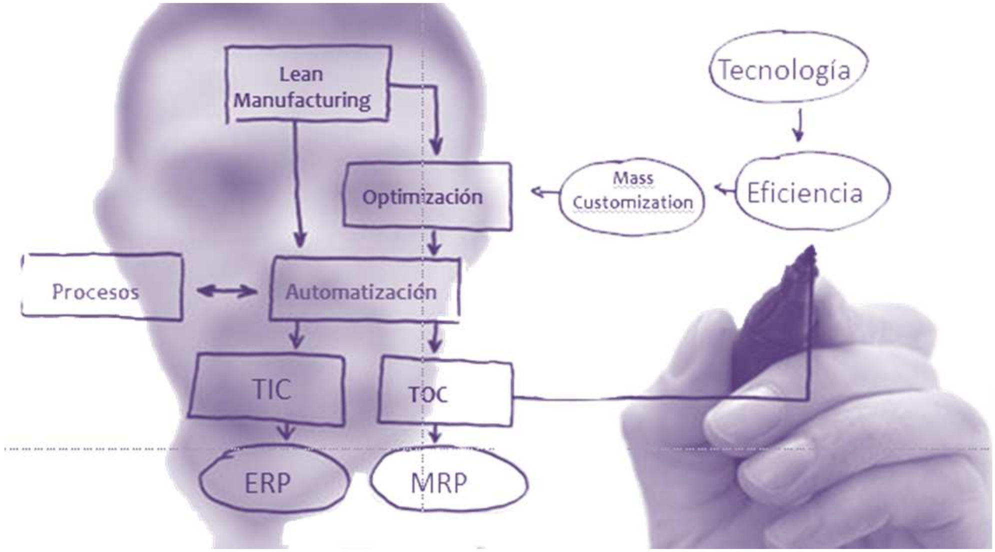


DEIOAC-UPV

2. Formulación de modelos de programación lineal

Objetivos

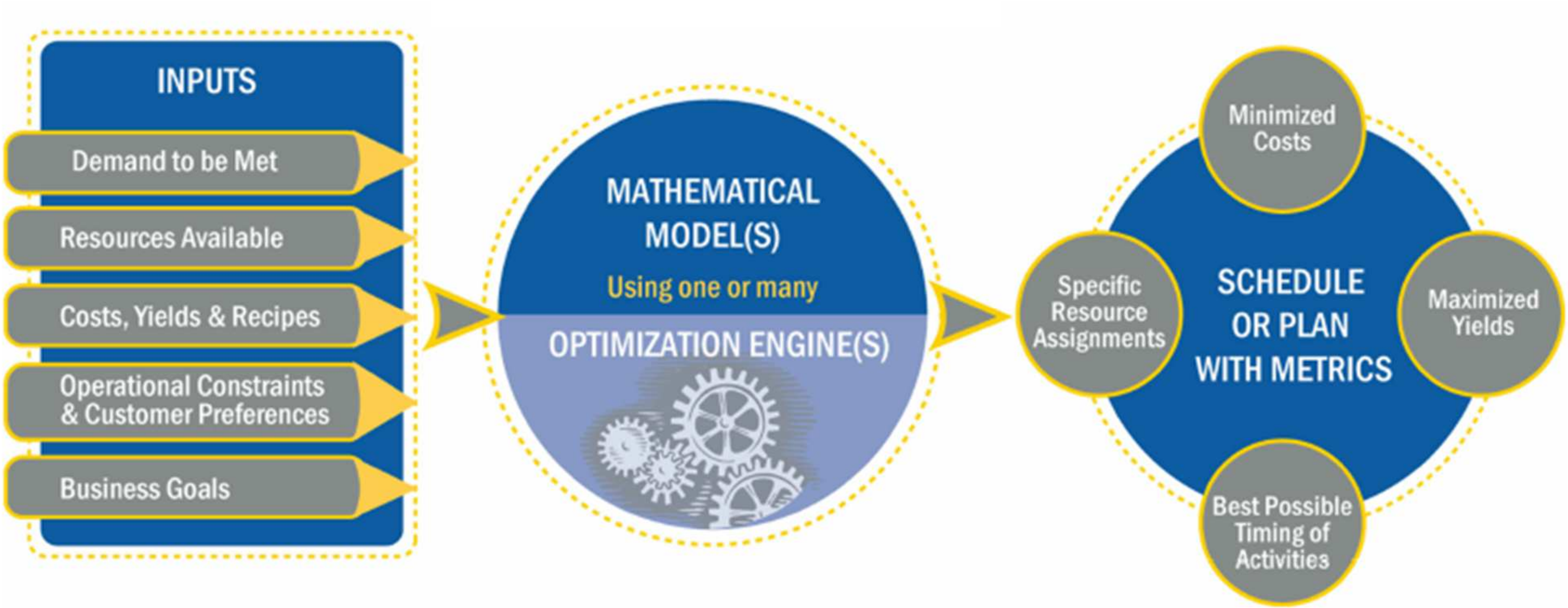
Al finalizar el tema, deberás ser capaz de:

- Plantear y formular modelos de programación lineal y entera de diversos tipos (planif. de la producción, mezclas óptimas, localización y cubrimiento, turnos y horarios, corte óptimo de materia prima, transporte, etc.).
- Reconocer las características propias de los distintos tipos de problemas y su modelización mediante modelos de programación lineal.

CONTENIDOS

2.1 Definición de modelo

- Los sistema de toma de decisiones basados en optimización tienen una arquitectura bien definida como se muestra en el siguiente gráfico:



- En este tema nos dedicaremos a la formulación de modelos de programación lineal que representan el problema decisional a resolver.

