

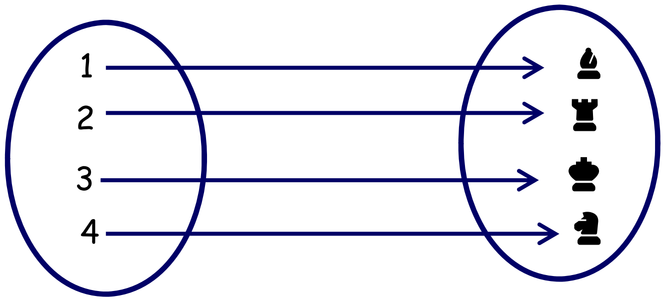
Ejemplos

¿Cuántos elementos hay en los diferentes conjuntos siguientes?

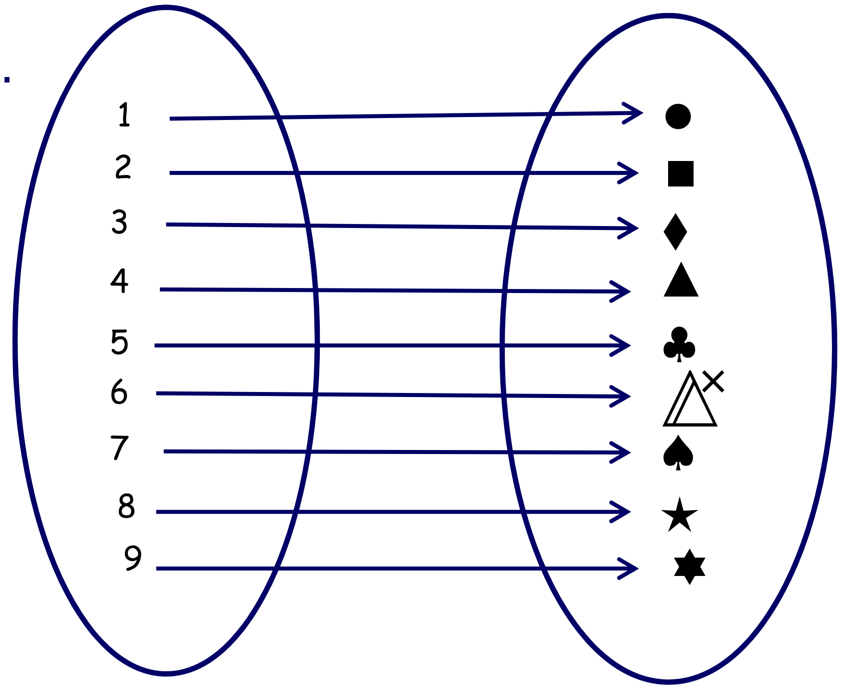
1.



2.



3.



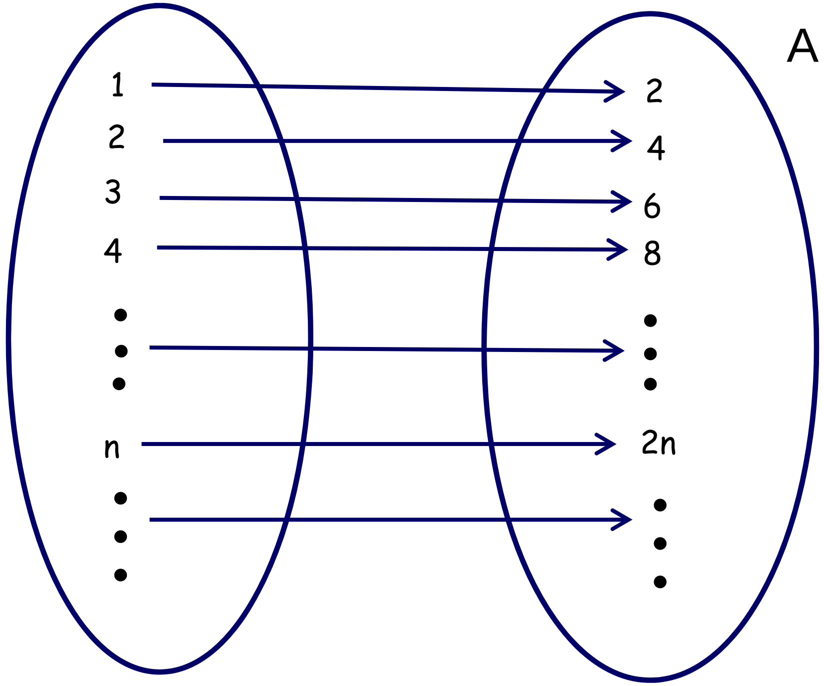
Una biyección entre un conjunto A y un conjunto {1, 2, ….. ,n } permite determinar el número de elementos de A, n. Dicho de otra forma, permite contar el número de elementos de A.

