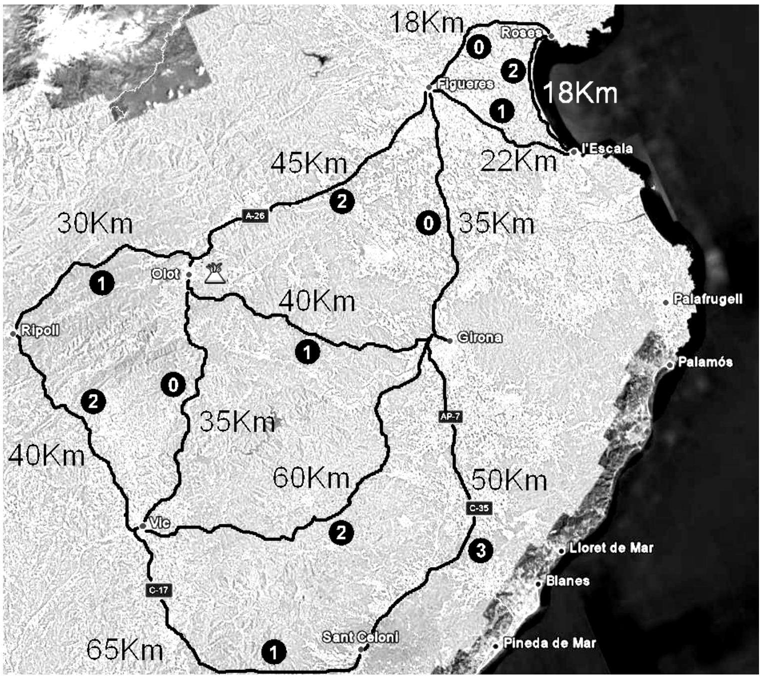
Prácticas de Matemática Discreta

Soluciones Actividades 1

Ejercicio 1. Consideremos el siguiente mapa de carreteras (aparecen las distancias en Km y, dentro de círculos, el número de peajes existentes en cada tramo):



1. Representa el mapa (obviando las distancias y el número de peajes) por medio de un grafo cuyas aristas se correspondan con las carreteras y cuyos vértices se correspondan con las poblaciones conectadas por ellas. Etiqueta los vértices y las aristas.

2. Describe la aplicación de incidencia del grafo.

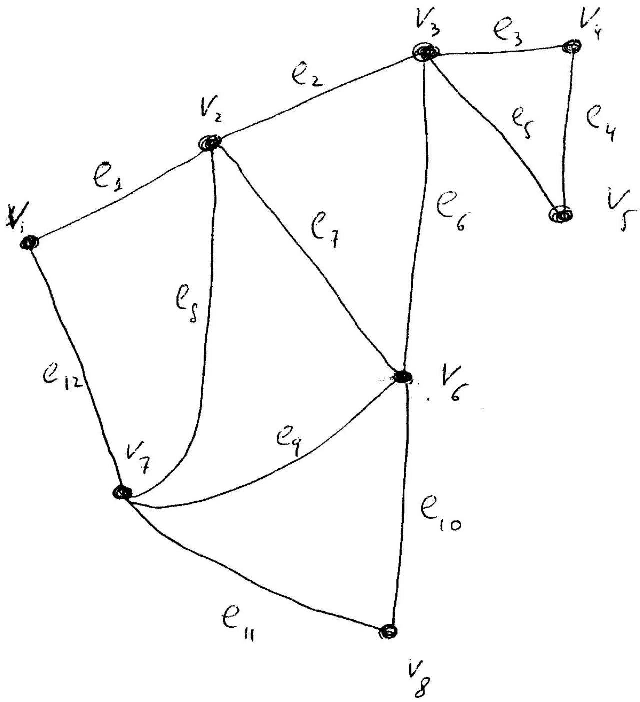
3. Escribe su matriz de adyacencia.

4. Escribe los grados de todos los vértices del grafo.

5. Compara la suma de todos los grados con el número de aristas del grafo. ¿Qué relación guardan?

Solución:

1. Una representación del grafo en forma de diagrama es la siguiente:



2. La aplicación de incidencia δ viene definida de la siguiente manera:

$$\delta(e_1) = \{v_1, v_2\}, \quad \delta(e_2) = \{v_2, v_3\}, \quad \delta(e_3) = \{v_3, v_4\}, \quad \delta(e_4) = \{v_4, v_5\}$$

$$\delta(e_5) = \{v_3, v_5\}, \quad \delta(e_6) = \{v_6, v_3\}, \quad \delta(e_7) = \{v_6, v_2\}, \quad \delta(e_8) = \{v_7, v_2\}$$

$$\delta(e_9) = \{v_6, v_7\}, \quad \delta(e_{10}) = \{v_6, v_8\}, \quad \delta(e_{111}) = \{v_7, v_8\}, \quad \delta(e_{12}) = \{v_1, v_7\}.$$

3. La matriz de adyacencia del grafo es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Los grados de los vértices son los siguientes:

$$\deg(v_1) = \deg(v_4) = \deg(v_5) = \deg(v_8) = 2,$$
$$\deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_6) = \deg(v_7) = 4.$$

5. La suma de todos los grados es 24. El número de aristas es 12. La relación es la siguiente: la suma de los grados es igual al doble del número de aristas.

