Concepto de grafo

Se llama grafo (no dirigido) a una terna (V, A, f) donde:

1. V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se denominan vértices.
2. A es un conjunto finito cuyos elementos se denominan aristas.
3. f es una asignación (llamada aplicación de incidencia) que a cada arista e le asigna un subconjunto de vértices formado por 1 ó 2 elementos (es decir, $f(e) = \{v_i, v_j\}$ o $f(e) = \{v_i\}$, donde v_i y v_j son vértices). A esos vértices se le llama *extremo/s* de la arista.

Representación gráfica

Los vértices se representan gráficamente como puntos del plano y cada arista como una curva que une sus extremos.

- Dos **vértices** $v, w \in V$ se dice que son ***adyacentes*** si existe una arista e que los une. En el ejemplo, v_1 y v_3 son adyacentes. En este caso diremos también que v_1 y v_3 son *incidentes con* e_3, o que e_3 *es incidente con* v_1 *y* v_3.
- Dos **aristas** se dice que son ***paralelas*** si tienen los mismos extremos. En el ejemplo, e_4 y e_5 son aristas paralelas.
- La arista e_1 es un ***bucle*** (o *lazo*), es decir, una arista que une un vértice consigo mismo.
- v_4 es un ***vértice aislado***, es decir, no es incidente con ninguna arista.

Definición

Sea $G = (V, A, f)$ un grafo, con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. La **matriz de adyacencia** de G es la matriz cuadrada $M_A = (m_{ij})$ de tamaño $n \times n$ tal que m_{ij} es el número de aristas distintas con extremos v_i y v_j.

Definición

Sea G un grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ y conjunto de aristas $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. La **matriz de incidencia** de G se define como la matriz $M_I = (m_{ij})$, de tamaño $m \times n$ dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es extremo de } e_j \text{ y } e_j \text{ no es bucle,} \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } e_j, \\ 2 & \text{si } e_j \text{ es un bucle de extremo } v_i. \end{cases}$$

Definición

El **grado** de un vértice v, denotado $\deg(v)$, es el número de aristas que inciden en él (contándolas 2 veces cuando son bucles).

Propiedad

Si $G = (V, A, f)$ es un grafo entonces:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot \text{n}^{\text{o}} \text{ de aristas},$$

es decir, en cualquier grafo, **la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas**.

Consecuencias inmediatas:

- La suma de los grados de los vértices de un grafo es un número par.

- Todo grafo contiene un número par de vértices de grado impar.

Tipos de grafos

- Un **grafo** es **simple** si no tiene aristas paralelas.
- Un **grafo** es **nulo** si no tiene aristas, es decir, consta únicamente de un conjunto de vértices aislados.
- El **grafo trivial** es el que consta de un único vértice aislado.
- Un **grafo** es **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si ese grado común es k se dice que el grafo es ***k*-regular**. Por ejemplo los siguientes grafos son todos 2-regulares:

Tipos de grafos

- Un **grafo** es **completo** si cada vértice es adyacente a todos los demás (es decir, cualquier par de vértices distintos están unidos por al menos una arista).
- Denotaremos $\mathbf{K_n}$ al grafo completo, simple y sin bucles de n vértices:

Tipos de grafos

- Un **grafo** $G = (V, A, f)$ es **bipartido** si el conjunto de vértices V se puede dividir en dos subconjuntos V_1 y V_2 que no tienen elementos en común, de manera que cada arista del grafo une un vértice de V_1 con uno de V_2.
- Llamamos grafo **bipartido completo** $\mathbf{K_{n,m}}$ al grafo simple y bipartido en el cual V_1 tiene n vértices, V_2 tiene m vértices y cada vértice de V_1 es adyacente a todos y cada uno de los vértices de V_2.

.