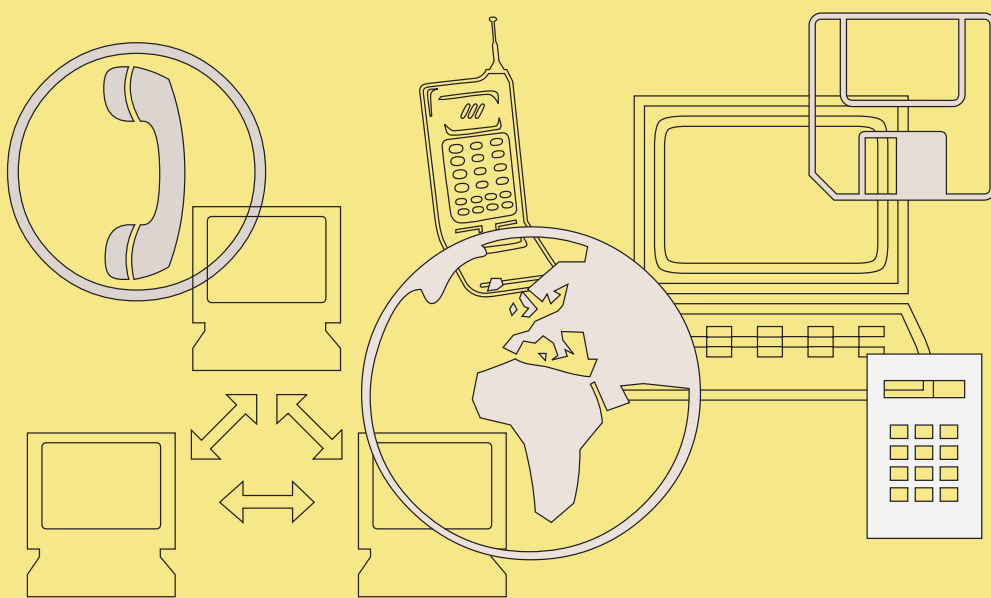


Apuntes de apoyo a la asignatura

# **FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INFORMÁTICA**

E.T.S. de Ingeniería Informática

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



Francisco L. Mesa Ledesma



# Prefacio

---

La presente colección de notas sobre Electromagnetismo, Circuitos y Ondas pretende ser una ayuda al estudiante en la asignatura cuatrimestral *Fundamentos Físicos de la Informática* de la E.T.S. de Ingeniería Informática de la Universidad de Sevilla. Aunque estas notas han sido inspiradas por diversas fuentes (permítaseme destacar y agradecer la importante contribución de los profesores de la ETS de Ingeniería Informática del Departamento de Física Aplicada 1 de la Universidad de Sevilla), cualquier defecto o error sólo es atribuible al autor de estos apuntes. Es importante resaltar que estas notas no pueden ni deben sustituir a otros textos más elaborados sobre la materia.

El propósito principal de la materia aquí presentada es dotar al alumno de algunos de los fundamentos físicos elementales en los que se basa el funcionamiento de los dispositivos y sistemas usados en Informática. Gran parte de la tecnología actual de los computadores se basa en la Electrónica y puesto que la Electrónica consiste básicamente en el control del flujo de los electrones en materiales conductores y semiconductores, es evidente la necesidad de estudiar en primer lugar el comportamiento general de las cargas y corrientes eléctricas. Este estudio se llevará a cabo mediante una serie de temas dedicados al Electromagnetismo básico y a la Teoría de Circuitos de corriente continua y alterna. Por otra parte, dada la relevancia de las ondas electromagnéticas en las comunicaciones actuales, y en particular la transmisión de datos en las redes de ordenadores, la última parte de la asignatura se dedicará a un estudio general de las ondas para acabar con una descripción y análisis elemental de las ondas electromagnéticas.

Francisco L. Mesa Ledesma  
Sevilla, diciembre de 2007



# Índice general

<b>1. Electrostática</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Ley de Coulomb . . . . .	2
1.3. Campo eléctrico de cargas puntuales . . . . .	3
1.4. Principio de superposición . . . . .	4
1.5. Campo eléctrico de una distribución de carga . . . . .	4
1.5.1. Campo eléctrico de una distribución discreta de carga	4
1.5.2. Campo eléctrico de una distribución continua de carga	5
1.6. Flujo. Ley de Gauss . . . . .	7
1.7. Trabajo, energía y potencial electrostático . . . . .	11
1.7.1. Potencial eléctrico . . . . .	11
1.8. Conductores en equilibrio en el campo electrostático . . . .	15
1.8.1. Campo de un conductor cargado en equilibrio electros- tático . . . . .	15
1.8.2. Conductor neutro en un campo eléctrico externo . . .	17
1.9. Condensadores . . . . .	17
1.9.1. Capacidad de un conductor . . . . .	17
1.9.2. Influencia entre conductores . . . . .	19
1.10 Campo eléctrico en la materia . . . . .	20
1.11 Energía Electrostática . . . . .	23
1.11.1 Trabajo para trasladar una carga puntual . . . . .	23
1.11.2 Energía almacenada en un condensador de placas pa- rales . . . . .	24
1.12 Problemas propuestos . . . . .	26
<b>2. Circuitos de Corriente Continua</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción . . . . .	29
2.2. Intensidad y densidad de corriente (vector $\vec{J}$ ) . . . . .	30
2.3. Conductividad, Ley de Ohm . . . . .	33

2.3.1. Conductividad eléctrica . . . . .	33
2.3.2. Ley de Ohm circuital . . . . .	34
2.4. Efecto Joule . . . . .	35
2.5. Fuerza electromotriz . . . . .	36
2.6. Reglas de Kirchhoff . . . . .	39
2.6.1. Regla de Kirchhoff de las tensiones . . . . .	39
2.6.2. Regla de Kirchhoff de las intensidades . . . . .	40
2.7. Aplicación a circuitos de CC . . . . .	41
2.7.1. Teorema de superposición . . . . .	43
2.7.2. Teorema de Thevenin . . . . .	44
2.7.3. Teorema de Norton . . . . .	45
2.7.4. Balance de potencia . . . . .	46
2.8. Circuito RC. Carga y descarga de un condensador . . . . .	47
2.9. Problemas propuestos . . . . .	49
<b>3. Magnetostática</b>	<b>53</b>
3.1. Introducción . . . . .	53
3.2. Fuerza de Lorentz . . . . .	53
3.2.1. Movimiento de una carga puntual en presencia de un campo magnético . . . . .	54
3.2.2. Efecto Hall . . . . .	57
3.3. Fuerzas magnéticas sobre conductores . . . . .	59
3.3.1. Fuerza magnética sobre un hilo . . . . .	59
3.3.2. Par de fuerzas sobre una espira de corriente . . . . .	59
3.4. Ley de Biot-Savart . . . . .	61
3.5. Ley de Gauss para el campo magnético . . . . .	63
3.6. Ley de Ampère . . . . .	64
3.6.1. Campo magnético producido por un hilo infinito y rec- tilíneo de radio $R$ recorrido por una intensidad $I$ . . . . .	65
3.6.2. Campo magnético en un solenoide . . . . .	66
3.7. Problemas propuestos . . . . .	67
<b>4. Inducción electromagnética</b>	<b>71</b>
4.1. Introducción . . . . .	71
4.2. Ley de Faraday . . . . .	72
4.2.1. Fuerza electromotriz de movimiento . . . . .	72
4.2.2. Fuerza electromotriz inducida . . . . .	74
4.3. Inductancia . . . . .	78

4.3.1. Inductancia mutua . . . . .	78
4.3.2. Autoinducción . . . . .	79
4.3.3. Transitorios en circuitos $RL$ . . . . .	81
4.4. Energía magnética . . . . .	83
4.5. Problemas propuestos . . . . .	85
<b>5. Ecuaciones de Maxwell</b>	<b>89</b>
5.1. Introducción . . . . .	89
5.2. Antecedentes . . . . .	90
5.3. Aportaciones de Maxwell . . . . .	91
5.3.1. Ley de Gauss para el campo eléctrico . . . . .	91
5.3.2. Ley de Gauss para el campo magnético . . . . .	91
5.3.3. Ley de Faraday-Maxwell . . . . .	91
5.3.4. Ley de Ampère-Maxwell . . . . .	93
<b>6. Circuitos de Corriente Alterna</b>	<b>97</b>
6.1. Introducción . . . . .	97
6.2. Relación $I \leftrightarrow V$ para Resistencia, Condensador y Bobina . .	98
6.3. Generador de fem alterna . . . . .	99
6.4. Valores eficaces . . . . .	100
6.5. Análisis fasorial de circuitos de CA . . . . .	101
6.5.1. Expresiones fasoriales para resistencia, condensador y bobina . . . . .	101
6.5.2. Reglas de Kirchhoff . . . . .	102
6.5.3. Circuito RLC serie . . . . .	104
6.5.4. Análisis de mallas . . . . .	105
6.6. Balance de potencia . . . . .	108
6.6.1. Potencia media . . . . .	108
6.6.2. Factor de potencia . . . . .	109
6.6.3. Consumo de potencia . . . . .	110
6.7. Problemas propuestos . . . . .	113
<b>7. Nociones generales de Ondas</b>	<b>115</b>
7.1. Nociones generales de ondas . . . . .	115
7.2. Ecuación de ondas . . . . .	116
7.3. Ondas armónicas . . . . .	118
7.4. Energía e Intensidad de la onda . . . . .	120
7.5. Interferencia de Ondas . . . . .	122

7.5.1. Superposición de dos ondas armónicas . . . . .	122
7.5.2. Focos incoherentes . . . . .	123
7.5.3. Focos coherentes . . . . .	124
7.6. Ondas estacionarias . . . . .	127
7.7. Difracción . . . . .	130
7.8. Grupo de Ondas . . . . .	134
7.9. Problemas propuestos . . . . .	139
<b>8. Ondas Electromagnéticas</b>	<b>143</b>
8.1. Introducción . . . . .	143
8.2. Ecuación de Ondas . . . . .	144
8.3. Ondas planas armónicas . . . . .	147
8.4. Intensidad de la onda electromagnética . . . . .	149
8.5. Espectro electromagnético . . . . .	151
8.6. Fuentes de las Ondas Electromagnéticas . . . . .	153
8.7. Problemas propuestos . . . . .	154
<b>A. Análisis vectorial</b>	<b>1</b>
A.1. Vectores . . . . .	1
A.1.1. Notación vectorial . . . . .	1
A.1.2. Suma de vectores . . . . .	2
A.1.3. Producto escalar . . . . .	2
A.1.4. Producto vectorial . . . . .	3
A.1.5. Productos triples . . . . .	4
A.1.6. Diferencial y derivada de funciones de una sola variable	5
A.1.7. Teorema fundamental del cálculo . . . . .	5
A.1.8. Diferencial y derivada parcial de funciones de varias variables . . . . .	5
A.1.9. Operador gradiente . . . . .	6
A.1.10Integral de camino . . . . .	7
A.1.11.Teorema fundamental del gradiente . . . . .	7
A.2. Integral de flujo . . . . .	8
A.3. Problemas propuestos . . . . .	8
<b>B. Funciones armónicas y Análisis fasorial</b>	<b>11</b>
B.1. Funciones Armónicas . . . . .	11
B.2. Análisis fasorial . . . . .	11



# Tema 1

## Electrostática

---

### 1.1. Introducción

Dado que el objetivo de esta asignatura será el estudio básico de los principales fenómenos electromagnéticos y buena parte de estos fenómenos están relacionados con la interacción de cargas eléctricas, empezaremos este tema con el estudio de las interacciones de **cargas eléctricas en reposo**. La parte del Electromagnetismo que aborda esta materia se denomina *Electrostática*.

La carga eléctrica es una propiedad fundamental e intrínseca de la materia (al igual que la masa) que tiene las siguientes propiedades:

- Presenta **dos polaridades**: positiva y negativa. Cantidades iguales de ambas polaridades se anulan entre sí.
- La carga total del universo (suma algebraica de todas las cargas existentes) **se conserva**, esto es, la carga no se puede crear ni destruir. No obstante, debe notarse que esto no imposibilita que cargas positivas y negativas se anulen entre sí.  
Además de esta propiedad de conservación global, la carga también se conserva localmente. Esto quiere decir que si cierta carga desaparece en un sitio y aparece en otro, esto es porque ha “viajado” de un punto a otro.
- La carga esta **cuantizada**: cualquier carga que existe en la naturaleza es un múltiplo entero de una carga elemental  $q_e$ . Esta carga elemental corresponde a la carga del protón.

La unidad de carga en el Sistema Internacional es el **culombio** (C) y equivale a la carga de  $6,2414959 \times 10^{18}$  protones, o lo que es lo mismo, la carga del protón es  $q_e = 1,60218 \times 10^{-19}$  C.

Unidad de carga eléctrica  
1 culombio (C)

Es interesante hacer notar que de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza: nuclear fuerte, electromagnética, nuclear débil y gravitatoria, la interacción electromagnética (o electrostática cuando es entre cargas en reposo) es la segunda más fuerte. De hecho la interacción eléctrica entre dos electrones (de carga  $e$  igual a  $-q_e$ ) es aproximadamente  $10^{42}$  veces más fuerte que su correspondiente interacción gravitatoria.

Esto da una idea de la magnitud tan importante de las fuerzas eléctricas. No obstante, en la naturaleza hay muchas situaciones en las que la interacción eléctrica no se manifiesta debido a la *compensación* tan precisa que ocurre en la materia entre cargas positivas y negativas. De hecho los agregados de materia se presentan generalmente en forma *neutra* y por ello las interacciones entre grandes cantidades de materia (planetas, estrellas, etc) es fundamentalmente de carácter gravitatorio. No obstante, esto no implica que la interacción entre cargas eléctricas sea irrelevante sino que por el contrario, estas interacciones están en la base de multitud de fenómenos fundamentales, por ejemplo: la formación y estabilidad de los átomos, las fuerzas moleculares, las fuerzas de rozamiento, las tensiones mecánicas, las fuerzas de contacto, etc.

## 1.2. Ley de Coulomb

El estudio de la Electrostática se iniciará mediante la ley de Coulomb, ley *experimental* que describe la interacción entre dos **cargas puntuales** en reposo en el *vacío* (esto es, no existe ningún medio material entre ellas). El concepto de carga puntual es una idealización por la que se considerará que cierta carga está localizada estrictamente en un punto. Aunque en principio, esta idealización pudiera parecer poco realista, la experiencia demuestra que es una aproximación muy precisa en múltiples situaciones. De hecho, la carga uniformemente distribuida de cuerpos esféricos o incluso cuerpos cargados considerados a distancias lejanas se comportan muy aproximadamente como cargas puntuales.

La ley de Coulomb ( $\sim 1785$ ) establece que la fuerza,  $\vec{F}$ , que ejerce una carga *fuente*  $q$  sobre una carga *prueba*  $Q$ , viene dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \vec{r}, \quad (1.1)$$

donde  $\epsilon_0$  es una constante llamada **permitividad del vacío** cuyo valor en el S.I. es

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right]. \quad (1.2)$$

y

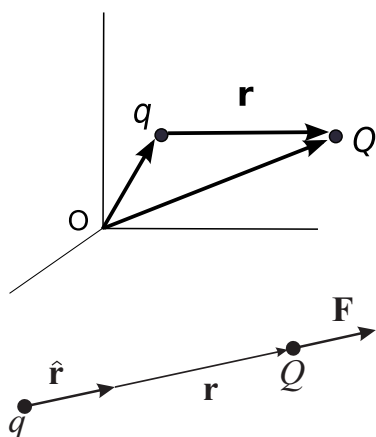
$$\vec{r} = r\hat{r}$$

es el vector que va desde la carga fuente hasta la carga prueba siendo  $r = |\vec{r}|$  su módulo y  $\hat{r} = \vec{r}/r$  su vector unitario asociado.