2.1 Definición de Modelo

- Es una **reproducción fiel de la realidad**
- Es una **abstracción** selectiva de la realidad
- En la práctica se utilizan muchos tipos de modelos, la **selección del modelo adecuado** es crucial para obtener una solución satisfactoria a un problema
- Debe hacer posible la identificación y evaluación sistemática de **todas las alternativas de decisión** del problema. Se llega a una decisión seleccionando la mejor alternativa de entre todas las disponibles

2.1 Definición de Modelo

- El modelo se define como una **función objetivo** y **restricciones** expresadas en términos de las **variables** (alternativas) de decisión del problema
- Un modelo debe contener **tres elementos**:
  - Alternativas de decisión, de las cuales se hace una selección (**variables decisión**).
  - **Restricciones**, para excluir alternativas no factibles
  - Criterios para evaluar y clasificar las alternativas factibles (**función objetivo**)

  \+ **Parámetros**

2.2 Forma general de un modelo matemático

1. VARIABLES DECISIÓN

- ¿Sobre qué aspectos del problema podemos decidir? ¿qué variables podemos nombrar y controlar? Es necesario identificar cuáles son las variables **bajo nuestro control**
- Las variables son incógnitas o decisiones que deben determinarse según se vaya resolviendo el problema. Se suelen denotar por (**Xi**). A las variables decisión se les suele llamar ***Actividad*** y a sus valores ***niveles de la actividad***

2.2 Forma general de un modelo matemático

2. PARÁMETROS DE DECISIÓN Y RESTRICCIONES

- **PARÁMETROS**: valores conocidos que se relacionan con las variables, restricciones y la función objetivo
- **RESTRICCIONES**: son aquellas limitaciones del sistema que se deben tener en cuenta, como las **tecnológicas**, **legales**, **económicas** y otras que van a restringir a las variables decisión en un rango de valores que resulte factible
- Buscaremos combinaciones de niveles de actividad de las variables que satisfagan **todas** las restricciones

2.2 Forma general de un modelo matemático

3. FUNCIÓN OBJETIVO

- Define la medida de **efectividad que obtiene el sistema**, cuando los valores de las variables decisión con sus respectivos parámetros y restricciones, dan como resultado una mejora del sistema

2.2 Forma general de un modelo matemático

Función Objetivo:

MAX ó **MIN** $\mathbf{Z} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \ldots + c_n X_n$

Sujeto a:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \ldots + a_{1n} X_n \; \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \; b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \ldots + a_{2n} X_n \; \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \; b_2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \ldots + a_{mn} X_n \; \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \; b_m$$

b_i= Disponibilidades de los recursos. **Limitación**: límites de producción, disponibilidad de materia prima, etc o **Requerimiento**: demanda, pedidos, compromiso de entrega, etc.

Z = Cantidad a optimizar

c_j = Coeficientes en la Función Objetivo

X_j = **variables decisión**

a_{ij} = Coeficientes técnicos

n = número de variables

m = número de restricciones

2.3 Modelos matemáticos: Consideraciones computacionales

Aunque los modelos de programación matemática pueden parecer similares, con una función objetivo a optimizar y un conjunto de restricciones que limitan el valor de las variables, son muy diferentes respecto al esfuerzo computacional que requiere alcanzar la solución óptima. En orden de complejidad:

- **Modelo Lineal:**
  - Función Objetivo y Restricciones lineales
  - Variables decisión continuas
- **Modelo de programación entera pura o mixta**
  - Función Objetivo y Restricciones lineales
  - Variables decisión discretas
- **Modelo no lineal**
  - Función Objetivo y/o Restricciones no lineales

2.3 Modelos matemáticos: Consideraciones computacionales

- Algoritmos a aplicar según el tipo de modelo:
  - **Modelo Lineal** (se obtiene el óptimo global) son con mucho los más fáciles de resolver. Existe código de PL para grandes sistemas y para microcomputadores.
    - **Algoritmo del Simplex**
    - Algoritmo del Punto Interior
  - **Modelo de programación entera pura o mixta**

    (se obtiene el óptimo global)
    - **Algoritmo de bifurcación y acotación**
    - Algoritmo de Planos de Corte
  - **Modelo no lineal** (se obtiene un óptimo local)
    - **Algoritmo del Gradiente Reducido Generalizado**

2.3 Modelos matemáticos: Consideraciones computacionales

- En cuanto al estado actual del desarrollo de los algoritmos de resolución:
  1. Los códigos de PL son potentes y permiten algunos excesos a cambio de modelos más comprensibles: No es necesario economizar en la definición de variables y/o restricciones.
  2. La prioridad en la modelización debe ser la claridad en lugar de reducir el número de variables y restricciones.
  3. No obstante es necesario tener en cuenta que un modelo con un número elevado de variables enteras o funciones no lineales puede resultar difícil sino imposible de resolver. Las variables enteras y las funciones no lineales pueden resultar interesantes por su riqueza que aportan a la modelización, pero en muchos casos el analista debe estar dispuesto a sacrificar precisión en favor de modelos computacionalmente tratables.
- El **conocimiento de los algoritmos** nos permitirá modelizar un determinado problema según la estructura de modelo que implique un **menor tiempo de computación** garantizando el **óptimo global**

2.4 Recomendaciones para la formulación de modelos

1. Identificar verbalmente las variables decisión:
   - Pueden haber varias elecciones posibles
   - Ayuda:

     ¿Qué órdenes o acciones directas deben ser obtenidas de mi modelo?
   - Una buena y clara definición de las variables puede hacer mucho más sencilla la formulación de las restricciones

2.4 Recomendaciones para la formulación de modelos

2. Expresar el **objetivo** en palabras
3. Expresar la **función objetivo** en términos de las variables decisión
4. Expresar cada **restricción** en palabras
   - Prestar atención a si la restricción es un requerimiento (**>=**), una limitación (**<=**) o una igualdad (**=**)
5. Expresar las **restricciones** en términos de las variables decisión
   - Comprobar la consistencia de las unidades

2.4 Recomendaciones para la formulación de modelos

Aproximaciones a la modelización matemática:

- **Modelos tipo**

  Se busca un modelo de estructura y características definidas y estudiadas y que se ajusta a nuestro problema

- **Modelización a medida**

  La modelización se realiza de un modo más creativo sin buscar ni establecer ninguna relación con otros modelos o problemas

En la práctica se suelen combinar ambas aproximaciones

2.5 Aplicaciones de Programación Lineal

- Planificación de la Producción
- Planificación Multiperiodo
- Mezclas
- Corte de Materias Primas
- Asignación de Personal
- Problemas con estructura especial: problemas de Redes

2.5.1 Planificación de la Producción

PROBLEMAS DE PRODUCCIÓN

Existe un conjunto de productos que pueden producirse o venderse y un conjunto de recursos que están disponibles en cantidades limitadas a partir de los cuales se fabrican los productos.

