Nombre y apellidos:
Grupo:

Examen de Álgebra (segundo parcial)

3 de junio de 2016

Duración: 1 hora y 30 minutos

Cuestión 1 (3 pt.) Sean los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$T = \langle (1,1,1), (2,1,-1), (1,0,-2) \rangle \quad \text{y} \quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \ \wedge \ x-2y=0\}.$$

(a) Calcula una base de T y la dimensión de T.

(b) Calcula unas ecuaciones implícitas de T y calcula una base del complemento ortogonal de T (es decir, $T^{\perp}$).

(c) Calcula un sistema de generadores de $T \cap S$. Determina si $T + S$ es suma directa. Calcula el subespacio $T + S$.

Solución:

(a) Consideremos la matriz cuyas filas son los vectores (traspuestos) del sistema generador de T y calculemos una forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como al realizar operaciones elementales a un conjunto de vectores se preserva su envoltura lineal, se tiene que $T = \langle (1,1,1), (0,1,3) \rangle$. Así pues $\{(1,1,1), (0,1,3)\}$ es un sistema generador de T. Como además se trata de un sistema "escalonado" de vectores no nulos, es linealmente independiente. Por tanto es una base de T. Como está formada por 2 vectores, la dimensión de T es 2.

Soluciones alternativas:

1. La forma escalonada reducida de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ es $\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Así que las columnas principales son la primera y la segunda. De hecho, la tercera columna de R indica que la tercera columna de la matriz original es igual a la segunda menos la primera.

   En consecuencia, los dos primeros vectores forman una base: $\{(1,1,1), (2,1,-1)\}$. Puesto que esta base tiene dos elementos, la dimensión del subespacio T es 2.

2. Si $\vec{u}_1 = (1,1,1)$, $\vec{u}_2 = (2,1,-1)$ y $\vec{u}_3 = (1,0,-2)$, se comprueba de inmediato que $\vec{u}_1 + \vec{u}_3 = \vec{u}_2$. Por lo tanto, los dos vectores $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$ generan el subespacio T. Por otra parte, es obvio que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$ es un conjunto linealmente independiente, así que se trata de una base de T.

(b) Sea (x,y,z) un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$. Se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{para ciertos } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ \text{El sistema lineal}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

con vector de incógnitas (α, β) y vector de términos independientes (x,y,z) es compatible.

Escalonando la matriz ampliada del sistema lineal anterior se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 3 & z \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 2x-3y+z \end{bmatrix}.$$

Así pues, el sistema anterior será compatible si y sólo si $2x-3y+z=0$ (porque ésta es la condición necesaria y suficiente para que los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada coincidan). Por tanto $2x-3y+z=0$ es una ecuación implícita de T. Es decir:

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=0\}.$$

Calculemos ahora el complemento ortogonal de T. Teniendo en cuenta que $\{(1,1,1),(0,1,3)\}$ es una base de T (por el apartado (a)), el complemento ortogonal de T es:

$$T^{\perp} = \{\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \vec{v}\cdot\vec{x} = 0 \ \forall \ \vec{v} \in T\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \ \wedge \ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \langle (2,-3,1) \rangle$$

Otra forma (más geométrica, quizás) de obtener el complemento ortogonal de T es la siguiente: geométricamente, T es el plano de ecuación $2x-3y+z=0$. Luego su complemento ortogonal viene dado por la recta que pasa por el origen cuya dirección es la del vector "normal" del plano $(2,-3,1)$. Por tanto, $T^{\perp} = \langle(2,-3,1)\rangle$.

Solución alternativa:

Comenzaremos hallando el complemento ortogonal $T^{\perp}$. Puesto que el conjunt $B_T = \{(1,1,1),(0,1,3)\}$ es una base de T, resulta que $T^{\perp} = B_T^{\perp}$. Así que un vector $\vec{x}$ está en $T^{\perp}$ si y solo si los productos escalares de $\vec{x}$ por los dos vectores de B_T son nulos. En otras palabras, si $\vec{x}$ es solución del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Y, resolviendo el sistema, obtenemos

$$T^{\perp} = \langle (2,-3,1) \rangle \, .$$

Por otra parte, puesto que $T = (T^{\perp})^{\perp}$,

$$T = \langle (2,-3,1) \rangle^{\perp}$$

es decir, que los vectores de T son los ortogonales al vector $(2,-3,1)$:

$$T = \{(x,y,z) : \ 2x-3y+z=0\}$$

(c) El subespacio $T \cap S$ puede describirse fácilmente usando las ecuaciones implícitas de T y de S:

$$T \cap S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=0 \ \ \wedge x+y+z=0 \ \ \wedge \ \ x-2y=0\}.$$

Por tanto, $T \cap S$ es el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo dado por las 3 ecuaciones implícitas. Resolviéndolo se deduce que

$$T \cap S = \{(0,0,0)\}.$$

Puesto que la intersección $T \cap S$ es trivial, el subespacio suma $T+S$ es una suma directa. Por tanto:

$$\dim(T+S) = \dim(T) + \dim(S) = 2 + \dim(S).$$

Obsérvese que $S \neq \{(0,0,0)\}$ porque, por ejemplo, el vector $(2,1,-3)$ pertenece a S (satisface sus ecuaciones implícitas). Luego $\dim(S) \geq 1$ y, por tanto,

$$\dim(T+S) = \dim(T) + \dim(S) = 2 + \dim(S) \geq 2+1 = 3.$$

Como $T+S$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión mayor o igual que 3, concluimos que su dimensión tiene que ser exactamente 3 y además $T+S = \mathbb{R}^3$.