Vea el Apéndice A para un breve repaso de vectores y tenga en cuenta que en las figuras del presente texto usaremos tipo de letra **negrita** para denotar a los vectores, de modo que  $\vec{u} \equiv \mathbf{u}$ . Además los **vectores unitarios** se denotarán en letra **negrita** con el signo  $\hat{\phantom{u}}$  encima, de modo que  $\hat{u}$  debe leerse como “vector unitario en la dirección y sentido de  $\vec{u}$ ”. Asimismo el **módulo** del vector  $\vec{u}$  se denotará indistintamente como  $|\vec{u}|$  o bien simplemente como  $u$ .

Algunas propiedades destacables de la ley de Coulomb, expresión (1.1), son:

- La fuerza va dirigida según la línea que une las dos cargas (fuerza central), estando su sentido determinado por el signo del producto



$qQ$ . Por tanto, la fuerza entre dos cargas será atractiva para cargas de signo opuesto o bien repulsiva para cargas del mismo signo.

- La fuerza decrece con el cuadrado de la distancia. No obstante, a distancias cortas esta interacción crece extraordinariamente.
- La fuerza que ejercería la carga prueba sobre la carga fuente sería  $-\vec{F}$  (principio de acción y reacción).

### 1.3. Campo eléctrico de cargas puntuales

La expresión de la fuerza ejercida por la carga  $q$  sobre la carga  $Q$  (dada por (1.1)) puede reescribirse como

$$\vec{F}(P) = Q\vec{E}(P), \quad (1.3)$$

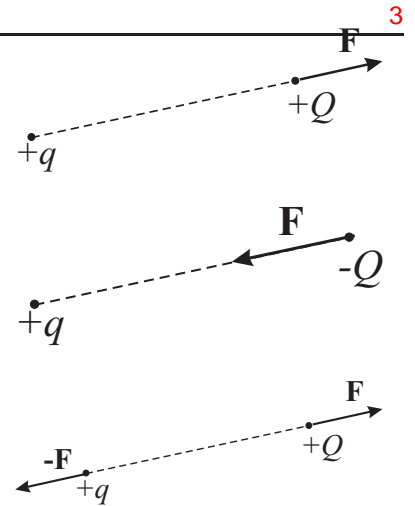
donde el vector  $\vec{E}(P)$  se denomina **campo eléctrico** producido por las carga fuente  $q$  en el punto  $P$ , viniendo éste dado por

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (1.4)$$

La introducción de este vector  $\vec{E}$  permite definir una magnitud vectorial que varía punto a punto y que sólo depende de las cargas fuentes. De este modo se consigue dotar a cada punto del espacio de una propiedad vectorial tal que el producto del valor de una carga prueba situada en ese punto por el valor de dicho vector en ese punto proporciona la fuerza que ejercerá la configuración de cargas fuentes sobre dicha carga prueba. En este sentido, el campo eléctrico,  $\vec{E}$ , puede, por tanto, definirse como la fuerza por unidad de carga y sus unidades son consecuentemente N/C. Es interesante observar que el campo eléctrico “recoge” de alguna manera la información sobre las cargas fuentes, “escondiendo” la disposición particular de esta configuración y mostrando únicamente su efecto global.

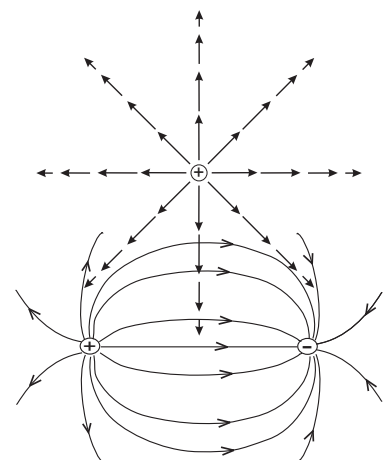
Tal y como se ha introducido el campo eléctrico podría pensarse que este campo es únicamente un ente matemático útil para calcular la fuerza pero sin significado físico concreto. No obstante, tal y como se verá en temas posteriores,  $\vec{E}$  posee por sí mismo una realidad física clara y por tanto desde este momento es conveniente considerar al campo eléctrico como un ente real (con el mismo grado de realidad física que la fuerza o el momento lineal) independiente de la presencia o no de carga prueba.

Una forma gráfica de visualizar el campo eléctrico es dibujando el vector  $\vec{E}$  en ciertos puntos del espacio. No obstante, es más conveniente describir el campo mediante las **líneas de campo**, que son aquellas líneas tangentes en cada uno de sus puntos al vector campo. Para un sistema de dos cargas idénticas en magnitud, una positiva y otra negativa, las líneas de campo salen de la carga positiva y acaban en la carga negativa según el patrón que se muestra en la figura. Este hecho particular es una propiedad del campo electrostático, esto es, las líneas de campo *salen* de las cargas positivas y *acaban* en las negativas o van al infinito. Dado que las cargas eléctricas son las únicas *fuentes* del campo electrostático, siempre que existan cargas eléctricas descompensadas espacialmente (cuando no se anulen unas a otras en cada punto), existirá campo electrostático.

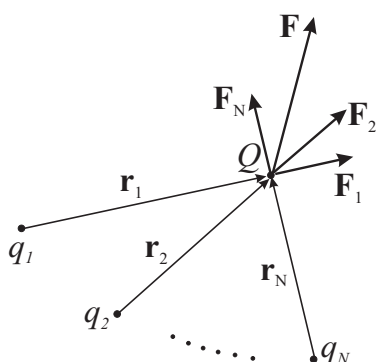


Campo eléctrico de una carga puntual

Unidad de campo eléctrico:  
1 N/C



## 1.4. Principio de superposición



La ley de Coulomb describe el efecto de una única carga puntual fuente,  $q$ , sobre la carga prueba,  $Q$ . El efecto de un conjunto de cargas sobre cierta carga prueba viene determinado por el principio de superposición. Este principio de superposición establece que

*La interacción entre dos cargas es completamente independiente de la presencia de otras cargas.*

Esto significa que para calcular el efecto de un conjunto de cargas fuente sobre cierta carga prueba, se puede proceder calculando el efecto de cada una de las cargas fuentes sobre la carga prueba para obtener el efecto total como la suma de los efectos parciales (esto es,  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$ ).

De este modo, la fuerza que produce el conjunto de cargas fuentes,  $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ , sobre la carga prueba  $Q$  situada en el punto  $P$  puede calcularse como

$$\vec{F}(P) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i Q}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (1.5)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (1.6)$$

## 1.5. Campo eléctrico de una distribución de carga

### 1.5.1. Campo eléctrico de una distribución discreta de carga

A la vista de la expresión (1.6) podemos concluir que el principio de superposición puede aplicarse igualmente al campo eléctrico, de modo que el campo eléctrico de una distribución discreta de cargas ( $q_1, q_2, \dots, q_N$ ) en el punto  $P$  viene dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(P) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (1.7)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (1.8)$$

Nótese de nuevo que el campo eléctrico en el punto  $P$  no depende del valor de la carga prueba que se ponga en el punto  $P$ . Dicho campo refleja el efecto del conjunto de cargas pruebas en cada punto del espacio.

Ejemplo 1.1 Calcular el campo en el punto  $P$  debido al efecto de las tres cargas señaladas en el dibujo.

Para calcular el campo eléctrico en el punto  $P$  aplicaremos el principio de superposición, por lo que primero debemos obtener el campo producido por cada una de las cargas. Antes de calcular este campo, debemos identificar el vector que va desde cada una de las cargas hasta el punto de observación  $P$ . Según el dibujo adjunto tendremos que

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}, \quad \vec{r}_3 = -\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y},$$

siendo el módulo de los tres anteriores vectores idéntico y de valor

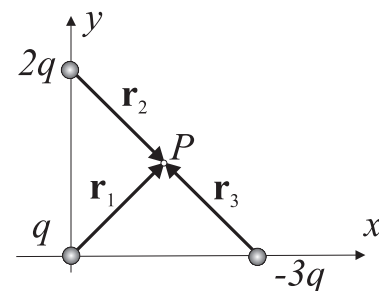
$$r_i \equiv D = \sqrt{1/2}.$$

El campo en  $P$  viene dado por

$$\vec{E}(P) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i,$$

por lo que tras sustituir el valor de  $\vec{r}_i$  obtenido anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{D^3} \left[ \left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{D^3} (3\hat{x} - 2\hat{y}) = \frac{2\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0} (3\hat{x} - 2\hat{y}). \end{aligned}$$

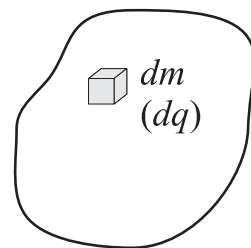


### 1.5.2. Campo eléctrico de una distribución continua de carga

Aunque el carácter discreto de la materia (naturaleza atómica) es bien conocido, en multitud de situaciones prácticas, este carácter discreto puede “obviarse” y considerar que la materia puede describirse como un *continuo*. Desde un punto de vista matemático, esto implica que la materia se describirá como una *superposición de elementos diferenciales infinitesimales*, por ejemplo para calcular su masa:  $m = \int dm$  (en vez de describir la materia como un agregado de partículas individuales, donde:  $m = \sum_i^N m_i$ ). Esta consideración del continuo para la masa de la materia también es extensible a su carga, de modo que en múltiples situaciones la carga se considerará como una **distribución continua**. En este caso, la carga total  $q$  de una distribución de carga se obtendrá como

$$q = \int dq. \quad (1.9)$$

Para obtener el campo eléctrico producido por la anterior distribución de carga en un punto  $P$ , se considerará que la contribución de cada elemento diferencial de carga,  $dq$ , al campo eléctrico en  $P$ ,  $d\vec{E}(P)$ , puede



asimilarse al campo eléctrico producido por una carga puntual de valor  $dq$ , cuya expresión vendrá dada por

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.10)$$

donde el vector  $\vec{r}$  va desde la posición de  $dq$  hasta el punto  $P$ .

El campo total producido por toda la distribución de carga se obtendrá usando el principio de superposición, tal y como se hizo para cargas discretas en (1.4), al sumar las distintas contribuciones infinitesimales:

$$\vec{E}(P) = \int d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r}. \quad (1.11)$$

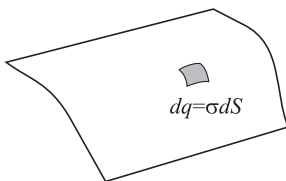
En la práctica, para calcular el campo producido por las distribuciones de carga se introduce el concepto de **densidad de carga**, que relaciona la cantidad de carga existente en cada elemento diferencial con el volumen, superficie o longitud de dicho elemento. En función del carácter geométrico del elemento diferencial de carga pueden distinguirse tres tipos distintos de distribuciones de carga y expresar el campo en cada uno de los casos según:



■ **Distribución lineal de carga**  $\lambda$ :  $dq = \lambda dl$

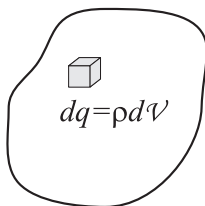
$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{línea}} \lambda \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl. \quad (1.12)$$

■ **Distribución superficial de carga**  $\sigma$ :  $dq = \sigma dS$



$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{superficie}} \sigma \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dS. \quad (1.13)$$

■ **Distribución volumétrica de carga**  $\rho$ :  $dq = \rho dV$



$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volumen}} \rho \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV. \quad (1.14)$$

Debe notarse que en las integrales anteriores, la región de integración está extendida únicamente a la región donde existen cargas.

## Ejemplo 1.2 Campo de un anillo de carga en los puntos del eje

Con referencia en la figura adjunta, el diferencial de campo en el punto  $P$  viene dado por

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dL}{r^2} \hat{r}, \quad (1.15)$$

donde hemos hechos uso del hecho de que  $dq = \lambda dL$ .

Ahora debemos considerar que, al integrar en el anillo de cargas, cualquier componente de campo excepto aquellas que van dirigidas respecto al eje  $x$  se anularán por simetría. Por consiguiente solo operaremos con la componente  $x$ , que podrá escribirse como

$$dE_x(P) = dE(P) \cos(\theta), \quad (1.16)$$

y teniendo en cuenta que  $\cos(\theta) = x/r$  podemos escribir que

$$dE_x(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\lambda dL}{r^3}. \quad (1.17)$$

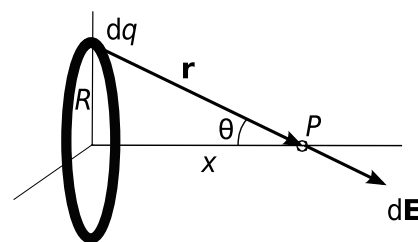
Al integrar la expresión anterior en el anillo notamos que ni  $x$  ni  $r$  variarán, por lo que

$$\begin{aligned} E_x(P) &= \int_{\text{anillo}} dE_x(P) = \int_{\text{anillo}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\lambda dL}{r^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\lambda}{r^3} \int_{\text{anillo}} dL = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\lambda L}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xQ}{r^3}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde  $Q = \lambda L$  es la carga total del anillo.

La expresión final para el campo eléctrico en el punto  $x$  del anillo de radio  $R$  vendrá dada por

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}. \quad (1.19)$$



## 1.6. Flujo. Ley de Gauss

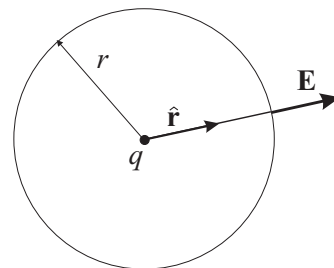
La ley de Gauss ( $\sim 1867$ ) dice que el flujo del campo eléctrico debido a una distribución de carga a través una superficie  $S$  es igual a  $1/\epsilon_0$  veces la carga total,  $Q_{\text{int}}$ , encerrada en el interior de la superficie  $S$ , esto es,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1.20)$$

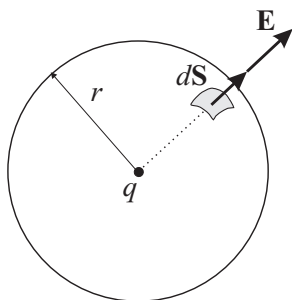
Ley de Gauss

Aunque las expresiones (1.12)-(1.14) son suficientes para calcular el campo en cualquier punto supuestas conocidas las distribuciones de carga, este procedimiento de cálculo no es trivial incluso para los casos más simples. Afortunadamente la ley de Gauss nos permitirá obtener fácilmente el campo eléctrico en una serie de situaciones con alta simetría.

A continuación se presentará una *justificación cualitativa* de la ley de Gauss (nótese que NO es una demostración), que además nos permitirá profundizar un poco sobre el contenido de la misma. Para ello considérese el campo producido por una carga puntual:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$



Es interesante notar que la expresión (1.4) dice que el campo en una superficie esférica de radio  $r$  centrada en la posición de la carga  $q$  puede expresarse como

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}, \quad (1.21)$$

esto es, el módulo del campo sólo depende del radio de dicha esfera y va siempre dirigido según la normal exterior a dicha esfera en cada punto (este campo presenta, por tanto, simetría esférica).

Si se realiza la siguiente integral (ver sección A.2):

$$\oint_{\text{superf.}} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (1.22)$$

que se conoce con el nombre de **flujo del campo eléctrico**,  $\Phi$ , para el campo producido por la carga puntual en una superficie esférica de radio  $r$  centrada en la carga  $q$  se tiene que

$$\Phi = \oint_{\text{superf.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \oint_{\text{superf.}} \hat{r} \cdot d\vec{S}, \quad (1.23)$$

dado que  $E(r)$  permanece *constante* al integrar sobre la superficie esférica. Teniendo ahora en cuenta que

$$\hat{r} \cdot d\vec{S} = dS \quad (\hat{r} \parallel d\vec{S}),$$

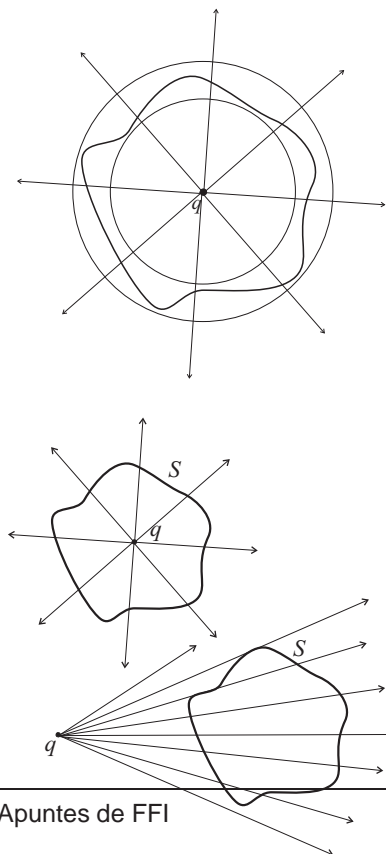
la integral (1.22) puede escribirse para el presente caso como

$$\begin{aligned} \Phi &= E(r) \oint_{\text{superf.}} dS = E(r) \times (\text{Area esfera}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Es interesante notar que el flujo  $\Phi$  *no depende* del radio de la esfera y es igual al valor de la carga encerrada en la esfera dividido por  $\epsilon_0$ . Si se considera, por tanto, una esfera centrada en el mismo punto y de distinto radio, se obtendrá que el flujo seguirá siendo el mismo. Parece entonces razonable suponer que el flujo a través de cualquier superficie cerrada que incluya a la carga y comprendida entre ambas esferas concéntricas venga también dado por  $q/\epsilon_0$ .