Asociado a cada producto hay un ratio de contribución al beneficio y unas tasas de consumo de recursos.

VARIABLES: Xi: Unidades a producir/Vender del producto i

FUNCIÓN OBJETIVO: Maximizar el beneficio

RESTRICCIONES: No es posible utilizar/consumir más recursos de los disponibles

2.5.1 Planificación de la Producción

Un problema de producción (1)

El departamento de producción de una empresa tiene tres tipos de máquinas A, B y C; puede fabricar dos productos 1 y 2, todos los productos tienen que ir a cada máquina.

Tipo de Máquina	Producto 1 (Hrs/Unidad)	Producto 2 (Hrs/Unidad)	Horas disponibles por semana
A	2	2	16
B	1	2	12
C	4	2	28
Beneficio por unidad (miles de €)	1	1.5	

2.5.1 Planificación de la Producción

¿Qué cantidad de cada tipo de producto (1 y 2) se debe fabricar por semana para obtener el máximo beneficio?

2.5.1 Planificación de la Producción

1. Definición de variables:

X_j = Unidades semanales a producir del articulo j-ésimo (j=1,2)

2. Función objetivo:

Maximizar $Z = X_1 + 1.5\ X_2$ (miles de €)

3. Restricciones:

$2X_1 + 2X_2 <= 16$ (Horas disponibles por semana de la MQ A)

$X_1 + 2X_2 <= 12$ (Horas disponibles por semana de la MQ B)

$4X_1 + 2X_2 <= 28$ (Horas disponibles por semana de la MQ C)

4. Condición de no negatividad:

$\mathbf{X_j >= 0}$; j = 1 y 2

2.5.1 Planificación de la Producción

- **Solución Intuitiva:**

Producir todo lo que podamos de X2 ya que tiene un 50% mas de beneficio

Observando restricciones:

2X1 + 2X2 <= 16	(Horas disponibles por semana de la MQ A)
X1 + 2X2 <= 12	(Horas disponibles por semana de la MQ B)
4X1 + 2X2 <= 28	(Horas disponibles por semana de la MQ C)

Solución: **6 unidades de X2**
Beneficio: 9000 €

Solución Óptima:

Observando restricciones:

$2X1 + 2X2 <= 16$	(Horas disponibles por semana de la MQ A)
$X1 + 2X2 <= 12$	(Horas disponibles por semana de la MQ B)
$4X1 + 2X2 <= 28$	(Horas disponibles por semana de la MQ C)

Solución: **4 unidades de X1**
4 unidades de X2
Beneficio: 10000 €

2.5.1 Planificación de la Producción

Un problema de Producción (2)

Una compañía vende tres productos P1, P2, P3. La demanda semanal es de 100 unidades por producto. La compañía puede comprar los productos de un suministrador independiente a los siguientes costes:

P1	P2	P3	
1.8	1.2	0.9	euros

Y también puede fabricarlos ella misma utilizando su capacidad de producción, para lo cual necesita procesar cada artículo a través de dos líneas de ensamblaje, en cada una de las cuales dispone de 40 horas de trabajo semanales.

Las horas de trabajo que necesita cada unidad de artículo en cada línea vienen dadas por la siguiente tabla:

	L-1	L-2
P1	4	5
P2	7	6
P3	2	3

Los costes de producción por unidad de producto fabricada son respectivamente 1.5, 1 y 0.7 euros. **Plantea el modelo de programación lineal** que permita saber cuántos productos de cada tipo debe comprar y cuántos debe fabricar para satisfacer la demanda y **minimizar los costes totales**.

2.5.1 Planificación de la Producción

Problema de producción con distintos procesos (Lab.2)

En una empresa se fabrican tres productos A, B y C.

Los tres productos comparten en sus procesos de producción cuatro máquinas M1, M2, M3 y M4:

- El producto A utiliza tres operaciones en las máquinas M1, M3 y M4.
- El producto B utiliza sólo dos operaciones en las máquinas M1 y M3 o en las máquinas M2 y M4.
- El producto C puede fabricarse utilizando las máquinas M1 y M3 o las máquinas M2, M3 y M4.
- El tiempo necesario en minutos por unidad producida, para cada posibilidad de producción en cada máquina, el coste variable de producción por minuto, la capacidad diaria de producción de cada máquina y las demandas diarias mínimas de los tres productos se presentan en la siguiente tabla.

2.5.1 Planificación de la Producción

Datos técnicos y económicos

Producto		Proceso	Tiempo (min/unidad)				Demanda diaria mínima
			M1	M2	M3	M4	
A		1	10		6	3	36
B	B1	1	8		10		45
	B2	2		6		9	
C	C1	1	8		16		10
	C2	2		10	3	8	
Coste variable por min (um)			40	50	24	30	
Capacidad diaria en min			480	480	480	480	

El objetivo consiste en determinar el esquema de producción que minimice el coste variable total.

2.5.2 Planificación Multiperiodo

PROBLEMAS DE PLANIFICACIÓN MULTIPERIODO

Son tal vez la clase de problemas más importantes. Estos modelos tienen en cuenta el hecho de que decisiones tomadas en este periodo determinan parcialmente las decisiones posibles en el futuro. Los sub modelos de cada periodo pueden ser a su vez modelos de producción, mezclas o de cualquier otro tipo. Estos sub modelos se relacionan mediante las variables de inventario (stock o almacenamiento) que pasan de un periodo al siguiente.

