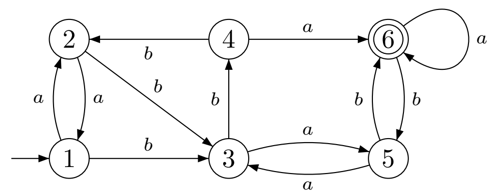
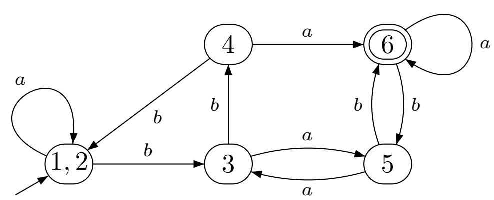
Solución al Examen de Teoría de autómatas y lenguajes formales
del 2 de Diciembre del 2016.

1. (3 ptos.)
Calcular el AFD mínimo equivalente al siguiente autómata finito:



$R^0 = \{\{1,2,3,4,5\},\{6\}\}$
$R^1 = \{\{1,2,3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$
$R^2 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$
$R^3 = R^2 = R^\infty$



2. (3 ptos.)
Sea $L = \{xay : x, y \in \{a,b\}^* \wedge y \neq x^R\}$. ¿Es L regular?

Sea la secuencia infinita $\langle b^i a\rangle_{i>0}$ y sean $b^j a$ y $b^k a$ con $j \neq k$ dos palabras cualesquiera de la misma. Consideremos además la palabra b^j. Podemos observar que

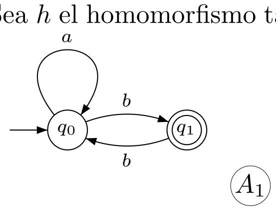
$b^j a.b^j \notin L$ pues contiene una única a y las palabras a su izquierda, $x = b^j$, y derecha, $y = b^j$, son tales que $y = x^R$, mientras que

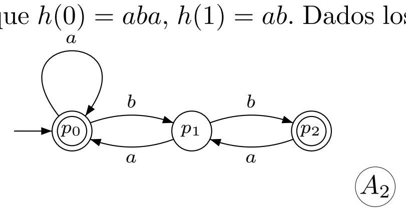
$b^k a.b^j \in L$ pues puede expresarse en la forma $xay : y = b^j \neq x^R = b^k$.

Por tanto $b^j a$ y $b^k a$ tendrían que llevarnos a estados diferentes en cualquier AFD que aceptara a L. Puesto que esto es cierto para cada par de palabras de la serie infinita, cualquier autómata que aceptara a L tendría que tener infinitos estados y no sería, por tanto, un AFD. Con esto queda demostrado que no existe ningún AFD que acepte a L y, por definición, que L no es regular.

3. (3 ptos.)

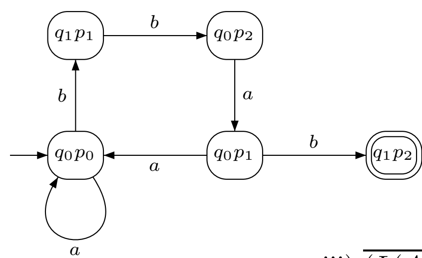
Sea h el homomorfismo tal que $h(0) = aba$, $h(1) = ab$. Dados los autómatas



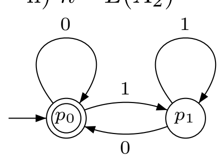


calcular un AFD para cada uno de los siguientes lenguajes:

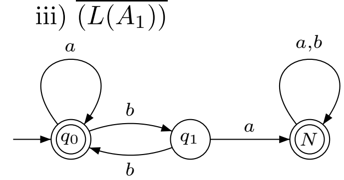
i) $L(A_1) \cap L(A_2)$



ii) $h^{-1}L(A_2)$



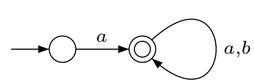
iii) $\overline{(L(A_1))}$



4. (1 pto.)

Sea $L \subseteq \{a, b\}^*$ y sea P una operación tal que $P(L)$ es el resultado de eliminar el primer símbolo de las palabras de L que comienzan por a, dejando como están las demás. Demuestre que $L \in \mathfrak{L}_3 \Rightarrow P(L) \in \mathfrak{L}_3$.

El lenguaje $L_a = \{x \in \{a, b\}^* : a \in Pref(x)\}$ es regular, pues es aceptado por el AFD



Ahora tenemos que: Por una parte $a^{-1}L$ son las palabras resultantes de quitar a las palabras de L que comienzan por a su primer símbolo. Por otra parte $L - L_a$ son las palabras de L que no comienzan por a.

Por lo tanto $P(L) = (a^{-1}L) \cup (L - L_a)$.

Ahora, dado que $L_a \in \mathfrak{L}_3$, y que $\mathfrak{L}_3$ es cerrada bajo derivadas, unión y diferencia,

$L \in \mathfrak{L}_3 \Rightarrow (a^{-1}L) \cup (L - L_a) \in \mathfrak{L}_3$

o, lo que es lo mismo,

$L \in \mathfrak{L}_3 \Rightarrow P(L) \in \mathfrak{L}_3$