Dado que el número de líneas de campo que atraviesa cualquiera de las anteriores superficies es el mismo, el flujo del campo eléctrico a través de estas superficies podría interpretarse como una “medida” del número de líneas de campo que las atraviesa. En este sentido, si el número de líneas de campo que atraviesa una superficie cerrada es cero (esto es, entran tantas líneas como salen), parece razonable suponer que el flujo del campo eléctrico a través de dicha superficie sea igualmente nulo. Podría por tanto escribirse para una superficie cerrada arbitraria,  $S$ , que el flujo de una carga puntual a través de dicha superficie es

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \subset S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.25)$$





En el caso de que se tenga una distribución de cargas puntuales, por el principio de superposición, se obtiene que

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_i, \quad (1.26)$$

esto es, el flujo de la distribución a través de la superficie  $S$  es igual a la suma del flujo asociado a cada una de las cargas individualmente. Dado que el flujo asociado a una sola carga ya fue obtenido en (1.25) se puede concluir que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$

donde  $Q_{\text{int}}$  representa la carga total encerrada en el interior de la superficie  $S$ . La expresión anterior también se aplica en el caso de una distribución continua de carga.

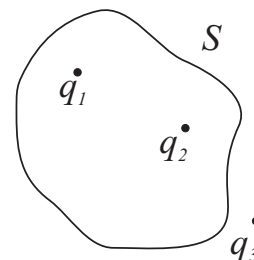
Ejemplo 1.3 Calcule el flujo del campo que atraviesa la superficie  $S$  de la figura adjunta.

En la situación mostrada en la figura, la carga en el interior de la superficie  $S$  es justamente

$$Q_{\text{int}} = q_1 + q_2,$$

por lo que el flujo a través de dicha superficie, según (1.20), será

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$



Aunque la ley de Gauss (1.20) es **válida** para cualquier tipo de distribución de carga y superficie, ésta sólo es **útil** para obtener el campo en *situaciones de alta simetría*. Estas situaciones se dan cuando exista una superficie de Gauss,  $S_G$ , tal que, en aquellas partes donde el flujo sea distinto de cero (superficie que se denominará  $S'_G$ ), la integral del flujo se pueda realizar de modo que el módulo del campo sea *constante* sobre dicha superficie, esto es, cuando se pueda proceder de la siguiente manera:

$$\Phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_{S'_G} dS. \quad (1.27)$$

Ley de Gauss útil en situaciones de alta simetría

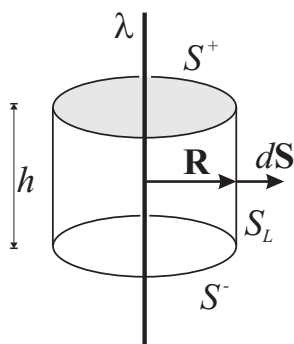
### Aplicaciones de la ley de Gauss

Algunas de las situaciones donde es útil aplicar la ley de Gauss se detallan a continuación:

#### ■ Campo de un hilo recto infinito cargado.

Para obtener dicho campo debe notarse que debido a la simetría cilíndrica del problema puede deducirse que

$$\vec{E} = E(R)\hat{\mathbf{R}}.$$



Este hecho implica que se puede escoger como superficie de Gauss, una superficie cilíndrica cuyo eje coincida con el propio hilo. De este modo se tendrá que el flujo a través de las superficies superior e inferior (tapaderas del cilindro) es nulo dado que  $\vec{E} \perp d\vec{S}$  en dichas superficies y en la superficie lateral, el módulo del campo será constante, esto es,

$$\oint_{S_L + S^+ + S^-} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(R) \times S_L.$$

Dado que el flujo debe ser igual al valor de la carga en el interior de la superficie y ésta incluye un trozo de hilo de altura  $h$ ,  $Q_{\text{int}} = \lambda h$  y por tanto

$$E 2\pi R h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0},$$

de donde se deduce que el módulo del campo viene dado por

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

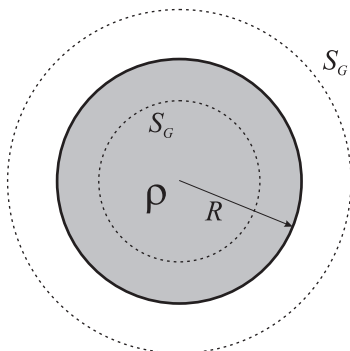
#### ■ Campo de una distribución uniforme esférica de carga

Sea una esfera de radio  $R$  con una distribución uniforme de carga  $\rho$ . Dado que en esta situación el campo eléctrico presenta simetría esférica, esto es,  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ , se tiene que

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)\hat{r} \cdot d\vec{S} = E(r)dS$$

y, por tanto, el flujo a través de una superficie de radio  $r$  será

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S d\Phi = E(r) \oint_S dS = E(r) \times (4\pi r^2) \\ &= \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$



Debe notarse que la carga total encerrada por la superficie sólo depende del radio de esta superficie y por tanto sólo debe considerarse aquella carga en el interior del volumen de la esfera de radio  $r$ , esto es,

$$Q_{\text{int}} = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \begin{cases} \rho \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } r < R \\ \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \equiv Q & \text{si } r \geq R. \end{cases}$$

A partir de los resultados de las expresiones anteriores puede fácilmente deducirse que el campo en cualquier punto viene dado por

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{r} & \text{si } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } r \geq R. \end{cases}$$

#### ■ Campo de un plano infinito cargado uniformemente ( $S_G \neq S'_G$ )

Un plano infinito con una densidad de carga superficial uniforme  $\sigma$  provoca un campo eléctrico del tipo

$$\vec{E} = E(y)\hat{y}.$$

El módulo del campo no presenta dependencia respecto a las variables  $x$  y  $z$  debido a que cualquier punto con la misma coordenada  $y$  es totalmente equivalente (es decir, ese punto “ve” la misma distribución de cargas). Con respecto a la dirección del campo, por simetría cualquier componente que no sea vertical es perfectamente cancelada dado el carácter infinito del plano.

Eligiendo como superficie de Gauss una superficie cilíndrica como la mostrada en la figura, se tiene que

$$\oint_{S_L+S^++S^-} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S^+} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S^-} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES$$

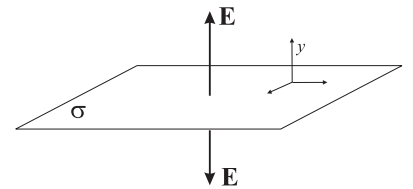
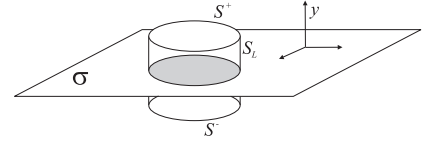
e igualando el flujo al valor de la carga encerrada en el interior de la superficie,  $Q_{\text{int}} = \sigma S$ , se obtiene

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

y, por tanto, el campo será

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(y) \hat{y}. \quad (1.28)$$

Es interesante notar que el campo, por ejemplo para  $y > 0$ , no depende de la altura sobre el plano y por tanto es constante en todos los puntos (puede sorprender que incluso no decrezca con la distancia).



## 1.7. Trabajo, energía y potencial electrostático

### 1.7.1. Potencial eléctrico

Si se realiza la integral de camino del campo eléctrico producido por una carga puntual,  $q$ , entre dos puntos  $A$  y  $B$ , a través de una curva  $\Gamma$ , se obtiene que

$$C_A^B = \int_{A,\Gamma}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A,\Gamma}^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A,\Gamma}^B \frac{\hat{r} \cdot d\vec{l}}{r^2}. \quad (1.29)$$

El numerador de la integral anterior puede expresarse como

$$\hat{r} \cdot d\vec{l} = dl \cos \alpha = dr$$

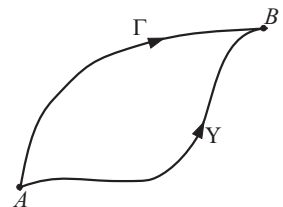
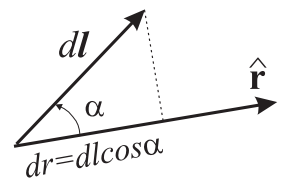
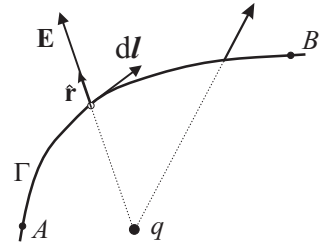
y por tanto se encuentra que

$$C_A^B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (1.30)$$

Es interesante observar en (1.30) que:

- La integral de camino es independiente del camino tomado para ir desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$ ,

$$\int_{A,\Gamma}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A,\Upsilon}^B \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.31)$$



- La integral de camino a través de cualquier curva cerrada es nula,

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.32)$$

Para una *distribución discreta/continua de carga*, la integral de camino del campo eléctrico entre los puntos  $A$  y  $B$  puede calcularse, teniendo en cuenta el principio de superposición, como

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \left( \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) \right) \cdot d\vec{l} = \sum_i \int_A^B \vec{E}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{l}. \quad (1.33)$$

Dado que esta magnitud se ha podido expresar como superposición de las circulaciones relacionadas con cargas puntuales, la circulación del campo de una distribución arbitraria de cargas presentará las propiedades (1.31) y (1.32) expuestas anteriormente. En particular la propiedad (1.32) (la circulación del campo a lo largo de una curva cerrada es nula) nos dice que

**el campo electrostático es conservativo.**

Dado que las propiedades que cumple el campo eléctrico son idénticas a las expuestas en el Apéndice A.1.11 para el gradiente de una función, esto sugiere claramente que el campo eléctrico puede escribirse como el gradiente de una función escalar,  $V$ , que se denominará **potencial eléctrico**, de modo que

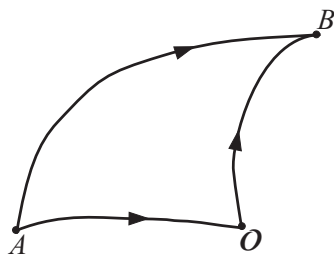
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad (1.34)$$

por lo que la circulación del campo eléctrico puede expresarse como la variación del potencial entre los puntos  $A$  y  $B$ :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B). \quad (1.35)$$

El signo menos en la definición (1.34) del potencial eléctrico se introduce simplemente para que el campo “apunte” desde puntos de mayor a menor potencial. Las unidades del potencial eléctrico serán el producto de la unidad de campo eléctrico por la de longitud, esto es: Nm/C en el SI. Esta unidad de potencial recibe el nombre de **voltio** (V). Usualmente, la unidad de campo eléctrico se expresa como V/m.

Unidad de potencial eléctrico:  
1 voltio (V)



Puesto que la integral de camino del campo eléctrico no depende del camino sino sólo del punto inicial y final, esta integral de camino puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_A^O \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_O^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \left[ - \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \right] - \left[ - \int_O^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Teniendo en cuenta (1.35) y (1.36), el potencial eléctrico en un punto cualquiera  $P$  puede definirse de forma genérica como

$$V(P) = - \int_O^P \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (1.37)$$

donde el punto  $\mathcal{O}$  es un punto arbitrario de *referencia* (usualmente se impone que el potencial valga cero en dicho punto).

Para el caso de una carga puntual, a partir de la expresión (1.37), puede observarse que

$$V(P) = - \int_{\mathcal{O}}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{O}}^P \frac{\hat{r} \cdot d\vec{l}}{r^2}. \quad (1.38)$$

Tomando como punto de referencia el infinito y teniendo en cuenta que  $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$ , el potencial en el punto  $P$ , esto es  $V(P)$ , vendrá dado por

$$\begin{aligned} V(P) &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Potencial producido por una carga puntual

Para una distribución continua de carga, debido al principio de superposición y siguiendo el mismo procedimiento que para el campo, se tendrá que

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{región de cargas}} \frac{\rho}{r} dV. \quad (1.40)$$

Potencial producido por una distribución de cargas

Ejemplo 1.4 Cálculo del potencial eléctrico para (a) un anillo de carga en los puntos de su eje, y (b) un plano cargado infinito

#### (a) Anillo de carga en los puntos de su eje

A partir de la expresión (1.40) podemos calcular el potencial producido por el anillo de carga de la figura en los puntos del eje de dicho anillo. Para ello consideremos que

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^Q dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r},$$

donde hemos tenido en cuenta que la variable  $r$  no varía (es constante) al integrar sobre los distintos elementos diferenciales de carga.

Notemos que la expresión anterior puede también escribirse como

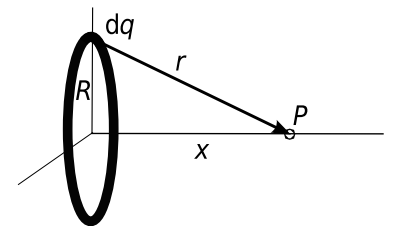
$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

#### (b) Plano cargado infinito

Teniendo en cuenta la expresión (1.28) para el campo producido por un plano infinito con densidad de carga  $\sigma$ , encontramos al aplicar (1.37) que esta expresión se reduce a

$$V(y) = - \int_0^y \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(y) dy = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(y) y = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |y|,$$

donde se ha tomado como referencia de potencial  $V(0) = 0$ .



### Trabajo y Energía potencial

El trabajo,  $W_E$ , que realiza el *campo electrostático* para mover una carga prueba puntual  $Q$  desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$ , vendrá dado por

$$W_E = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q \int_{A,\Gamma}^B \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.41)$$

Aplicando los resultados de la sección anterior podemos ver que la integral (1.41) no depende del camino y, por tanto, la fuerza es *conservativa*. Para fuerzas conservativas es sabido que el trabajo realizado por dichas fuerzas puede escribirse como la variación (con signo negativo) de la energía potencial, esto es,

$$W_E = -[U(B) - U(A)] = -\Delta U. \quad (1.42)$$

Este hecho queda patente al escribir el trabajo en términos del potencial eléctrico (ver (1.35)) como

$$W_E = QV(A) - QV(B) \quad (1.43)$$

e identificar la **energía potencial** de la carga  $Q$  en el punto  $P$  como

$$U(P) = QV(P). \quad (1.44)$$

Energía potencial eléctrica de una carga puntual

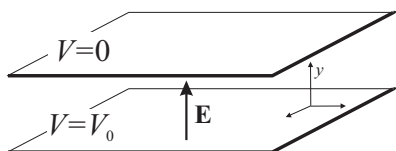
Si ahora tenemos en cuenta (según el teorema de las fuerzas vivas) que el trabajo es igual al incremento de la energía cinética del sistema, esto es:  $W_E = \Delta E_c$ ; podemos escribir al igualar  $\Delta E_c$  con (1.42) que

$$\Delta E_c + \Delta U = \Delta(E_c + U) = 0. \quad (1.45)$$

Dado que la energía mecánica,  $E_m$ , del sistema se define como

$$E_m = E_c + U,$$

entonces podemos establecer que *la energía mecánica de la carga  $Q$  en el campo electrostático se conserva*.