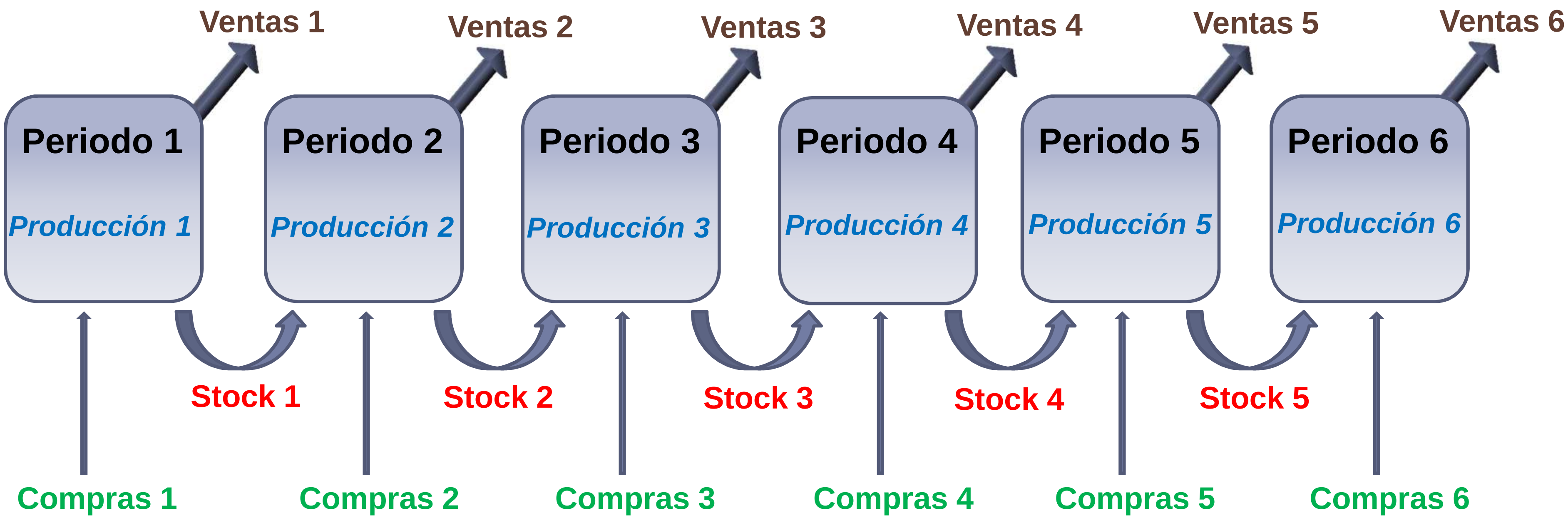
VARIABLES: Xi: cantidad producir/vender en el periodo i
Si: cantidad a almacenar en el periodo i

FUNCIÓN OBJETIVO: Minimizar Costes de producción + Costes de almacenamiento

RESTRICCIONES:
En cada periodo i:
*Equilibrio: **(Producción ≥ Ventas) → $Xi + S_{i-1} = Di + Si$**
*Disponibilidad de Recursos: No es posible consumir más recursos de los disponibles
*Demanda de Productos: Se debe producir la cantidad de producto requerida

2.5.2 Planificación Multiperiodo

Los problemas de planificación en el tiempo representan el mundo real repartiendo el tiempo en un número de periodos. Cada periodo puede corresponder a su vez a un problema de producción, mezclas u otro tipo de modelo.



2.5.2 Planificación Multiperiodo

Estos sub modelos se enlazan entre sí mediante:

- Una **variable de inventario** para cada producto y periodo. La variable de inventario representa la cantidad del producto que se transfiere de un periodo al siguiente.

- Una **restricción de equilibrio** (origen=destino) para cada producto y periodo. La forma más simple de este tipo de restricciones es:
  - **(Producción ≥ Ventas)**

Inventario inicial + producción = Inventario final + ventas

2.5.2 Planificación Multiperiodo

- Los modelos multiperiodo en general se utilizan de forma **rotatoria** según la cual el modelo se resuelve al principio de cada periodo.

- Las recomendaciones de solución para el primer periodo se implementan. Una vez pasado un periodo, si existen datos sobre previsiones más **ajustados** que los disponibles hasta el momento, se actualizan los sub modelos.

- El modelo se traslada un periodo hacia adelante. El periodo inicialmente numerado como 2 pasa a ser el 1, etc. y se repite el proceso completo. De este modo en cada periodo se tomarán las mejores decisiones en función de los datos del mismo y de las previsiones de los posteriores.

2.5.2 Planificación Multiperiodo

- Una compañía desea determinar el plan de producción para los próximos **6 meses**. En la tabla se incluyen los pedidos previstos del producto que fabrica la compañía. En el periodo de 6 meses, las unidades del producto pueden fabricarse en un mes y almacenarse para satisfacer la demanda en algún mes posterior. Por motivos estacionales, el coste de producción no es constante tal como se muestra en la tabla.

MES	DEMANDA (unidades)	COSTE PRODUCCIÓN (€/unidad)
1	1300	100
2	1400	105
3	1000	110
4	800	115
5	1700	110
6	1900	110

- El coste por mantener en el almacén una unidad de producto es 4€ al mes. El máximo número de unidades que pueden almacenarse en cada periodo es de 250. El nivel inicial del almacén al principio del horizonte de planificación es de 200 unidades; el nivel final del almacén al final de los 6 meses debe ser de 100 unidades.
- Plantea un **modelo de programación lineal** que permita determinar la **producción óptima** en cada mes de modo que se satisfaga la demanda y se minimice el coste de producción y de almacenamiento.

