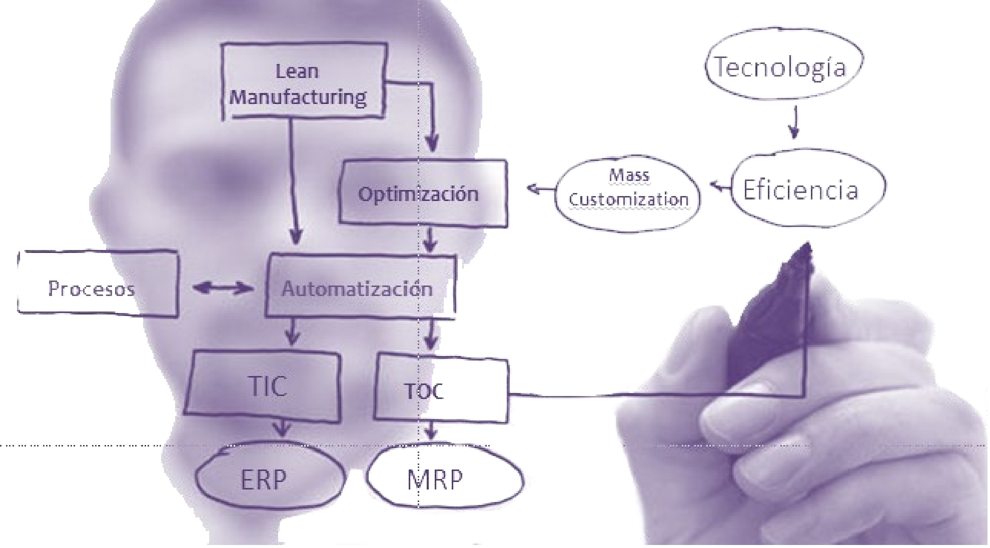


DEIOAC-UPV

3. Métodos de Programación Lineal (I)

Objetivos

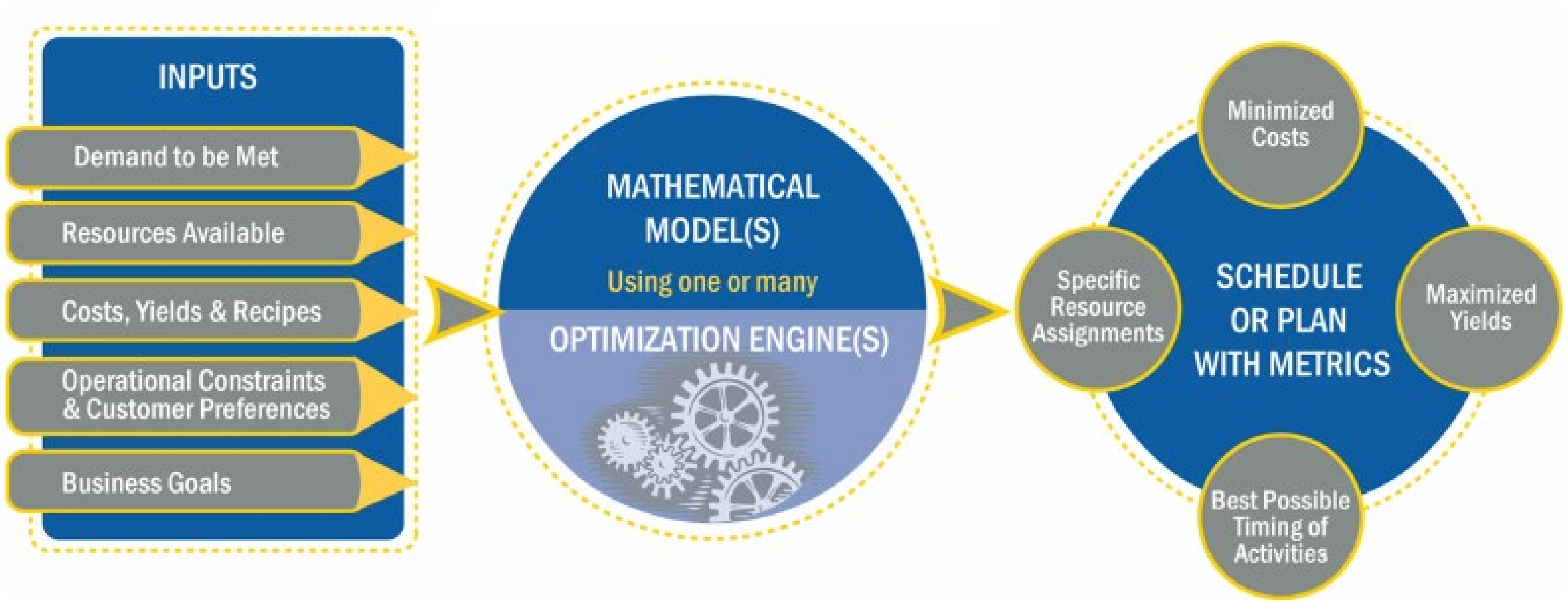
Al finalizar el tema, deberás ser capaz de:

- Conocer e identificar las características de un problema de Programación Lineal.
- Resolver gráficamente modelos lineales con dos variables.
- Analizar la sensibilidad de la solución óptima a cambios en los datos de entrada del modelo.
- Expresar en forma estándar un problema lineal.
- Conocer y saber manejar los términos básicos relacionados con la Programación Lineal: solución básica, variables básicas, coste reducido, coste de oportunidad, etc.
- Conocer los fundamentos del algoritmo Simplex.
- Resolver problemas lineales mediante el algoritmo Simplex.
- Identificar e interpretar la información correspondiente a la solución óptima obtenida mediante el algoritmo Simplex.

CONTENIDOS

3.1 Introducción

- Los sistemas de toma de decisiones basados en optimización tienen una arquitectura bien definida como se muestra en el siguiente gráfico:



3.1 Introducción

- **Programación Lineal**: es uno de los métodos más poderosos y flexibles para el análisis cuantitativo.

- Se utiliza en todo tipo de organizaciones diariamente para resolver gran variedad de problemas:
  - planificación de la producción,
  - problemas de mezclas,
  - gestión de personal,
  - gestión de inventarios,
  - gestión de rutas de vehículos,
  - corte de materias primas,
  - …

3.1 Introducción

- Hemos visto una variedad de problemas decisionales que pueden ser formulados y analizados como problemas de programación lineal. El siguiente paso es, una vez modelizado como un programa lineal, **cómo resolverlo para encontrar una solución óptima?**

- La solución más sencilla es hacer **'click en el botón Resolver'** de un optimizador…. Pero**,**

Necesitamos saber algo más de lo que ocurre al pulsar el botón 'Resolver'

3.1 Introducción

- Razones para adquirir algunos conocimientos básicos sobre los procedimientos de solución:

1. Incrementar la confianza en la validez y potencia de estos algoritmos
2. Comprender el significado de la información contenida en los informes de solución
3. Comprender el significado de algunos resultados no muy frecuentes al resolver estos problemas (e.g. el problema no tiene solución, la solución es no acotada).

3.1 Introducción

¿Qué características ha de tener un *modelo* para ser de Programación Lineal?

¿Cómo se obtiene la *Solución Óptima* de un modelo de Programación Lineal?

¿Qué características ha de tener un modelo para ser de Programación Lineal?

HIPÓTESIS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. **Divisibilidad (Xi Є R)**

Variables

Todas las variables pueden asumir cualquier valor real

Si las variables solo tienen sentido en el caso de tomar **valores discretos** pero toman un valor real elevado (superior a 10) en la solución óptima, es aceptable considerarlas como continuas y redondear su valor

3.1 Introducción

¿Qué características ha de tener un modelo para ser de Programación Lineal?

HIPÓTESIS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. **Divisibilidad ($Xi \in R$)**
2. **No negatividad ($Xi \geq 0$)**

Variables

¿Qué características ha de tener un modelo para ser de Programación Lineal?

HIPÓTESIS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. **Divisibilidad ($X_i \in R$)**
2. **No negatividad ($X_i \geq 0$)**

Variables

¿ Y si $X_i \leq 0$? →

1) Nueva variable X_i'. $X_i' = - X_i$; $X_i' \geq 0$
2) En todo el modelo (F.O. y Restricciones) se sustituye X_i por $– X_i'$
3) En la Solución Óptima se deshace el cambio: $X_i = - X_i'$

¿Qué características ha de tener un modelo para ser de Programación Lineal?

HIPÓTESIS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. **Divisibilidad ($X_i \in R$)**
2. **No negatividad ($X_i \geq 0$)**

Variables

¿ Y si Xi <>= 0 ? →

1) <u>Nuevas variables Xi1 y Xi2</u>. $X_i = (X_{i1} - X_{i2})$
$X_{i1} \geq 0$ y $X_{i2} \geq 0$
2) En todo el modelo (F.O. y Restricciones) se sustituye Xi por $(X_{i1} - X_{i2})$
3) En la Solución Óptima se deshace el cambio: $X_i = (X_{i1} - X_{i2})$

¿Qué características ha de tener un modelo para ser de Programación Lineal?

HIPÓTESIS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. **Divisibilidad ($X_i \in R$)**
2. **No negatividad ($X_i \geq 0$)**
3. **Linealidad** → Función Objetivo y Restricciones:

   Coef1·VAR1 + Coef2·VAR2 + …..

   (NO multiplicar variables)

¿Qué características ha de tener un modelo para ser de Programación Lineal?

HIPÓTESIS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. **Divisibilidad ($X_i \in R$)**
2. **No negatividad ($X_i \geq 0$)**
3. **Linealidad**
4. **Certidumbre** → C_i, b_i, a_{ij} **se conoce el valor numérico**

3.1 Introducción

UN PROBLEMA DE PRODUCCIÓN

- Una empresa de producción de componentes informáticos dispone de 3 departamentos. La fabricación de los componentes se hace en el departamento 1 (producción), el test de los mismos se realiza en el departamento 2 (control de calidad) y en el departamento 3 (montaje) se realiza el ensamblado
- Debido a la disminución en los beneficios, la gerencia ha decidido reorganizar la producción de la empresa

3.1 Introducción

- Se interrumpirá la producción de componentes no rentables para comenzar la producción de dos nuevas placas base
  - **Placa base 1** (más sencilla, se testea en el departamento de producción)
  - **Placa base 2** (fabricada por otra empresa)

- La placa base 1 requiere parte de la capacidad de producción en los departamentos 1 y 3 y nada en el departamento 2

- La placa base 2 sólo necesita trabajo en los departamentos 2 y 3

3.1 Introducción

- La compañía puede vender todas las placas base que se puedan fabricar
- Cada placa base se fabricará en lotes de 50 placas
- Capacidad productiva de los departamentos y requerimientos de cada lote:

	Tiempo de producción (h/lote) PRODUCTO		
Departamento	**Placa 1**	**Placa 2**	**Tiempo de producción disponible (h/semana)**
1 (Producción)	**1**	**0**	**4**
2 (Calidad)	**0**	**2**	**12**
3 (Montaje)	**3**	**2**	**18**

3.1 Introducción

- Teniendo en cuenta la capacidad de producción de los departamentos y que el beneficio por lote es 3000 y 5000 € respectivamente,

¿Cuál es la producción que maximiza el beneficio total de la compañía?