#### Ejemplo 1.5 Energía de una carga $q$ en el interior de un condensador plano

Si entre las placas de un condensador plano se establece una diferencia de potencial  $V_0$  (ver figura adjunta), entonces el campo en el interior del condensador será

$$\vec{E} = \frac{V_0}{d} \hat{y}.$$

Dado que el potencial es la integral de camino del campo eléctrico, esto es,

$$\int_0^y \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(0) - V(y)$$

y como  $V(0) = V_0$ , se tiene que

$$V(y) = V_0 - \int_0^y E(y) dy = V_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right).$$

La energía potencial,  $U(y)$ , de una carga  $q$  en el interior del condensador será por tanto

$$U(y) = qV_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right).$$

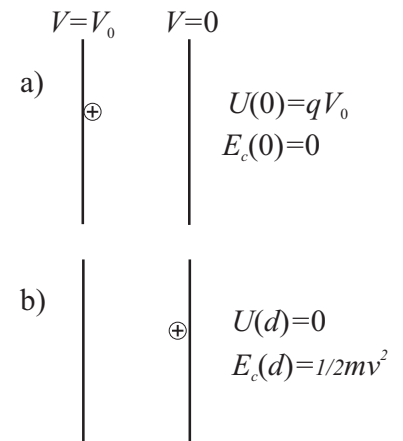
Una partícula de carga positiva que parta del reposo ( $E_c = 0$ ) en la placa del condensador a potencial  $V_0$ , se desplazará hacia zonas de menor energía potencial a la vez que irá aumentando su energía cinética. Debido a la conservación de su energía mecánica, la energía cinética al llegar a la otra placa, según (1.45), toma un valor de

$$E_c(d) = \frac{1}{2}mv^2 = qV_0,$$

por lo que la partícula adquirirá una velocidad al llegar a dicha placa dada por

$$v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}. \quad (1.46)$$

El hecho de que una diferencia de potencial entre dos electrodos aumente la energía cinética de las cargas es usado muy a menudo para acelerar partículas cargadas. En la práctica, la placa final puede ser sustituida por una rejilla metálica que deje pasar las partículas.

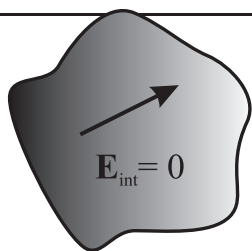


## 1.8. Conductores en equilibrio en el campo electrostático

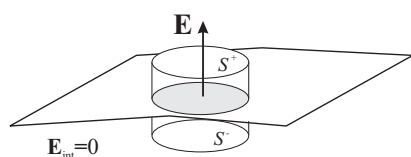
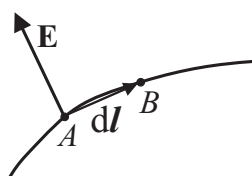
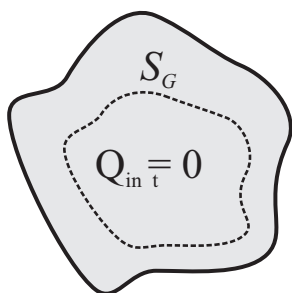
Es bien conocido que la materia está formada por partículas elementales cargadas y neutras. Las partículas de carga positiva (protones) forman parte de los núcleos de los átomos y por consiguiente están *fijas* en promedio en los sólidos. En ciertos materiales llamados **dieléctricos**, las cargas negativas (electrones) pueden considerarse igualmente *fijas*. No obstante, en otros materiales denominados **conductores**, algunos de los electrones no están ligados a átomos en particular sino que forman una especie de “gas de electrones” que vaga por todo el sólido. En esta sección consideraremos un modelo ideal de conductor en el cual existen *infinitas* cargas móviles que pueden desplazarse libremente. Dicho modelo se denominará **conductor perfecto**.

### 1.8.1. Campo de un conductor cargado en equilibrio electrostático

En general, los conductores aparecen de forma natural como sistemas neutros (igual número de cargas negativas que positivas). No obstante, añadiendo o quitando cargas libres al conductor, éste quedará *cargado*. Si se define **equilibrio electrostático** como aquella situación en la que todas las cargas libres están en *reposo*, y se tiene en cuenta la definición de conductor perfecto dada anteriormente, podemos derivar las siguientes conclusiones acerca del campo eléctrico:



Conductor es equipotencial



■ **El campo eléctrico es nulo en el interior del conductor.**

Si el campo eléctrico no fuese nulo en el interior del conductor daría lugar a movimientos de las cargas libres, lo cual estaría en contradicción con la condición de equilibrio electrostático.

Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, al calcular la integral de camino del campo entre dos puntos  $A$  y  $B$  en el interior del conductor obtenemos que

$$\int_A^B \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B) = 0 \Rightarrow V \equiv \text{Cte} , \quad (1.47)$$

esto es, el conductor es **equipotencial** y en particular la superficie del mismo es una *superficie equipotencial*.

■ **La carga en exceso se localiza en la superficie del conductor.**

Si el campo en *todos* los puntos del interior del conductor *cargado* es nulo es porque no existe carga en el interior. Este hecho puede justificarse utilizando la ley de Gauss. Si existiese carga neta en el interior, eligiendo una superficie de Gauss que la envolviese, el flujo del campo eléctrico a través de la misma sería proporcional a la carga encerrada. Esto estaría en contradicción con el hecho de que el flujo debe ser cero puesto que el campo en el interior es nulo. Por tanto, la carga en exceso debe localizarse en la superficie.

■ **El campo eléctrico en la superficie es normal a ésta y de valor  $\sigma/\epsilon_0$ .**

Dado que el potencial es constante en todo el conductor, para dos puntos cercanos  $A$  y  $B$  sobre la superficie se verificará que

$$dV = \lim_{A \rightarrow B} [V(A) - V(B)] = \lim_{A \rightarrow B} \Delta V = 0$$

y por tanto, dado que  $dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l}$  (ver Apéndice A.1.9), se tiene que

$$\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = 0 ,$$

lo que claramente implica que el campo en la superficie,  $\vec{E}_S$  es perpendicular a  $d\vec{l}$  y, puesto que  $d\vec{l}$  es tangente a la superficie, podemos concluir que

$$\vec{E}_S = E\hat{n}. \quad (1.48)$$

Si se aplica ahora la ley de Gauss a una superficie en forma cilíndrica tal como muestra la figura, se tiene que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0} ,$$

de donde obtenemos finalmente que

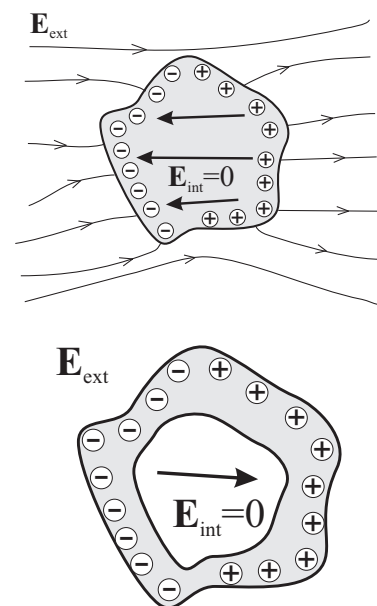
$$\vec{E}_S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} . \quad (1.49)$$



### 1.8.2. Conductor neutro en un campo eléctrico externo

Si un conductor inicialmente descargado (esto es, con una compensación perfecta de cargas eléctricas positivas y negativas) se somete al efecto de un campo eléctrico externo, la carga móvil del conductor se redistribuye de manera que se establezca la condición de equilibrio electrostático  $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ . (Este proceso ocurre típicamente en un tiempo del orden de  $10^{-14}$  s para un conductor de cobre.) La redistribución de la carga provoca la aparición de una densidad superficial inhomogénea de carga que a su vez da lugar a un campo en el interior del conductor que anula justamente al campo externo, provocando así la anulación punto a punto del campo total en el interior.

Es interesante observar que el proceso de redistribución de carga fruto del equilibrio electrostático puede considerarse como si ocurriese únicamente en la superficie, sin que eso implicase cambio alguno en el interior del conductor. Es más, si parte del material conductor del interior es extraído, con la consiguiente aparición de un hueco, se daría la misma redistribución de carga en la superficie exterior del conductor y, por tanto, el campo seguiría siendo nulo en todo el interior del conductor, incluyendo al hueco.<sup>1</sup> Esto quiere decir que para un conductor con un hueco, el interior está completamente *aislado* del exterior y, en consecuencia, los campos del exterior no afectarían a un dispositivo sensible al campo eléctrico (por ejemplo, circuitos electrónicos) situado en el interior del conductor. Este fenómeno se usa para diseñar **jaulas de Faraday** que aíslan los sistemas eléctricos. Una simple carcasa metálica (o un plástico conductor) aislaría, por ejemplo, los sistemas electrónicos del interior de un ordenador con respecto a posibles influencias eléctricas externas.



## 1.9. Condensadores

### 1.9.1. Capacidad de un conductor

Si se añade cierta carga  $Q$  a un conductor inicialmente descargado, esta carga se redistribuye en la superficie del conductor creando una densidad de carga superficial  $\sigma$  y consecuentemente un potencial,  $V$ , cuyo valor viene dado por la siguiente integral:

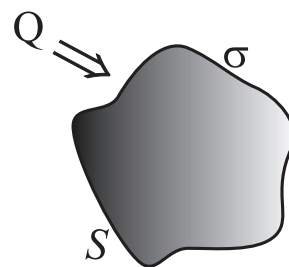
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r}, \quad P \in S. \quad (1.50)$$

Por el principio de superposición, si se aumenta la carga total,  $Q = \int \sigma dS$ , es razonable suponer que ello simplemente se traduzca en un au-

<sup>1</sup>Una manera alternativa de comprobar que el campo es nulo en el interior pasa por notar que la integral de camino del campo eléctrico entre dos puntos arbitrarios,  $A$  y  $B$ , situados en la superficie interna del hueco será nula,

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

debido a que dicha superficie es una *equipotencial*. La única manera de que se verifique la anterior expresión para puntos arbitrarios es que el campo eléctrico en el interior del hueco sea nulo.



mento proporcional de la densidad superficial de carga, esto es,

$$Q \longrightarrow Q' = \beta Q \Rightarrow \sigma(S) \longrightarrow \sigma'(S) = \beta \sigma(S)$$

y por tanto

$$V \longrightarrow V' = \beta V .$$

En la situación descrita anteriormente, el cociente entre la carga y el potencial es el mismo,

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} = \frac{\beta Q}{\beta V} ,$$

lo que implica que la relación entre la carga y el potencial es una magnitud independiente de  $Q$  y  $V$ . Esta magnitud se conoce como **capacidad**,  $C$ , del conductor y se define como

Capacidad de un conductor

$$C = \frac{Q}{V} . \quad (1.51)$$

La capacidad del conductor determina la carga que “adquiere” éste para un potencial dado: a mayor capacidad mayor carga, siendo  $C$  un *parámetro puramente geométrico* y que, por tanto, sólo depende de la forma del conductor.

Unidad de capacidad:  
1 faradio(F)

La unidad de capacidad es el **faradio** (F), definida en el sistema internacional como

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ voltio}} .$$

#### Ejemplo 1.6 Capacidad de un conductor esférico de radio $R$

Por simetría esférica, el campo en el exterior del conductor será del tipo  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$  y, por consiguiente, al aplicar la ley de Gauss a una superficie esférica concéntrica con el conductor se obtiene que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.52)$$

$$E(r) \oint dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.53)$$

de donde se obtiene que el campo en el exterior del conductor es

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} . \quad (1.54)$$

El potencial en un punto arbitrario se obtiene como

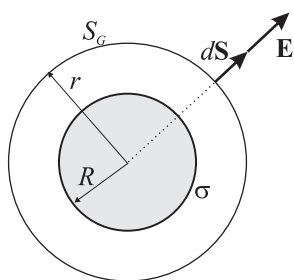
$$\begin{aligned} V(r) &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} , \end{aligned}$$

por lo que en la superficie de la esfera, el potencial será simplemente

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1.55)$$

y la capacidad:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R . \quad (1.56)$$



Como puede verse, la capacidad sólo depende de la geometría (el radio) de la esfera conductora.

Si el radio de la esfera fuese  $R = 1\text{m}$ , la capacidad del conductor sería

$$C \approx 111 \times 10^{-12} \text{ F} \equiv 111 \text{ pF} .$$

### 1.9.2. Influencia entre conductores

Si un conductor cargado con una carga  $Q$ , que suponemos positiva, se introduce en el hueco interior de otro conductor inicialmente descargado, esto origina una redistribución de cargas en el conductor inicialmente neutro (ver figura). Esta redistribución es consecuencia del establecimiento de la condición de equilibrio electrostático en ambos conductores ( $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ ). Si la superficie exterior del conductor neutro se conecta a tierra (almacén infinito de cargas libres), suben tantos electrones desde tierra como sean necesarios para compensar las cargas positivas, dando lugar todo este proceso a la aparición de una carga neta  $-Q$  en dicho conductor.

La situación anterior se conoce como *influencia total* dado que los dos conductores tienen la misma carga pero de signo contrario. Todas las líneas de campo que parten de un conductor acaban en el otro. (Esta situación se encuentra estrictamente en la práctica cuando un conductor está encerrado en el interior de otro). Dos conductores en influencia total forman un sistema que se conoce como **condensador**, definiéndose la capacidad de un condensador como

$$C = \frac{Q}{\Delta V} , \quad (1.57)$$

donde  $Q$  es el valor de la carga en módulo de cualquiera de los dos conductores y  $\Delta V$  es la diferencia de potencial en módulo existente entre los dos conductores.

Algunos ejemplos típicos de condensadores se presentan a continuación:

#### ■ Condensador esférico

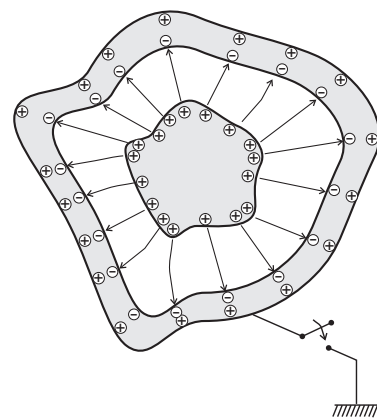
Para calcular la diferencia de potencial entre los dos conductores esféricos se parte de la expresión del campo en la zona intermedia entre los dos conductores, donde

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

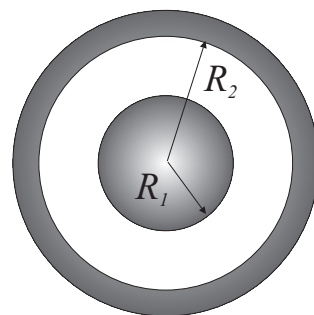
y por tanto:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} . \end{aligned}$$

La capacidad del sistema viene entonces dada a partir de (1.57) por



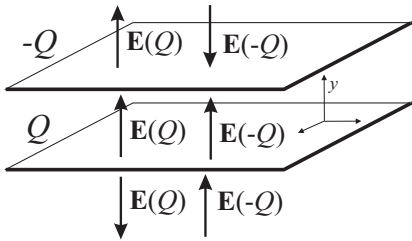
Condensador: sistema de dos conductores en influencia total



$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} . \quad (1.58)$$

Es interesante notar que la capacidad del *condensador* esférico puede llegar a ser mucho más grande que la de un *conductor* esférico del mismo tamaño, dado que

$$\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} > R_1 .$$



#### ■ Condensador de placas paralelas

Para calcular la diferencia de potencial entre las placas paralelas, este condensador se tratará suponiendo que las dimensiones de dichas placas son mucho mayores que la distancia entre ellas y, por tanto, éstas se modelarán por dos planos infinitos cargados. Teniendo en cuenta la expresión (1.28) para el campo producido por un plano cargado uniformemente, en el caso de dos planos infinitos cargados con distinta polaridad, por superposición se tiene que

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} & \text{si } 0 < y < d \\ 0 & \text{en otro caso} . \end{cases} \quad (1.59)$$

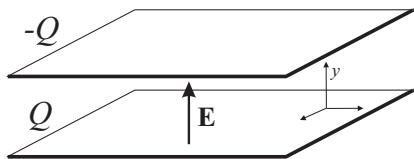
Obsérvese que el campo eléctrico es uniforme en el interior del condensador y nulo fuera de éste. El condensador plano suele usarse generalmente para producir campos uniformes e intensos.

