Práctica 7
Soluciones

Actividad 1. Determina una solución por mínimos cuadrados de $A\vec{x} = \vec{b}$ construyendo las ecuaciones normales, y calcula el error de la aproximación siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones normales es $A^tA\vec{x} = A^t\vec{b}$. Podemos encontrar una solución del sistema utilizando, por ejemplo, el comando \:

```
 -->A=[1 1 0; 1 1 0; 1 0 1; 1 0 1];
-->b=[1; 3; 8; 2];
-->x=(A'*A)\(A'*b)
Advertencia :
la matriz esta cerca de la singularidad o mal escalada. rcond =    0.0000D+00
calculando la solución de mínimos cuadrados.
 x  =
    5.
  - 3.
    0.
```

Ahora calculamos el error de la aproximación:

```
-->norm(A*x-b)
 ans  =
     4.472136
```

Observación: En este caso la solución por mínimos cuadrados no es única porque la matriz A^tA no tiene rango máximo. Por tanto, el sistema de ecuaciones normales tiene infinitas soluciones. Todas estas soluciones son *soluciones de ajuste por mínimos cuadrados*. Comprobémoslo:

```
-->rank(A'*A)
 ans  =
     2.
```

Actividad 2. Calcula la ecuación $y = \beta_0 + \beta_1 x$ de la recta de regresión que se ajusta a los puntos $(2,3)$, $(3,2)$, $(5,1)$ y $(6,0)$, y calcula la norma del vector residual.

Como, en una situación *ideal*, los puntos dados deben *pertenecer* a la recta de regresión, debemos considerar que el sistema de ecuaciones (con incógnitas β_0 y β_1) obtenidas reemplazando, en $y = \beta_0 + \beta_1 x$, la variable x por la coordenada x de cada punto, y la variable y por la coordenada y de cada uno de los puntos:

$$\beta_0 + 2\beta_1 = 3$$

$$\beta_0 + 3\beta_1 = 2$$

$$\beta_0 + 5\beta_1 = 1$$

$$\beta_0 + 6\beta_1 = 0$$

Su matriz de coeficientes y su vector de términos independientes es (utilizando Scilab):

```
-->A=[1 2; 1 3; 1 5; 1 6];

-->b=[3; 2; 1; 0];
```

Ahora *resolvemo*' el sistema A$\vec{x} = \vec{b}$ utilizando el método de mínimos cuadrados (porque es inconsistente). Para hacer esto, resolvemos (como en la actividad anterior) el sistema de ecuaciones normales o podemos aplicar directamente el comando $\backslash$ al sistema A$\vec{x} = \vec{b}$. Usamos este último método ya que es mucho más fácil:

```
-->x=A\b
 x  =
     4.3
   - 0.7
```

Entonces la recta de regresión será la recta de ecuación $y = 4{,}3 - 0{,}7x$. El error es:

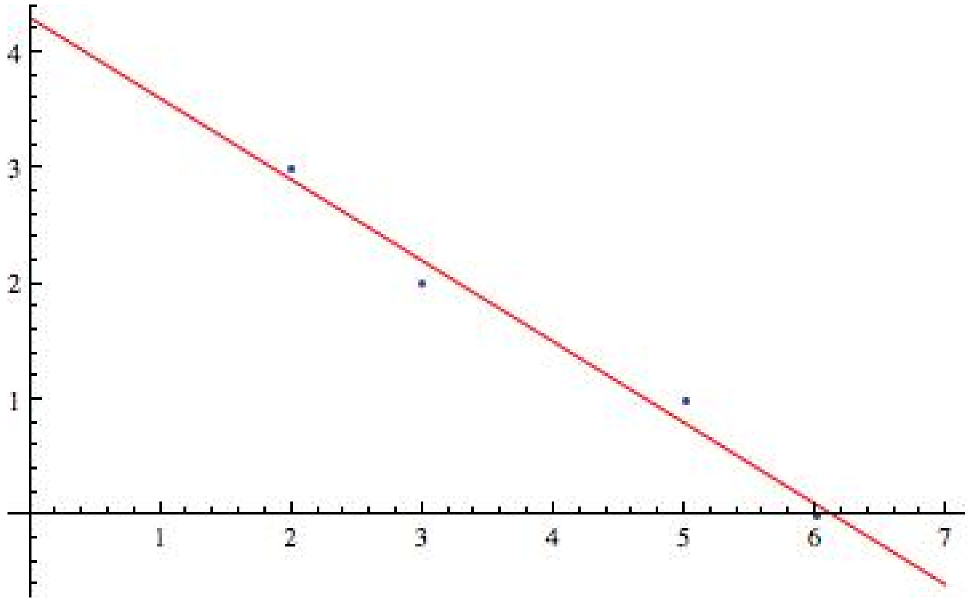
```
-->norm(A*x-b)
 ans  =
     0.3162278
```

Observación 1: Si lo prefieres, en vez de usar el comando $\backslash$ también se puede usar el comando **lsq**.

