Lliçó 15: Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals

Suma directa ortogonal i projeccions ortogonals

- Si F és un subespai de $\mathbb{R}^n$, llavors
$$\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$$
- Si A és una matriu $m \times n$, llavors
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &= \operatorname{Col}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul}\mathsf{A}^t \\ \mathbb{R}^n &= \operatorname{Fil}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Nul}\mathsf{A} \end{aligned}$$

Càlcul de la projecció ortogonal del vector $\vec{b}$ sobre el subespai F

Elegiu A perquè $F = \operatorname{Col}\mathsf{A}$

- Calculeu els productes $\mathsf{A}^t\mathsf{A}$ i $\mathsf{A}^t\vec{b}$
- Resoleu el sistema lineal $\mathsf{A}^t\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}^t\vec{b}$
- La projecció ortogonal és el vector $p_F(\vec{b}) = \mathsf{A}\vec{x}$

Un cas especial:

- Si $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_1 p\}$ és una base ortonormal de F, llavors
$$p_F(\vec{b}) = (\vec{q}_1 \cdot \vec{b})\vec{q}_1 + (\vec{q}_2 \cdot \vec{b})\vec{q}_2 + \cdots + (\vec{q}_p \cdot \vec{b})\vec{q}_p$$
així que, si $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_p \end{bmatrix}$, llavors
$$p_F(\vec{b}) = \mathsf{Q}\mathsf{Q}^t\vec{b}$$