Aplicación de las biyecciones: Cardinales

Ejemplos

Analiza con la misma técnica el conjunto siguiente

4.



En este caso se ha establecido una biyección entre un conjunto A y el conjunto de los naturales.
No existe biyección entre A y un conjunto {1, 2, … , n }, cualquiera que sea n.

Aplicación de las biyecciones: Cardinales

Cardinal

Llamamos **cardinal** a un símbolo que se asocia a cada conjunto, de manera que dos conjuntos A y B tienen el mismo cardinal si existe una biyección entre ellos.

Notación card(A) o |A|

- Al conjunto {1, 2, 3, … , n } le asociamos el símbolo n, es decir,
  card({1, 2, 3, … , n}) = n
- Si A es el vacío decimos que card(A) = 0
- Si existe un número natural n tal que el conjunto A tiene le mismo cardinal que {1, 2, 3, … , n }, decimos que A es **finito con cardinal n**.
  En vez de usar la expresión card(A)=n utilizamos a menudo " número de elementos de A es n"
- En caso contrario, decimos que A es infinito.
  Hay diferentes cardinales infinitos.
  Destacan card($\mathbb{N}$) = $\aleph_0$ y card($\mathbb{R}$) = $\aleph_1$

Aplicación de las biyecciones: Cardinales

Suma de cardinales

- Sean a, b dos números cardinales tal que card(A) = a y card(B) = b siendo $A \cap B = \emptyset$
  Se define la **suma** de a y b como el cardinal a+b asociado al conjunto A U B, es decir, $a + b = card(A \cup B)$

Ejemplo

Sean A = {a, b, c}, B = {d, e}.
Son conjuntos disjuntos tales que card(A) = 3, card(B) = 2.
Aplicando la definición anterior

$$2+3 = card(A \cup B) = card(\{a, b, c, d, e\})$$

Como según dijimos el cardinal de un conjunto finito coincide con su número de elementos, y AU B tiene 5 elementos, card(A U B)=5

Por tanto, tenemos que el cardinal 2+3 coincide con el 5

En consecuencia la definición dada de la suma de cardinales coincide, en el caso de conjuntos finitos, con la suma de números naturales

Cardinales

Suma de cardinales

Ejemplo

¿Cuál será el cardinal de la unión de los conjuntos A = {a,b,c} y B={c,d} ?
Sabemos que card(A) = 3 = a, card(B) = 2= b , pero A y B no son disjuntos,
Por tanto, la definición anterior no se puede aplicar, es decir,
No podemos afirmar que card(A U B) coincida con a+b

Teorema Inclusión-Exclusión

Sea E el conjunto universal.

a) Si $A, B \subset E$ entonces

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

b) Si $A,B, C \subset E$ entonces

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Aplicación inversa

Aplicación inversa

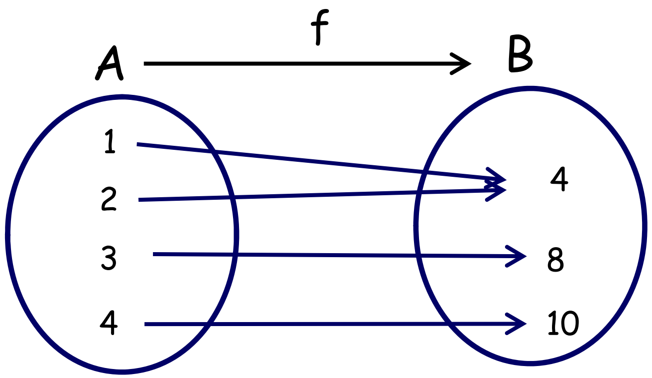
Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación.

Si su correspondencia inversa $f^{-1}: B \longrightarrow A$ es aplicación, la llamaremos **aplicación inversa** de f .

