Ejercicios

Ejercicio 1

Teniendo en cuenta los siguientes lenguajes sobre $\{0, 1\}$:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{0x \ : \ x \in \{0,1\}^*\} \\
L_2 &= \{x1 \ : \ x \in \{0,1\}^*\} \\
L_3 &= \{0x1 \ : \ x \in \{0,1\}^*\} \\
L_4 &= \{x \in \{0,1\}^* \ : \ |x|_0 = 2\} \\
L_5 &= \{x \in \{0,1\}^* \ : \ |x|_0 \ mod \ 2 = 0\} \\
L_6 &= \{x \in \{0,1\}^* \ : \ 001 \in Suf(x)\} \\
L_7 &= \{x \in \{0,1\}^* \ : \ 001 \in Seg(x)\}
\end{aligned}$$

(a) Considerando la relación de equivalencia de L_1, determinar si los siguientes pares de palabras son o no equivalentes: $(001, 10)$, $(000, 0)$, $(11101001, 10)$, $(\lambda, 001)$, $(\lambda, 1001)$

Solución:

$001 \not\equiv_{R_{L_1}} 10$
$000 \equiv_{R_{L_1}} 0$
$11101001 \equiv_{R_{L_1}} 10$
$\lambda \not\equiv_{R_{L_1}} 001$
$\lambda \not\equiv_{R_{L_1}} 1001$

(b) Considerando la relación de equivalencia de L_2, describir cada una de las clases de equivalencia de la relación R_{L_2} y la primera palabra en orden canónico de cada clase.

Solución:

- palabras que no acaban en 1

  primera palabra: λ

- palabras que acaban en 1

  primera palabra: 1

(c) Considerando la relación de equivalencia de L_2, determinar si los siguientes pares de palabras son o no equivalentes: $(001, 10)$, $(000, 0)$, $(11101001, 10)$, $(\lambda, 001)$, $(\lambda, 10010)$

Solución:

$001 \not\equiv_{R_{L_2}} 10$

$000 \equiv_{R_{L_2}} 0$
$11101001 \not\equiv_{R_{L_2}} 10$
$\lambda \not\equiv_{R_{L_2}} 001$
$\lambda \equiv_{R_{L_2}} 10010$

(d) Considerando la relación de equivalencia de L_3, dar tres ejemplos de palabras equivalentes y tres de palabras no equivalentes.

Solución:

$0 \equiv_{R_{L_3}} 0000$
$010 \equiv_{R_{L_3}} 0$
$11 \equiv_{R_{L_3}} 10100$

$\lambda \not\equiv_{R_{L_3}} 100$
$010 \not\equiv_{R_{L_3}} 0011$
$11 \not\equiv_{R_{L_3}} 0001$

(e) Considerando la relación de equivalencia de L_4, dar tres ejemplos de palabras equivalentes y tres de palabras no equivalentes.

Solución:

$111 \equiv_{R_{L_4}} \lambda$
$010 \equiv_{R_{L_4}} 1100$
$11011000 \equiv_{R_{L_4}} 00011$

$\lambda \not\equiv_{R_{L_4}} 100$
$01010 \not\equiv_{R_{L_4}} 0011$
$11 \not\equiv_{R_{L_4}} 0001$

(f) Considerando la relación de equivalencia de L_5, describir cada una de las clases de equivalencia de la relación R_{L_5} y la primera palabra en orden canónico de cada clase.

Solución:

- palabras x tales que $|x|_0 \ mod \ 2 = 0$
  primera palabra: λ
- palabras x tales que $|x|_0 \ mod \ 2 = 1$:

primera palabra: 0

(g) Considerando la relación de equivalencia de L_6, describir cada una de las clases de equivalencia de la relación R_{L_6} y la primera palabra en orden canónico de cada clase.

Solución:

- palabras de la forma $x0$ donde $x \in \{\{0,1\}^*1\} \cup \{\lambda\}$

  primera palabra: 0
- palabras de la forma $x00$ donde $x \in \{0,1\}^*$

  primera palabra: 00
- palabras de la forma $x001$ donde $x \in \{0,1\}^*$

  primera palabra: 001
- palabras x tales que $0, 00, 001 \notin Suf(x)$

  primera palabra: λ

(h) Considerando la relación de equivalencia de L_6, dar tres ejemplos de palabras equivalentes y tres de palabras no equivalentes.

Solución:

$001 \equiv_{R_{L_6}} 1001$
$010 \equiv_{R_{L_6}} 0$
$\lambda \equiv_{R_{L_6}} 01$

$001 \not\equiv_{R_{L_6}} 100$
$1010 \not\equiv_{R_{L_6}} 00$
$\lambda \not\equiv_{R_{L_6}} 000$

(i) Dar tres ejemplos de palabras pertenecientes a los siguientes lenguajes: $(11)^{-1}L_7$, $(001)^{-1}L_7$, $(1001)^{-1}L_7$, $(1100)^{-1}L_7$

Solución:

$(11)^{-1}L_7 = L_7$, por lo tanto, $001, 1001, 01001 \in (11)^{-1}L_7$
$(001)^{-1}L_7 = \Sigma^*$, por lo tanto, $\lambda, 01, 00, 01001 \in (001)^{-1}L_7$
$(1001)^{-1}L_7 = \Sigma^*$, por lo tanto, $\lambda, 01, 00, 01001 \in (001)^{-1}L_7$

$(1100)^{-1}L_7 = \{x \in \{0,1\}^* : |x|_1 \geq 1\}$, por lo que, $10001, 001, 1111 \in (1100)^{-1}L_7$

Ejercicio 2

Determinar si los siguientes lenguajes son o no regulares.