Para calcular la diferencia de potencial entre las placas del condensador, se procede realizando la integral de camino del campo eléctrico dado por (1.59) entre una y otra placa. Dado que el campo eléctrico es *uniforme*, puede escribirse que

$$\Delta V = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d . \quad (1.60)$$

Puesto que la carga de cada uno de las placas *finitas* viene dada por  $Q = \sigma S$ , la capacidad del condensador de placas paralelas será muy aproximadamente

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \epsilon_0 \frac{S}{d} . \quad (1.61)$$



Capacidad de un condensador de placas paralelas

## 1.10. Campo eléctrico en la materia

Hasta ahora sólo hemos venido estudiando los diferentes fenómenos electrostáticos en el *vacío* o bien en conductores perfectos. En este sentido, al estudiar, por ejemplo, el campo creado por una carga puntual en el Apartado 1.3 suponíamos que no existía medio material alguno en el espacio que rodeada a la carga puntual. Para introducir el efecto de un posible medio material no conductor en esta ley, debemos considerar que estos medios denominados *dieléctricos* (ver Apartado 1.8) están formados por átomos/moléculas neutros eléctricamente donde el centro de las cargas positivas (protones) coincide con el de las cargas negativas (electrones). No obstante, bajo la influencia de un campo eléctrico externo,

el centro de las cargas negativas puede desplazarse con respecto al de las positivas, es decir los átomos/moléculas constitutivos del medio material pueden *polarizarse*. Este fenómeno de **polarización** dará lugar a un nuevo campo eléctrico de polarización que se opondrá al campo original, manifestándose este efecto globalmente en que el campo original queda parcialmente reducido, como si fuese originado por una carga puntual de menor cuantía.

El mismo efecto global anterior se produciría igualmente en un condensador plano, donde se observa experimentalmente que la introducción de un material dieléctrico homogéneo e isotrópico entre sus placas aumenta la capacidad de dicho condensador en cierta constante que depende exclusivamente del material. Para entender este efecto observemos el condensador *descargado* de la Fig. 1.1(a), entre cuyas placas se ha colocado

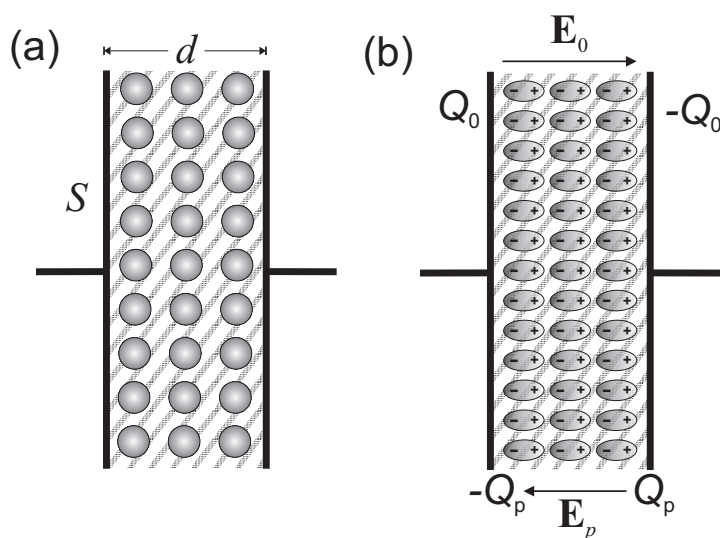
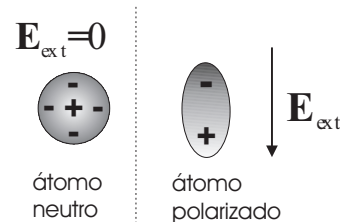


Figura 1.1: (a) Condensador descargado entre cuyas placas existe un material dieléctrico. (Las esferas representan los átomos neutros constituyentes del dieléctrico.) (b) Condensador cargado con una carga  $Q_0$  que es contrarrestada por una carga  $Q_p$  proveniente de la polarización de los átomos constituyentes del dieléctrico.

cierto material dieléctrico (madera, papel, agua, plástico,...). Si ahora este condensador es cargado con una carga  $Q_0$  en una placa (y  $-Q_0$  en la otra), entonces aparecerá un cierto campo  $\vec{E}_0$  entre las placas del condensador. Este campo eléctrico provocará la polarización de los átomos del material dieléctrico dando lugar a una situación microscópica tal como la descrita en la Fig. 1.1(b). Observemos que en el interior del material dieléctrico las cargas positivas y negativas se compensarán mutuamente, quedando sin embargo una carga descompensada de valor  $Q_p$  justamente en los extremos del material adyacentes a las placas del condensador. Esta carga originará un campo eléctrico  $\vec{E}_p$  que al superponerse al campo original  $\vec{E}_0$  da lugar a un nuevo campo  $\vec{E}$ , cuyo modulo puede expresarse como

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}, \quad (1.62)$$

donde  $\epsilon_r$  es una constante adimensional positiva mayor que la unidad ( $\epsilon_r \geq 1$ ) que dependerá del material y que denominaremos **permitividad relativa del material**.

Si la capacidad del condensador de placas paralelas en vacío (es decir, sin material dieléctrico entre sus placas) venía dada por

$$C_0 = \frac{Q_0}{V_0} = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$

(siendo  $V_0 = E_0 d$  la diferencia de potencial entre las placas), podemos observar que al introducir el material dieléctrico se reduce el valor del campo entre las placas del condensador y, en consecuencia, también se reducirá la diferencia de potencial entre las mismas, que vendrá ahora dada por

$$V = Ed = \frac{V_0}{\epsilon_r}. \quad (1.63)$$

Dado que la introducción del dieléctrico no modifica la cantidad de carga inicial depositada en las cargas (la carga en el dieléctrico aparece en los bordes de éste, no en las placas), tenemos que la capacidad del condensador con dieléctrico será

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\epsilon_r} = \epsilon_r C_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}, \quad (1.64)$$

explicándose así el aumento de capacidad del condensador observado experimentalmente.

Observemos además que, globalmente, el efecto de introducir el material dieléctrico homogéneo e isótropo ha quedado reflejado en la sustitución de

$$\epsilon_0 \longleftrightarrow \epsilon_r \epsilon_0 \quad (1.65)$$

en la expresión de la capacidad. De este modo podemos escribir que la capacidad de un condensador de placas paralelas viene dada por

$$C = \epsilon \frac{S}{d}, \quad (1.66)$$

donde

Permitividad dieléctrica

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad (1.67)$$

es la **permitividad dieléctrica** del material.

Evidentemente  $\epsilon \geq \epsilon_0$ , siendo la permitividad de algunos materiales usuales la siguiente:

Material	Permitividad relativa
Vacío	1
Aire	1.00059
Agua (20°C)	80
Papel	3.7
Porcelana	7
Vidrio	5.6
Neopreno	6.9
Poliestireno	2.55

Podemos observar que, a efectos prácticos, el aire se comporta como el vacío puesto que tiene una permitividad relativa muy próxima a la unidad.

La anterior discusión sobre la inclusión de dieléctricos homogéneos e isótropos podría extenderse al estudio de otras magnitudes y situaciones,

obteniéndose siempre que las expresiones obtenidas anteriormente para el vacío quedan simplemente modificadas por la sustitución de la permitividad dieléctrica del vacío por la correspondiente permitividad dieléctrica del material.

## 1.11. Energía Electrostática

### 1.11.1. Trabajo para trasladar una carga puntual

En una región del espacio donde existe un campo  $\vec{E}$ , planteemos la siguiente cuestión: ¿cuál es el trabajo mínimo necesario para mover una carga prueba puntual  $Q$  desde un punto  $A$  a un punto  $B$ ? La respuesta a esta pregunta viene dada por la integral de camino de la fuerza *externa* ejercida sobre la carga entre ambos puntos, esto es,

$$W = \int_A^B \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l}. \quad (1.68)$$

Dado que la fuerza que ejerce el sistema de cargas sobre la carga prueba es de tipo electrostático y puede expresarse según (1.3) en función del campo eléctrico, la fuerza externa *mínima* que debemos ejercer nosotros para poder desplazar la carga deberá ser justamente  $\vec{F}_{\text{ext}} = -Q\vec{E}$  y, por tanto, el trabajo será

$$W = -Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q [V(B) - V(A)], \quad (1.69)$$

que, obviamente, es independiente del camino debido a las propiedades de la integral de camino del campo eléctrico.

Teniendo en cuenta la definición de energía potencial dada en (1.44), la expresión (1.69) para el trabajo puede identificarse con el incremento de la energía potencial,  $\Delta U$ , del sistema, es decir

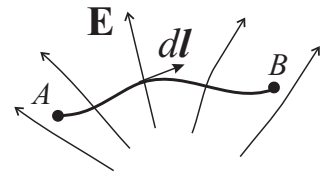
$$W = \Delta U. \quad (1.70)$$

Es interesante observar que la expresión (1.69) ofrece la posibilidad de interpretar

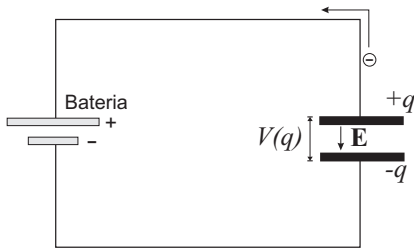
*la diferencia de potencial entre dos puntos como el trabajo por unidad de carga que debemos ejercer para desplazar una partícula cargada entre dichos puntos.*

En el caso de que la partícula venga desde el infinito (donde usualmente se supone que está el origen cero de potencial), el trabajo que debemos realizar para situar la partícula en el punto  $P$  puede expresarse como

$$W = Q [V(P) - V(\infty)] = QV(P). \quad (1.71)$$



### 1.11.2. Energía almacenada en un condensador de placas paralelas



Para obtener una expresión general de la energía electrostática de un sistema arbitrario de cargas se analizará el caso particular del proceso de carga de un condensador de placas paralelas para después generalizar (sin demostración) las expresiones que se obtengan a cualquier sistema.

En el proceso de carga de un condensador plano (inicialmente los dos conductores son neutros), el efecto de la batería conectada a las placas del condensador será el de extraer carga negativa de una de las placas y transferirla a la otra, de modo que ambas placas se van cargando dando lugar a la *aparición de un campo eléctrico entre las placas* y, consecuentemente, a una diferencia de potencial,  $V(q) = q/C$ , que va creciendo en el proceso.

Para aumentar en un  $dq$  la carga sobre el condensador, la batería debe realizar un trabajo diferencial que a partir de (1.69) (adaptando la expresión válida para cargas puntuales a cargas diferenciales) podrá expresarse como

$$dW = dq\Delta V. \quad (1.72)$$

Si ahora consideramos que  $\Delta V \equiv V(q)$ , entonces el trabajo diferencial podrá expresarse como

$$dW = \frac{q dq}{C}. \quad (1.73)$$

Según (1.70) este trabajo equivale justamente al aumento de la energía potencial electrostática del condensador, esto es:  $dW \equiv dU$ . Para cargar el condensador con una carga final  $Q$ , el trabajo total realizado (o equivalentemente el aumento total de la energía potencial del sistema) se obtendrá al integrar la expresión (1.73), de modo que

$$W \equiv \Delta U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (1.74)$$

Dado que el aumento de la energía potencial del sistema es precisamente la *energía almacenada* en el condensador, podemos identificar esta ganancia de energía potencial con la **energía electrostática** del sistema,  $U_E$ , por lo que podemos escribir que

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV. \quad (1.75)$$

En el caso particular del condensador plano, se encontró que

$$V = Ed \quad \text{y} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$

por lo que al introducir estas expresiones en (1.75) obtendremos

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} E^2 d^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Si se define la **densidad de energía en un campo electrostático**,  $u_E$ , como

$$dU_E = u_E d\mathcal{V}, \quad (1.77)$$



de la expresión (1.76) se deduce que la densidad de energía eléctrica en el condensador plano viene dada por

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (1.78)$$

Es interesante observar que la energía electrostática del condensador plano puede expresarse tanto en términos de la carga, expresión (1.75), como del campo eléctrico, expresión (1.76). Estas dos expresiones dan cuenta de la posible ambigüedad que encontramos al definir dónde se almacena la energía potencial del sistema. Según la expresión (1.75), esta energía estaría almacenada en las cargas y según la expresión (1.76) estaría asociada al campo eléctrico. Aunque considerar que la energía está en el campo pudiera parecer “extraño”, esta concepción es la más conveniente para situaciones más generales<sup>2</sup>. Antes de que existiera campo eléctrico entre las placas, la energía electrostática en esa región del espacio era cero y después, cuando se ha establecido un campo eléctrico, la energía alcanza cierto valor. Por tanto, parece congruente asociar la energía potencial electrostática con la presencia del campo eléctrico.

Aunque el resultado (1.78) se ha obtenido para un caso *particular*, cálculos más elaborados demuestran que este mismo resultado coincide con la expresión *general* válida para la densidad de energía electrostática de cualquier sistema cargado. En consecuencia, la energía electrostática de un sistema puede escribirse como

$$U_E = \int_{\text{todo el espacio}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (1.79)$$

Energía electrostática

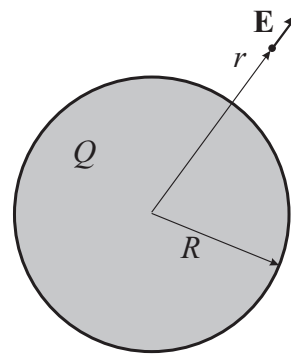
Ejemplo 1.7 Energía electrostática de una esfera conductora.

El módulo del campo en el exterior de la esfera conductora con carga  $Q$  viene dado por

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r \geq R.$$

Antes de calcular la energía de este sistema aplicando la expresión (1.79) debemos calcular  $dV$ . Para ello tengamos que cuenta que dado el volumen total de una esfera de radio  $r$  viene dado por  $V = 4/3\pi r^3$ , por lo que el volumen diferencial  $dV = (dV/dr)dr$  puede escribirse como  $dV = 4\pi r^2 dr$ . La energía de la esfera conductora de radio  $R$  será por tanto

$$\begin{aligned} U_E &= \int_{\text{todo el espacio}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \end{aligned}$$



<sup>2</sup>Por ejemplo, al estudiar la energía asociada a una onda electromagnética.

## 1.12. Problemas propuestos

**1.1:** Calcule la fuerza de repulsión electrostática entre dos partículas  $\alpha$  (cada partícula  $\alpha$  está compuesta por dos protones) y compárela con la fuerza de atracción gravitatoria entre ellas.

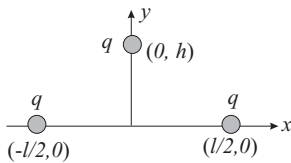
**Sol.**  $F_{elect} = 9,18 \times 10^{-2} \text{ N}$ ;  $F_{grav} = 2,97 \times 10^{-37} \text{ N}$ .

**1.2:** ¿Cuál es el valor del módulo del campo eléctrico en un punto situado a 30 cm de una carga puntual de  $10 \mu\text{C}$ .

**Sol.**  $E = 10^6 \text{ N/C}$ .

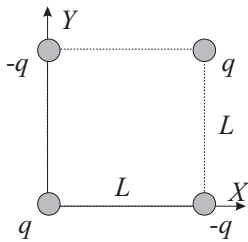
**1.3:** Dos cargas puntuales iguales de valor  $q$  están situadas en los puntos  $(-a, 0, 0)$  y  $(a, 0, 0)$ . Calcular el potencial y el campo eléctrico debido a dichas cargas en los puntos del eje  $Y$ .

**Sol.**  $V(0, y, 0) = [q/(2\pi\epsilon_0)](y^2 + a^2)^{-1/2}$ ,  $\vec{E}(0, y, 0) = [q/(2\pi\epsilon_0)]y(y^2 + a^2)^{-3/2} \hat{y}$ .