(Puede razonarse también calculando una base de S (que tendrá un solo vector) y aplicando la fórmula anterior, o también calculando directamente una base de $T+S$).

Nombre y apellidos:
Grupo:

Cuestión 2 (3 pt.) (a) Dadas las matrices

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

estudia si son diagonalizables y, si alguna lo es, diagonalízala.

(b) Los valores propios de una matriz 3×3 A son 1, 2 y 3, y los subespacios propios correspondientes son:

$$E_1 = \langle (1,0,0) \rangle \qquad E_2 = \langle (1,1,0) \rangle \qquad E_3 = \langle (1,1,1) \rangle.$$

Calcula las matrices A, y A^n (para n arbitrario).

Solución:

(a) Para estudiar si A es diagonalizable, calculamos primero los valores propios de A. Como su polinomio característico es $p_{\mathsf{A}}(\lambda) = (-1-\lambda)^2(3-\lambda)$, se deduce que tiene dos valores propios: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$, con multiplicidades algebraicas $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$. Obsérvese que la suma de las multiplicades algebraicas coincide con 3 (el orden de la matriz).

Si d_i denota la multiplicidad geométrica de λ_i (es decir, la dimensión de su subespacio propio asociado), por la desigualdad $1 \le d_2 \le \alpha_2$ se deduce que $d_2 = 1$. Por otra parte:

$$d_1 = \dim \operatorname{Nuc}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathsf{I}) = 3 - \operatorname{rang}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathsf{I}) = 3 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Por tanto, las multiplicidades geométricas coinciden con las algebraicas. Se satisfacen, así, las dos condiciones del teorema de caracterización de matrices diagonalizables, y concluimos que A es diagonalizable. Luego $\mathsf{A} = \mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^{-1}$.

La matriz D es: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Las dos primeras columnas de la matriz P constituyen una base del subespacio propio asociado a $\lambda_1 = -1$, y la última columna constituye una base del asociado a $\lambda_2 = 3$. Efectuando los cálculos pertinentes se tiene que:

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9/4 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego:

$$\mathsf{A} = \mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9/4 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9/4 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con respecto a la matriz B, su polinomio característico es $p_B(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda+1)^2$. Por tanto, los valores propios son $\lambda_1 = -1$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$) y $\lambda_2 = 2$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$).

Calculamos la dimensión del subespacio propio asociado a $\lambda_1 = -1$:

$$d_1 := \dim \operatorname{Nuc}(\mathsf{B} - \lambda_1 \mathsf{I}) = 3 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Como $d_1 \neq \alpha_1$, concluimos que B no es diagonalizable (por el teorema de caracterización).

(b) Como A tiene 3 valores propios distintos, es diagonalizable. Luego $\mathsf{A} = \mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^{-1}$, siendo $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Además:

$$\mathsf{A}^n = (\mathsf{PDP}^{-1})(\mathsf{PDP}^{-1})\cdots(\mathsf{PDP}^{-1}) = \mathsf{PD}^n\mathsf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2^n-1&3^n-2^n\\0&2^n&3^n-2^n\\0&0&3^n\end{bmatrix}.$$

Cuestión 3 (2 pt.) Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 2z,\ 2x + y + z,\ 3x - y + 3z).$$

(a) Calcula la matriz canónica de f.

(b) Calcula una base del núcleo y otra de la imagen de f.

(c) Determina razonadamente si f es inyectiva y/o suprayectiva y/o biyectiva.

(d) Determina si el vector $(8, -6, -10)$ pertenece al núcleo de f y si el vector $(1, 2, 1)$ pertenece a la imagen de f.

Solución:

(a) Como

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix}x-2y+2z\\2x+y+z\\3x-y+3z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-2&2\\2&1&1\\3&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

se tiene que la matriz canónica de f es:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1&-2&2\\2&1&1\\3&-1&3\end{bmatrix}.$$

(b)

$$\text{Nuc}(f) = \text{Nuc}(\mathsf{A}) = \text{Nuc}\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&1&1\\3&-1&3\end{bmatrix} = \langle(-4/5,\ 3/5,\ 1)\rangle.$$

Luego $\{(-4/5,\ 3/5,\ 1)\}$ es una base de $\text{Nuc}(f)$.