Ejercicio 2. ¿Puede la siguiente matriz ser la matriz de incidencia de un grafo? ¿Por qué?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

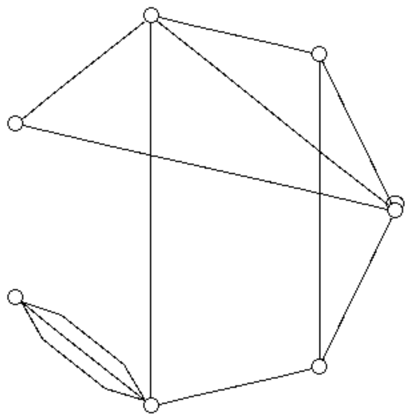
Solución:

Como cada arista es incidente, o bien con 2 vértices, o bien con 1 (si es un lazo), las columnas de la matriz de incidencia deben tener, o bien dos unos (y el resto de elementos son ceros) o bien un dos (y el resto de elementos son ceros). La primera columna de la matriz del enunciado no cumple esta condición. Por lo tanto, esta matriz no puede ser la matriz de incidencia asociada a un grafo.

Ejercicio 3. Haz una representación gráfica del grafo cuya matriz de adyacencia sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:



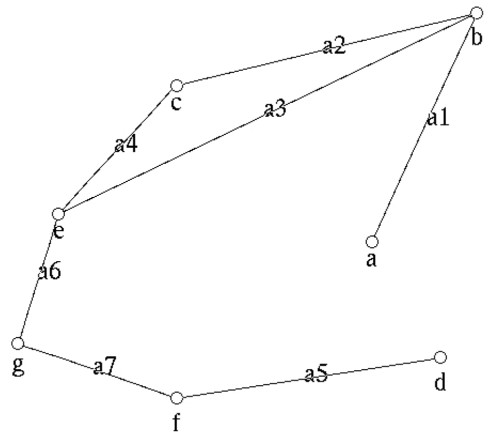
Ejercicio 4. Sea $G = (V, A, \delta)$ el grafo con $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ y cuya aplicación de incidencia viene dada por:

$$\delta(a_1) = \{a, b\}, \quad \delta(a_2) = \{b, c\}, \quad \delta(a_3) = \{b, e\}, \quad \delta(a_4) = \{c, e\}$$
$$\delta(a_5) = \{d, f\}, \quad \delta(a_6) = \{e, g\}, \quad \delta(a_7) = \{f, g\}$$

1. Analiza si se trata de un grafo simple, si existen bucles y si hay vértices aislados.
2. Dibuja una representación gráfica de G.
3. Obtén las matrices de adyacencia e incidencia de G.

Solución:

1. Es un grafo simple, ya que no posee aristas múltiples (es decir, varias aristas con los mismos extremos).
2. No existen bucles, ya que no hay ninguna arista cuyos extremos coincidan.
3. No existen vértices aislados, ya que todos los vértices son extremos de alguna arista.
4. Una representación gráfica del grafo es la siguiente:



5. La matriz de adyacencia de G es:

$$M_A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

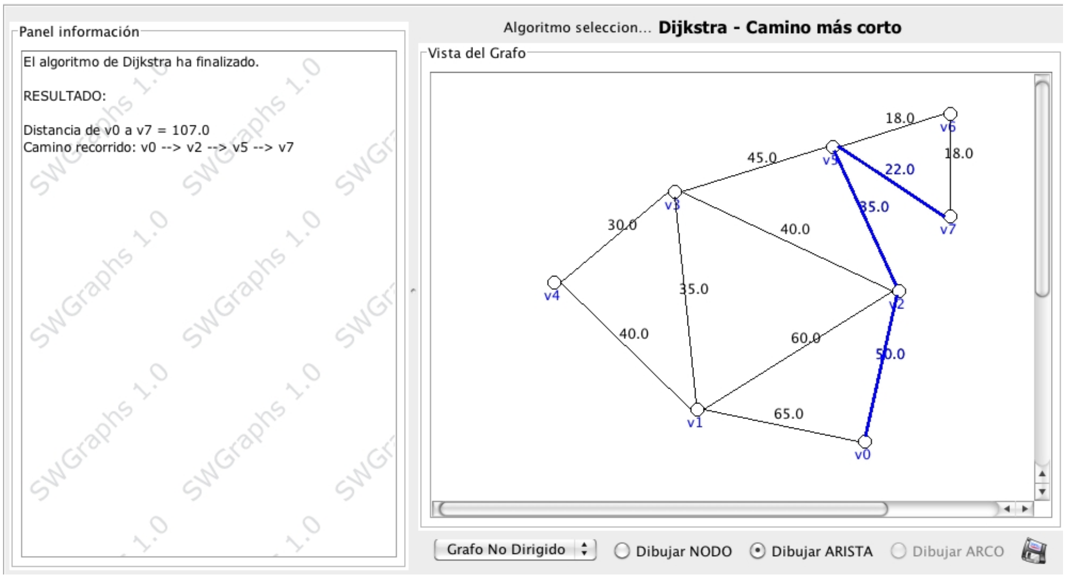
La matriz de inicidencia de G es:

$$M_I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Considera el grafo del Ejercicio 1 y pondera sus aristas con las distancias en cada tramo de carretera. Introduce este grafo ponderado en *SWGraphs*. El algoritmo *Dijkstra* (que aparece en la barra de menús de *SWGraphs*) calcula la "ruta más corta" entre dos vértices del grafo (es decir, el "camino" entre dos vértices tal que la suma de los pesos es la menor posible). Aunque en una práctica posterior estudiaremos con detalle este algoritmo, lo usaremos aquí para contestar a la siguiente cuestión: ¿cuál es la ruta más corta entre Sant Celoni y L'Escala? (Resulta obvio que esta pregunta puede responderse, en este caso, mediante una simple inspección ocular; sin embargo, en el caso de grafos muy grandes y complejos, resulta necesario disponer de un algoritmo que resuelva este tipo de problemas).

Solución:

Representamos en *GWGraphs* el grafo del Ejercicio 1, conjuntamente con los pesos de las aristas (distancias). Sant Celoni se corresponde con el vértice v_0 y L'Escala con el vértice v_7.



El camino más corto aparece marcado en azul. La distancia mínima es de 107 Km.

Ejercicio 6. (*) En la misma situación del ejercicio anterior utiliza el programa *SWGraphs* para contestar a las siguientes cuestiones:

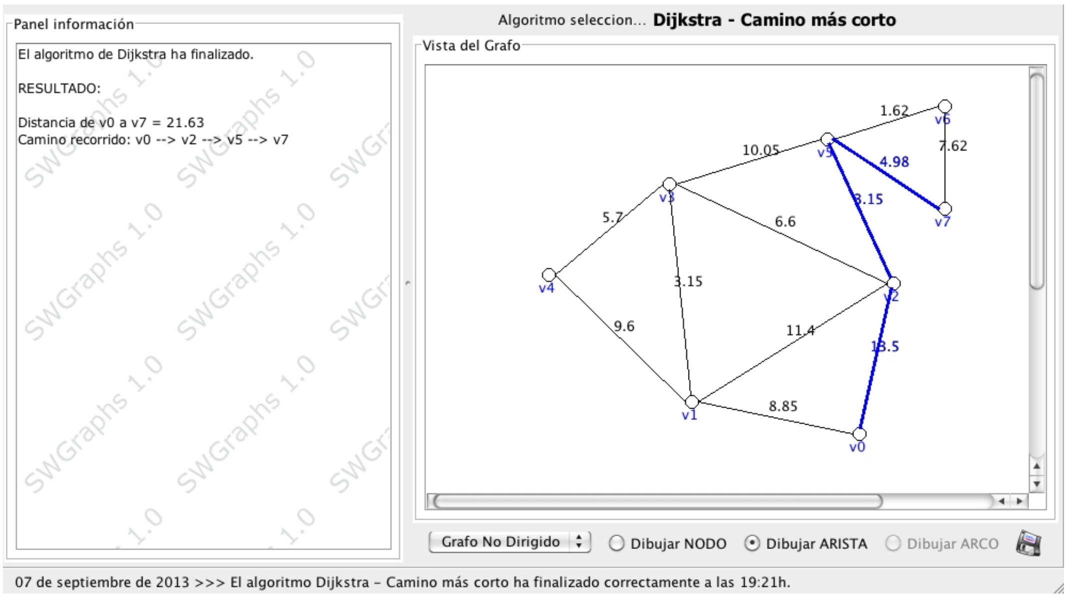
(a) Un viajante quiere ir desde Sant Celoni a L'Escala. No le importa la cantidad de kilómetros que pueda hacer, pero quiere pasar por el menor número de peajes posible. Encuentra una posible ruta con esta condición.

(b) El mismo viajante quiere ir desde Sant Celoni a L'Escala de manera que el dinero que se gaste entre gasolina y peajes sea el menor posible. Teniendo en cuenta que su coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 kilómetros, que el litro de gasolina cuesta 1.5 euros y que en cada peaje deben pagarse 3 euros, calcula la ruta más económica.

Solución:

(a) Cambiando los pesos de las aristas del grafo utilizado en el ejercicio anterior por los números de peajes y aplicando el algoritmo de Dijkstra, se obtiene una ruta con menor peso, es decir, con el menor número de peajes posible (en este caso 3).

(b) Teniendo en cuenta los datos aportados, cada kilómetro cuesta $0{,}09$ euros. Ponderamos cada arista con el siguiente peso: $0{,}09\times$(número de Km)$+3\times$(numero de peajes). De esta manera obtendremos un grafo ponderado cuyos pesos representan las cantidades de dinero que cuesta viajar por cada tramo. Aplicando el Algoritmo de Dijkstra obtendremos el "camino más corto", es decir, la ruta "más económica":



La ruta es: Sant Celoni-Girona-Figueres-L'Escala y cuesta 21,63 euros entre gasolina y peajes.