**1.4:** Tres cargas puntuales de igual valor,  $q$ , se encuentran dispuestas en los vértices de un triángulo, como se indica en la figura. Calcúlese: **a)** el campo eléctrico y el potencial generado por las tres cargas en puntos del segmento que une los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, h)$ ; **b)** la fuerza ejercida por las dos cargas que se encuentran sobre el eje  $X$  sobre la carga situada en  $(0, h)$ .

**Sol.** **a)**  $V(0, y) = Kq[2((l/2)^2 + y^2)^{-1/2} + (h - y)^{-1}]$ ,  $\vec{E}(0, y) = Kq[2y((l/2)^2 + y^2)^{-3/2} - (h - y)^{-2}] \hat{y}$ . **b)**  $\vec{F} = Kq^2 2h[(l/2)^2 + h^2]^{-3/2} \hat{y}$ .



**1.5:** Las cuatro cargas del dibujo están dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado  $L$ . **a)** Hallar el valor, sentido y dirección de la fuerza ejercida sobre la carga situada sobre el vértice inferior izquierdo por las cargas restantes. **b)** Demostrar que el campo eléctrico total en el punto medio de cualquiera de los lados del cuadrado es paralelo al lado considerado, está dirigido hacia la carga negativa vértice de dicho lado y su valor es  $E = [2q/(\pi\epsilon_0 L^2)](1 - \sqrt{5}/25) \text{ N/C}$ .

**Sol.** **a)**  $\vec{F} = [q^2/(4\pi\epsilon_0 L^2)](1 - 1/\sqrt{8})(\hat{x} + \hat{y}) \text{ N}$ .

**1.6:** El potencial electrostático en cierta región del espacio está dado por  $V = 2x^2 - y^2 + z^2$ , donde  $x, y, z$  se expresan en metros y  $V$  en voltios. Determinar: **a)** la componente del campo eléctrico en el punto  $(1, 2, 3)$  a lo largo de la dirección dada por la recta que pasa por dicho punto y por el punto  $(3, 5, 0)$ ; **b)** el trabajo que realizaría el campo sobre una carga puntual  $q = 2 \text{ C}$  que se desplazase desde el punto  $(1, 2, 3)$  hasta el  $(3, 3, 3)$ .

**Sol.** **a)**  $\sqrt{22} \text{ N/C}$ ; **b)**  $-22 \text{ J}$ .

**1.7:** Sobre los planos  $x = 0$  y  $x = 4$  existen densidades de carga de valor  $\sigma_1 = 10^{-8} \text{ C/m}^2$  y  $\sigma_2 = -10^{-8} \text{ C/m}^2$  respectivamente. Determinar: **a)** la fuerza que actúa sobre una carga puntual  $q = 1 \text{ pC}$  situada en el punto  $(1, 0, 0)$ ; **b)** el trabajo realizado por el campo para transportar dicha carga hasta el punto  $(3, 2, 0)$ ; **c)** la d.d.p. entre los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(8, 0, 0)$ .

**Sol.** **a)**  $36\pi \cdot 10^{-11} \hat{x} \text{ N}$ ; **b)**  $72\pi \cdot 10^{-11} \text{ J}$ ; **c)**  $1080\pi \text{ V}$ .

**1.8:** Una gota de aceite cargada de masa  $2,5 \times 10^{-4} \text{ g}$  está situada en el interior de un condensador de placas plano-paralelas de área  $175 \text{ cm}^2$ . Cuando la placa superior tiene una carga de  $4,5 \times 10^{-7} \text{ C}$ , la gota de aceite permanece estacionaria. ¿Qué carga tiene esta gota?

**Sol.**  $Q = 8,43 \times 10^{-13} \text{ C}$ .

**1.9:** Determinar el campo eléctrico y el potencial en todos los puntos del espacio en dos casos: **a)** Esfera conductora de radio  $R$  y carga  $Q$ ; **b)** Esfera no conductora de radio  $R$  con densidad volumétrica de carga uniforme de valor  $\rho$  (nota: elegir potencial cero en el infinito en ambos casos).

**Sol.** **a)**  $r > R$ :  $\vec{E}(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{r}$ ,  $V(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ ;  $r < R$ :  $\vec{E} = 0$ ,  $V = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ ; **b)**  $r > R$ :  $\vec{E}(r) = R^3 \rho/(3\epsilon_0 r^2) \hat{r}$ ,  $V(r) = R^3 \rho/(3\epsilon_0 r)$ ;  $r < R$ :  $\vec{E}(r) = r\rho/(3\epsilon_0) \hat{r}$ ,  $V(r) = \rho(R^2 - r^2/3)/(2\epsilon_0)$ .

**1.10:** Una esfera no conductora de radio  $R$  tiene una densidad volumétrica de carga  $\rho = Ar$ , donde  $A$  es una constante y  $r$  la distancia al centro de la esfera. Determinar: **a)** la carga total de la esfera; **b)** el campo eléctrico y el potencial en cualquier punto del espacio (nota: elegir potencial cero en el infinito).

**Sol.** **a)**  $Q = \pi AR^4$ ; **b)**  $r \leq R$ :  $\vec{E}(r) = Ar^2/(4\epsilon_0) \hat{r}$ ,  $V(r) = -Ar^3/(12\epsilon_0) + AR^3/(3\epsilon_0)$ ;  $r > R$ :  $\vec{E}(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) \hat{r}$ ,  $V(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ .

**1.11:** Demuestre que el campo eléctrico fuera de un conductor cilíndrico rectilíneo de radio

$R$ , longitud infinita y densidad de carga superficial  $\sigma$  es equivalente al campo debido a una línea infinita cargada con la misma cantidad de carga por unidad de longitud (es decir, si  $\lambda = 2\pi R\sigma$ ).

**1.12:** Determinar el potencial y el campo eléctrico en el eje de un anillo circular de radio  $R$  con una densidad de carga lineal uniforme  $\lambda$  que está situado en el plano  $XY$  y tiene su centro en el origen de coordenadas.

**Sol.:**  $V(0, z, 0) = [\lambda/(2\epsilon_0)]R(z^2 + R^2)^{-1/2}$ ,  $\vec{E}(0, z, 0) = [\lambda/(2\epsilon_0)]Rz(z^2 + R^2)^{-3/2} \hat{z}$ .

**1.13:** Dos anillos circulares de radio  $R$  coaxiales y con sus centros separados una distancia  $a$  están cargados con densidades de carga lineal  $\lambda$  y  $-\lambda$  respectivamente. Hallar el trabajo que hay que realizar para situar una carga prueba,  $q$ , en los puntos siguientes: **a)** centro del anillo cargado positivamente; **b)** punto del eje equidistante de ambos anillos; **c)** centro del anillo cargado negativamente (nota: en los tres apartados, suponer que la carga  $q$  se trae desde el infinito al punto considerado).

**Sol.:** **a)**  $W = [q\lambda/(2\epsilon_0)]\{1 - R(R^2 + a^2)\}$ ; **b)**  $W = 0$ ; **c)**  $W = [q\lambda/(2\epsilon_0)]\{R(R^2 + a^2) - 1\}$

**1.14:** Un cilindro de longitud infinita y radio  $b$  con una cavidad cilíndrica en su interior de radio  $a$  posee una densidad volumétrica de carga  $\rho$ , según se indica en la figura. Calcúlese: **a)** la carga total del cilindro por unidad de longitud; **b)** el campo eléctrico en todos los puntos del espacio; **c)** la fuerza sobre una carga puntual,  $q$ , situada en el punto de coordenadas  $(b, b, 0)$ , así como la componente de dicha fuerza en la dirección dada por el unitario  $\hat{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ; **d)** la diferencia de potencial entre los puntos  $(b, b, 0)$  y  $(2b, 2b, 2b)$ .

**Sol.:** **a)**  $\pi(b^2 - a^2)\rho$ ; **b)** si  $r \leq a$   $\vec{E} = 0$ , si  $a < r \leq b$   $\vec{E} = \frac{(r^2 - a^2)\rho}{2r\epsilon_0} \hat{r}$ , si  $r > b$

$\vec{E} = \frac{(b^2 - a^2)\rho}{2r\epsilon_0} \hat{r}$ ; **c)**  $\vec{F} = \frac{q(b^2 - a^2)\rho}{4\epsilon_0 b} (1, 1, 0)$ ,  $\vec{F}_n = \frac{q(b^2 - a^2)\rho}{2\sqrt{3}\epsilon_0 b} \hat{n}$ ;

**d)**  $V(b, b, 0) - V(2b, 2b, 2b) = (b^2 - a^2)\rho \frac{\ln 2}{2\epsilon_0}$ .

**1.15:** **a)** ¿Cuál es la capacidad de un sistema de dos placas plano-paralelas de área  $1 \text{ mm}^2$  separadas  $1 \text{ mm}$ ? **b)** ¿Cuánto trabajo realizaríamos para cargar el anterior condensador con una carga de  $10^{-3} \text{ C}$ ? **c)** ¿Cuál sería la fuerza entre las placas?

**Sol.:** **a)**  $C = 8,05 \text{ nF}$ ; **b)**  $W = 62,1 \text{ J}$ ; **c)**  $F = 5,65 \times 10^4 \text{ N}$ .

**1.16:** **a)** ¿Qué cantidad de carga será necesario añadir a una esfera conductora aislada de radio  $R_1 = 10 \text{ cm}$  para que ésta alcance un potencial de  $500 \text{ V}$ ? **b)** Si la anterior carga es compartida con otra esfera conductora aislada de radio  $R_2 = 5 \text{ cm}$  de radio (ambas son conectadas mediante un fino hilo conductor), ¿cuál será la carga y el potencial final en cada esfera conductora?

**Sol.:** **a)**  $Q = 5,6 \times 10^{-9} \text{ C}$ ; **b)**  $Q_1 = 3,74 \text{ nC}$ ,  $Q_2 = 1,86 \text{ nC}$ ,  $V_1 = V_2 \approx 336,6 \text{ V}$ .

**1.17:** Cinco condensadores idénticos de capacidad  $C_0$  están conectados en un circuito puente tal como indica la figura. **a)** ¿Cuál es la capacidad equivalente entre los puntos  $a$  y  $b$ ? **b)** Calcular la capacidad equivalente si la capacidad entre  $a$  y  $b$  cambia ahora a  $10C_0$ .

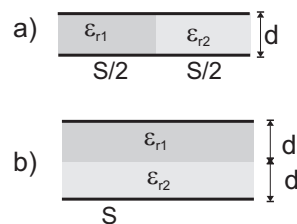
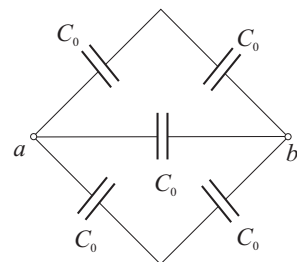
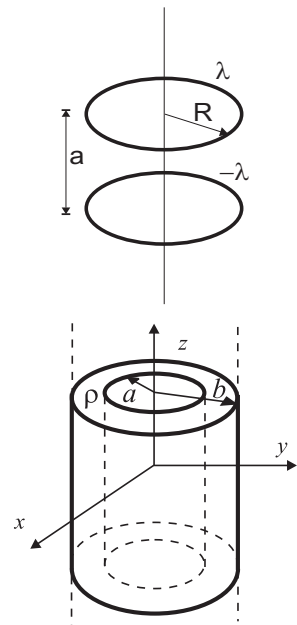
**Sol.:** **a)**  $C_{\text{equiv}} = 2C_0$ ; **b)**  $C_{\text{equiv}} = 11C_0$ ;

**1.18:** Un condensador de  $1 \mu\text{F}$  se ha cargado a  $10 \text{ V}$ . Determinése: **a)** la carga acumulada y el trabajo que fue necesario realizar; **b)** la densidad de energía eléctrica en el interior del condensador sabiendo que puede asimilarse a un condensador ideal de placas plano paralelas separadas una distancia de  $10 \text{ cm}$ ; **c)** el trabajo necesario para aumentar la carga del condensador al doble de la que posee. Compárese con el trabajo calculado en el apartado a) (**Dato:**  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ).

**Sol.:** **a)**  $Q = 10 \mu\text{C}$ ,  $W = 5 \times 10^{-5} \text{ J}$ ; **b)**  $\rho_E = 4,427 \times 10^{-8} \text{ J/m}^3$ ; **c)**  $W = 15 \times 10^{-5} \text{ J}$ .

**1.19:** Se consideran los condensadores planos esquematizados en la figura. Determinar la capacidad de cada uno de ellos.

**Sol.:** **a)**  $C = C_0(\epsilon_{r,1} + \epsilon_{r,2})/2$ ; **b)**  $C = C_0\epsilon_{r,1}\epsilon_{r,2}/(\epsilon_{r,1} + \epsilon_{r,2})$ , siendo en ambos casos  $C_0 = \epsilon_0 S/d$ .





## Tema 2

# Circuitos de Corriente Continua

---

### 2.1. Introducción

En el tema anterior se ha introducido la Electroestática como el estudio de la interacción entre cargas en *reposo*. No obstante, cabe señalar que, en general, la Electroestática puede aplicarse a situaciones en las que *la distribución de cargas permanece invariable en el tiempo*. El estudio de las cargas en *movimiento* se iniciará en el presente tema. Estas cargas en movimiento, o lo que es lo mismo, un flujo de partículas cargadas, dan lugar a una corriente eléctrica, de la misma manera que moléculas de agua en movimiento dan lugar a una corriente de agua.

En función del tipo de movimiento que lleven las cargas se clasificará la corriente eléctrica en corriente continua y corriente alterna. La **corriente continua** es aquella en la que el flujo de cargas permanece invariable en el tiempo (por ejemplo, cuando los electrones en un cable se mueven a velocidad constante)<sup>1</sup>. Cuando el flujo de cargas varía en el tiempo, el movimiento conjunto de estas cargas se conoce como *corriente variable en el tiempo*, y si este flujo varía temporalmente de forma armónica entonces se denomina **corriente alterna**.

El objetivo final del presente tema será el análisis de los circuitos de corriente continua, tanto por su importancia propia en la tecnología actual como por ser un primer paso para el estudio y comprensión de los circuitos electrónicos más complejos. Los circuitos de corriente continua se resuelven a partir de las reglas de Kirchhoff, que serán deducidas en este tema como una consecuencia de un análisis de campos. Tras la deducción de estas reglas, se hablará de las fuentes de alimentación de estos circuitos y, en particular, se discutirá el concepto de fuerza electromotriz.

---

<sup>1</sup>Es interesante notar que si el flujo de cargas permanece invariable en el tiempo (corriente continua), esto implica que la carga por unidad de tiempo que atraviesa cualquier superficie no aumenta ni disminuye y, por tanto, la distribución de cargas permanece invariable en el tiempo, provocando que, a pesar de que las cargas se *muevan*, todavía se pueda seguir aplicando la Electroestática. No obstante, las cargas del *interior* del conductor generalmente no generan campo eléctrico dado que existe una compensación precisa entre cargas positivas y negativas.

Finalmente se presentará un método de análisis de circuitos lineales denominado análisis de mallas.

## 2.2. Intensidad y densidad de corriente (vector $\vec{J}$ )

Una “medida” de la corriente eléctrica es proporcionada por la **intensidad** de la corriente,  $I$ . Esta magnitud se define como

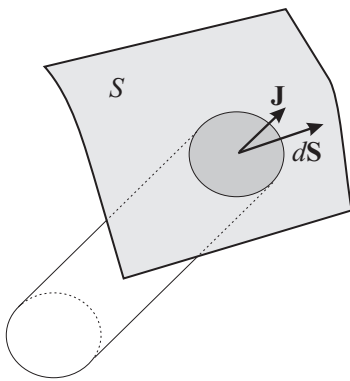
Intensidad de la corriente

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (2.1)$$

esto es, la carga total por unidad de tiempo,  $Q$ , que atraviesa cierta superficie  $S$ . La unidad de intensidad de la corriente eléctrica es el **amperio** (A) definido como

Unidad de intensidad:  
1 amperio (A)

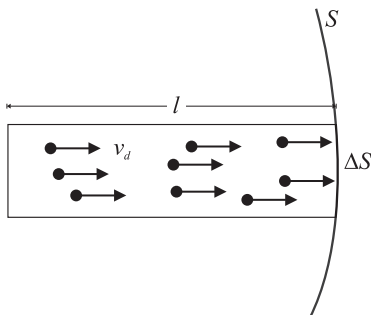
$$1 \text{ amperio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ segundo}} ; \quad 1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}.$$



La definición de la intensidad de corriente como el ritmo temporal con que la carga atraviesa cierta superficie  $S$  establece una dependencia de esta magnitud con el flujo de carga a través de cierta superficie que debe especificarse. Este hecho sugiere la conveniencia de expresar la intensidad como el flujo de cierto vector (ver Apéndice A.2), que se denominará **vector densidad de corriente**  $\vec{J}$ , a través de la superficie  $S$ :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (2.2)$$

Evidentemente las unidades de  $\vec{J}$  son de intensidad partido por superficie, esto es:  $\text{A/m}^2$ ; representando el módulo de esta magnitud la cantidad de carga que pasa por unidad de superficie y por unidad de tiempo a través de un elemento de superficie perpendicular al flujo.