3.1 Introducción

- **VARIABLES**:

Las variables decisión del problema son:

X1: Número de lotes de la placa base 1 fabricados por semana

X2: Número de lotes de la placa base 2 fabricados por semana

- ***HIPÓTESIS 1 DE PROGRAMACIÓN LINEAL: DIVISIBILIDAD***

Todas las variables pueden asumir cualquier valor real

- Si las variables solo tienen sentido en el caso de tomar valores discretos **pero** toman un **valor real elevado** (superior a 10) en la solución óptima, es aceptable considerarlas como continuas y redondear su valor

- ***HIPÓTESIS 2 DE PROGRAMACIÓN LINEAL: CONDICIONES DE NO NEGATIVIDAD***

Todas las variables son no negativas

- Si $Xi \leq 0$
  - Sustituir en el modelo Xi por **Xi' = -Xi**; $Xi' \geq 0$
  - Cuando se obtenga la solución óptima se deshace el cambio
- Si Xi no restringida en signo
  - Indicar que **Xi = Xi1 - Xi2**; $Xi1, Xi2 \geq 0$
  - Sustituir en el modelo Xi por (Xi1 - Xi2)
  - Cuando se obtenga la solución óptima se deshace el cambio

- FUNCIÓN OBJETIVO:

Placas Base	Beneficio por lote (€)	Lotes fabricados por semana	Beneficio por semana
Tipo 1	3000	X_1	$3000\ X_1$
Tipo 2	5000	X_2	$5000\ X_2$
Beneficio Total = $3000\ X_1 + 5000\ X_2 = Z$			

3.1 Introducción

- Teniendo en cuenta la capacidad productiva de los departamentos y requerimientos de cada lote:

	Tiempo de producción (h/lote)		
	PRODUCTO		
Departamento	Placa 1	Placa 2	Tiempo de producción disponible (h/semana)
1 (Producción)	1	0	4
2 (Calidad)	0	2	12
3 (Montaje)	3	2	18

- ... RESTRICCIONES

- RESTRICCIONES:

Capacidad de los departamentos

$$X_1 \leq 4 \qquad \text{(Departamento 1)}$$

$$2X_2 \leq 12 \qquad \text{(Departamento 2)}$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18 \qquad \text{(Departamento 3)}$$

- ***HIPÓTESIS 3 DE PROGRAMACIÓN LINEAL: LINEALIDAD***

Todas las relaciones entre variables son lineales

- **Proporcionalidad de las contribuciones**
  - La contribución individual de cada variable es estrictamente proporcional a su valor; y el factor de proporcionalidad es constante para toda la gama de valores que la variable puede asumir
- **Aditividad de las contribuciones**
  - La contribución total de las variables es igual a la suma de las contribuciones individuales, sea cual sea el valor de las variables

Formulación del programa lineal

Determinar los valores de las variables:

$X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$

que optimicen, maximicen en este caso (en otros puede ser minimizar) la ***función objetivo***:

Max $3X_1 + 5X_2$ (miles euros)

y verifiquen las ***restricciones:***

$X_1 \leq 4$	**(Departamento 1)**
$2X_2 \leq 12$	**(Departamento 2)**
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	**(Departamento 3)**

Formulación general de un programa lineal

Determinar los valores de las *variables decisión*

$X_j \geq 0$ *para* $j = 1,2,...,n$

que optimicen (max o min) la *función objetivo*

$MAX \quad \Sigma\, C_j X_j$ $\quad$ **$(MAX\ Z \equiv MIN\ (-Z))$**

con la condición

$\Sigma\, a_{ij} X_j \leq, =, \geq b_i \qquad i=1,2,...,m$

Donde

- **n**: número de variables
- **m**: número de restricciones (=, ≤ o ≥)
- Los c_j , a_{ij} y b_i son los parámetros del modelo

3.1 Introducción

- ***HIPÓTESIS 4 DE PROGRAMACIÓN LINEAL: CERTIDUMBRE***

Se asume que todos los parámetros del modelo c_j , a_{ij} y b_i son constantes conocidas

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PL

- **Método gráfico** (problemas con dos variables).
- **Método Simplex** (George Dantzig, 1947).
- **Algoritmo del Punto Interior** (**API**; Narendra Karmarkar, 1984).

El **API** sólo supera al Simplex en problemas muy grandes.

3.1 Introducción

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PL

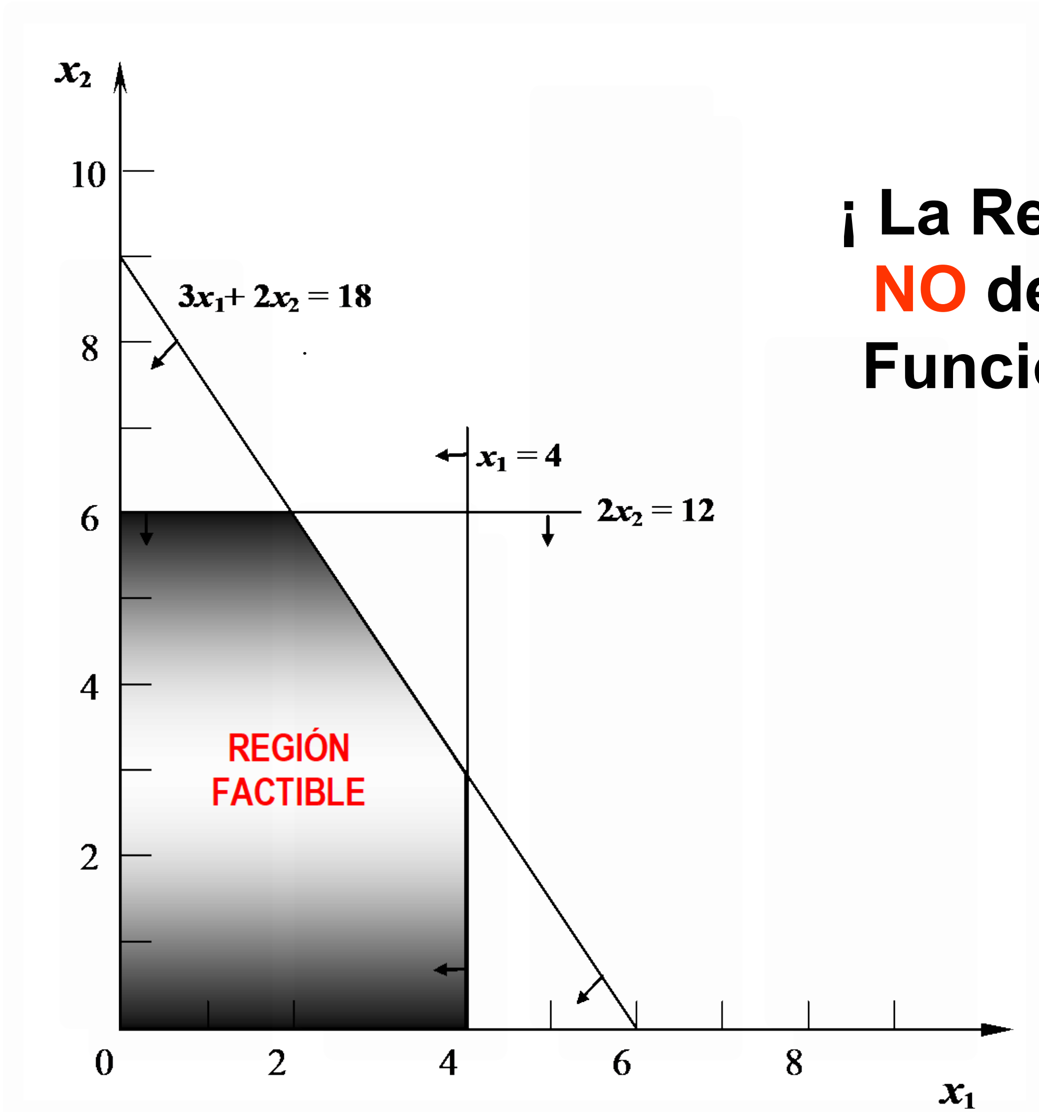
- **Método gráfico** (problemas con dos variables).
- **Método Simplex** (George Dantzig, 1947).
- **Algoritmo del Punto Interior** (**API**; Narendra Karmarkar, 1984).

El **API** sólo supera al Simplex en problemas muy grandes.

3.2 Región factible y solución gráfica

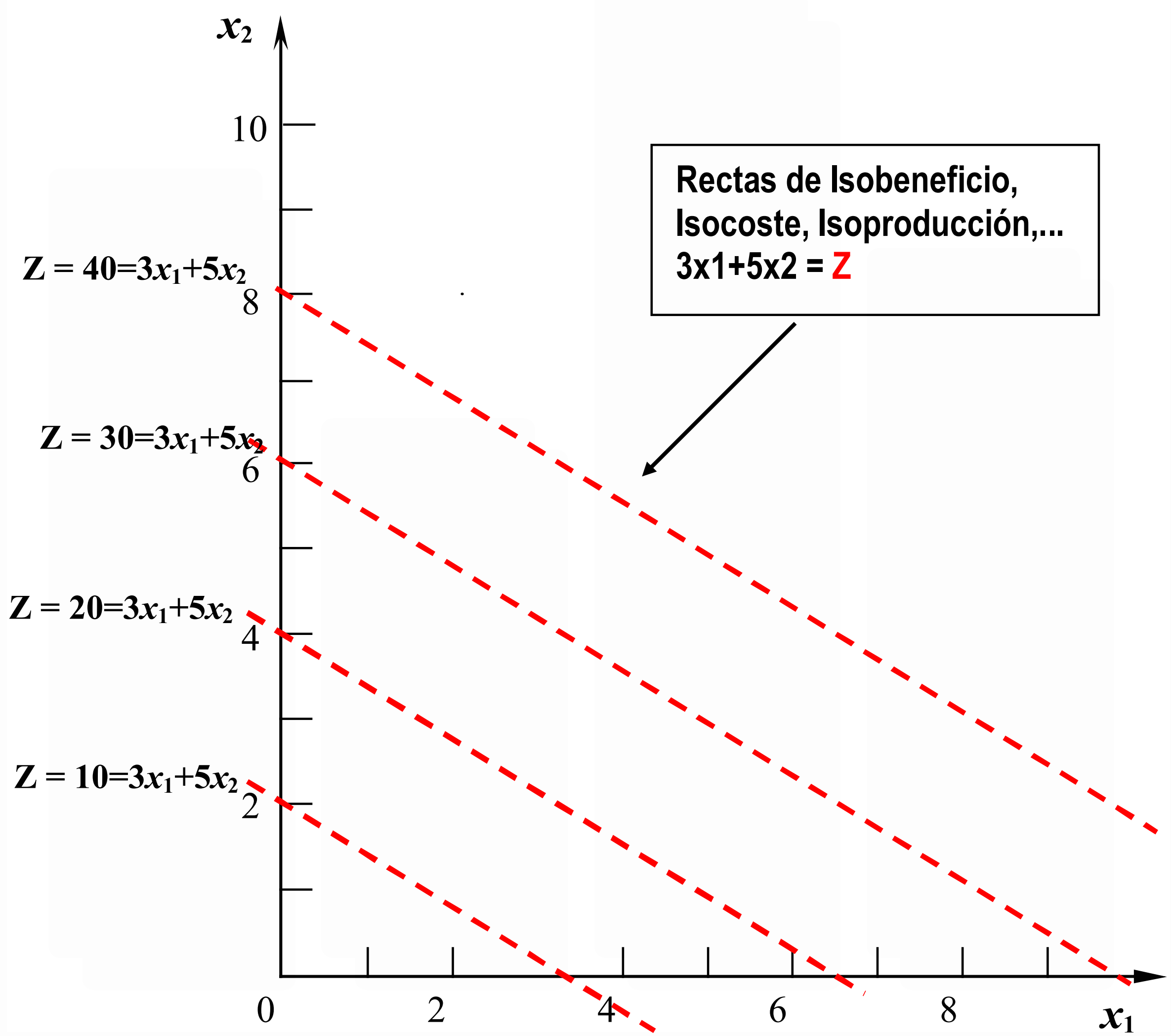
- **SOLUCIÓN POSIBLE**
  - Combinación de valores de las variables que satisface simultáneamente todas las restricciones
- **REGIÓN FACTIBLE**
  - Conjunto de todas las soluciones posibles (C.S.P.)

3.2 Región factible y solución gráfica



¡ La Región Factible NO depende de la Función Objetivo !

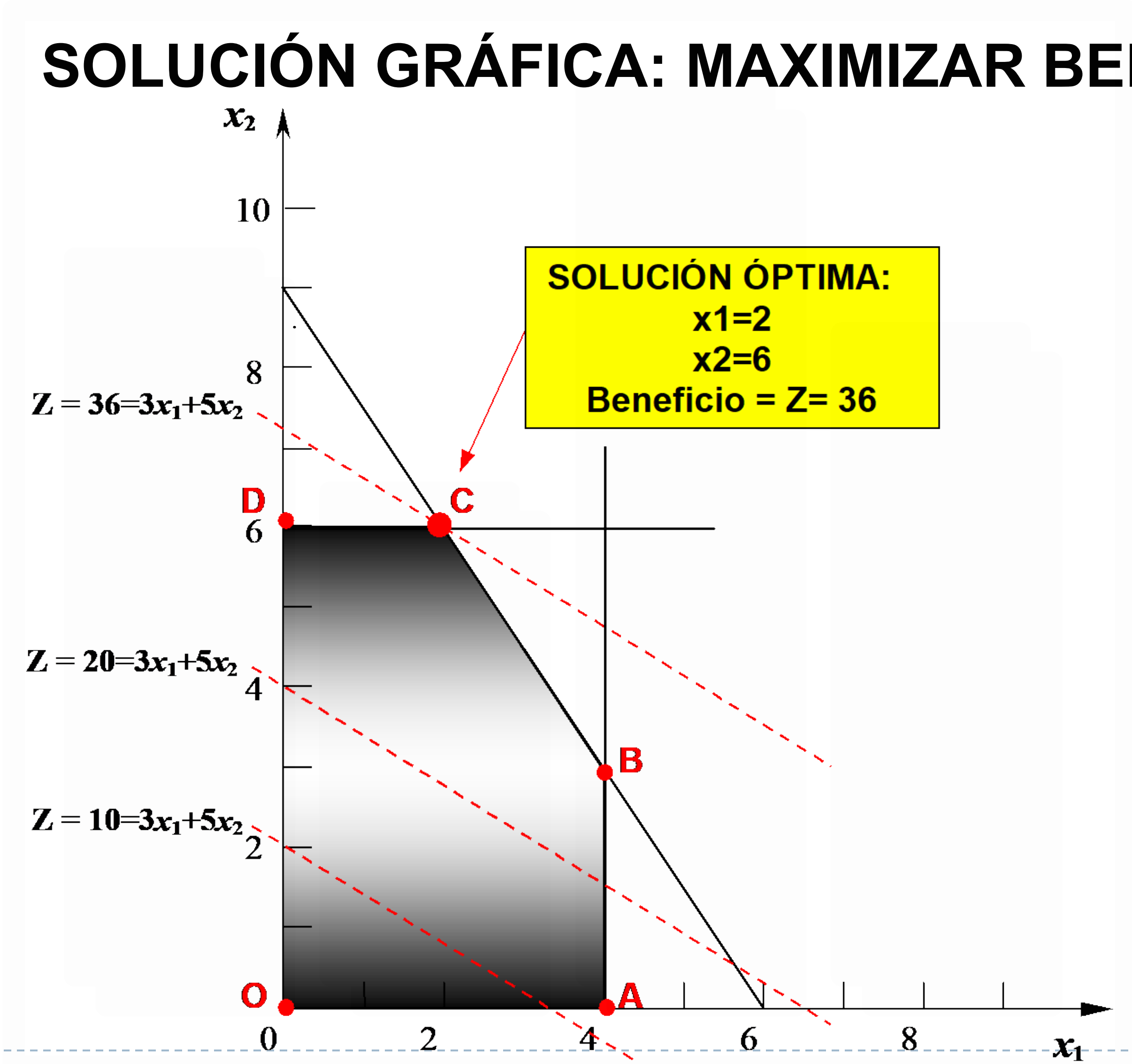
3.2 Región factible y solución gráfica



FUNCIÓN

OBJETIVO

3.2 Región factible y solución gráfica



3.2 Región factible y solución gráfica

Ejercicio Propuesto:

- Teniendo en cuenta que el coste de cada lote de placas tipo 1 es de 6.000€ y 2.000€ en el caso de las placas de tipo 2, si el objetivo fuera minimizar los costes semanales ¿cuál es la solución óptima?

- Calcula la solución óptima teniendo en cuenta que se desea minimizar los costes y satisfacer una demanda de al menos 2 lotes de placas tipo 2.

3.2 Región factible y solución gráfica

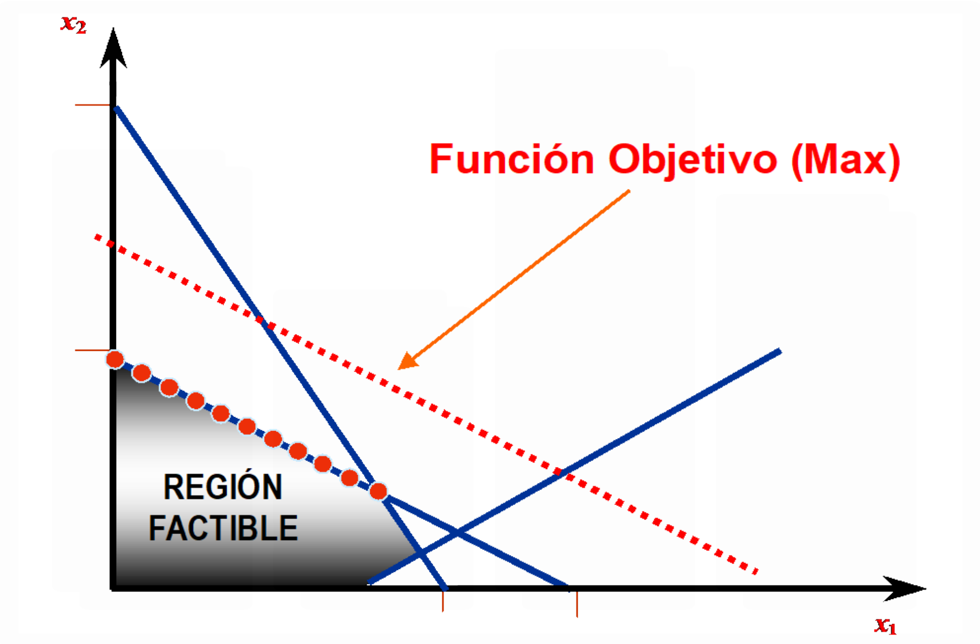
Pasos para llevar a cabo la resolución gráfica:

1. Dibujar la recta «frontera» de cada restricción.
2. Para cada restricción de desigualdad, determinar en qué parte de la «frontera» están los puntos que cumplen la restricción.
3. La región factible son los puntos que cumplen TODAS y cada una de las restricciones simultáneamente, incluida la condición de no negatividad.
4. La solución óptima, si existe, se encuentra en (al menos) uno de los vértices o «picos» de la región factible. Es posible deducir el/los vértice/s óptimo/s dibujando la pendiente de la función objetivo. Alternativamente: si no hay muchos vértices, podemos ir comprobando en cada uno de ellos el valor de la función objetivo.
5. Atención a los casos especiales (véase a continuación).

3.2 Región factible y solución gráfica

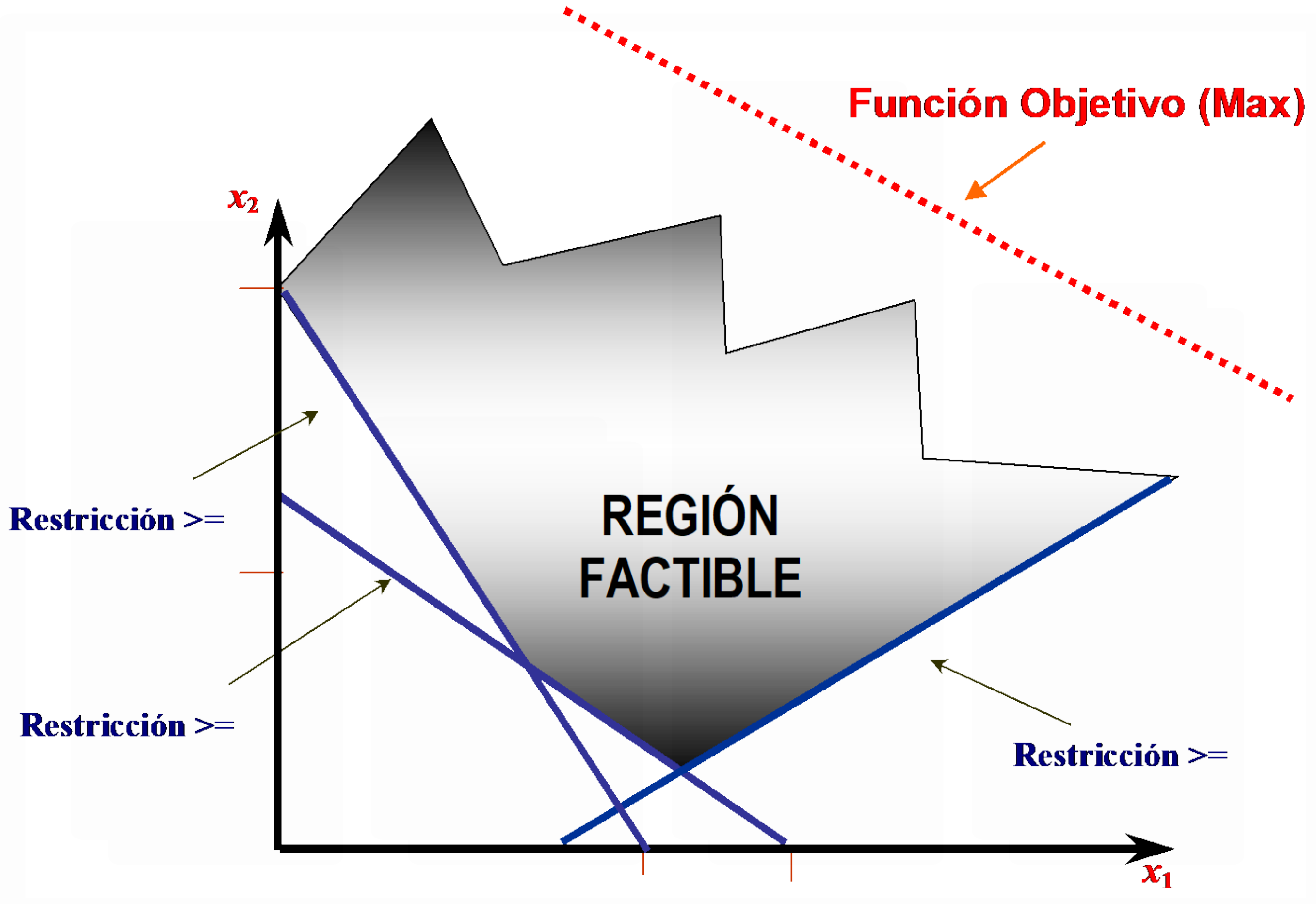
- **Al resolver un programa lineal podemos encontrarnos con cuatro casos**

1. **Solución única** (el problema de planificación de la producción en la empresa de componentes informáticos)
2. **Soluciones alternativas** (infinitas soluciones)



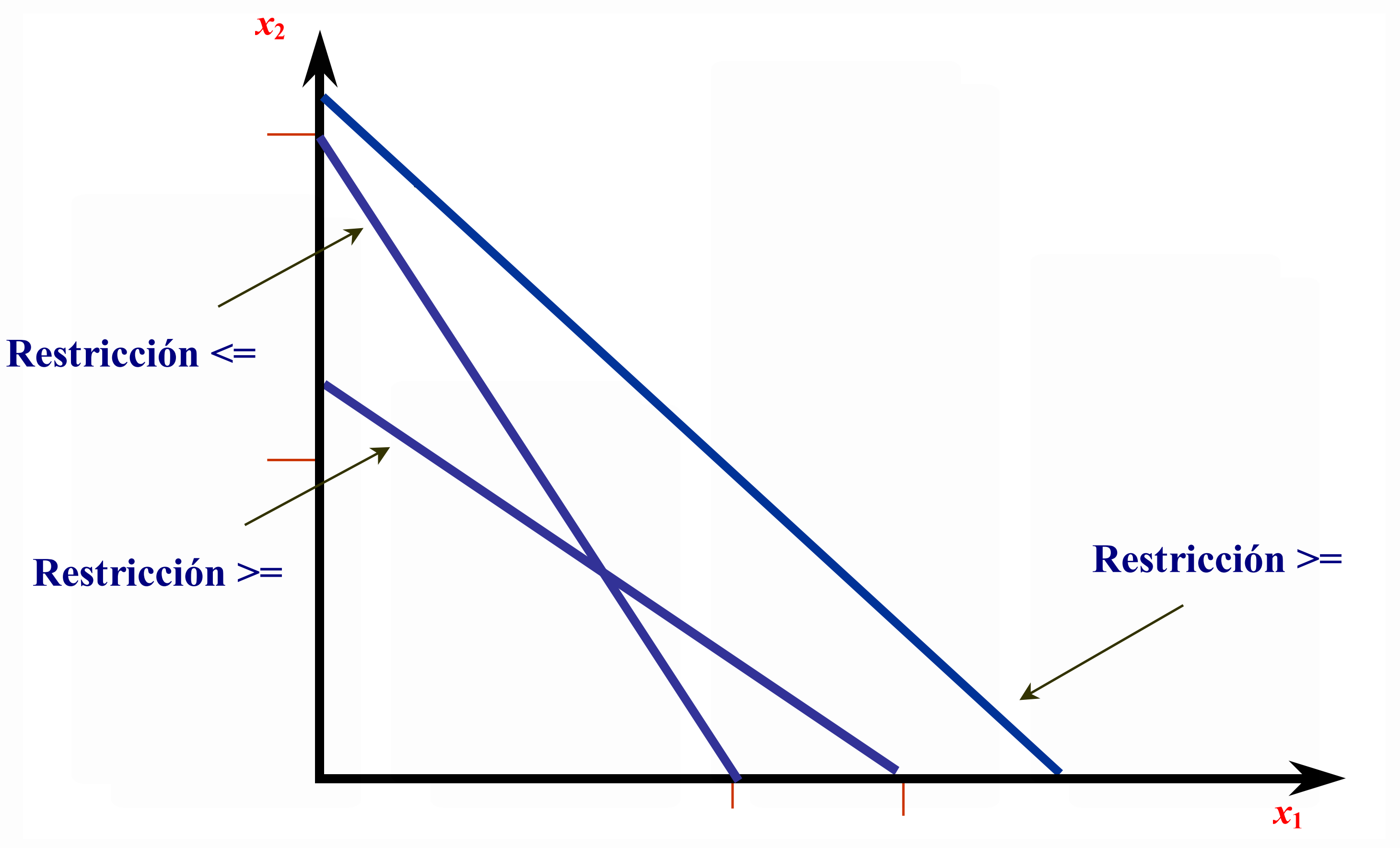
3.2 Región factible y solución gráfica

3. Solución no acotada



3.2 Región factible y solución gráfica

4. No hay solución



3.3 Variables de holgura

FORMA ESTÁNDAR DE UN PROBLEMA LINEAL (PL)

Un PL está en forma estándar si cumple:

- Todas las restricciones son igualdades.
- Todas las variables son de naturaleza no negativa.

