Prácticas de Matemática Discreta: Introducción a la teoría de grafos

Sesión 8

Definición de grafo dirigido

Se llama grafo dirigido (o digrafo) a una terna (V, A, φ) donde:

1. V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se denominan vértices.
2. A es un conjunto finito cuyos elementos se denominan aristas (o arcos).
3. $\varphi : A \longrightarrow V \times V$ es una asignación (llamada aplicación de incidencia) que a cada arista de A le asigna un elemento de $V \times V$, es decir, un par ordenado de vértices.

Ejemplo de grafo dirigido

Consideremos el grafo dado por la terna $G = (V, A, \varphi)$, donde

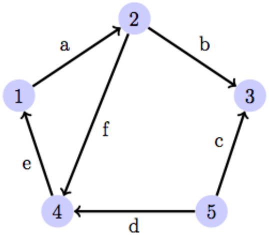
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \quad A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

y la aplicación de incidencia φ está definida de la siguiente manera:

$$\varphi(a) = (1, 2), \ \ \varphi(b) = (2, 3), \ \ \varphi(c) = (5, 3),$$

$$\varphi(d) = (5, 4), \ \ \varphi(e) = (4, 1), \ \ \varphi(f) = (2, 4)$$

Este grafo puede representarse por medio del siguiente diagrama:

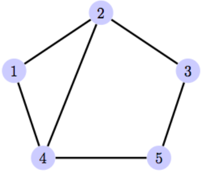


Conceptos básicos

- Si a una arista se le asigna el par de vértices (u, v), diremos que u es el *extremo inicial* (o *cola*) y que v es el *extremo final* (o *cabeza*) de esa arista. También diremos que la arista *sale* de u y *llega* a v o, simplemente, que va de u a v.
- Diremos que un grafo es *simétrico* si siempre que hay una arista del vértice u al vértice v, también hay una arista de v a u.
- El *grafo* (no dirigido) *subyacente* a un grafo dirigido es aquel que resulta si ignoramos la orientación de las aristas.

Ejemplo:

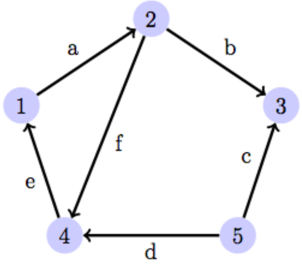
El grafo subyacente al grafo dirigido del ejemplo anterior es el siguiente:



Conceptos básicos

- Se llama grado de salida de un vértice v al número de aristas que salen de v. Lo denotaremos por $deg^{+}(v)$.
- Se llama grado de entrada de un vértice v al número de aristas que llegan a v. Lo denotaremos por $deg^{-}(v)$.
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de aristas que inciden en v, es decir, $deg(v) = deg^{+}(v) + deg^{-}(v)$.
- Un pozo (o sumidero) es un vértice con grado de salida 0 (es decir, no sale ninguna arista de él).
- Una fuente es un vértice con grado de entrada 0 (es decir, no llega ninguna arista a él).

Ejemplo



- Los grados de salida son:
  $deg^+(v_1) = 1$, $deg^+(v_2) = 2$, $deg^+(v_3) = 0$,
  $deg^+(v_4) = 1$, $deg^+(v_5) = 2$
- Los grados de entrada son:
  $deg^-(v_1) = 1$, $deg^-(v_2) = 1$, $deg^-(v_3) = 2$,
  $deg^-(v_4) = 2$, $deg^-(v_5) = 0$
- Los grados son:
  $deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 3$, $deg(v_3) = 2$,
  $deg(v_4) = 3$, $deg(v_5) = 2$
- El vértice 3 es un pozo.
- El vértice 5 es una fuente.

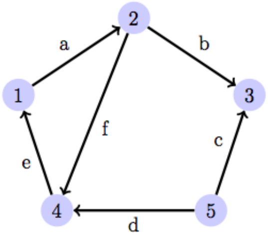
Grados de entrada y salida

Propiedad

Si $G = (V, A, \varphi)$ es un grafo dirigido, entonces

$$\sum_{v \in V} deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} deg^{-}(v) = \text{nº de aristas}$$

Ejemplo:



$\sum_{v \in V} deg^{+}(v) = 1 + 2 + 0 + 1 + 2 = 6$

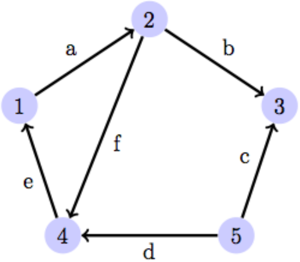
$\sum_{v \in V} deg^{-}(v) = 1 + 1 + 2 + 2 + 0 = 6$

nº de aristas $= 6$

Matriz de adyacencia de un grafo dirigido

Sea $G = (V, A, \varphi)$ un grafo dirigido cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. La matriz de adyacencia de G es la matriz cuadrada $M_A = (m_{ij})$ de tamaño $n \times n$ tal que m_{ij} es el número de aristas de v_i a v_j.