Para obtener una expresión explícita del vector densidad de corriente en función de las características del flujo de partículas cargadas, consideraremos la situación mostrada en la figura adjunta. En esta figura se muestra la contribución a la corriente,  $\Delta I$ , de la parte de carga,  $\Delta Q$ , que atraviesa el área  $\Delta S$  (la carga por unidad de tiempo que atraviesa la superficie completa será  $I$ ). Claramente la carga que atraviesa  $\Delta S$  en la unidad de tiempo  $\Delta t$  es aquella comprendida en un volumen de área transversal  $\Delta S$  y de longitud  $l$  igual al recorrido de una de las cargas en el tiempo  $\Delta t$ , siendo por tanto  $l = v_d \Delta t$ , donde  $v_d$  es el módulo de la velocidad de desplazamiento de las partículas cargadas. Supuesto que existen  $n$  partículas cargadas móviles por unidad de volumen y que la carga de cada una de las partículas es  $q$  (luego la carga por unidad de volumen es  $nq$ ), se tiene que

$$\Delta Q = nq \Delta V = nq \Delta S v_d \Delta t.$$

La carga que atraviesa el elemento de área  $\Delta S$  por unidad de tiempo  $\Delta t$ , será por tanto

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nq v_d \Delta S.$$

Si se tiene en cuenta que en el caso analizado previamente, el área considerada estaba orientada perpendicularmente al movimiento, la expresión anterior ofrecía directamente el valor del flujo que atravesaba dicha área. Si el área considerada,  $\Delta S$ , presenta otra orientación, entonces el flujo debe expresarse en términos del producto escalar de la velocidad de las partículas por el vector área (al igual que ya se hizo para el flujo del campo eléctrico) y por tanto, en general,

$$\Delta I = nq\vec{v}_d \cdot \Delta \vec{S} . \quad (2.3)$$

Tomando ahora el límite de la expresión anterior para áreas infinitesimales,  $\Delta S \rightarrow 0$ , (2.3) puede reescribirse como:

$$dI = nq\vec{v}_d \cdot d\vec{S} , \quad (2.4)$$

de donde se deduce que la intensidad que atraviesa el área total  $S$  vendrá dado por

$$I = \int_S dI = \int_S nq\vec{v}_d \cdot d\vec{S} . \quad (2.5)$$

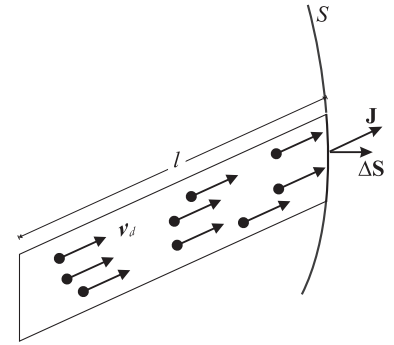
Comparando ahora (2.5) con (2.2), obtenemos la siguiente expresión para el vector densidad de corriente en el caso de que exista un único tipo de portadores:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d . \quad (2.6)$$

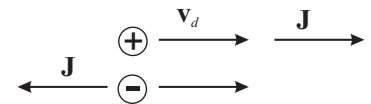
En aquellas situaciones en las que haya más de un tipo de portadores, la expresión (2.6) puede generalizarse y escribirse como

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_{d,i} . \quad (2.7)$$

Es interesante observar (según muestra la figura adjunta) que si tenemos cargas positivas y negativas fluyendo en el mismo sentido, la corriente respectiva estará dirigida en sentidos opuestos.



Vector densidad de corriente



**Ejemplo 2.1** Cálculo de la velocidad de desplazamiento de los electrones en un cable de Cu (densidad  $\rho = 8,93 \text{ g/cm}^3$  y masa atómica  $A = 63,55 \text{ g}$ ) de radio 0.8 mm que transporta una corriente de intensidad 20 mA.

Es interesante primero notar que para el caso de corriente continua en un cable (que generalmente presenta una sección transversal invariante), la expresión de la intensidad se reduce a

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S J dS = J \int_S dS = JS , \quad (2.8)$$

donde se ha supuesto que  $\vec{J} \parallel d\vec{S}$  y que  $J$  permanece constante en toda la sección transversal ( $n$  no varía en la sección y la velocidad de las cargas es la misma en toda la sección).

Puesto que  $J = nqv_d$ , de la expresión (2.8) se deduce que la velocidad de desplazamiento de las cargas móviles puede escribirse como

$$v_d = \frac{I}{nqS} .$$

Dado que la intensidad, la carga elemental  $q$  y la sección transversal pueden calcularse a partir de los datos del problema,  $v_d$  quedará determinada si conocemos el valor de  $n$ . Para calcular el número de electrones libres por  $\text{m}^3$  en el cobre,

supondremos que cada átomo de cobre aporta un electrón libre al metal, por lo que el número de éstos coincidirá con el número de átomos de Cu por  $\text{m}^3$ ,  $n_a$ . Para obtener  $n_a$  puede calcularse el número de moles por  $\text{m}^3$ ,  $\chi$ , y multiplicar este número por el número de átomos en un mol,  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ , esto es:  $n_a = \chi N_A$ . A su vez, el número de moles por  $\text{m}^3$  puede obtenerse como

$$\chi = \frac{\text{masa de } 1\text{m}^3}{\text{masa de un mol}} = \frac{\rho}{A},$$

por lo que  $n$  puede obtenerse a partir de la siguiente expresión:

$$n = N_A \frac{\rho}{A}.$$

Para el caso del Cu,  $A = 63,55\text{g}$  y  $\rho = 8,93\text{ g/cm}^3$ , por lo que

$$n = 6,02 \times 10^{23} \frac{8,93 \times 10^6}{63,55} = 8,46 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3.$$

La velocidad de desplazamiento será por tanto:

$$v_d = \frac{20 \times 10^{-3}}{8,46 \times 10^{28} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \cdot \pi(0,8 \times 10^{-3})^2} = 7,43 \times 10^{-7} \text{ m/s}.$$

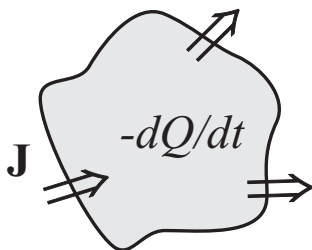
Obsérvese el valor tan pequeño de velocidad que se obtiene para el desplazamiento de los electrones en el interior del cable, aunque esta velocidad de desplazamiento tan pequeña no implica que haya que esperar un largo tiempo para que se inicie la corriente eléctrica. Algo similar ocurre en una columna de soldados respondiendo a la voz de “marcha”, aunque la velocidad de desplazamiento de los soldados pueda ser pequeña, la columna se pone en marcha de forma casi instantánea.

### (\*) Ecuación de continuidad de la carga

El principio de conservación local de la carga (ver Apartado 1.1) exigía que si cierta carga desaparecía de un lugar, esta misma carga debía haber viajado y aparecer posteriormente en otro lugar. Dado que la carga viajando constituye una corriente eléctrica, este principio puede expresarse en términos de dicha corriente eléctrica como

*La intensidad de corriente que atraviesa la superficie cerrada de un recinto es igual a menos la variación temporal de la carga móvil en su interior.*

Esta ley simplemente dice que si en cierto recinto entran, por ejemplo, 5 cargas por segundo y salen 2 cargas por segundo, entonces la carga en el interior del recinto aumenta a un ritmo de 3 cargas por segundo. En forma matemática, el principio anterior se conoce como **ecuación de continuidad para la carga** y puede expresarse como



$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}, \quad (2.9)$$

donde el signo menos delante del segundo miembro sólo indica que un flujo positivo (es decir, carga *saliendo* del recinto) está relacionado con una *disminución* de la carga en su interior. Dado que la carga en el interior



del recinto puede expresarse en términos de la densidad de carga volumétrica en su interior:  $Q = \int_V \rho dV$ , la expresión (2.9) puede reescribirse como

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.10)$$

Para el caso de corriente continua, donde no existen *variaciones temporales* de carga móvil en el interior de los conductores (dado que la carga por unidad de tiempo que atraviesa cualquier superficie es siempre la misma), se cumple que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

por lo que la ecuación de continuidad establece que

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.11)$$

Ecuación de continuidad en régimen estacionario

esto es, el flujo de corriente a través de un recinto cerrado es nulo; o lo que es lo mismo, la misma cantidad de carga que entra en el recinto sale de él.

## 2.3. Conductividad, Ley de Ohm

### 2.3.1. Conductividad eléctrica

El modelo más elemental de lo que sucede en un **conductor real** supone que las cargas móviles del conductor responden a la aplicación de un campo eléctrico externo acelerándose, pero que esta ganancia continua de energía cinética es compensada por una pérdida equivalente de energía debida a las continuas colisiones que sufren las cargas móviles (generalmente electrones) con los restos atómicos *fijos* del material conductor. Este proceso simultáneo de aceleración debido al campo eléctrico y desaceleración debido a las continuas colisiones es equivalente a un movimiento promedio en el que la velocidad de los portadores de carga permanece constante.

El complicado proceso interno puede simularse globalmente considerando que el resultado de las colisiones puede modelarse mediante el efecto de una fuerza *dissipativa*,  $\vec{F}_d = -\lambda \vec{v}_d$ , que se opone al movimiento. Según este sencillo modelo, la ley de movimiento de una de las partículas cargadas en el interior de un conductor real vendría dada por

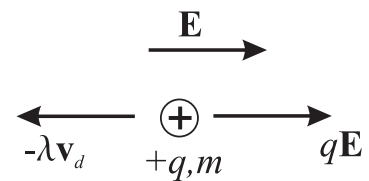
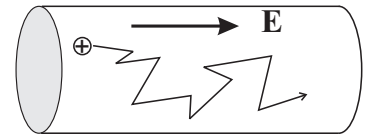
$$m \frac{d\vec{v}_d}{dt} = q\vec{E} - \lambda \vec{v}_d. \quad (2.12)$$

En la situación estacionaria en la que la velocidad de desplazamiento de las cargas permanece constante (esto es:  $d\vec{v}_d/dt = 0$ ), ésta podrá expresarse, según (2.12), como

$$\vec{v}_d = \frac{q}{\lambda} \vec{E},$$

y por tanto, dado que  $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ , el vector densidad de corriente vendrá dado por

$$\vec{J} = \frac{nq^2}{\lambda} \vec{E}. \quad (2.13)$$



Ley de Ohm para  $\vec{J}$  y  $\vec{E}$

Conductividad eléctrica

La anterior expresión manifiesta la existencia de una relación lineal entre el vector densidad de corriente y el campo eléctrico aplicado que puede expresarse como <sup>2</sup>

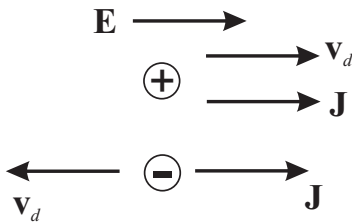
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} , \quad (2.14)$$

siendo  $\sigma$  un parámetro asociado al material que se conoce como **conductividad eléctrica** y que vendrá dado por

$$\sigma = \frac{nq^2}{\lambda} . \quad (2.15)$$

La conductividad eléctrica mide el grado de conducción eléctrica de los materiales, siendo mayor para aquellos materiales en los que la corriente eléctrica fluye con más facilidad (dado que  $\sigma$  es inversamente proporcional al parámetro  $\lambda$ ).

Es interesante notar que independientemente del signo de la carga, dado que ésta aparece al cuadrado, el sentido de la corriente es siempre el mismo que el del campo eléctrico aplicado.



### 2.3.2. Ley de Ohm circuital

Si un conductor filiforme dotado de cierta conductividad  $\sigma$  se sitúa en una región donde existe un campo eléctrico  $\vec{E}$ , este campo eléctrico *pene-tr*a en el conductor (a diferencia de un conductor perfecto donde  $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ ) y “afectará” a las cargas móviles dando lugar a una corriente eléctrica. La integral de camino del campo eléctrico entre dos puntos del conductor será justamente la diferencia de potencial entre esos dos puntos, esto es,

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(1) - V(2) \equiv V_{12} .$$

Esta diferencia de potencial entre dos puntos es usualmente denominada **tensión** eléctrica, o simplemente tensión. Dado que el campo eléctrico puede relacionarse con la densidad de corriente mediante la ley de Ohm (2.14), se tiene que

$$V_{12} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} . \quad (2.16)$$

Supuesto que en el conductor filiforme de sección transversal  $S$ , el vector densidad de corriente pueda escribirse como

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{u} \quad (2.17)$$

(siendo  $\hat{u}$  el vector unitario en la dirección del conductor), el cálculo de la integral de camino (2.16) será entonces

$$V_{12} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{\sigma S} \int_1^2 \hat{u} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{\sigma S} \int_1^2 dl = \frac{l}{\sigma S} I , \quad (2.18)$$

donde  $l$  es distancia entre los puntos 1 y 2.

Obsérvese que se ha obtenido una relación *lineal* entre la diferencia de potencial entre dos puntos del conductor y la intensidad de la corriente eléctrica que circula por él. Esta relación se puede escribir de forma genérica como

Ley de Ohm circuital

<sup>2</sup>En general esta ley también será válida para campos eléctricos *no electrostáticos*.

$$V = RI \quad (2.19)$$

que se conoce como *ley de Ohm circuital* (enunciada por G.S. Ohm en 1827), donde el parámetro  $R$ , denominado **resistencia** del material, es para el conductor filiforme

$$R = \frac{l}{\sigma S} . \quad (2.20)$$

La resistencia es una característica de cada conductor que depende de su constitución material (a través de  $\sigma$ ) y de su geometría. La unidad de resistencia en el SI es el **ohmio** ( $\Omega$ ), siendo

$$1 \text{ ohmio} = \frac{1 \text{ voltio}}{1 \text{ amperio}} , \quad 1 \Omega = 1 \text{ V/A} .$$

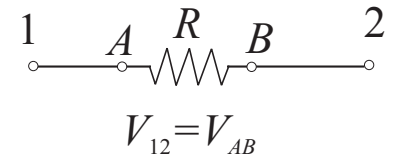
Resistencia de un conductor filiforme

Unidad de Resistencia:  
1 ohmio ( $\Omega$ )

A diferencia de lo que ocurre en un conductor *perfecto*, que es equipotencial, la presencia de una resistencia (esto es, la existencia de una pérdida de energía de los portadores de carga móviles debido a las colisiones con los restos atómicos fijos) se manifiesta en una caída de potencial, o tensión, a lo largo del conductor *real* si éste es recorrido por una corriente.

A partir de (2.20) podemos deducir que las unidades de conductividad  $\sigma$  son inversamente proporcional a la resistencia y longitud, por lo que las unidades de conductividad suelen darse en  $(\Omega\text{m})^{-1}$ . La conductividad eléctrica es una de las magnitudes que más varían de un material a otro: desde  $10^{-15}(\Omega\text{m})^{-1}$  para materiales muy poco conductores (dieléctricos) hasta  $10^8(\Omega\text{m})^{-1}$  en metales muy buenos conductores como el cobre o la plata. Puesto que la conductividad de los metales suele ser muy alta y, por tanto, su resistencia muy baja, en múltiples situaciones prácticas (por ejemplo, en la mayoría de los circuitos) se considera que *no hay caída de potencial en los conductores metálicos* sino que toda la caída de potencial se da en unos elementos específicos de menor conductividad llamados **resistencias**.