Cómo pasar a forma estándar cualquier PL:

- Desigualdades: añadir variables de holgura.
- Variables: aplicar equivalencias. (*vistas en las Hipótesis de PL*)

Todo PL puede expresarse en forma estándar.

FORMA ESTÁNDAR DE UN PROBLEMA LINEAL (PL)

Un PL está en forma estándar si cumple:

- Todas las restricciones son igualdades.
- Todas las variables son de naturaleza no negativa.

Cómo pasar a forma estándar cualquier PL:

- Desigualdades: añadir variables de holgura.
- Variables: aplicar equivalencias. (*vistas en las Hipótesis de PL*)

Todo PL puede expresarse en forma estándar.

VARIABLES DE HOLGURA

- **Holgura**

  Ante una solución posible, **diferencia** entre el **valor** que toma la **restricción** y el coeficiente del **segundo miembro**

- **Variable de holgura**

  Con frecuencia, resulta interesante identificar de una forma explícita esta diferencia introduciendo en la restricción una variable

  Estas variables están sujetas a las mismas consideraciones de divisibilidad y no negatividad que las variables decisión

3.3 Variables de holgura

MODELO EN FORMA GENERAL	$\rightarrow$	MODELO EN FORMA ESTANDAR

$X_1 + X_3 = 4$ (depto.1)

$2X_2 + X_4 = 12$ (depto.2)

$3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18$ (depto.3)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \mathbf{x}_{\mathbf{holgura}} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \mathbf{x}_{\mathbf{exceso}} = b_i$$

3.3 Variables de holgura

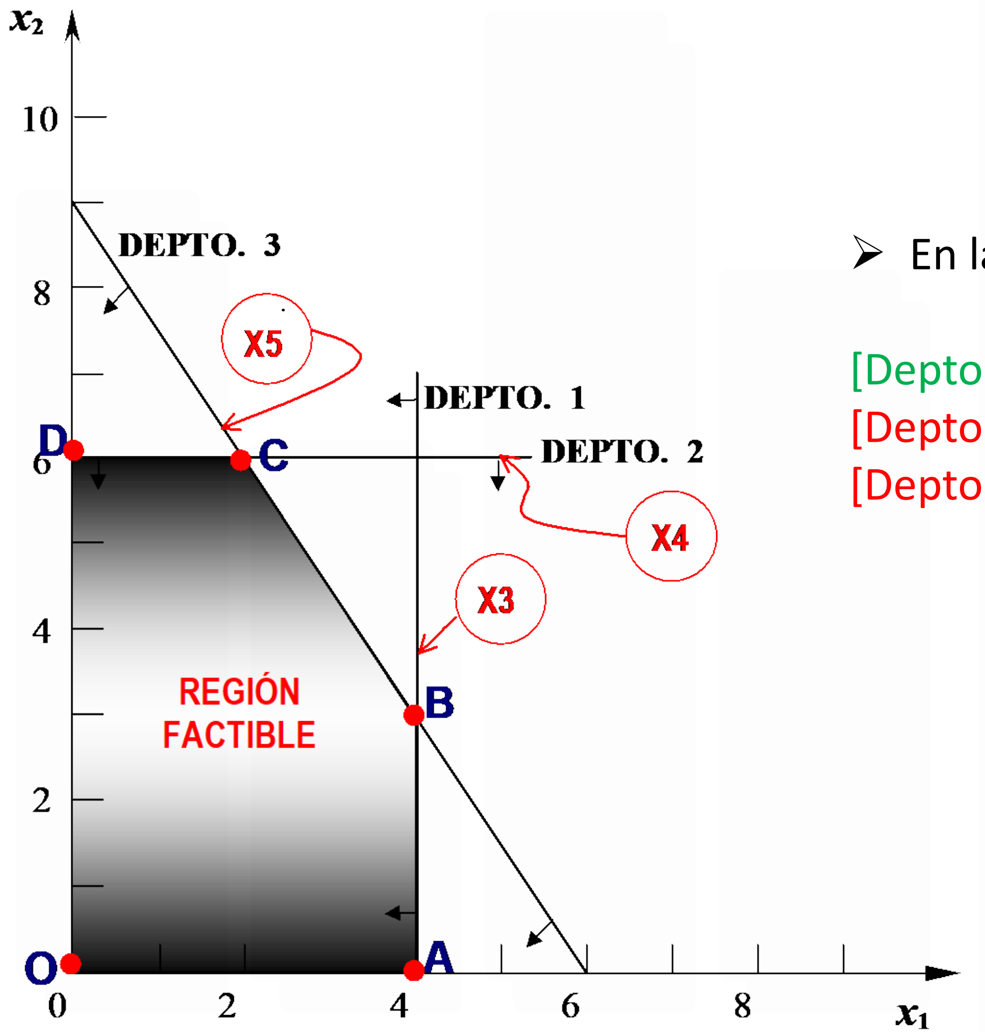
- Interpretación de las variables de holgura (dada una solución)

  - **=0**: Restricción Limitativa

    (<u>Cuello de botella del sistema</u>)

  - **>0**: Recursos no utilizados o capacidad no utilizada

3.3 Variables de holgura



- En la solución óptima (C):

[Depto1] Es un recurso sobrante
[Depto2] Es cuello de botella
[Depto3] Es cuello de botella

3.4 Resolución de modelos con el software de optimización LINGO©

```
!EJEMPLO1: UN EJEMPLO DE PLANIFICACIÓN DE LA
  PRODUCCION;
[OBJ] MAX = 3 * X1 + 5 * X2;
[DEPTO1] X1 <= 4;
[DEPTO2] 2*X2 <= 12;
[DEPTO3] 3*X1 + 2*X2 <= 18;
```

SOLUCIÓN ÓPTIMA

Objective value: 36.00000 (VALOR FUNCION OBJETIVO)

……………………………………….VALOR VARIABLES………………………………………………………

Variable	Value	Reduced Cost (COSTE REDUCIDO)
X1	2.000000	0.0000000
X2	6.000000	0.0000000

……………………………………VALOR RESTRICCIONES…………………………………………………

Row	Slack or Surplus (HOLGURA)	Dual Price (COSTE DE OPORTUNIDAD)
OBJ	36.00000	1.000000
DEPTO1	2.000000	0.0000000
DEPTO2	0.0000000	1.500000
DEPTO3	0.0000000	1.000000

3.4 Resolución de modelos con el software de optimización LINGO©

- COSTE REDUCIDO de una variable = 0 en la solución optima, indica cuánto debe **MEJORAR**
  - incrementarse (si maximización) o
  - decrementarse (si minimización)

  su coeficiente en la función objetivo para que esta variable entre a formar parte de la solución optima.

  También puede interpretarse como el empeoramiento en el valor de la función objetivo si esta variable (que ahora es =0) pasa a formar parte de la solución con valor distinto de 0.

  El COSTE REDUCIDO de una variable ≠ 0 en la solución optima, es igual a 0.

3.4 Resolución de modelos con el software de optimización LINGO©

- COSTE DE OPORTUNIDAD de una restricción, es la "**VARIACIÓN**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción

  - El **coste de oportunidad** de una restricción que no se verifica estrictamente en la Solución óptima es = 0
  - El **coste de oportunidad** de una restricción que se verifica estrictamente en la Solución Óptima es en general $\neq 0$
  - Los **costes de oportunidad** proporcionan a la gerencia una valiosa información acerca de los beneficios que pueden obtenerse al suavizar las restricciones. Si estos beneficios superan el coste que provoca suavizar una restricción dada, entonces dichos cambios son interesantes

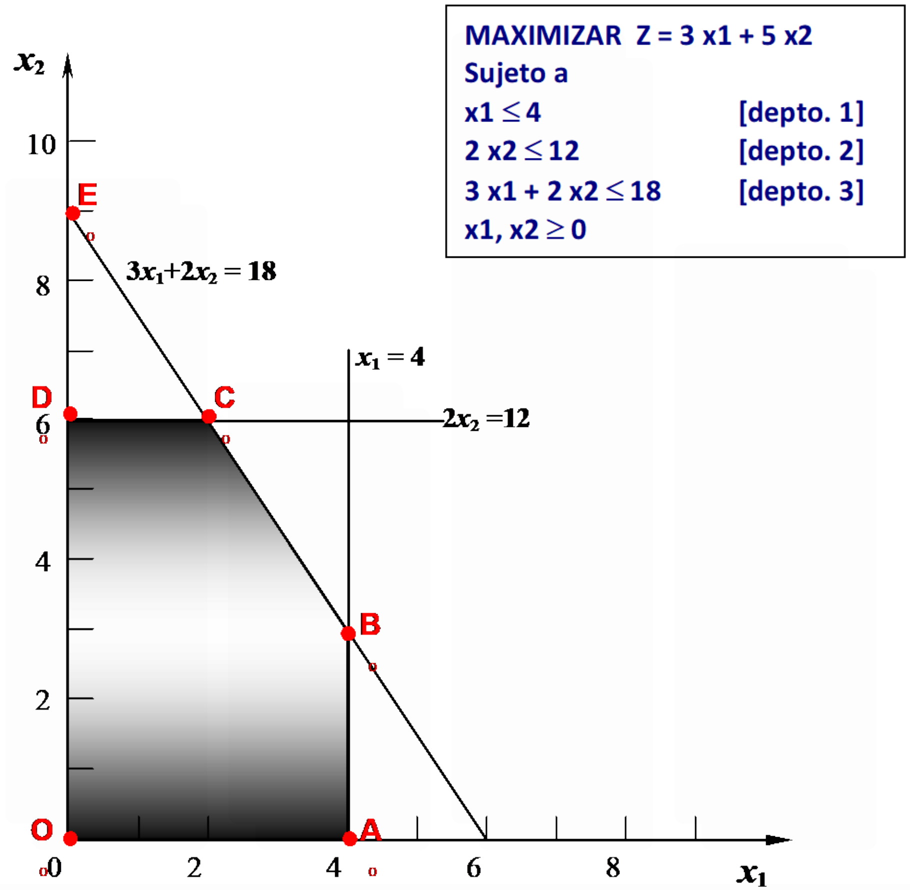
3.4 Resolución de modelos con el software de optimización LINGO©

COSTE DE OPORTUNIDAD de una **RESTRICCIÓN**: "**VARIACIÓN**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción

- **COSTE DE OPORTUNIDAD** de una **RESTRICCIÓN** $\leq$
  - "**MEJORA**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción
    - **MEJORA**: si **MAX** → **aumento** en el valor de la F.O.
      si **MIN** → **disminución** en el valor de la F.O.
- **COSTE DE OPORTUNIDAD** de una **RESTRICCIÓN** $\geq$
  - "**EMPEORAMIENTO**" del valor de la Función Objetivo por **unidad adicional** en el segundo miembro de la restricción
    - **EMPEORAMIENTO**: si **MAX** → **disminución** en el valor de la F.O.
      si **MIN** → **aumento** en el valor de la F.O.

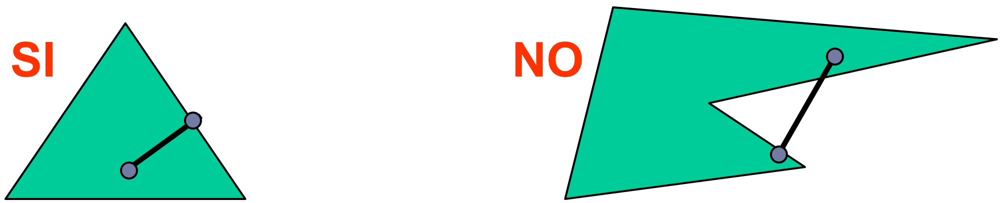
3.5 Conceptos básicos de programación lineal

- Trabajaremos con el problema de producción del apartado anterior. El modelo y representación gráfica es la siguiente:



3.5 Conceptos básicos de programación lineal

- **CONJUNTO CONVEXO**: un conjunto es convexo si dados dos puntos A y B cualesquiera, contenidos en el mismo, el segmento de recta que los une queda contenido en dicho conjunto



- Esta es una característica de la **REGIÓN FACTIBLE** de todo programa lineal y es la base del procedimiento de resolución conocido como **ALGORITMO SIMPLEX**

3.5 Conceptos básicos de programación lineal

- **PUNTOS EXTREMOS**: Vértices del polígono que forma la región factible (en el caso de dos variables)

- La **solución óptima** de un problema de programación lineal, si existe, es un **punto extremo** (vértice) de la región factible (i.e. cumple todas las restricciones). Si el problema tiene soluciones óptimas múltiples, entonces al menos dos deben ser puntos extremos. En este caso, cualquier solución óptima se obtendrá como combinación lineal convexa de dichos puntos extremos.