Observación 2: En este caso, existe una *solución por mínimos cuadrados* que es única porque el sistema de ecuaciones normales A^{t}A$\vec{x} =$ A$^t\vec{b}$ tiene una única solución (la matriz A^{t}A tiene rango máximo):

```
-->A'*A
 ans  =
     4.     16.
    16.    74.

-->rank(ans)
 ans  =
     2.
```

Observad que esto sucede porque las coordenadas x de todos los puntos son diferentes.



Actividad 3. Para medir el rendimiento de un motor de un avión durante el despegue, se midió su posición cada segundo, desde $t = 0$ hasta $t = 12$. Las posiciones obtenidas fueron 0; $8{,}8$; $29{,}9$; $62{,}0$; $104{,}7$; $159{,}1$; $222{,}0$; $294{,}5$; $380{,}4$; $471{,}1$; $571{,}7$; $686{,}8$ y $809{,}2$. Determina la curva cúbica de mínimos cuadrados $y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$ para ajustar estos datos. Utiliza el resultado para estimar la velocidad del avión cuando $t = 4.5$ segundos.

Procedemos como en el ejercicio anterior, pero ahora ajustando a una curva cúbica en vez de a una recta. Esto es, debemos calcular la curva cúbica *más aproximada* $y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$ a los puntos $(0, 0)$, $(1, 8{,}8)$, $(2, 29{,}9)$, $(3, 62)$ y así sucesivamente. De esta manera obtenemos las ecuaciones $0 = \beta_0$, $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 8{,}8$, $\beta_0 + 2\beta_1 + 2^2\beta_2 + 2^3\beta_3 = 29{,}2$, $\beta_0 + 3\beta_1 + 3^2\beta_2 + 3^3\beta_3 = 62$, y así sucesivamente .... Se puede obtener rápidamente la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes utilizando Scilab:

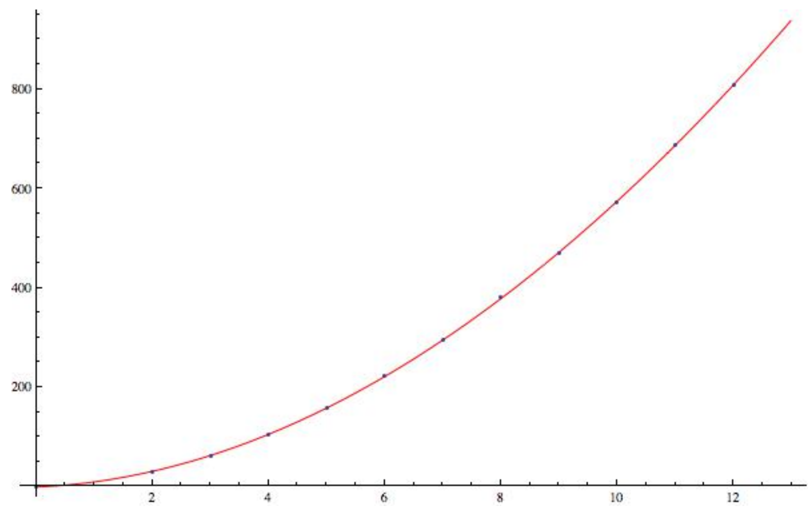
```
-->t=[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12];
```

```
-->A=[ones(13,1) t t^2 t^3]
 A  =
     1.    0.     0.      0.
    1.    1.     1.      1.
    1.    2.     4.      8.
    1.    3.     9.      27.
    1.    4.     16.     64.
    1.    5.     25.     125.
    1.    6.     36.     216.
    1.    7.     49.     343.
    1.    8.     64.     512.
    1.    9.     81.     729.
    1.    10.    100.    1000.
    1.    11.    121.    1331.
    1.    12.    144.    1728.

-->b=[0;8.8;29.9;62;104.7;159.1;222;294.5;380.4;471.1;571.7;686.8;809.2];
```

Ahora tenemos que *resolver* por ajuste de mínimos cuadrados el sistema A$\vec{x} = \vec{b}$:

```
-->x=A\b
 x  =
   - 0.8557692
    4.702485
    5.5553696
  - 0.0273601
```

Entonces, la curva cúbica que se ajusta es $y = -0{,}8557692 + 4{,}702485t + 5{,}5553696t^2 + -0{,}0273601t^3$.