2.5.3 Problemas de Mezclas

PROBLEMAS DE MEZCLAS y DIETAS
Aparecen en industrias alimentarias, metalúrgicas y petrolíferas. El problema es mezclar o combinar un conjunto de **materias primas** (e.g. diferentes tipos de alimentos, cereales en grano, crudos,…) en un **producto final** (terminado) de modo que el coste por unidad del producto final sea mínimo, al tiempo que se cumplen un conjunto de características cualitativas en la mezcla.
VARIABLES: Xi: cantidad de materia prima i (o proporción de materia Xi en la mezcla)
FUNCIÓN OBJETIVO: Minimizar el coste del producto final
RESTRICCIONES: Características cualitativas del producto final

2.5.3 Problemas de mezclas

Diseño de una mezcla de café en grano

La compañía cafetera *DíazCafé* mezcla tres tipos de grano de café (Brasil, Colombia y Perú) para ser molido y vendido al por menor. Cada tipo de grano tiene, entre otras características, el aroma y la intensidad (fuerza) y la compañía tiene un catador que puede valorar estas características en una escala de 1 a 100. Las propiedades del grano de café según su procedencia son las que se incluyen en la siguiente tabla:

Grano	Aroma	Intensidad/Fuerza	Coste/kg	Disponibilidad (Kgs)
Brasil	75	15	0.5 €	1.500.000
Colombia	60	20	0.6 €	1.200.000
Perú	85	18	0.7 €	2.000.000

La compañía desea obtener una mezcla con un ratio de aroma de al menos 78 y un ratio de fuerza de al menos 16. El suministro de los distintos tipos de grano está limitado a las cantidades que se indican en la tabla. Todo el grano se suministra según un acuerdo previo.

DíazCafé desea obtener 4 millones de kilogramos de mezcla al menor coste posible.

2.5.3 Problemas de mezclas

Un problema de mezclas multiproducto

Una empresa que produce y fabrica zumos (entre otros productos), vende en la actualidad cuatro tipos de zumos de una sola fruta (Z1, Z2, Z3 y Z4). La empresa se está planteando la producción de otros tres tipos de zumos, pero de tipo multifruta (ZMF1, ZMF2, ZMF3).

Los análisis realizados sobre las necesidades nutricionales realizadas en una campaña que pretendía estudiar los gustos de los consumidores, han conducido a la siguiente información sobre el contenido de cada tipo de fruta en los zumos multifruta:

Zumo Multifruta	Z1	Z2	Z3	Z4
ZMF1		al menos 25%	no más del 20%	
ZMF2		al menos 50%		no más del 25%
ZMF3	al menos 25%	al menos 25%	0%	

*Las casillas vacías suponen que el Zumo_i puede aparecer en cualquier cantidad en el multifruta correspondiente

2.5.3 Problemas de mezclas

Diariamente se dispone de 1000 lts. de Z1, 1000 lts. de Z2, 750 lts. de Z3 y 800 lts. de Z4. El coste por litro de cada zumo es 24, 30, 20 y 22 u.m., respectivamente.

Por otro lado, el precio de venta que se ha decidido asignar a un lt. de cada tipo de zumo multifruta es de 44 u.m. para ZMF1, 42 para ZMF2 y 45 ZMF3. A estos precios se ha evaluado que habrá suficiente demanda para vender toda la producción de zumos multifruta.

Plantea un modelo de programación lineal que permita determinar el contenido de cada tipo de zumo multifruta con el objetivo de **maximizar el beneficio**.

2.5.3 Problemas de mezclas

Producción en una planta termoeléctrica

La gerencia de una planta termoeléctrica de generación de energía, que emplea carbón como combustible, está estudiando la configuración operativa de la planta a fin de cumplir las nuevas leyes de control de la contaminación medioambiental. Para la planta en cuestión, las tasas máximas de emisión son:

- Máxima emisión de **óxido de azufre**: 3000 partes por millón (PPM)
- Máxima emisión de **partículas (humo)**: 12 kilogramos/hora (kg/h)

El carbón se traslada a la planta por ferrocarril y se descarga en depósitos cercanos a la misma. De aquí se lleva con una **cinta transportadora** a la **unidad pulverizadora**, en donde se pulveriza y alimenta directamente a la **cámara de combustión**, a la velocidad conveniente. El calor producido en la cámara de combustión se emplea para crear vapor que impulse las turbinas.

2.5.3 Problemas de mezclas

Se emplean **dos tipos de carbón**: **tipo A**, que es un carbón duro y de quema limpia con un bajo contenido en azufre (bastante caro); y **tipo B**, que es un carbón barato, relativamente suave, que produce humo y tiene un alto contenido en azufre, tal y como se puede observar en la tabla 1. El valor térmico en términos de vapor producido es mayor para el carbón A que para el carbón B, siendo de 24 y 20 miles de libras (lb) de vapor por tonelada (ton) respectivamente.

Emisión de agentes contaminantes

Carbón	Óxido de azufre en gases combustibles	Partículas (emisión/ton)
A	1800 PPM	0.5 Kg/ton
B	3800 PPM	1.0 Kg/ton

2.5.3 Problemas de mezclas

Como el carbón A es duro, la unidad pulverizadora puede manejar a lo sumo 16 ton de carbón A por hora; sin embargo puede pulverizar hasta 24 ton de carbón B por hora. El sistema de carga de la cinta transportadora tiene una capacidad de 20 ton por hora y es independiente del tipo de carbón.

Uno de los muchos interrogantes que la gerencia puede plantearse es el siguiente: dados los límites de emisión de los agentes contaminantes y los tipos disponibles de carbón, ¿Cuál es la máxima producción posible de electricidad de la planta? La respuesta permitirá a la gerencia determinar el margen de seguridad disponible para cubrir las demandas punta de energía.

Formula un modelo de programación lineal que permita a la gerencia de la central resolver el problema. Identifica claramente las variables decisión, la función objetivo a optimizar y las restricciones.