¿Cómo se generan estos puntos extremos algebraicamente?

Paso 1: Pasar el modelo a **forma estándar**

(añadir variables de holgura):

Modelo en Forma General

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z=3x1 + 5x2 \\ &x1 \leq 4 \\ &2x2 \leq 12 \\ &3x1 + 2x2 \leq 18 \\ &x1,\ x2 \geq 0 \end{aligned}$$

Modelo en Forma Estándar

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z=3x1 + 5x2 \\ &x1 + x3 = 4 \\ &2x2 + x4 = 12 \\ &3x1 + 2x2 + x5 = 18 \\ &xj \geq 0, \text{ para } j=1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

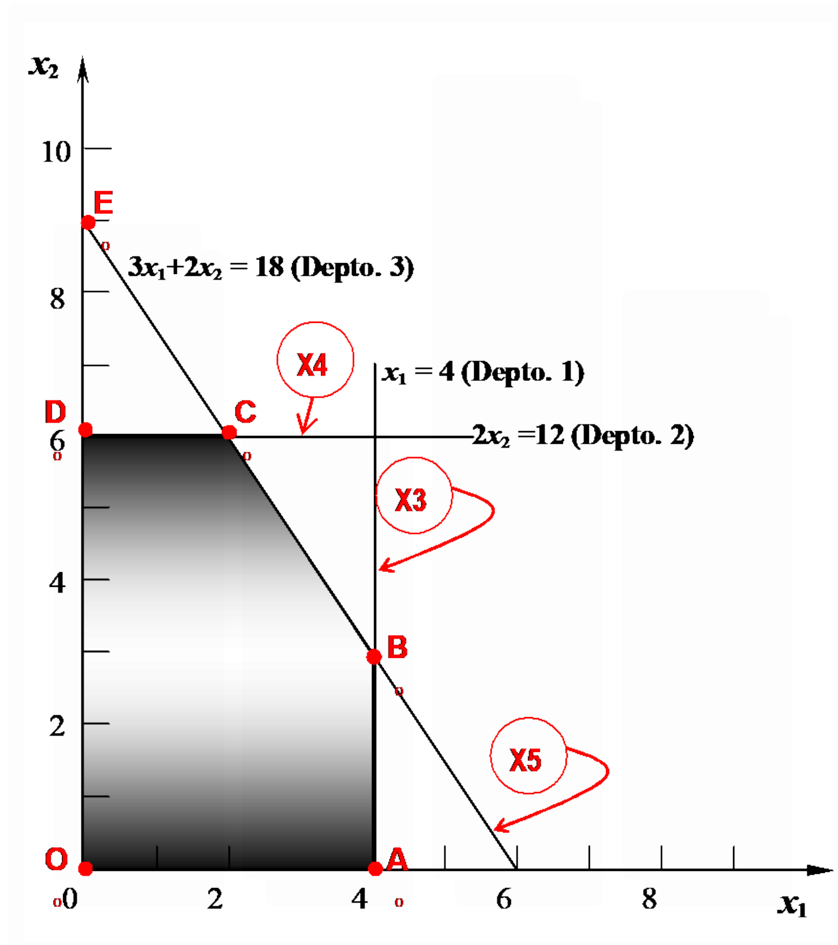
Paso 2: Resolver el sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} x1 \qquad\qquad &+ x3 = 4 \quad \text{(depto.1)} \\ 2\,x2 \qquad &+ x4 = 12 \ \text{(depto.2)} \\ 3\,x1 + 2\,x2 &+ x5 = 18 \ \text{(depto.3)} \end{aligned}$$

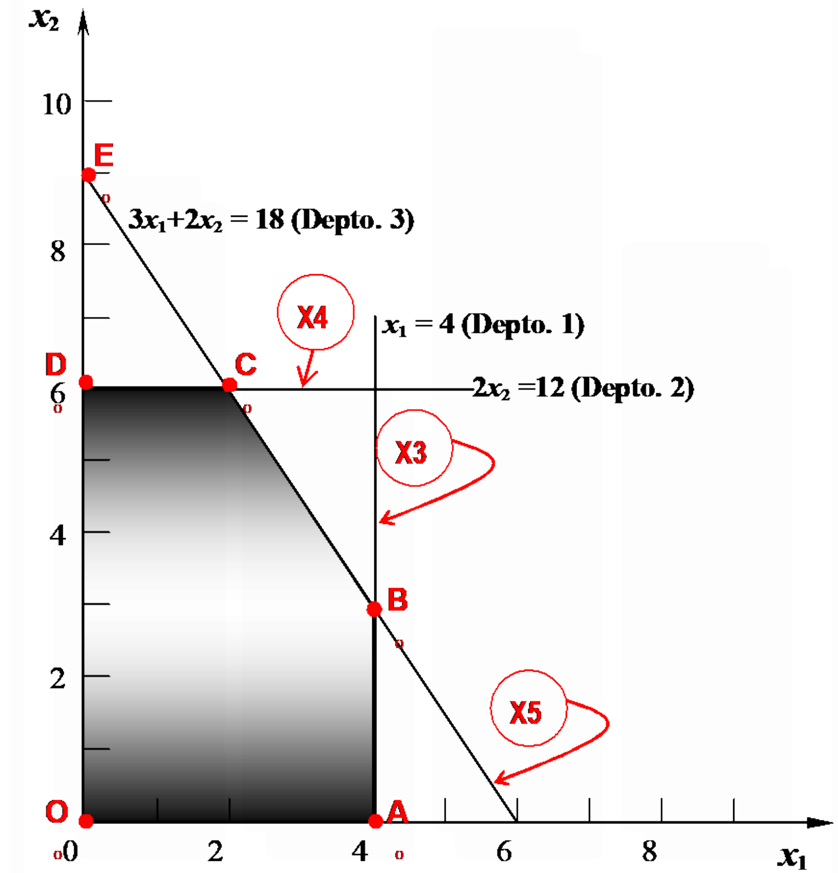
- En el sistema de ecuaciones resultante al pasar el modelo a forma estándar: **n > m**, por tanto se pueden elegir **n-m** variables cualesquiera e igualarlas a cualquier valor arbitrario para **resolver el sistema de m ecuaciones en términos de las m variables restantes**. El método simplex usa **0** para ese valor arbitrario

3.5 Conceptos básicos de programación lineal

- Por ejemplo, el punto **C** que corresponde a la solución óptima se obtiene igualando X_4 y X_5 a cero.



- La elección de las variables que se igualan a cero para obtener los puntos extremos no es arbitraria:
  - En el sistema de ecuaciones al igualar a cero X_1 y X_5 obtenemos el punto **E**: $X_2=9$ y $X_4= -6$
    SOLUCIÓN **NO** FACTIBLE



SOLUCIÓN BÁSICA

Toda solución obtenida resolviendo el sistema de ecuaciones en el que se ha igualado a cero n-m variables

- Dado un programa lineal en la forma estándar con ***n*** variables (**de decisión y de holgura**) y ***m*** restricciones podemos afirmar que el subconjunto de variables que forma una solución básica se encuentra **igualando a cero *(n-m)*** variables y resolviendo el sistema de ***m*** ecuaciones resultantes con ***m*** variables

Este sistema de ecuaciones tiene solución única

- En una solución básica, las ***(n-m)*** variables que se igualan a cero son las **variables no básicas** y las ***m*** restantes son las **variables básicas**

- **SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE**: Es una solución básica en la cual toda $x_j \geq 0$

- **SOLUCIONES BÁSICAS ADYACENTES**: En un programa lineal con **m** restricciones, dos soluciones básicas son adyacentes si sus conjuntos de variables básicas tienen **m-1** en común

3.5 Conceptos básicos de programación lineal

$\updownarrow$ $0 \rightarrow (0, 0, \neq 0, \neq 0, \neq 0)$

$A \rightarrow (\neq 0, 0, 0, \neq 0, \neq 0)$

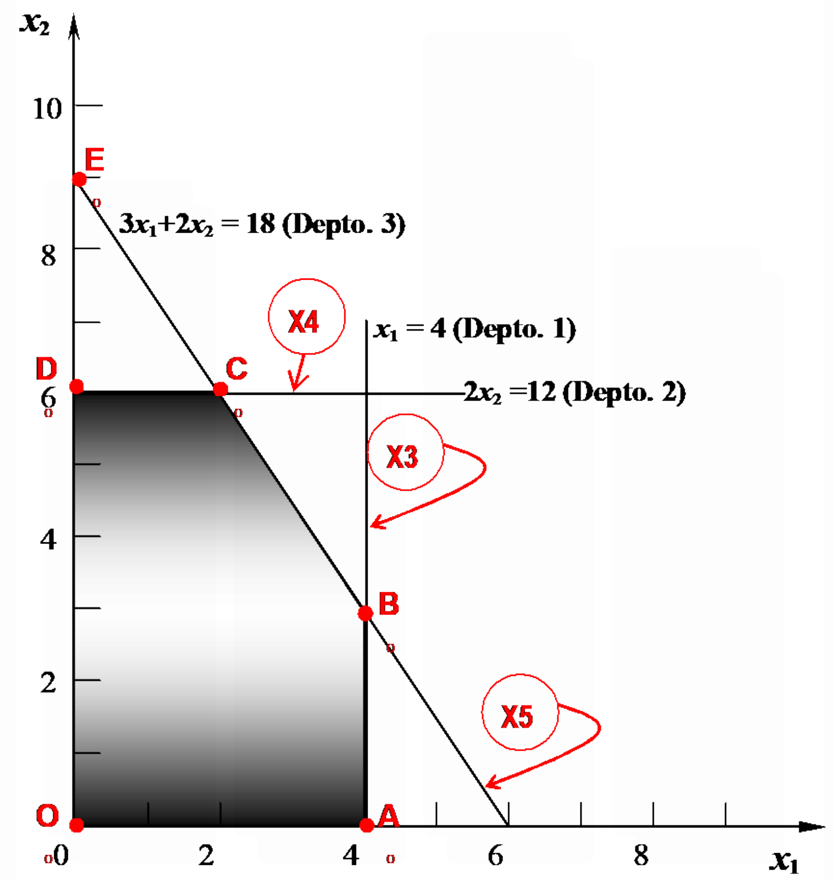
$\updownarrow$ $A \rightarrow (\neq 0, 0, 0, \neq 0, \neq 0)$

$B \rightarrow (\neq 0, \neq 0, 0, \neq 0, 0)$

IDEM: $B \leftrightarrow C$

$C \leftrightarrow D$

$D \leftrightarrow O$



3.5 Conceptos básicos de programación lineal

- **SOLUCIÓN DEGENERADA**: Es una solución básica factible que tiene **menos de m** variables estrictamente positivas

- **SOLUCIÓN NO DEGENERADA**: Es una solución básica factible con exactamente **m** variables estrictamente positivas

- **SOLUCIÓN ÓPTIMA**: Es una solución básica factible que optimiza la función objetivo del problema

3.6 Algoritmo Simplex: conceptos básicos

- El método Simplex es el algoritmo de resolución de problemas de programación lineal más importante. Fue desarrollado en 1947 por George Dantzig y **ha sido considerado uno de los algoritmos más importantes del siglo XX** (Nash, 2002)