Dado que la velocidad es la derivada del espacio con respecto al tiempo, podemos estimar la velocidad cuando $t = 4{,}5$ calculando la derivada de la función y con respecto al tiempo y evaluando en $t = 4{,}5$. Su derivada es la función

$$y' = 4{,}702485 + 2 \cdot 5{,}5553696t - 3 \cdot 0{,}0273601t^2.$$

Por tanto $y'(4{,}5) = 53{,}0386 \ \ m/s$

Actividad 4. Cuando las ventas mensuales de un cierto producto están sujetas a fluctuaciones a lo largo de la temporada, una curva que aproxima los datos de ventas podría tener la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \sin(\pi x/6)$, donde x es el tiempo (en meses). Determina la curva de mínimos cuadrados a lo largo de 6 meses, sabiendo que las fluctuaciones respectivas son: 0.80; 0.66; 0.64; 0.73; 0.78 y 0.67. Calcula la norma del vector residual.

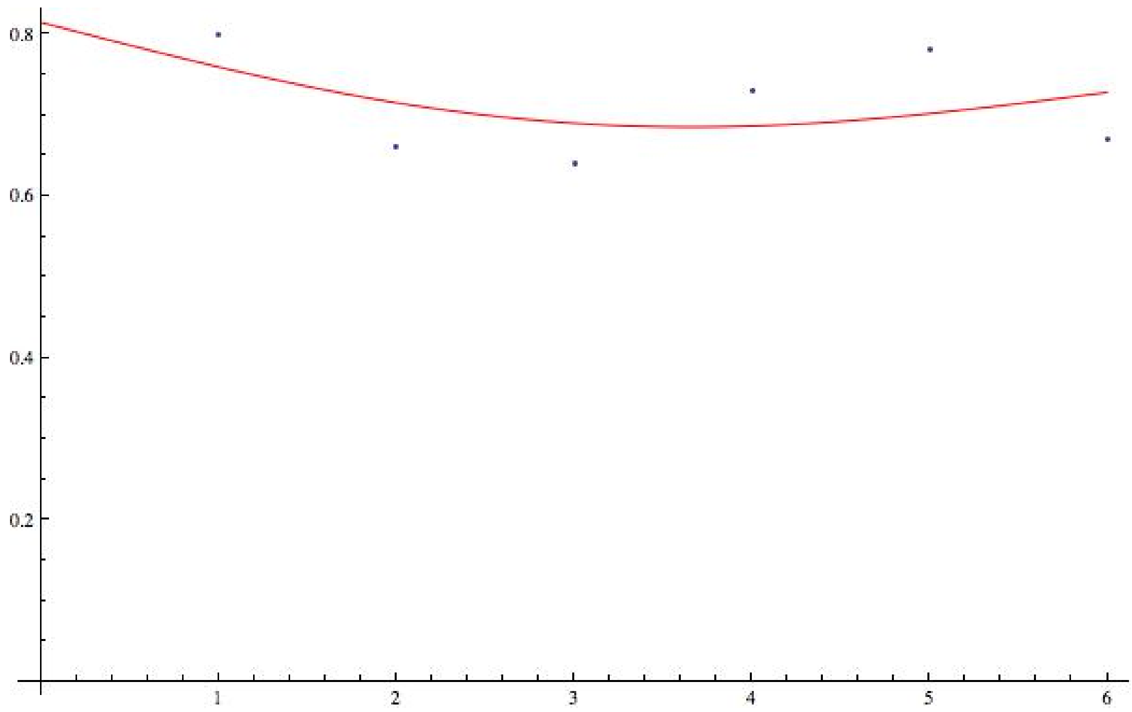
La resolución de esta actividad es similar a las anteriores por lo que no entraremos en muchos detalles.

```
-->t=[1; 2; 3; 4; 5; 6];
 -->A=[ones(6,1) t sin(%pi*t/6)]
 A  =
     1.    1.    0.5
    1.    2.    0.8660254
    1.    3.    1.
    1.    4.    0.8660254
    1.    5.    0.5
    1.    6.    1.225D-16

-->b=[0.8; 0.66; 0.64; 0.73; 0.78; 0.67];

-->x=A\b
 x  =
     0.8144262
   - 0.0144028
   - 0.0814828
```

Por tanto, la curva buscada es $y = 0{,}8144262 - 0{,}0144028x - 0{,}0814828\ \sin(\pi x/6)$.

Finalmente, calculamos el error residual

```
-->norm(A*x-b)
ans  =
    0.1362983
```


0.8
0.6
0.4
0.2
1
2
3
4
5
6