(a) $L = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ x = x^r\}$

Solución:

Considerando la familia infinita de palabras $\{0^i 1 \ : \ i \geq 0\}$, puede verse que, dadas dos palabras cualesquiera de la familia $0^i 1$ y $0^j 1$ con $i \neq j$, hay una palabra 0^i tal que:

$$0^i 10^i \in L$$
$$0^j 10^i \notin L$$

por lo que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(b) $L = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ |x|_0 = |x|_1\}$

Solución:

Sea la familia infinita de palabras $\{0^i \ : \ i \geq 0\}$. Tomando una palabra cualquiera de la familia 0^i puede verse que, si le concatenamos otra palabra de la forma tipo 1^i, obtenemos palabras del lenguaje. Teniendo en cuenta que, para todo i, j tales que $i \neq j$, se cumple que:

$$0^i 1^i \in L$$
$$0^j 1^i \notin L$$

puede concluirse que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(c) $L = \{x \in \{0,1,2\}^* \ : \ 2|x|_0 = |x|\}$

Solución:

Considerando palabras de la forma $\{1^i \ : \ i \geq 0\}$ obtenemos una familia infinita. Tomando dos palabras cualesquiera de la familia 1^i y 1^j con $i \neq j$, podemos encontrar dos palabras 0^i y 0^j tales que se cumple que:

$$1^i 0^i \in L$$
$$1^j 0^i \notin L$$

por lo que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(d) $L = \{x \in \{0,1,2\}^* \ : \ |x|_0 = |x|_1 \times |x|_2\}$

Solución:

Sea la familia infinita de palabras de la forma $\{0^i1 \ : \ i \geq 0\}$, puede verse que, dadas dos palabras cualesquiera de la familia 0^i1 y 0^j1 con $i \neq j$:

$$0^i12^i \in L$$
$$0^j12^i \notin L$$

por lo que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(e) $L = \{x \in \{0,1,2\}^* \ : \ |x|_2 = |x|_0 + |x|_1\}$

Solución:

Sea la familia infinita de palabras $\{2^{2i} \ : \ i \geq 0\}$. Puede verse que obtenemos palabras de L si a cada palabra de la familia le concatenamos otra del tipo 0^i1^i. Teniendo en cuenta que, tomando palabras distintas 2^{2i} y 2^{2j}, se cumple que:

$$2^{2i}0^i1^i \in L$$
$$2^{2j}0^i1^i \notin L$$

puede concluirse que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(f) $L = \{xx \ : \ x \in \{0,1\}^*\}$

Solución:

Sea la familia infinita de palabras de la forma $\{10^i \ : \ i \geq 0\}$, puede verse que, dadas dos palabras cualesquiera de la familia 10^i y 10^j con $i \neq j$, existe almenos un sufijo que sirve en un caso pero no en el otro para formar una palabra del lenguaje:

$$10^i10^i \in L$$
$$10^j10^i \notin L$$

por lo que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(g) Sea L el lenguaje sobre $\{0,1\}^*$ que contiene las palabras tales que su segmento más largo de símbolos 0 es de la misma longitud del segmento más largo de símbolos 1.

Solución:

Sea la familia infinita de palabras de la forma $\{0^i \ : \ i \geq 0\}$, puede verse que, dadas dos palabras cualesquiera de la familia 0^i y 0^j:

$$0^i1^i \in L$$
$$0^j1^i \notin L$$

por lo que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(h) $L = \{a^p b^q c^r d^s \ : \ p = r \vee q = s\}$

Solución:

Tomando palabras de la forma $\{a^i b \ : \ i \geq 0\}$, obtenemos una familia infinita donde puede verse que obtenemos palabras del lenguaje L si a cada palabra $a^i b$ de la familia le concatenamos otra de la forma c^i. Teniendo en cuenta que, para cualquier par de palabras distintas $a^i b$ y $a^j b$, se cumple que:

$$a^i bc^i \in L$$
$$a^j bc^i \notin L$$

puede concluirse que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(i) Sea L el lenguaje sobre $\{0, 1\}^*$ que contiene las palabras tales que su segmento más largo de símbolos 0 tiene longitud impar.

Solución:

Sea la familia infinita de palabras $\{0^{2i}1 \ : \ i \geq 0\}$, puede verse que, para que cada palabra de la familia pertenezca a L, necesita un sufijo del tipo 0^{2i+1}.
Teniendo en cuenta que, para todo i, j tales que $i < j$, se cumple que:

$$0^{2i}10^{2i+1} \in L$$
$$0^{2j}10^{2i+1} \notin L$$

puede concluirse que R_L es de índice infinito y L no es regular.

(j) Sea L el lenguaje de aquellas cadenas que cumplen que el número de símbolos 0 en posición par e impar coinciden.

Solución:

Sea la familia de las palabras de la forma $\{(01)^i \ : \ i \geq 0\}$, podemos obtener palabras del lenguaje si tomamos una palabra cualquiera $(01)^i$ y le concatenamos otra de la forma $(10)^i$. Considerando dos indices distintos i, j, podemos ver que:

$$(01)^i(10)^i \in L$$
$$(01)^j(10)^i \notin L$$

con lo que puede concluirse que R_L es de índice infinito y L no es regular.