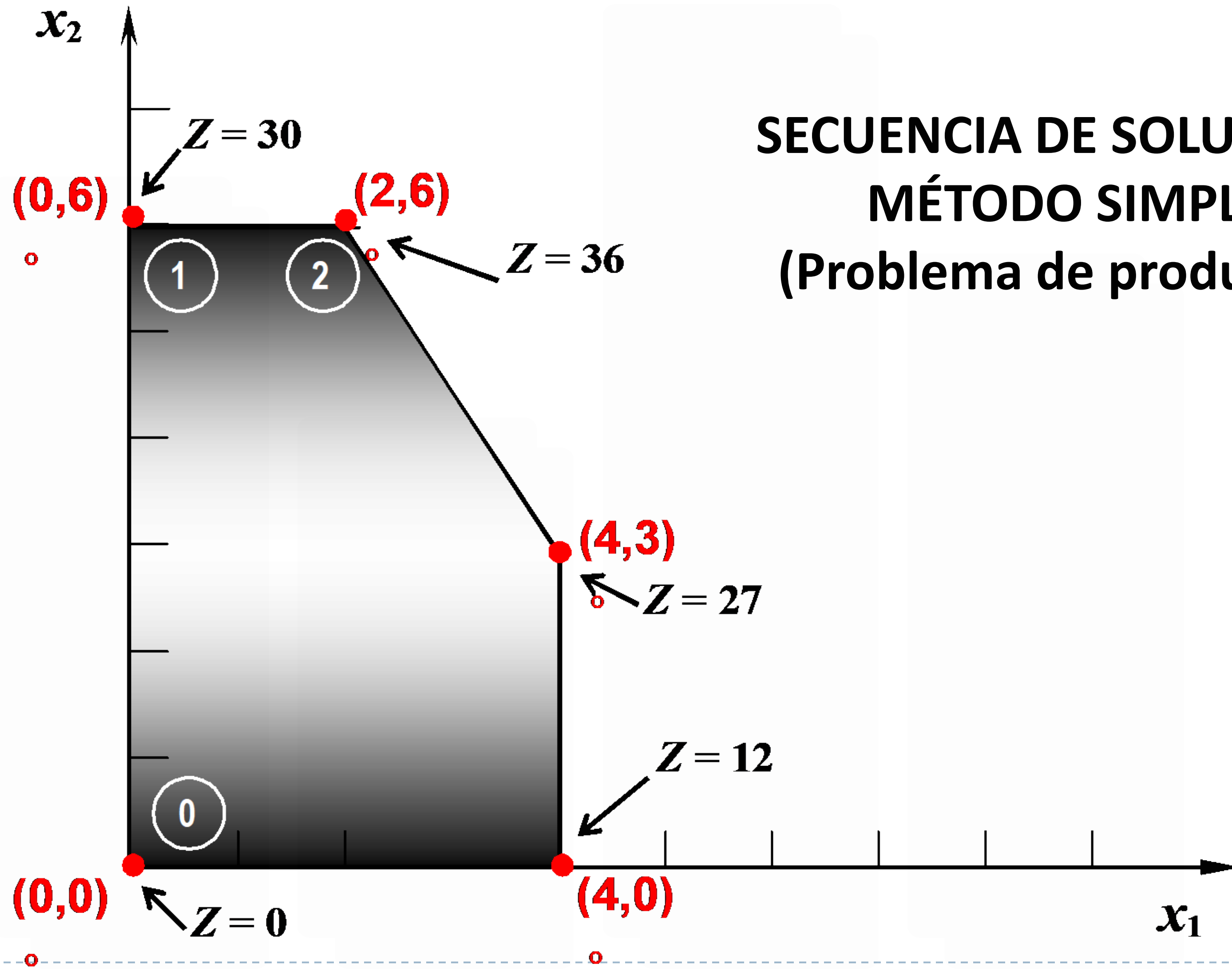
- El algoritmo Simplex se basa en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con el procedimiento de Gauss-Jordan apoyado con criterios para el cambio de la solución básica. Es un procedimiento iterativo que se aplica hasta que se cumple la condición de optimalidad

3.6 Algoritmo Simplex: conceptos básicos

- La **idea general** del método Simplex consiste en partir de una solución básica factible e ir a una solución básica factible adyacente con mejor valor de la función objetivo

- Este proceso continúa hasta que ya no se puedan obtener mejoras y se habrá encontrado la solución óptima

3.6 Algoritmo Simplex: conceptos básicos



SECUENCIA DE SOLUCIONES MÉTODO SIMPLEX (Problema de producción)

3.6 Algoritmo Simplex: conceptos básicos

- La aplicación del método Simplex se desarrolla a través de las siguientes etapas:

INICIALIZACIÓN: **Encontrar una solución básica factible inicial (SB_0)**

PRUEBA DE OPTIMALIDAD **(Cj-Zj)** **¿Es óptima la solución básica actual?**

SI LO ES → **FIN**

SI NO

ITERACIÓN **1º Elegir JE** **2º Elegir IS** **Realizar una iteración para encontrar una solución básica factible adyacente mejor que la anterior**

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- Trabajaremos con el ejemplo de producción de componentes informáticos:

MAXIMIZAR $Z = 3x1 + 5\ x2$

Sujeto a

$$x1 \leq 4$$

$$2\ x2 \leq 12$$

$$3\ x1 + 2\ x2 \leq 18$$

$$x1,\ x2 \geq 0$$

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- La aplicación del método simplex en forma de tablas implica:

1. Expresar el modelo en forma estándar
2. Construir la tabla simplex y mostrar las soluciones básicas obtenidas en forma tabular

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

1. Pasar el modelo a forma estándar introduciendo las correspondientes variables de holgura:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 & & & & \\
x_1 & + x_3 & & & = 4 \\
2x_2 & & + x_4 & & = 12 \\
3x_1 + 2x_2 & & & + x_5 & = 18 \\
x_j \geq 0, \text{ para } j=1,2,3,4,5 & & & &
\end{array}
$$

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

2. Construir la tabla simplex y mostrar las soluciones básicas obtenidas en forma tabular:

E1: $x1+ 0x2+ x3 + 0x4 + 0x5 = 4$

E2: $0x1+ 2x2 + 0x3 + x4 + 0x5 = 12$

E3: $3x1 + 2x2 + 0x3 + 0x4 + x5 = 18$

E4: $-Z + 3x1 + 5x2 = 0$

Condiciones de la Tabla Simplex:

- Cada VBásica (**VB**) aparece con coeficiente no cero en una y sólo una de las ecuaciones.
- En la ecuación en la que la VB aparece con coeficiente no cero, su coeficiente es 1
- Cada ecuación contiene sólo 1 VB con coeficiente 1 (para el resto será 0)
- El valor de la función objetivo, Z, aparece sólo en la ultima ecuación y con coeficiente -1

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

2. Construir la tabla simplex y mostrar las soluciones básicas obtenidas en forma tabular:

E1: $x1 + 0x2 + x3 + 0x4 + 0x5 = 4$

E2: $0x1 + 2x2 + 0x3 + x4 + 0x5 = 12$

E3: $3x1 + 2x2 + 0x3 + 0x4 + x5 = 18$

E4: $-Z + 3x1 + 5x2 = 0$

Condiciones de la Tabla Simplex:

- Cada VBásica (**VB**) aparece con coeficiente no cero en una y sólo una de las ecuaciones.
- En la ecuación en la que la VB aparece con coeficiente no cero, su coeficiente es 1
- Cada ecuación contiene sólo 1 VB con coeficiente 1 (para el resto será 0)
- El valor de la función objetivo, Z, aparece sólo en la última ecuación y con coeficiente -1

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

Solución básica factible inicial (**SB_0**): todas las variables decisión igual a 0

MATRIZ IDENTIDAD (VAR. BÁSICAS)

VECTOR RECURSOS

Tabla SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x4	0	2	0	1	0	12
x5	3	2	0	0	1	18
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0

VAR. BÁSICAS

- Z

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- La ventaja de esta tabla es que permite disponer de la solución de forma inmediata. En particular, sabiendo que las Variables No Básicas (VNB) son igual a 0, el valor de las VB es el del segundo miembro de las ecuaciones.
- En nuestro ejemplo, cuando x1=x2=0, se determina fácilmente por observación que la solución es x3=4, x4=12, x5=18 y -z=0.
- En las sucesivas iteraciones del Simplex, se deben mantener estas mismas características, i.e., las VB siempre deben tener asociada la matriz identidad de modo que se disponga del valor de las mismas de forma inmediata.

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

Interpretación de los coeficientes en la Tabla Simplex: describen el efecto sobre cada VB al incrementar una VNB

αij^{+}: decremento

αij^{-} : incremento

$\alpha_{4,2}$: Decremento de x4 por unidad de x2 que entre en la solución

MATRIZ IDENTIDAD (VAR. BÁSICAS)

VECTOR RECURSOS

VAR. BÁSICAS

Tabla SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x4	0	2	0	1	0	12
x5	3	2	0	0	1	18
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0

COEFICIENTES REDUCIDOS $C_j - Z_j = C_j - \sum \alpha_{ij} \, C_i$

- Z

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- El **coeficiente reducido** de la función objetivo (C_j-Z_j) asociado a la variable x_j siempre representa la variación de la función objetivo por unidad de dicha variable (no básica) que entre en la base. Si es positivo aumentará el valor de la función objetivo, si es negativo disminuirá dicho valor

- El coeficiente reducido de las variables básicas siempre es cero

- Los **C_j-Z_j** en la solución óptima tienen una interpretación especial:
  - Asociados a variable de holgura: **coste de oportunidad** de la restricción asociada
  - Asociado a variable decisión: **coste reducido**

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

$$\underbrace{C_j - Z_j}_{} = C_j - \underbrace{\sum C_i\, \alpha_{ij}}_{}$$

Variación de la función objetivo cuando x_j entra en la base

Variación de la función objetivo debida **sólo** al cambio de valor de la variable x_j (su coeficiente en la función objetivo)

Variación de la función objetivo debida al cambio de valor de las variables básicas (coeficiente en la función objetivo de las v.básicas * variación en su valor por causa de x_j)

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

… Para cada SBFactible, la pregunta es: Esta solución, ¿es óptima?

PRUEBA DE OPTIMALIDAD: Criterio de la Función Objetivo = **MAX**

VNB = x1, x2

Tabla SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x4	0	2	0	1	0	12
x5	3	2	0	0	1	18
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0

NO es solución óptima → ITERACIÓN (SB adyacente)

JE = x2

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

PRUEBA DE OPTIMALIDAD: ¿Esta solución es óptima?

$$\mathbf{Z = 3\,x1 + 5\,x2}$$

- El Cj-Zj de las variables no básicas (x_1, x_2) da la tasa de variación de Z si aumentara el valor de esa variable. Esas tasas de variación son positivas.

  De hecho,

  - si $x_1 = 1$ la función objetivo aumenta en 3
  - si $x_2 = 1$ la función objetivo aumenta en 5

- Por tanto, pueden existir puntos extremos con mejor valor de Z → el **punto O NO es solución óptima**

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

ITERACIÓN

PASO 1: Determinar la dirección de movimiento (**Variable que ENTRA EN LA BASE: JE**)

- Variables candidatas: (x_1, x_2)
- Tasa de cambio de Z:

$$Z = 3x1 + 5x2$$

- ¿aumento de x_1? Tasa de mejora en Z=3
- ¿aumento de x_2? Tasa de mejora en Z=5
- 5>3, por tanto se elige x_2 para aumentar Z

$$\boxed{JE = x_2}$$

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

PASO 2: …¿Cuánto puede incrementarse una VNB?

¿ IS ?

Tabla SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x4	0	2	0	1	0	12
x5	3	2	0	0	1	18
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0

Al modificar (aumentar) x_2 (**x1=0**) cambia en general el valor de las variables básicas:

(1) x1 + **x3** = 4 **x3=4**

(2) 2x2 + **x4** = 12 **x4=12-2x2** ← **IS**

(3) 3x1 + 2x2 + **x5** = 18 **x5=18-2x2**

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- Para determinar la variable que sale de la base **(IS)** calculamos en una columna adicional el cociente:

  bi/α_{ij}^{+} : número de unidades de xj que deben entrar en la base para que xi sea cero

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	bi/α_{ij}^{+}
x3	1	0	1	0	0	4	-
x4	0	2	0	1	0	12	12/2 ← IS
x5	3	2	0	0	1	18	18/2
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0	

JE

$$\theta xj = \min \frac{bi}{\alpha ij}, \quad \forall \alpha ij > 0$$

¿POR QUÉ NO SE HA CALCULADO EL COCIENTE bi/α_{ij}^{+} CORRESPONDIENTE A x3?