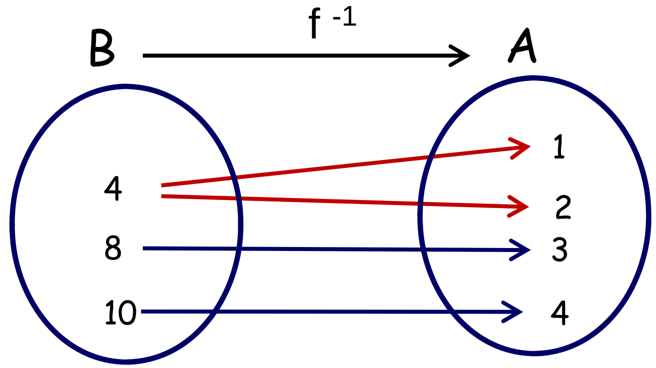
Aplicación inversa

Ejemplos

1.

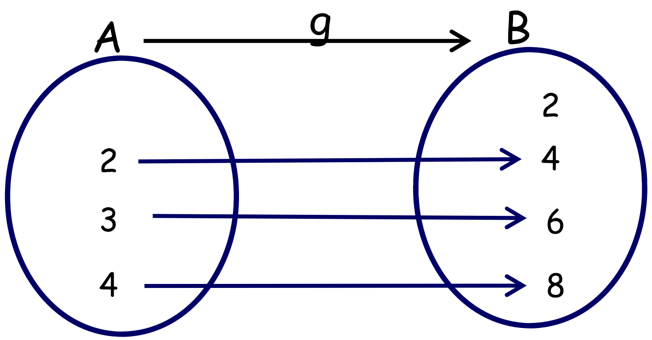


f es una aplicación

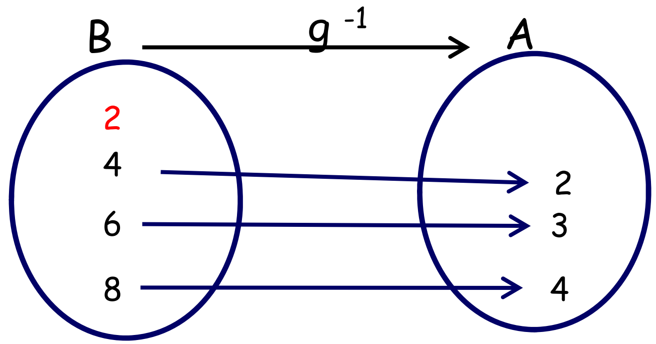


f^{-1} es correspondencia inversa
f^{-1} **no** es una aplicación

2.



g es una aplicación

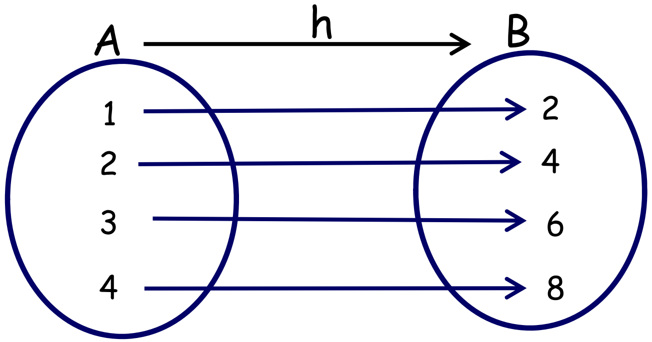


g^{-1} es correspondencia inversa
g^{-1} no es una aplicación (su dominio no coincide con el conjunto inicial)

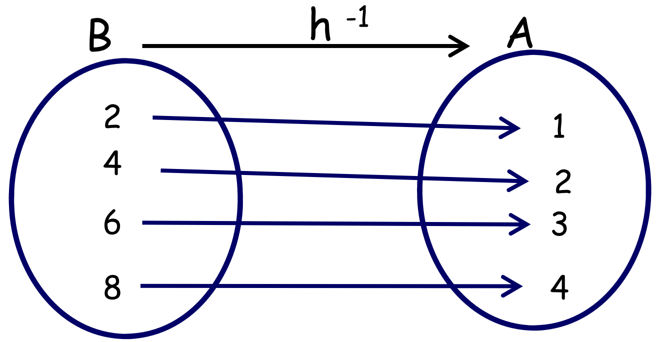
Aplicación inversa

Ejemplos

3.



h es una aplicación



h^{-1} es correspondencia inversa
h^{-1} es una aplicación

¿Qué verifica la aplicación h que no verifican las f y g anteriores?