Como $\text{Im}(f) = \text{Col}(\mathsf{A})$, para calcular una base de $\text{Im}(f)$ podemos escalonar la matriz cuyas filas son los traspuestos de los vectores columna de A:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&1&-1\\2&1&3\end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Por tanto $\{(1,2,3),(0,1,1)\}$ es una base de $\text{Im}(f)$.

(c) f no es inyectiva porque su núcleo no es trivial. Tampoco es suprayectiva porque su imagen no coincide con $\mathbb{R}^3$. Por tanto, tampoco es biyectiva.

(d) El vector $(-4/5, 3/5, 1)$ es un generador del núcleo (por el apartado (b)) y se tiene que $(8,-6,-10) = -10(-4/5, 3/5, 1)$. Por tanto $(8,-6,-10) \in \text{Nuc}(f)$. También puede razonarse comprobando que $f(8,-6,-10) = (0,0,0)$.

Para determinar si el vector $(1,2,1)$ pertenece a $\text{Im}(f)$ sólo hemos de averiguar si existe algún vector (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (1,2,1)$, es decir, si el sistema de ecuaciones con expresión matricial

$$\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&1&1\\3&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

es o no compatible. Para ello, construiremos su matriz ampliada, la escalonaremos y aplicaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\begin{bmatrix}1&-2&2&1\\2&1&1&2\\3&-1&3&1\end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix}1&-2&2&1\\0&5&-3&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

Como el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3, el sistema es incompatible. Por tanto, podemos concluir que el vector $(1,2,1)$ no pertenece a $\text{Im}(f)$.

Nombre y apellidos:
Grupo:

Cuestión 4 (2 pt.) Responde a las siguientes cuestiones:

(a) Sabiendo que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, el conjunto $S_1 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_3 + \vec{u}_1\}$ ¿también lo es? Jutifica la respuesta.

(b) Sabiendo que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, el conjunto $S_2 = \{\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \vec{u}_3 - \vec{u}_1\}$ ¿también lo es? Justifica la respuesta.

(c) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^5$ una aplicación lineal inyectiva. ¿Qué podemos decir de n? ¿Cuál es la dimensión de $\operatorname{Im} f$?

(d) De una matriz A sabemos que es 5×5, que tiene $\lambda = 2$ como valor propio, y que la dimensión del subespacio propio asociado a este valor propio es 5. Calcula la matriz A, justificando adecuadamente la respuesta.

Solución:

(a) Como el número de vectores de S_1 coincide con la dimensión de $\mathbb{R}^3$, se tiene que: S_1 es una base de $\mathbb{R}^3$ si y sólo si es linealmente independiente.

Para determinar si S_1 es linealmente independiente consideramos una relación lineal arbitraria entre los vectores:

$$\alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \beta(\vec{u}_2 + \vec{u}_3) + \gamma(\vec{u}_3 + \vec{u}_1) = \vec{0},$$

con α, β, γ escalares arbitrarios. Agrupando términos:

$$(\alpha + \gamma)\vec{u}_1 + (\alpha + \beta)\vec{u}_2 + (\beta + \gamma)\vec{u}_3 = \vec{0}.$$

Como B es una base, es linealmente independiente y, por tanto, la única relación lineal entre sus vectores es la trivial. Se deduce, por tanto, que:

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\beta + \gamma = 0.$$

Esto constituye un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuya única solución es la trivial. Por tanto, S_1 es linealmente independiente.

Otra forma de responder a esta cuestión consiste en tomar los vectores de coordenadas de los vectores en S_1 respecto a la base B y probar que forman un sistema linealmente independiente.

(b) No lo es porque

$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + (\vec{u}_2 - \vec{u}_3) + (\vec{u}_3 - \vec{u}_1) = \vec{0}$$

es una relación lineal no trivial entre los vectores de S_2 y, por tanto, S_2 es linealmente dependiente.

(c) A partir de la fórmula

$$\dim \operatorname{Nuc}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = n$$

y del hecho de que $\operatorname{Nuc}(f) = \{\vec{0}\}$ (pues f es inyectiva) se deduce que

$$\dim \operatorname{Im}(f) = n.$$

Además, como $\operatorname{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$, se tiene que $n \leq 5$.

(d) Como la dimensión del subespacio propio asociado a $\lambda = 2$ es 5, se tiene que $\mathbb{R}^5$ tiene una base formada por vectores propios de A. Por el teorema de caracterización de matrices diagonalizables, A es diagonalizable y su forma diagonal es $\mathsf{D} = 2\mathsf{I}$, donde I es la matriz identidad de orden 5. Además, podemos tomar como matriz P la matriz identidad (cualquier base de $\mathbb{R}^5$ está formada por vectores propios, en particular la canónica). Luego $\mathsf{A} = \mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^{-1} = \mathsf{D} = 2\mathsf{I}$.