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- Para determinar la variable que sale de la base **(IS)** calculamos en una columna adicional el cociente:

  bi/α_{ij}^{+} : número de unidades de xj que deben entrar en la base para que xi sea cero

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	bi/α_{ij}^{+}
x3	1	0	1	0	0	4	-
x4	0	2	0	1	0	12	12/2 ← IS
x5	3	2	0	0	1	18	18/2
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0	

JE

Pivote

Semipivote

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

- La nueva Solución Básica (SB) debe estar en forma canónica
- Aplicando:

$$\alpha^1_{IS,j}=\alpha^0_{IS,j} / \alpha^0_{IS,JE} = \alpha^0_{IS,j} / \text{PIVOTE}$$

$$\alpha^1_{i,j} = \alpha^0_{i,j} - \text{SEMIPIVOTE} * \alpha^1_{IS,j}$$

se obtiene la nueva *solución básica* que se muestra en la siguiente tabla simplex:

Tabla SB_1

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	0	1	0	0	4
x2	0	1	0	1/2	0	6
x5	3	0	0	-1	1	6
Cj-Zj	3	0	0	-5/2	0	-30

- **ITERACIÓN 2:**

VNB = x1, x4

Tabla SB_1

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	bi/α_{ij}+
x3	1	0	1	0	0	4	4/1
x2	0	1	0	1/2	0	6	-
x5	3	0	0	-1	1	6	6/3
Cj-Zj	3	0	0	-5/2	0	-30	

JE: x1 y **IS: x5**

- **ITERACIÓN 3:**

Tabla SB_2

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	0	0	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1	0	1/2	0	6
x1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Cj-Zj	0	0	0	-3/2	-1	-36

(∀ Cj-Zj asociado a VNB ≤ 0 [MAX])

SOLUCIÓN ÓPTIMA

SOLUCIÓN: producir 2 lotes de placas base tipo 1 y 6 lotes de placas base tipo 2 con un beneficio de 36 miles de euros

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	0	0	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1	0	1/2	0	6
x1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Cj-Zj	0	0	0	-3/2	-1	-36

Solución Óptima con LINGO®

```
Objective value:                 36.00000

Variable           Value           Reduced Cost
X1               2.000000            0.0000000
X2               6.000000            0.0000000

Row           Slack or Surplus        Dual Price
OBJ               36.00000             1.000000
DEPTO1            2.000000            0.0000000
DEPTO2           0.0000000             1.500000
DEPTO3           0.0000000             1.000000
```

Valor Variables Decisión

Valor Variables Holgura

Cj-Zj

- **CRITERIO PARA ELEGIR LA VARIABLE QUE ENTRA EN LA BASE (JE)**
  - **La variable que entra en la base es aquella VNB tal que:**

    Maximización: $\mathrm{Max}(C_j - Z_j),\ \forall (C_j - Z_j) > 0$

    Minimización: $\mathrm{Min}(C_j - Z_j),\ \forall (C_j - Z_j) < 0$

  - Cuando en una iteración no existe ningún coeficiente reducido positivo (caso Max.) no podremos mejorar más el valor de la función objetivo

- **CRITERIO DE LA VARIABLE QUE SALE DE LA BASE** ***(Independiente del criterio de la F.O.)***
  - Dados los α_{ij} de la variable no básica (x_j) que entra en la base, la variable básica que sale (x_i) es aquella que satisface:

$$\theta xj = \min \frac{\text{valor de la variable basica } xi}{\alpha ij}, \quad \forall \alpha ij > 0$$

y θ_{xj} es el valor de x_j en la nueva solución

- **CRITERIO DE OPTIMALIDAD (maximización)**

Una solución básica factible es óptima si:

$(C_j - Z_j) \leq 0 \ \forall$ Variable No Básica

En minimización, $(C_j - Z_j) \geq 0 \ \forall$ VNB

EJERCICIO PROPUESTO:

- Calcular la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el **método simplex con tablas.**

  MAXIMIZAR $Z = 600x1 + 900x2$

  s.a:

  $x1 + 2x2 \leq 200$

  $1/2x1 + x2 \leq 175$

  $x1, x2 \geq 0$

  en la tabla de la solución óptima identificar los costes de oportunidad y los costes reducidos y comentar su significado

3.7 Algoritmo Simplex en forma de tablas

EJERCICIO PROPUESTO:

- Calcular la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el **método simplex con tablas.**

  MAXIMIZAR $Z = 600x1 + 1200x2$

  s.a: $x1 + 2x2 \leq 200$

  $1/2x1 + x2 \leq 175$

  $x1, x2 \geq 0$

  en la tabla de la solución óptima identificar los costes de oportunidad y los costes reducidos y comentar su significado. La solución óptima, ¿presenta alguna característica particular?¿Cuál? Justificar la respuesta.

- Al calcular la solución óptima mediante el algoritmo Simplex con tablas:
  - ¿es necesario realizar todos los **cálculos** en cada iteración del algoritmo?
  - ¿es necesario tener almacenada en **memoria** toda la información de la tabla Simplex actual?

NO

- Veamos qué información ha sido utilizada en cada iteración del problema ejemplo (sombrearemos la información necesaria):

SB_0

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	bi/α_{ij}^+
x3	1	0	1	0	0	4	-
x4	0	2	0	1	0	12	12/2 ← IS
x5	3	2	0	0	1	18	18/2
Cj-Zj	3	5	0	0	0	0	
		↑ JE					

SB_1

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	$bi/\alpha_{ij}+$
x3	1	0	1	0	0	4	4/1
x2	0	1	0	1/2	0	6	-
x5	3	0	0	-1	1	6	6/3
Cj-Zj	3	0	0	-5/2	0	-30	

SB_2

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	0	0	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1	0	1/2	0	6
x1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Cj-Zj	0	0	0	-3/2	-1	-36

- Necesitamos:
  - **Valor de las VBasicas** en la SB actual
  - **Valor de la F.O.** en la SB actual
  - **Cj-Zj de las VNB** para determinar si la SB actual es S.Óptima
  - **Columna JE** para determinar la variable que sale de la base (IS)

¿Cómo calcular los datos necesarios en cada iteración?

3.8 Algoritmo Simplex revisado

- Sea un modelo de PL expresado en forma matricial:

  $$\begin{aligned} &\mathbf{Max}\ Z = \mathbf{c}^t\,\mathbf{x} \\ &\mathbf{s.a:} \quad \mathbf{A\,x = b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x \geq 0} \end{aligned}$$

- **Nomenclatura del Simplex Revisado:**

  $\mathbf{x}_B$ = Vector de variables básicas

  $\mathbf{c}^t_B$ = Coeficientes en la función objetivo asociados a variables básicas

  $\mathbf{x}_{NB}$ = Vector de variables no básicas

  $\mathbf{c}^t_{NB}$ = Coeficientes en la función objetivo asociados a variables no básicas

  B = Matriz cuyas columnas son los vectores de coeficientes técnicos asociados a variables básicas

  NB=Matriz cuyas columnas son los vectores de coeficientes técnicos asociados a variables no básicas

3.8 Algoritmo Simplex revisado

- Entonces, dado el modelo expresado en forma matricial:

$$\textbf{Max Z} = c^t_B\, x_B + c^t_{NB}\, x_{NB}$$

s.a:

$$B\, x_B + NB\, x_{NB} = b$$

$$x_B,\, x_{NB} \geq 0$$

¿Cómo calcular la información necesaria en cualquier solución básica?

- **Aplicamos la anterior formulación al modelo ejemplo:**

Max Z = 3x1 + 5x2

s.a:

$$
\begin{aligned}
x1 \quad & & + x3 & & & = 4 \\
& 2\,x2 & + & \quad x4 & & = 12 \\
3\,x1 + & 2\,x2 & & & + x5 & = 18
\end{aligned}
$$

x1, x2, x3, x4, x5 ≥ 0

✍

- **En forma matricial:**

$$\text{Max } Z = c^t \cdot x = (3, 5, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix}$$

s.a:

$$Ax = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo calcular el valor de una solución: $\mathbf{X_B}$?

- En cualquier solución, $\mathbf{B\, x_B + NB\, x_{NB} = b}$

si multiplicamos ambos lados de las restricciones por $\mathbf{B^{-1}}$:

$$\mathbf{B^{-1}\, B\, x_B + B^{-1}\, NB\, x_{NB} = B^{-1}\, b}$$

¿Cómo calcular el valor de una solución: X_B ?

- En cualquier solución, $\mathbf{B\ x_B + NB\ x_{NB} = b}$

si multiplicamos ambos lados de las restricciones por $\mathbf{B^{-1}}$:

$$\mathbf{B^{-1}\ B\ x_B + B^{-1}\ NB\ x_{NB} = B^{-1}\ b}$$

como $(B^{-1}\ B) = I$, entonces

¿Cómo calcular el valor de una solución: X_B ?

- En cualquier solución, $\mathbf{B\, x_B + NB\, x_{NB} = b}$

si multiplicamos ambos lados de las restricciones por $\mathbf{B^{-1}}$:

$$\mathbf{B^{-1}\, B\, x_B + B^{-1}\, NB\, x_{NB} = B^{-1}\, b}$$

como $(B^{-1}\, B) = I$, entonces

$$\mathbf{X_B + B^{-1}\, NB\, x_{NB} = B^{-1}\, b}$$

¿Cómo calcular el valor de una solución: X_B ?

- En cualquier solución, $\mathbf{B\, x_B + NB\, x_{NB} = b}$

si multiplicamos ambos lados de las restricciones por $\mathbf{B^{-1}}$:

$$\mathbf{B^{-1}\, B\, x_B + B^{-1}\, NB\, x_{NB} = B^{-1}\, b}$$

como $(B^{-1}\, B) = I$, entonces

$$\mathbf{X_B + B^{-1}\, NB\, x_{NB} = B^{-1}\, b}$$

como $x_{NB}=0$, entonces $\mathbf{(B^{-1}\, NB\, x_{NB}) = 0}$

¿Cómo calcular el valor de una solución: X_B ?

- En cualquier solución, $B\,x_B + NB\,x_{NB} = b$

si multiplicamos ambos lados de las restricciones por B^{-1}:

$$B^{-1} B\, x_B + B^{-1} NB\, x_{NB} = B^{-1} b$$

como $(B^{-1} B) = I$, entonces

$$X_B + B^{-1} NB\, x_{NB} = B^{-1} b$$

como $x_{NB}=0$, entonces $(B^{-1} NB\, x_{NB}) = 0$

- Por tanto, el valor de las variables básicas de cualquier solución, se puede calcular según:

$$\boxed{X_B = B^{-1} b}$$

¿Cómo calcular los α_{ij} asociados a la variable que entra en la base (y_{JE})?

- Consideremos la solución obtenida en la segunda tabla del Simplex del problema ejemplo (**SB_1**):

V.BÁSICAS	x1	x2	x3	x4	x5	bi	bi/α_{ij}+
x3	1	0	1	0	0	4	4/1
x2	0	1	0	1/2	0	6	-
x5	3	0	0	-1	1	6	6/3
Cj-Zj	3	0	0	-5/2	0	-30	

¿?

VB = (x3,x2,x5)

- Según la nomenclatura del Simplex Revisado: (**SB_1**)

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad x_{NB} = \begin{pmatrix} x1 \\ x4 \end{pmatrix} ; \quad NB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculamos B^{-1} (con dimensión **mxm**), y obtenemos:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

✍

- Siguiendo la nomenclatura del Simplex Revisado, **SB_1** se puede expresar:

$$X_B + B^{-1}\,NB\;x_{NB} = B^{-1}\,b$$

$$\begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x1 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x1 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y_{x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}\; ;\; y_{x4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Entonces, ¿Cómo calcular y_{x1}?:

  $y_{x1} = B^{-1} a_{x1} \rightarrow$ **e**n general $\boxed{\mathbf{y_j = B^{-1} a_j}}$

- ¿Cómo calcular c_j-z_j ?:

  c_j es conocido siempre

  $$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \, \alpha_{ij}$$

  $$\mathbf{z_j = c^t_B \, y_j = \underline{(c^t_B \, B^{-1})} \, a_j}$$

  Común para todo z_j

- ¿Cómo calcular Z ?:

  $\boxed{\mathbf{Z = c^t_B \, x_B}}$

- **Resumen Simplex Revisado**:

  Con $\mathbf{B^{-1}}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a_j}$ y $\mathbf{c}$ (datos originales del problema) y sabiendo cuales son las variables básicas de la solución a estudiar (punto extremo):

  - El valor de las variables básicas:

  $$X_B = B^{-1} b$$

  - Prueba de optimalidad (c_j-z_j):

  $$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$$

  - El vector y_{JE} asociado a la variable que entra en la base:

  $$Y_{JE} = B^{-1} a_j$$

  - Valor de la Función Objetivo:

  $$Z = c^t_B\, x_B$$

3.8 Algoritmo Simplex revisado

- **Complejidad Simplex Revisado**:

$$\boxed{B_{mxm}^{-1}}$$

La complejidad del algoritmo simplex aumenta al aumentar el número de restricciones

3.8 Algoritmo Simplex revisado

¡ Sólo necesitamos tener almacenada B^{-1} !

¡ El resto de datos se calculan a partir de B^{-1} y los datos originales del modelo !

Ejemplo: **Modelo con 50 Variables y 10 Restricciones ($\leq$)**

Modelo en forma estándar:

60 Variables (Decisión + Holgura)

10 Ecuaciones

SIMPLEX:

Número de αij = 600 datos reales

SIMPLEX REVISADO:

$B_{10X10}^{-1} \rightarrow$ 100 datos reales

Algoritmo Simplex Revisado:

0. Solución básica factible inicial (SB_0)
1. Prueba de optimalidad:

   Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica

   Si solución óptima: $\rightarrow$ **FIN**

   En otro caso: Seleccionar **JE**
2. Calcular y_{JE}
3. Seleccionar **IS** $\rightarrow$ min $\{ \frac{x_B}{y_{JE}} \}$
4. **Cambio de base**: Actualizar B^{-1}; calcular X_B, Calcular Z

   Ir al paso 1

- Aplicaremos el algoritmo Simplex Revisado al problema ejemplo:

- **Modelo en forma estándar:**

Max Z = 3x1 + 5x2

s.a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad\quad + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 4 \\
2x_2 \quad + \quad x_4 \quad\quad &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad\quad + x_5 &= 18 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Solución Básica inicial (SB_0) – Punto O:

Variables básicas: $x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$z_o = c^t_B\, x_B = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = 0$$

Tabla Simplex Revisado SB_0

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	0	0	**4**
x4	0	1	0	**12**
x5	0	0	1	**18**
$C^t_B\ B^{-1}$	0	0	0	**Z = 0**

1. Prueba de optimalidad SB_0:

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x1,x2

$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$z_{x1} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \qquad z_{x2} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_{x1}\text{-}z_{x1} = 3\text{-}0 = 3 \;; \qquad c_{x2}\text{-}z_{x2} = 5\text{-}0 = 5$$

$$\boxed{\mathbf{JE \rightarrow X2}}$$

2. Calcular y_{x2}:

$$y_{x2} = B^{-1} a_{x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Seleccionar IS $\rightarrow$ min $\{\frac{x_B}{y_{JE}}\}$

Tabla Simplex Revisado SB_0

v.básicas	B^{-1}			x_B	y_{x2}	$\frac{x_B}{y_{x2}}$
x3	1	0	0	4	0	---
x4	0	1	0	12	2	12/2
x5	0	0	1	18	2	18/2
$c^t_B B^{-1}$	0	0	0	Z = 0		

IS → X4

4. <u>Cambio de base</u>: Actualizar B^{-1} para nueva base:

$$\mathbf{X_B} = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

¿Cálculo?