Aplicación inversa

Aplicación inversa

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación.

Si su correspondencia inversa $f^{-1}: B \longrightarrow A$ es aplicación, la llamaremos **aplicación inversa** de f.

Propiedad

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación.

f es biyectiva si y sólo tiene aplicación inversa

Ejemplo

La correspondencia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x^2$ es una aplicación.

¿Es $f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ una aplicación?

No, porque f no es biyectiva. Existen elementos en $\mathbb{Z}$ (de hecho todos menos el cero) que tienen más de una antiimagen.

Por ejemplo, $f(2) = f(-2) = 4$.

Composición de aplicaciones

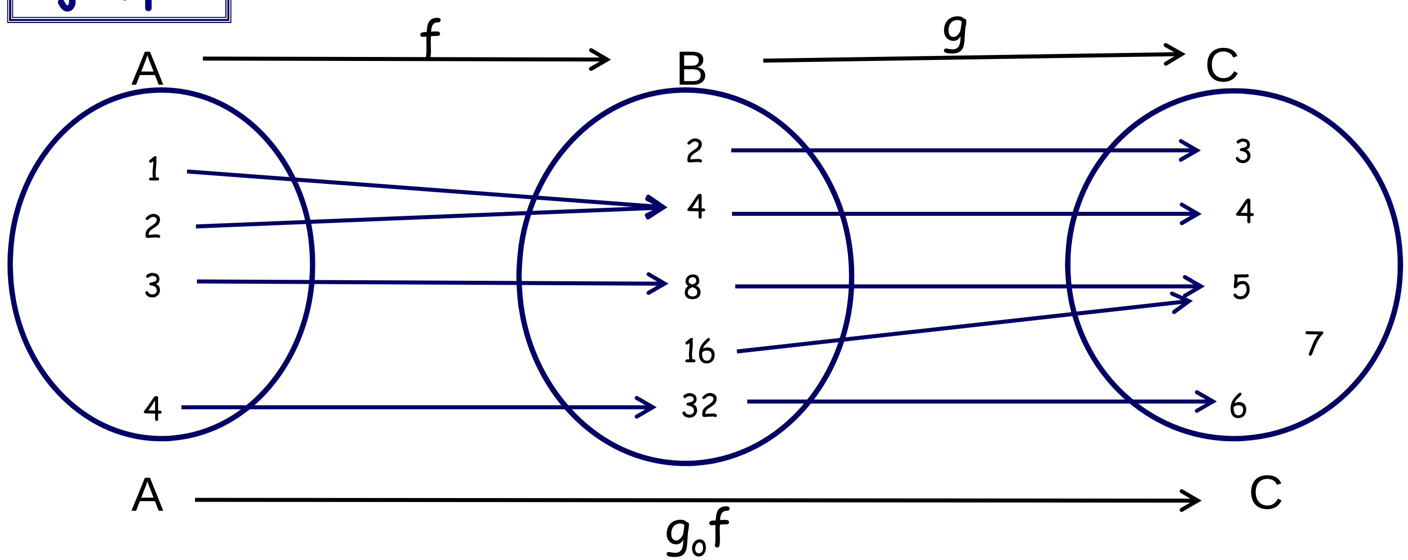
Composición de aplicaciones

Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son dos aplicaciones, entonces la composición $g_o f : A \longrightarrow C$ es también una aplicación.