2.5.3 Problemas de mezclas

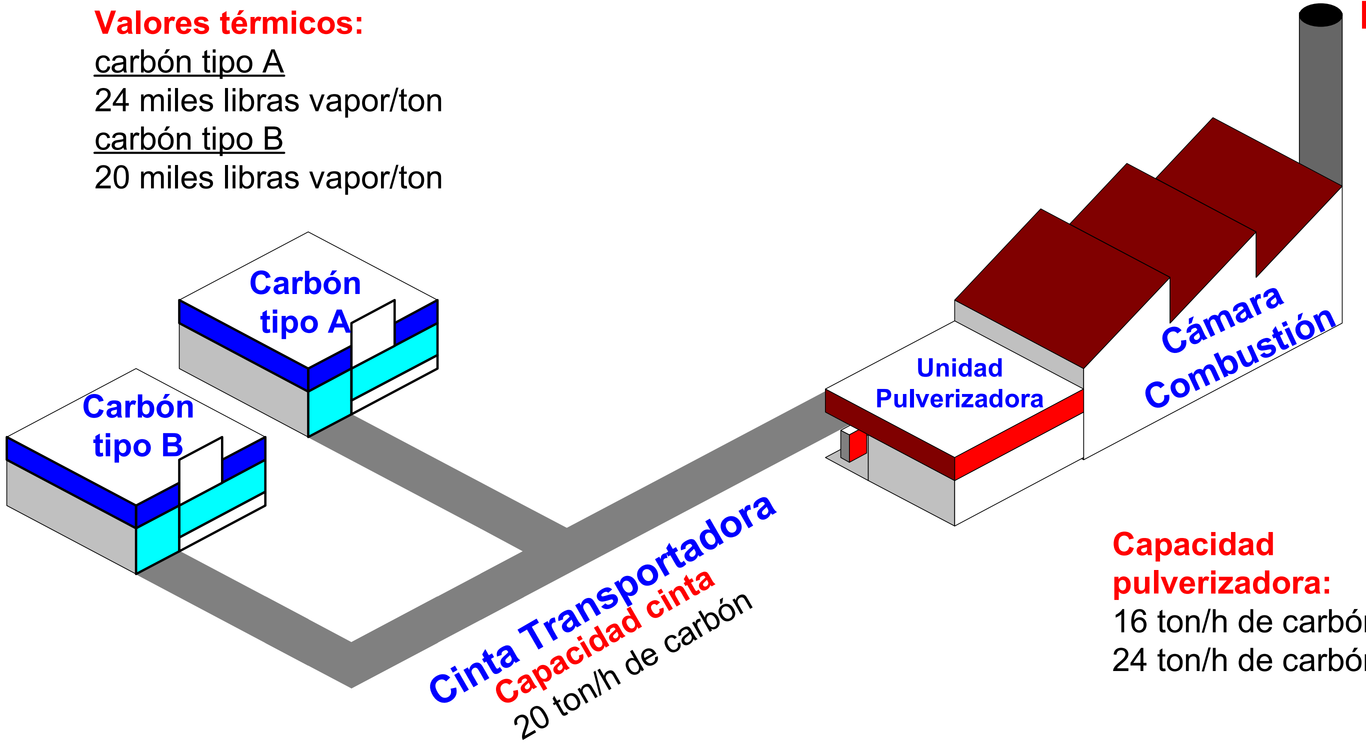
- **PRODUCCIÓN EN UNA PLANTA DE GENERACIÓN DE ENERGÍA**

Contaminación medioambiental:
emisión azufre máxima→ 3000 PPM.
Emisión de partículas máxima→ 12 kg/h

Valores térmicos:
carbón tipo A
24 miles libras vapor/ton
carbón tipo B
20 miles libras vapor/ton

Emisiones
carbón tipo A
azufre 1800 PPM
particulas 0.5 kg/ton

carbón tipo B
azufre 3800 PPM
particulas 1 kg/ton



Capacidad pulverizadora:
16 ton/h de carbón tipo A
24 ton/h de carbón tipo B

2.5.3 Problemas de mezclas

Problema de elaboración de una Dieta

Se desea formular la **dieta de mínimo coste** que cumpla con determinados **requisitos nutricionales**. Se dispone de 8 alimentos y la siguiente tabla muestra sus aportaciones nutricionales respecto a las características consideradas así como sus precios:

Tabla 1: Alimentos, aportaciones nutricionales y precios (*la cantidad indicada en cada caso corresponde a una ración)

	Pasta	Zumo de Tomate	Sopa de almejas	Carne de vacuno	Leche	Zumo de Naranja	Manzana	Patatas Fritas
Calorías	300	60	220	259	110	132	55	152
Grasas	1g	0g	13g	16,3g	2,5g	0g	0,22g	9,8g
Colesterol	0mg	0mg	5mg	89mg	10mg	0mg	0mg	0mg
Sodio	1mg	650mg	790mg	95mg	120mg	5mg	1,1mg	168,4mg
Carbohidratos	63g	12g	19g	20g	12g	33,4g	14,6g	15g
Fibra	3g	3g	2g	0g	0g	0g	2,5g	1,3g
Proteínas	11g	2g	5g	26,1g	9g	0,5g	0,3g	2g
Vitamina A	0%	8%	2%	1%	10%	2%	1%	0%
Vitamina C	0%	30%	2%	0%	0%	62%	8%	15%
Calcio	2%	2%	2%	1%	30%	0%	1%	1%
Hierro	20%	15%	8%	17%	0%	2%	1%	3%
Precio por ración*	19 cents por 100g	56 cents por 300ml	90cents por 250ml	82cents por 100g	51cents por 250ml	53cents por 250ml	37cents por unidad	32 cents por 30 g

2.5.3 Problemas de mezclas

- Respecto a los requisitos nutricionales diarios, la dieta debe incluir:
  - **Calorías**: Entre 1.800 y 2.200
  - **Grasas**: No más de 65g
  - **Colesterol**: No más de 300mg
  - **Sodio**: No más de 2.400mg
  - **Carbohidratos**: Al menos 300g
  - **Fibra**: Al menos 25g
  - **Proteínas**: Al menos 50g
  - **Vitamina A y C, calcio y hierro**: Al menos 100% de las cantidades diarias permitidas

2.5.3 Problemas de mezclas

1. Definición de variables:

x_j =Número de raciones del alimento j (j = 1,..,8)

2. Función objetivo:

Minimizar $Z = 0{,}19x_1+0{,}56x_2+0{,}9x_3+0{,}82x_4+0{,}51x_5+0{,}53x_6+0{,}37x_7+0{,}32x_8$

3. Restricciones:

- Características nutricionales:

Calorías1: $300x_1+60x_2+220x_3+259x_4+110x_5+132x_6+55x_7+152x_8 \geq 1800$

Calorías2: $300x_1+60x_2+220x_3+259x_4+110x_5+132x_6+55x_7+152x_8 \leq 2200$

Grasas: $1x_1+13x_3+16{,}3x_4+2{,}5x_5+0{,}22x_7+9{,}8x_8 \leq 65$

Colesterol: $5x_3+89x_4+10x_5 \leq 300$

Sodio: $1x_1+650x_2+790x_3+95x_4+120x_5+5x_6+1{,}1x_7+168{,}4x_8 \leq 2400$

Carbohidratos: $63x_1+12x_2+19x_3+20x_4+12x_5+33{,}4x_6+14{,}6x_7+15x_8 \geq 300$

Fibra: $3x_1+3x_2+2x_3+2{,}5x_7+1{,}3x_8 \geq 25$

Proteínas: $11x_1+2x_2+5x_3+26{,}1x_4+9x_5+0{,}5x_6+0{,}3x_7+2x_8 \geq 50$

Vitamina A: $8x_2+2x_3+1x_4+10x_5+2x_6+1x_7 \geq 100$

Vitamina C: $30x_2+2x_3+62x_6+8x_7+15x_8 \geq 100$

Calcio: $2x_1+2x_2+2x_3+1x_4+30x_5+1x_7+1x_8 \geq 100$

Hierro: $20x_1+15x_2+8x_3+17x_4+2x_6+1x_7+3x_8 \geq 100$

- No negatividad: $x_j \geq 0$

2.5.3 Problemas de mezclas

- En la tabla siguiente (Tabla 2) se presenta la solución del modelo (denotada como solución '0'). En esta solución destaca el hecho de que la dieta se compone de una pequeña cantidad de pasta y el resto de alimentos son líquidos, y entre ellos 9 raciones de leche que resultan claramente excesivas.

Tabla 2

	Solución '0'	Leche ≤ 4 (* Nuevos alimentos)	Solución '1'	Pan ≤ 6 Solución '2'	Margarina ≤ 4 Solución '3'	(* Nuevos alimentos) Solución '4'	Calorias ≤ 2000 Solución '4a'	Colesterol ≤ 250 Solución '4b'
Pasta	2,58	No Solución	0,1	1,46	0	0	0	0
Zumo de Tomate	1,95		0	0,91	0	0	0	0
Sopa de almejas	0		0	0	0	0	0	0
Carne de vacuno	0,09		0	0	0,38	0,2	0,32	0,36
Leche	**9,3**		3,87	3,45	4	4	4	4
Zumo de Naranja	0,08		1,33	0,87	5,47	3,47	2,76	3,2
Manzana	4,6		2,23	2,35	8,68	6	7,61	8,2
Patatas Fritas	0		0	0	0	0	0	0
Yoghurt (x9)		*	0	0	0	0	0	0
Pan (x10)		*	**9.57**	6	1,65	5	2,99	2,2
Margarina (x11)		*	5.65	**6,05**	4	4	4	4
Huevos (x12)						**(*)**1,14	1,09	0,84
Coste	**8,14**		**4,62**	**4,7**	**8,81**	**7,12**	**7,26**	**7,63**

- El decisor limitaría la cantidad de ingesta de leche a un máximo de 4 raciones diarias. Como esta restricción es muy fuerte, el problema se vuelve no factible de modo que se decide añadir nuevos alimentos: yoghurt, pan y margarina.

2.5.3 Problemas de mezclas

- Los precios y características nutricionales de los nuevos alimentos se incluyen en la Tabla 3. También se incluyen en la Tabla 2 las soluciones con estos nuevos alimentos:

Tabla 3

	Yoghurt	Margarina	Pan	Huevos
Calorías	160	70	110	78
Grasas	2,5mg	8g	1g	5,3g
Colesterol	10mg	0mg	0mg	212mg
Sodio	75mg	70mg	160mg	62mg
Carbohidratos	20mg	0	22g	0,6g
Fibra	0g	0	2g	0g
Proteínas	6g	0g	4g	6,3g
Vitamina A	2%	10%	0%	6%
Vitamina C	2%	0%	0%	0%
Calcio	20%	0%	0%	3%
Hierro	2%	0%	0%	3%
Precio por ración	56cents/180ml	8,6cents/10ml	5cents/rebanada	20cents/unidad

2.5.3 Problemas de mezclas

- La siguiente tabla incluye los valores nutricionales de las distintas dietas obtenidas con la inclusión de nuevos alimentos.

Tabla 4

	Solución '0'	Solución '1'	Solución '2'	Solución '3'	Solución '4'	Solución '4a'	Solución '4b'
Calorías $\in$ [1800 …2200]	1800	2200	2200	2200	2200	2000	2000
Grasas ≤ 65	28	65	65	52	57	58	56
Colesterol ≤ 300	101	39	35	74	300	300	250
Sodio ≤ 2400	2400	2400	2400	1097	1674	1358	1231
Carbohidratos ≥ 300	369	340	340	401	366	324	332
Fibra ≥ 25	25	25	25	25	25	25	25
Proteínas ≥ 50	120	75	74	58	72	67	64
Vitamina A ≥ 100%	100	100	100	100	100	100	100
Vitamina C ≥ 100%	100	100	100	409	263	232	264
Calcio ≥ 100%	293	118	111	129	130	131	131
Hierro ≥ 100%	100	103	107	100	100	100	100

2.5.4 Corte de Materias Primas

PROBLEMAS DE CORTE DE MATERIAS PRIMAS

En industrias del papel, plástico, metal y textil (entre otras) un producto se fabrica en piezas de un tamaño estándar que resulte económicamente rentable. Estos productos se cortarán en otros de tamaño inferior más utilizables conforme el producto se acerca al usuario final.