Ejemplo:



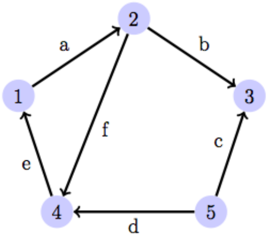
$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia de un grafo dirigido

Sea G un grafo dirigido sin bucles, con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ y conjunto de aristas $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. La matriz de incidencia de G se define como la matriz $M_I = (m_{ij})$, de tamaño $m \times n$ dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es extremo inicial de } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es extremo final de } e_j, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo:

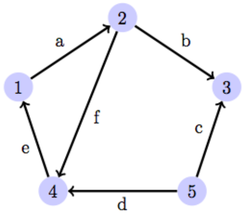


$$M_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Caminos y accesibilidad

- Un camino dirigido en un grafo dirigido es una sucesión finita de vértices y aristas
$$v_0 \; e_1 \; v_1 \; e_2 \; \ldots \; e_n \; v_n$$
donde cada arista e_i tiene como extremo inicial a v_{i-1} y como extremo final a v_i. Se dice que el camino va desde v_0 a v_n.
- Un vértice v se dice que es accesible desde un vértice u si existe un camino dirigido desde u hasta v.

Ejemplo:



En este grafo el vértice 3 es accesible desde el 4 ya que existe un camino dirigido de v_4 a v_3:
$$v_4 \; e \; v_1 \; a \; v_2 \; b \; v_3,$$
pero el vértice 4 no es accesible desde el 3 ya que no existe ningún camino dirigido de 3 a 4.

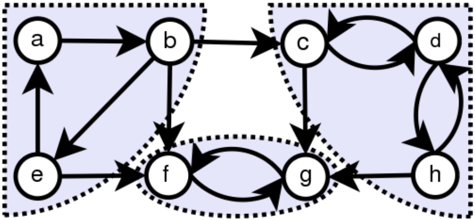
Conexión débil y fuerte

- Un grafo dirigido se dice que es débilmente conexo si su grafo subyacente es conexo.
- Las componentes débilmente conexas de un grafo dirigido son las componentes conexas del grafo subyacente.
- En un grafo dirigido un vértice u está fuertemente conectado con un vértice v si u es accesible desde v y v es accesible desde u.
- Un grafo dirigido se dice que es fuertemente conexo si cualquier par de vértices del grafo están fuertemente conectados.
- Dado un vértice v de un grafo dirigido, los vértices que están fuertemente conectados con v determinan un subgrafo fuertemente conexo. Cada uno de estos subgrafos fuertemente conexos son las componentes fuertemente conexas del grafo.

Ejemplos

- El grafo del ejemplo anterior es débilmente conexo (ya que su grafo subyacente es conexo), pero no es fuertemente conexo (ya hemos visto que existe un camino dirigido del vértice 4 al 3, pero no del 3 al 4). Tiene 3 componentes fuertemente conexas que corresponden a los 3 subgrafos fuertemente conexos determinados por los siguientes vértices: $\{1, 2, 4\}$, $\{3\}$ y $\{5\}$.

- El siguiente grafo es débilmente conexo pero no es fuertemente conexo. Se han sombreado sus 3 componentes fuertemente conexas:



Grafos dirigidos eulerianos

Un grafo dirigido es eulериano si contiene un camino dirigido euleriano cerrado, es decir, un camino dirigido simple, cerrado y que contiene a todas las aristas de grafo.

Teorema

Si G es un grafo dirigido débilmente conexo, entonces G es euleriano si y sólo si en todos los vértices coincide el grado de entrada y el de salida.

Corolario

Si G es un grafo dirigido débilmente conexo no euleriano, entonces entre dos vértices u y v hay un camino euleriano abierto si y sólo si en todos los vértices distintos de u y de v coincide el grado de entrada y el de salida, mientras que en u y en v se tiene que

$$deg^+(u) = deg^-(u) + 1 \text{ y } deg^+(v) = deg^-(v) - 1$$