LLIÇÓ 11: ELS ESPAIS $\mathbb{R}^n$

Embolcalls lineals i bases

- L'*embolcall lineal* del conjunt S és el conjunt $\langle S\rangle$ de totes les combinacions lineals d'elements de S.
- Un conjunt S *genera* $\mathbb{R}^n$ si $\langle S\rangle = \mathbb{R}^n$.
- Un conjunt B és *base* de $\mathbb{R}^n$ si és linealment independent i genera $\mathbb{R}^n$.

La matriu associada a un conjunt de vectors

Si $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ considerem la matriu M_S que té aquests vectors per columnes,

$$\mathsf{M}_S = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_p \end{bmatrix}$$

- S és linealment independent si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = p$.
- S genera $\mathbb{R}^n$ si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = n$.
- S és base de $\mathbb{R}^n$ si i només si $\operatorname{rang} \mathsf{M}_S = p = n$ (és a dir, si M_S és invertible).

Cardinals dels conjunts linealment independents, generadors i bases

- Si S és linealment independent llavors, $\operatorname{card} S \le n$.
- Si S és generador llavors, $\operatorname{card} S \ge n$.
- Si S és base de $\mathbb{R}^n$ llavors, $\operatorname{card} S = n$.

Coordenades respecte a una base

- Si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$ i $\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n$ llavors el *vector de coordenades* de $\vec{u}$ respecte a B és $\vec{u}_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

☞ $\vec{u} = \mathsf{M}_B \vec{u}_B$

- Si $B = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$ és una base ortonormal llavors, les coordenades d'un vector $\vec{u}$ respecte a B són
$$(\vec{u}\cdot\vec{q}_1, \vec{u}\cdot\vec{q}_2, \dots, \vec{u}\cdot\vec{q}_n).$$

Canvi de base

Siguen B_1 i B_2 dues bases de $\mathbb{R}^n$.

- La *matriu de canvi de base de* B_1 *a* B_2 és la matriu $\mathsf{M}_{B_1B_2} = \left(\mathsf{M}_{B_2}\right)^{-1}\mathsf{M}_{B_1}$
- Canvi de coordenades: $\vec{u}_{B_2} = \mathsf{M}_{B_1B_2}\vec{u}_{B_1}$

☞ Estratègia de càlcul:

$$\left[\mathsf{M}_{B_2} \mid \mathsf{M}_{B_1}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\mathrm{I} \mid \mathsf{M}_{B_1B_2}\right]$$