El proceso de solución de este tipo de problemas se puede dividir en 3 etapas:

1. Determinar las demandas de producto en los tamaños finales.
2. Construir un conjunto de patrones de corte de las piezas de tamaño original en las piezas de menor tamaño.
3. Determinar cuántas veces utilizar cada patrón de corte de los especificados en (2) de modo que los requerimientos especificados en (1) se satisfagan con el mínimo coste. En este paso es en el que se utiliza Programación Lineal.

VARIABLES: Xi: Número de veces que se utiliza el patrón de corte i

FUNCIÓN OBJETIVO: Determinar cómo cortar los materiales en otros de tamaño inferior con el menor coste.

RESTRICCIONES: Satisfacer la demanda de producto en los tamaños deseados

2.5.4 Corte de Materias Primas

Un problema de corte unidimensional

Una máquina produce rollos de papel de una anchura estándar de 180 cm. Se reciben unos pedidos de al menos 200 rollos de 80 cm de anchura, 120 rollos de 45 cm y 130 de 27 cm.

a) Formula un modelo lineal que permita decidir cómo cortar los rollos de 180 cm de anchura para hacer frente a los pedidos que se tienen, con una pérdida mínima de papel en el proceso de corte.

b) Modifica el modelo para el caso en que el objetivo sea minimizar el número de rollos de 180 cm a utilizar.

Formular un modelo matemático para determinar la forma óptima de corte de los rollos de 180 cm. para satisfacer la demanda con el menor desperdicio

2.5.4 Corte de Materias Primas

- **Un problema de corte de materias primas**

2.5.5 Planificación de Personal

- Muchas empresas deben determinar cómo planificar a sus empleados para dar un servicio adecuado.

- De manera general, se trata de determinar la mínima cantidad de «empleados» necesaria en cada horario o «turno» para cubrir unas necesidades determinadas.

2.5.5 Planificación de Personal

- Para abordar este tipo de problema, es **indispensable** conocer los requerimientos de personal. Obtener esta información requiere utilizar técnicas de **pronósticos** y **análisis de colas**.
- También será necesario conocer los tipos de contratos de los empleados y la legislación laboral (y normas de la empresa) sobre el tiempo de descanso.
- Con esta información, se diseñará el conjunto de turnos que cumplen la legislación vigente así como las condiciones de la empresa.
- Este es un paso previo para poder aplicar la Programación Lineal para asignar turnos de trabajo al personal.

2.5.5 Planificación de Personal

Planificación de turnos de trabajo y descansos

Una empresa trabaja según una jornada de servicio de 10 horas, en la que cada turno debe completar 8 horas de trabajo. El número mínimo de empleados en servicio cada hora y considerando que la incorporación debe realizarse al comienzo de cada hora es el que recoge la tabla siguiente.

Número de empleados requeridos

HORA	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18
Número de Empleados	20	40	60	80	60	50	40	50	60	30

El descanso que toma cada turno (mínimo de una hora) no se puede hacer antes de haber trabajado 3 horas ni después de trabajar más de 5.

Formula un modelo para determinar los turnos de trabajo que cubran las necesidades y requieran la menor cantidad posible de trabajadores.

Procedimiento general

1. Enumerar en forma de tabla todos los posibles «turnos» o jornadas de trabajo para un trabajador cualquiera.
2. Asignar una variable a cada posible turno (o tantas como distintos tipos de trabajador haya, etc.).
3. Añadir una restricción por cada «tramo horario» (y por cada tipo de trabajador) en que haya definida una necesidad mínima de servicio/trabajo/etc.
4. Construir la función objetivo de manera que represente el total de trabajadores a contratar o, alternativamente, el coste total de la operación.

2.5.5 Problemas de planificación de personal

Asignación de Personal en una oficina postal

Una oficina de correos necesita distinto número de trabajadores a tiempo completo en distintos días de la semana. El número de empleados necesarios se muestran en la siguiente tabla. La legislación laboral establece que un trabajador a tiempo completo ha de trabajar cinco días consecutivos y librar los dos días siguientes. Por ejemplo, un trabajador que trabaja de lunes a viernes, tendrá libre el sábado y el domingo.

La oficina postal quiere satisfacer sus necesidades diarias utilizando únicamente empleados a tiempo completo. Su objetivo es minimizar el número de empleados en nómina.

	Mínimo # Empleados Necesarios
Lunes	17
Martes	13
Miércoles	15
Jueves	19
Viernes	14
Sábado	16
Domingo	11

2.5.6 Problemas de Redes

PROBLEMAS DE REDES
Son fáciles de describir mediante grafo o redes y existen algoritmos específicos para resolverlos.
VARIABLES: Xij: utilización del arco (i,j)
FUNCIÓN OBJETIVO: Minimizar el coste
RESTRICCIONES: Específicas para cada problema

- Problema de Transporte (**Algoritmo Simplex de Transporte**)
- Problema de Asignación (**Algoritmo Húngaro**)
- Problema del camino más corto (**Algoritmo de Dijkstra**)
- Problema de Flujo máximo (**Algoritmo de Ford-Fulkerson**)
- Problema de Flujo máximo a coste mínimo (**Algoritmo de Klein**)
- Problema del árbol de expansión mínimo (**Algoritmo de Kruskal**)

2.5.6 Problemas de Redes

Un problema de Distribución

Un fabricante tiene **tres centros de distribución** de un determinado producto en: Valencia, Alicante y Castellón. Estos centros tienen disponibilidades 20, 40 y 40 unidades respectivamente. Sus **puntos de venta** requieren las siguientes cantidades: Punto1 25 unidades, Punto2 10 u., Punto3 20 u., Punto4 30 u. y Punto5 15 u. El coste de transporte por unidad (en €) entre cada centro de distribución y las localidades de los puntos de venta se dan en la siguiente tabla:

2.5.6. Problemas de Redes

		Puntos de Venta				
		1	2	3	4	5
Centros de distribución	Valencia	55	30	40	50	40
	Alicante	35	30	100	45	60
	Castellón	40	60	95	35	30

- **¿Cuántas unidades debe mandar el fabricante desde cada centro de distribución a cada punto de venta, de manera que los costes totales de transporte sean mínimos?**