Lliçó 14: Intersecció i suma de subespais. Suma directa

Suma i intersecció

- La suma dels subespais F i G, $F+G$, és l'embolcall lineal $\langle F \cup G \rangle$ o, equivalentment, el conjunt

$$F+G = \{\vec{u}+\vec{v} : \vec{u} \in F, \vec{v} \in G\}$$

- La suma i la intersecció de subespais són subespais
- Per trobar una base de la suma, extraieu una base de la unió de les bases respectives
- Per trobar una base de la intersecció, feu un únic sistema amb les equacions dels dos subespais i trobeu una base del conjunt de solucions
- La suma és el subespai més petit que conté els dos subespais
- La intersecció és el subespai més gran que és contingut als dos subespais
- L'ortogonal de la suma és la intersecció dels ortogonals

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

Fórmula de Grassman

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Suma directa

- La suma $F+G$ és directa si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

☞ S'escriu $F \bigoplus G$

- Afirmacions equivalents:
  1. La suma és directa
  2. $F \cap G = \{\vec{0}\}$
  3. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$
  4. B_F i B_G bases de F i $G \Longrightarrow B_F \cup B_G$ base de $F+G$
  5. $\vec{u} \in F+G \Longrightarrow \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ de forma única
  6. $\vec{u}_F + \vec{u}_G = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u}_F = \vec{u}_G = \vec{0}$

Suma de diversos subespais

- La suma dels subespais $F_1, F_2, \ldots, F_r$ és el conjunt

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_r = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r : \vec{u}_1 \in F_1, \vec{u}_2 \in F_2, \ldots, \vec{u}_r \in F_r\}$$

- La suma és directa si $\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_r) = \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_r$.
- Afirmacions equivalents:
  1. La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ és directa.
  2. Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ són vectors de $F_1, F_2, \ldots, F_r$ i si $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r = \vec{0}$, llavors $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \cdots = \vec{u}_r = \vec{0}$.
  3. Si $\vec{u}$ és un vector de la suma, llavors existeix *un únic* vector en cadascun dels subespais, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ de manera que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_r$ □