4. Cambio de base: Actualizar B^{-1} para nueva base:

$$X_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de B^{-1} de la nueva solución, mediante las fórmulas del cambio de base aplicadas a B^{-1} anterior:

$$B^{-1}_{anterior} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad y_{x2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow Semipivote \\ \longleftarrow Pivote \\ \longleftarrow Semipivote \end{matrix}$$

Cálculo de la segunda fila:

$$\frac{0}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{0}{2} = 0 \quad 1/2 \quad 0$$

- Cálculo de la primera fila

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 0 & 0 & \\ - & 0 & (& 0 & 1/2 & 0 &) \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

- Cálculo de la tercera fila

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & 0 & 1 & \\ - & 2 & (& 0 & 1/2 & 0 &) \\ \hline & & & 0 & -1 & 1 & \end{array}$$

$$\boxed{B^{-1}_{\text{para la nueva SB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Entonces, la nueva SB es:

$$x_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tabla Simplex Revisado SB_1

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	0	0	**4**
x2	0	1/2	0	**6**
x5	0	-1	1	**6**
$c^t_B\ B^{-1}$	0	5/2	0	**Z = 30**

$$Z_1 = c^t_B\, x_B = (0,\ 5,\ 0)\begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix} = 30$$

1. Prueba de optimalidad SB_1:

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica → x1, x4

$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (0, 5/2, 0)$$

$$z_{x1} = (0, 5/2, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \qquad z_{x4} = (0, 5/2, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5/2$$

$$c_{x1}-z_{x1} = 3-0 = 3; \qquad c_{x4}-z_{x4} = 0-5/2 = -5/2$$

La solución actual NO es óptima

Es posible mejorar todavía el valor de la función objetivo

$\boxed{\textbf{JE} \rightarrow \textbf{X1}}$

2. Calcular y_{x1}

$$y_{x1} = B^{-1}\, a_{x1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Seleccionar **IS** $\rightarrow \min \{\frac{x_B}{y_{JE}}\}$

Tabla Simplex Revisado SB_1

v.básicas	B^{-1}			x_B	y_{x1}	$\frac{x_B}{y_{x1}}$
x3	1	0	0	4	1	4
x2	0	½	0	6	0	-
x5	0	-1	1	6	3	6/3
$c^t_B\, B^{-1}$	0	5/2	0	Z = 30		

$$Z_1 = c^t_B\, x_B = (0, 5, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 30$$

$$\boxed{\textbf{IS} \rightarrow \textbf{X5}}$$

4. Cambio de base: Actualizar B^{-1} para nueva base

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \end{pmatrix}; \qquad B^{-1}_{anterior} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

aplicando las fórmulas del cambio de base:

$$B^{-1}_{\text{para la nueva SB}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.8 Algoritmo Simplex revisado

Entonces, la SB_2 es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
				Z = 36

$$Z_2 = c^t_B \, x_B = (0, 5, 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 36$$

1. Criterio de optimalidad SB_2

Calcular c_j-z_j $\forall$ variable no básica $\rightarrow$ x4, x5

$z_j = c^t_B\, y_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, 3) \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 3/2, 1)$$

$$z_{x4} = (0, 3/2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2; \qquad z_{x5} = (0, 3/2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$c_{x4}-z_{x4} = 0 - 3/2 = -3/2;$ $\qquad c_{x5}-z_{x5} = 0-1 = -1$

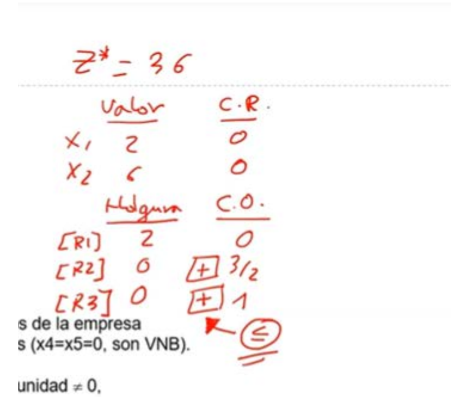
LA SOLUCIÓN ACTUAL ES SOLUCIÓN ÓPTIMA

(c_j-$z_j \leq 0$, $\forall x_j$ NB)

3.8 Algoritmo Simplex revisado

Interpretación Solución Óptima:

v.Básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	Z = 36



$c_{x4}\text{-}z_{x4} = 0 – 3/2 = -3/2;$ $\qquad$ $c_{x5}\text{-}z_{x5} = 0\text{-}1 = -1$

Los departamentos 2 y 3 (calidad y montaje) son los recursos escasos de la empresa ya que en la solución óptima se utilizan por completo sus capacidades (x4=x5=0, son VNB).

A los recursos escasos les corresponde en general un coste de oportunidad ≠ 0, en este caso:

- C.O. depto. 2: $c_{x4}\text{-}z_{x4} = c_{x4} - c^t_B\, B^{-1}a_{x4} = -3/2$, (restricción ≤), **C.O. = +3/2**
  "el valor de la F.O. mejorará (aumentará) en 3/2 por unidad adicional de capacidad depto.2"

- C.O. depto. 3: $c_{x5}\text{-}z_{x5} = c_{x5} - c^t_B\, B^{-1}a_{x5} = -1 \rightarrow$ **C.O.=+1** (idem depto.2)
- El departamento 1 (producción) es de holgura en la solución óptima. **C.O.=0**

Ejercicio Propuesto:

- Calcula la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el método **simplex revisado**

MAXIMIZAR $Z = 600x1 + 900x2$

s.a.

$x1 + 2x2 \leq 200$

$1/2x1 + x2 \leq 175$

$x1, x2 \geq 0$

en la solución óptima identifica los costes de oportunidad y los costes reducidos

¿Cuál sería la solución óptima si el departamento 3 incrementara en 3 unidades su capacidad? ¿y en el caso de incrementarla en 9 unidades?

- A partir de la tabla de la solución óptima es posible responder a estas cuestiones.

$$\text{[depto.3]}\ 3 X_1 + 2 X_2 + x5 = 18$$

- bi_{actual} Depto. 3 = 18; bi_{nuevo} Depto. 3 = **21**

v.básicas	B^{-1}			X_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	Z = 36

3.9 Reoptimización: modificación de bi

- La ***modificación de un bi no afecta a la optimalidad pero sí puede afectar a la factibilidad***, por tanto debemos recalcular x_B cuando b_3=21 y comprobar si la solución sigue siendo factible (y por tanto óptima).

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \end{pmatrix} = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Z = c^t_B\, x_B = (0, 5, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 39$$

3.9 Reoptimización: modificación de bi

… ¿y si b3 se incrementa en 9 unidades?

- La modificación implica que el bi del departamento 3 cuyo valor inicial es 18 pase a ser 27:

  b3 $\rightarrow$ b3 + Δ 9

- **La modificación de un bi no afecta a la optimalidad ($c_j - c_B^t B^{-1} a_j$ no varía) pero sí puede afectar a la factibilidad.** Por tanto debemos recalcular x_B cuando b_3=27 y comprobar si la solución sigue siendo factible (y por tanto óptima)

$$x_B = \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \end{pmatrix} = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN NO FACTIBLE (b3=27)

¿es posible alcanzar la factibilidad a partir de esta solución?

ALGORITMO SIMPLEX DUAL

- OBJETIVO: a partir de una SB que cumple el criterio de optimalidad primal y es no factible, encontrar una $SB_{adyacente}$ factible ($x_B \geq 0$)

3.10 Reoptimización: Introducción de una nueva variable

- Las variables decisión del modelo generalmente representan las distintas actividades a realizar.

- En algunas situaciones estas actividades se seleccionan entre un grupo grande de actividades posibles en el que las restantes no se eligieron por parecer menos atractivas.

- Sin embargo puede plantearse si merece la pena incluir alguna de las actividades no consideradas antes, es decir, ¿cambiará la solución óptima si se agrega cualquiera de estas nuevas actividades?

3.10 Reoptimización: Introducción de una nueva variable

- Añadir otra actividad equivale a:

1. Introducir en el modelo una nueva variable x_{n+1}, con los coeficientes apropiados en las restricciones funcionales, a_{n+1}, y en la función objetivo, c_{n+1}.
2. Se calcularán los valores:

$$c_{n+1} - z_{n+1} = c_{n+1} - c^t_B B^{-1} a_{n+1}$$

$$y_{n+1} = B^{-1} a_{n+1}$$

- La optimalidad de la solución dependerá del cj-zj de la nueva variable x_{n+1}, si es ≥ 0 y el problema es de mínimo o si es ≤ 0 y el problema es de máximo, la solución que teníamos para el problema original sigue siendo óptima para el problema modificado. En caso contrario la solución ya no es óptima, dicha variable debe entrar en la base → **Aplicar algoritmo Simplex**

3.10 Reoptimización: Introducción de una nueva variable

- La empresa de componentes informáticos está considerando la posibilidad de fabricar un nuevo tipo de placa base. Cada lote de las nuevas placas requiere 2 horas del departamento de producción, 3 horas del departamento de calidad y 1 hora del departamento de montaje. El beneficio semanal por cada lote de placas tipo 3 fabricadas es de 4000 €,

¿LE INTERESARÁ A LA EMPRESA LA FABRICACIÓN DEL NUEVO TIPO DE PLACA? ¿EN QUÉ CANTIDAD?

3.10 Reoptimización: Introducción de una nueva variable

- Sea $\mathbf{x_{placa3}}$: Número de lotes de la placa base 3 fabricados por semana
- El nuevo modelo es:

$$\text{Max } 3x1 + 5x2 + \mathbf{4}\, \mathbf{x_{placa3}}$$

s.a:

$$\begin{aligned}
x1 \qquad\qquad & + \mathbf{2}\, \mathbf{x_{placa3}} \le 4 \\
2\,x2 \qquad & + \mathbf{3}\, \mathbf{x_{placa3}} \le 12 \\
3\,x1 + 2\,x2 \qquad & + \mathbf{x_{placa3}} \le 18 \\
x1, x2, \mathbf{x_{placa3}} & \ge 0
\end{aligned}$$

3.10 Reoptimización: Introducción de una nueva variable

- Teniendo en cuenta que en la solución óptima del problema original:

$$x^*_B = \begin{pmatrix} x3^* \\ x2^* \\ x1^* \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \quad (c^t_B\, B^{-1}) = (0 \;\; 3/2 \;\; 1)$$

- Para la nueva actividad, calculamos su $c_{xplaca3}-z_{xplaca3}$ así como su columna $y_{xplaca3}$:

$$c_{xplaca3} - z_{xplaca3} = 4 - (0,\, 3/2,\, 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 11/2 = \mathbf{-3/2}$$

- La solución inicial todavía es óptima, por tanto

NO INTERESA la fabricación del nuevo tipo de placa

¿Cómo se interpreta el valor de $c_{xplaca3} - z_{xplaca3}$?

3.10 Reoptimización: Introducción de una nueva variable

Ejercicio Propuesto:

- Y si el beneficio semanal por cada lote de placas tipo 3 fabricadas fuera de 6000€, ¿interesaría fabricar el nuevo tipo de placa base 3?

Ejercicios Propuestos

Obtener la solución óptima de los siguientes programas lineales aplicando el algoritmo simplex revisado:

a) Max Z = 5 x1 + 2 x2

s.a: 3 x1 + x2 <= 12

x1 + x2 <= 5

x1, x2 $\geq$ 0

SOLUCIÓN: x1=3.5; x2=1.5; Z = 20.5

b) Max Z = 24 x1 + 20 x2

s.a: 0.5 x1 + x2 $\leq$ 12

1.5 x1 + x2 $\leq$ 24

x1, x2 $\geq$ 0

SOLUCIÓN: x1=12; x2=6; Z = 408