Lliçó 5: Matrius elementals. Algorisme de Gauss-Jordan

Operacions elementals

Una *operació elemental* (per files) és qualsevol de les transformacions següents:

- Operació elemental del tipus *permutació:* Intercanvi de dues files
- Operació elemental del tipus *escalat:* Multiplicació d'una fila per un nombre distint de zero
- Operació elemental del tipus *reducció (o eliminació):* Suma d'un múltiple d'una fila a una altra fila

Matrius elementals

Una *matriu elemental* és una matriu d'algun dels tipus següents:

Matriu elemental del tipus *permutació:*

$$\mathsf{E}_{i,j} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \text{fila } j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \text{columna } i & & \text{columna } j & & \end{array} & \end{array}$$

Matriu elemental del tipus *escalat:*

$$\mathsf{E}_{i}(\alpha) = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \boldsymbol{\alpha} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \text{columna } i & & & & \end{array} & \end{array}$$

Matriu elemental del tipus *reducció (o eliminació):*

$$\mathsf{E}_{i,j}(\alpha) = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \boldsymbol{\alpha} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & \text{columna } j & & \end{array} & \end{array}$$

Operacions elementals i matrius elementals

Les matrius elementals són petites variacions de la matriu identitat:

- $\mathsf{E}_{i,j}$ s'obté canviant quatre elements de la matriu identitat: $a_{ij} = 1, a_{ji} = 1, a_{ii} = 0, a_{jj} = 0$
- $\mathsf{E}_{i}(\alpha)$ s'obté canviant un element de la matriu identitat: $a_{ii} = \alpha$
- $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ s'obté canviant un element de la matriu identitat: $a_{ij} = \alpha$

Les matrius elementals s'obtenen fent l'operació elemental corresponent sobre la matriu identitat

☞ *Una operació elemental sobre la matriu* A *és equivalent al producte de la matriu elemental corresponent per* A

Algorisme de Gauss

Repetiu els següents passos fins que la matriu S siga esglaonada:

- *Ignoreu les files pivotades i les columnes esglaonades*
- *Elecció del pivot:* En la matriu que queda elegiu una fila el primer element de la qual no siga zero Aquesta és la fila pivot

  ☞ Si la fila pivot no és la primera entre les no pivotades, feu una permutació de files perquè ho siga

- *Esglaonament:* Feu zeros per sota del nou pivot

☞ En qualsevol moment del procés podeu fer una operació elemental d'escalat

Algorisme de Gauss-Jordan

Esglaonament: Apliqueu l'algorisme de Gauss per a transformar la matriu en esglaonada

Reducció: Començant pel darrer pivot, feu zeros per damunt de tots els pivots

Normalització: Dividiu cada fila no nul·la pel seu pivot

El *rang* de la matriu A ($\operatorname{rang}\mathsf{A}$) és el nombre de pivots que té la forma esglaonada reduïda aquesta matriu

- El rang de A és el nombre de pivots que té qualsevol forma esglaonada de A
- O el nombre de files no nul·les que té qualsevol forma esglaonada de A

Teorema de Rouché

Teorema de Rouché
Considerem el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ on A és una matriu $m \times n$.

1. El sistema és compatible si i només si $\operatorname{rang}\mathsf{A} = \operatorname{rang}\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right]$
2. Si és compatible, llavors és determinat si i només si $\operatorname{rang}\mathsf{A} = n$

Discussió i resolució de sistemes lineals

Discussió

1. Apliqueu l'algorisme de Gauss per calcular una forma esglaonada de la matriu ampliada
2. Compareu els rangs de A i $\left[\mathsf{A} \mid \vec{b}\right]$
   - Si no són iguals, *el sistema és incompatible*
   - En cas contrari, *sistema compatible...*
     - *determinat*, si $\operatorname{rang} A = n$
     - *indeterminat*, si $\operatorname{rang} A < n$

Resolució

1. Completeu l'algorisme de Gauss-Jordan
2. Aïlleu les variables principals
3. Canvieu les variables no principals per paràmetres