Recordemos

$\forall\, a \in A \quad (g_o f)(a) = \{\ c \in C \,/\ \exists\, b \in B$ de manera que $c=g(b)$ y $b=f(a)\ \}$

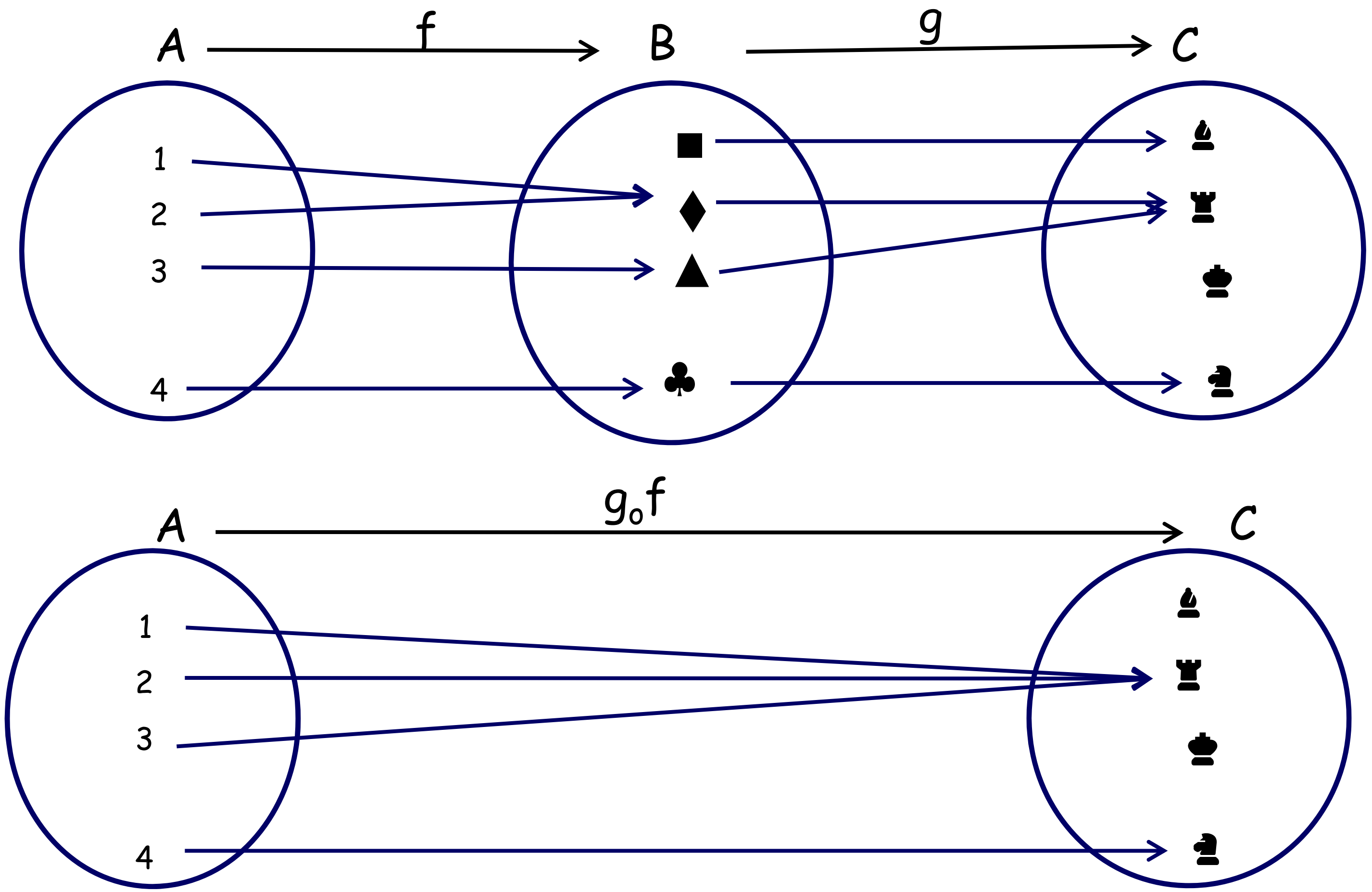
Ejemplo



Composición de aplicaciones

Ejemplos

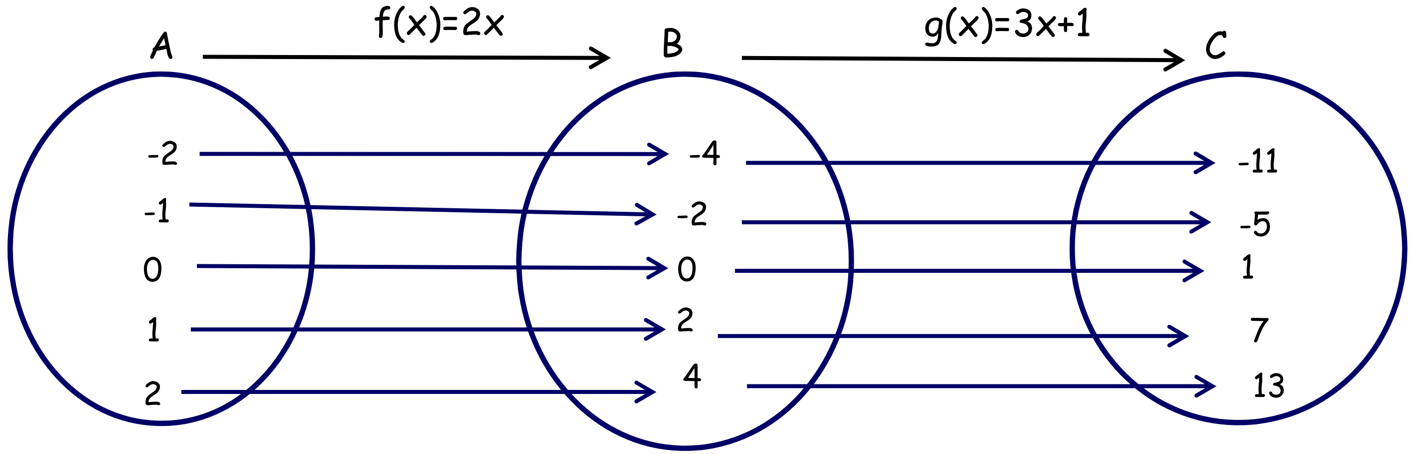
1.

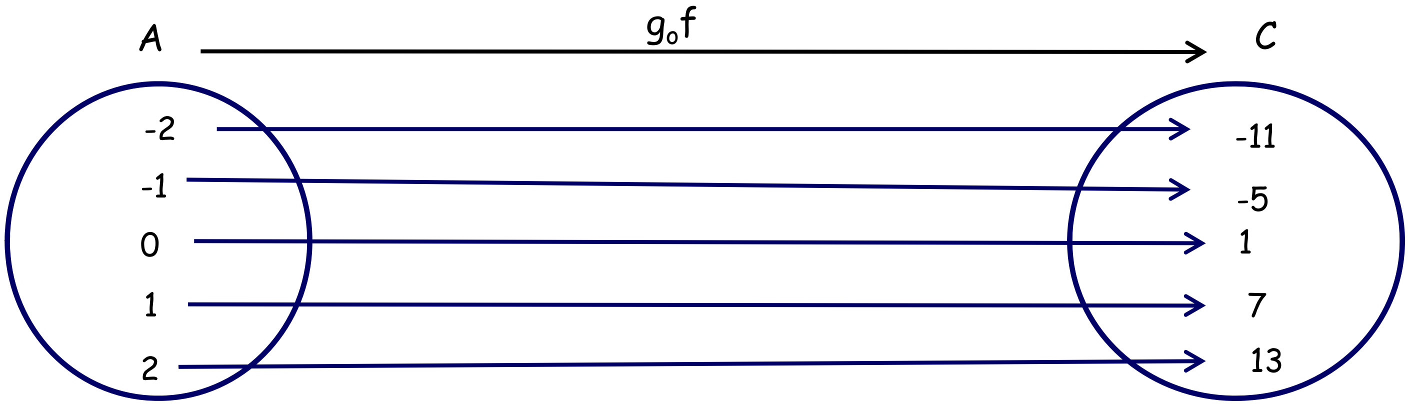


Composición de aplicaciones

Ejemplos

2.





$$g_o f(x)=g[f(x)] = g(2x)=3(2x)+1=6x+1$$

Composición de aplicaciones

Composición de aplicaciones

Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son dos aplicaciones, entonces la composición $g_o f : A \longrightarrow C$ es también una aplicación.

Propiedades

Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son dos aplicaciones.

1. Si f y g son inyectivas entonces $g_o f$ también lo es.
2. Si f y g son sobreyectivas entonces $g_o f$ también lo es.
3. Si f y g son biyectivas entonces $g_o f$ también lo es.
4. f es biyectiva si y sólo si existe otra aplicación $h : B \longrightarrow A$ tal que $h_o f = idA$ y $f_o h = idB$.

   Además, en este caso $h = f^{-1}$.