Unidad de conductividad eléctrica:  
1  $(\Omega\text{m})^{-1}$



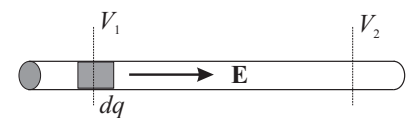
## 2.4. Efecto Joule

En los apartados anteriores se ha discutido que la presencia de corriente eléctrica en un conductor real lleva aparejado un proceso disipativo de energía fruto de las continuas colisiones de los portadores móviles con los restos atómicos fijos. Este proceso disipativo implica una pérdida de energía cinética de los portadores de carga en forma de calor que se transmite al material conductor. La presencia de una caída de potencial en un conductor real (cuando éste es recorrido por una corriente eléctrica) provoca que para desplazar un diferencial de carga,  $dq$ , desde el punto de potencial  $V_1$  al punto de potencial  $V_2$ , el campo eléctrico externo deba realizar un trabajo. Si la diferencia de potencial entre estos dos puntos es  $V = V_1 - V_2$ , este trabajo viene dado, según (1.71), por

$$dW = dq(V_1 - V_2) = dqV .$$

Teniendo ahora en cuenta que el elemento de carga,  $dq$ , es parte de una corriente  $I$  que circula por el conductor, podremos escribir que:  $dq = Idt$ ; por lo que el diferencial de trabajo realizado por el campo podrá expresarse como

$$dW = IVdt . \quad (2.21)$$



En consecuencia, el ritmo temporal con el que se realiza este trabajo, que coincidirá con la potencia,  $P = dW/dt$ , disipada en forma de calor en la resistencia, vendrá dado por

Ley de Joule

$$P = IV = I^2 R = V^2 / R . \quad (2.22)$$

Esta ley para la potencia disipada en una resistencia fue deducida experimentalmente por J.P. Joule sobre 1841.

**Ejemplo 2.2** Dos conductores de la misma longitud y el mismo radio se conectan a través de la misma diferencia de potencial. Si uno de los conductores tiene el doble de resistencia que el otro, ¿cuál de los dos conductores disipará más potencia?

Si la resistencia del conductor 1 es  $R_1 = R$  y la del conductor 2 es  $R_2 = 2R$ , entonces, de acuerdo con la expresión (2.22), las potencias disipadas en cada conductor son:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{V^2}{R_1} = \frac{V^2}{R} \\ P_2 &= \frac{V^2}{R_2} = \frac{V^2}{2R} , \end{aligned}$$

por lo que:

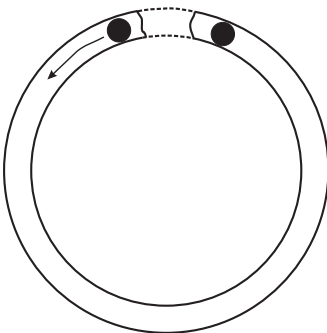
$$P_1 = 2P_2 .$$

Esto quiere decir que, supuesta igual la diferencia de potencial en los conductores, aquel conductor con menor resistencia es el que disipa mayor cantidad de potencia.

¿Qué ocurriría si los conductores anteriores fuesen recorridos por la misma intensidad?

## 2.5. Fuerza electromotriz

Antes de analizar el proceso de mantenimiento de una corriente continua, detengámonos un momento en el análisis de una “corriente continua de masa”. En el dibujo adjunto se muestran bolitas que se mueven en el interior de un tubo cerrado sobre sí mismo. La cuestión es: ¿puede existir un movimiento constante de masa en la situación anterior?. Obviamente, bajo el efecto único del campo gravitatorio, una bolita que sale de la parte superior no podrá llegar a un punto más alto que aquél desde el cual ha partido y, por tanto, no puede producir un movimiento circular continuo (es decir, no puede alcanzar un punto de potencial gravitatorio mayor que el de partida). No obstante, si además existe *rozamiento*, habrá una pérdida de energía cinética en forma de calor que provocará que la bolita no alcance el punto teórico de máxima altura sino que se detendrá en un punto de altura menor. En definitiva, la bolita en el dispositivo anterior no podrá realizar un movimiento circular mantenido sino que sólo podrá realizar un movimiento oscilatorio que desaparecerá tras unas cuantas oscilaciones. Por tanto, podemos afirmar que el campo gravitatorio, que es *conservativo*, no es capaz de mantener una corriente continua de masa. Para conseguir una corriente continua de masa se debe añadir al



sistema anterior un elemento que proporcione el “empuje” adicional necesario a las masas para que puedan continuar su movimiento. Claramente este elemento adicional debe producir un campo de naturaleza distinta al gravitatorio (esto es, no conservativo).

La misma cuestión puede ahora plantearse respecto al mantenimiento de una corriente de cargas eléctricas por un campo electrostático. En este caso, y debido a la naturaleza conservativa del campo electrostático, la respuesta sigue siendo NO, por razones análogas a las del caso anterior. En otras palabras, el trabajo por unidad de carga que realiza el campo electrostático,  $\vec{E}_{\text{els}}$ , en un recorrido circular de la carga es nulo,

$$\frac{W}{q} = \oint \vec{E}_{\text{els}} \cdot d\vec{l} = 0 ,$$

debido al carácter conservativo de  $\vec{E}_{\text{els}}$ . Dado que en cualquier situación real siempre existe una pérdida de energía debido al efecto Joule, para mantener un movimiento continuo de cargas debemos introducir un elemento externo que proporcione a las cargas móviles el “impulso externo” necesario para compensar esta pérdida constante de energía. El agente de este impulso externo a las cargas no puede ser claramente un campo electrostático pues éste proporcionaría siempre una energía nula por ciclo.

Puesto que el impulso sobre los portadores móviles puede estar localizado en una parte concreta del circuito o bien distribuido a lo largo de éste, lo que importa es la integral a lo largo de todo el circuito de la fuerza por unidad de carga,  $\vec{f}$ , que origina este impulso. Generalmente esta fuerza por unidad de carga puede identificarse con un campo eléctrico no electrostático,  $\vec{f} = \vec{E}/q$ . La circulación de dicho campo se conoce como **fuerza electromotriz**,  $\mathcal{E}$ , (denotada usualmente como “fem”):

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{circuito}} \vec{E} \cdot d\vec{l} , \quad (2.23)$$

Fuerza electromotriz (fem)

esto es, la fuerza tangencial por unidad de carga integrada sobre la longitud del circuito completo (esta cantidad es igual a la energía por unidad de carga suministrada en cada ciclo por el agente externo). Debe notarse que la denominación de “fuerza” electromotriz es un poco desafortunada, dado que  $\mathcal{E}$  no tiene unidades de fuerza sino de fuerza por unidad de carga (o sea, de campo eléctrico) y por longitud, que son precisamente unidades de potencial eléctrico (recuérdese que, según (1.37), el potencial se define como la integral de camino del campo electrostático). Por consiguiente, las unidades de fuerza electromotriz son voltios. No obstante, es importante aclarar que la fuerza electromotriz NO es una diferencia de potencial,

$$\mathcal{E} \neq \Delta V ,$$

Unidad de fem : 1 voltio (V)

puesto que el agente de fem no puede ser un campo electrostático,  $\vec{E}_s$  (campo de circulación nula), sino un campo de naturaleza no electrostática que llamaremos **campo electromotor**,  $\vec{E}_m$ . El agente físico concreto responsable de este campo electromotor puede ser muy diverso, por ejemplo: fuerzas de origen químico en una batería, fuerza mecánica en un generador de Van de Graaff, la luz en una célula fotoeléctrica, la presión mecánica en un cristal piezoeléctrico, etc...

Podemos, por tanto, establecer que la existencia de una corriente eléctrica continua en un circuito requiere la acción de un agente externo, usualmente denominado **generador de fem** (o también, fuente de tensión), que proporcione el campo electromotor necesario para “empujar” las cargas positivas/negativas hacia potenciales crecientes/decrecientes en contra del efecto del campo electrostático. Este hecho queda de manifiesto en la parte (a) de la Fig. 2.1, donde al realizar la circulación del

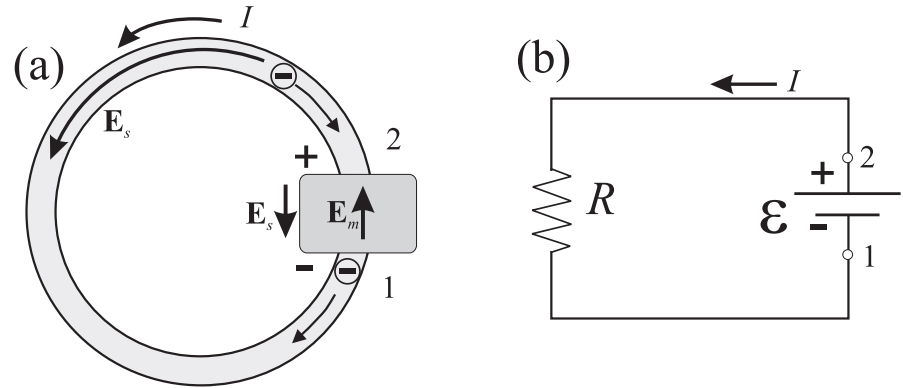


Figura 2.1: (a) Esquema físico de la acción de un generador de fuerza electromotriz. (b) Representación circuital del esquema anterior

campo total,  $\vec{E}_T = \vec{E}_s + \vec{E}_m$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \\ &= \int_1^2 \vec{E}_m \cdot d\vec{l}\end{aligned}\quad (2.24)$$

se obtiene que la fuerza electromotriz es justamente la integral de camino del campo electromotor entre los puntos 1 y 2. En términos circuitales, la representación de la situación anterior se muestra en la parte (b) de la figura.

### Potencia suministrada por el generador

El trabajo que realiza el generador (en concreto, el campo electromotor,  $\vec{E}_m$ ) para mover un diferencial de carga  $dq$  vendrá dado por

$$dW = dq \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = dq\mathcal{E} . \quad (2.25)$$

Puesto que este diferencial de carga forma parte de una corriente, tendremos que  $dq = I dt$  y por tanto

$$dW = I\mathcal{E} dt . \quad (2.26)$$

De la expresión anterior podemos deducir que la potencia,  $P$ , suministrada por el generador es

Potencia suministrada por el  
generador de fem

$$P = I\mathcal{E} . \quad (2.27)$$

## 2.6. Reglas de Kirchhoff

### 2.6.1. Regla de Kirchhoff de las tensiones

Si calculamos la integral de camino del campo total,  $\vec{E}_t$ , entre los puntos 1 y 2 de la rama (asociación de elementos en serie recorridos por la misma intensidad) mostrada en la figura adjunta, tendremos que

$$\int_1^2 \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_m \cdot d\vec{l}. \quad (2.28)$$

Ahora bien, según la expresión (2.14), el primer miembro de la expresión anterior se puede reescribir como

$$\int_1^2 \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l}. \quad (2.29)$$

Suponiendo válida la expresión (2.17) y operando obtenemos que

$$\int_1^2 \vec{E}_T \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{I}{\sigma S} dl = IR. \quad (2.30)$$

El sentido de la intensidad se supone inicialmente fluyendo en el sentido de recorrido del punto 1 al punto 2.

El primer término del segundo miembro es justamente la integral de camino del campo electrostático entre los puntos 1 y 2, esto es, la diferencia de potencial entre ambos puntos (o tensión):

$$\int_1^2 \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = V_{12}.$$

Dado que el segundo término es, por definición, la fuerza electromotriz del generador, la expresión (2.28) puede reescribirse como

$$IR = V_{12} + \mathcal{E}, \quad (2.31)$$

o bien:

$$V_{12} = IR - \mathcal{E}. \quad (2.32)$$

Es interesante notar que si entre los puntos 1 y 2 sólo existiese el generador de fuerza electromotriz ( $R = 0$ ), de acuerdo con la ecuación anterior, la caída de tensión  $V_{21}$  es numéricamente igual al valor de la fuerza electromotriz,  $\mathcal{E}$ , del generador. (La misma situación se daría,  $V_{21} = \mathcal{E}$ , si no circulase intensidad por la rama aunque  $R \neq 0$ ).

Si en vez de una sola resistencia y generador tenemos una rama con varios de ellos, entonces, la aplicación del anterior razonamiento nos dice que

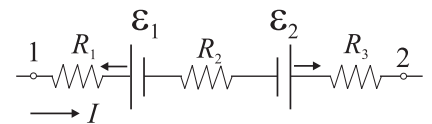
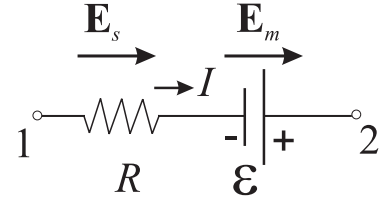
$$V_{12} = I(R_1 + R_2 + R_3) - (-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2),$$

que de forma general se puede escribir como

$$V_{12} = I \sum R_i - \sum \mathcal{E}_i, \quad (2.33)$$

donde el signo de la correspondiente  $\mathcal{E}_i$  se toma:

$$\text{sign}(\mathcal{E}) = \begin{cases} + & \text{si sentido } \vec{E}_m = \text{sentido recorrido} \\ - & \text{si sentido } \vec{E}_m \neq \text{sentido recorrido} . \end{cases}$$



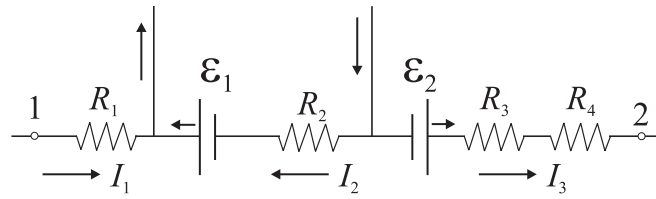


Figura 2.2:

En un caso todavía más general como el que se muestra en la Figura 2.2, donde tenemos varias ramas recorridas por diferentes corrientes, el cálculo de la integral de camino entre los puntos 1 y 2 nos dice que

$$V_{12} = [I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4)] - (-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) ,$$

donde el signo de la intensidad se toma positivo si su sentido de recorrido coincide con el del camino del punto 1 al 2 y negativo si no coincide. En general, la expresión anterior se puede expresar como

Regla de Kirchhoff para la tensión.

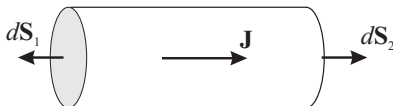
$$V_{12} = \sum_j I_j R_j - \sum_i \mathcal{E}_i , \quad (2.34)$$

(donde  $R_j$  es la resistencia total de la rama  $j$  recorrida por la intensidad  $I_j$ ) y se conoce como **regla de Kirchhoff para la tensión**.

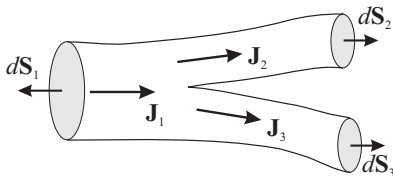
### 2.6.2. Regla de Kirchhoff de las intensidades

Si la expresión (2.11) se aplica a un cable, ésta dice que

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ &= \vec{J} \cdot \vec{S}_1 + \vec{J} \cdot \vec{S}_2 = -I + I = 0 . \end{aligned}$$



Para el caso de tres ramas de un circuito que confluyen en un nudo, al aplicar (2.11) obtenemos:



$$\begin{aligned} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ &= \vec{J}_1 \cdot \vec{S}_1 + \vec{J}_2 \cdot \vec{S}_2 + \vec{J}_3 \cdot \vec{S}_3 = -I_1 + I_2 + I_3 = 0 , \end{aligned}$$

donde los valores de las distintas intensidades serán negativos (si la carga entra en el recinto) o positivos (si la carga sale del recinto).

Si la expresión anterior se generaliza para un nudo con  $N$  ramas, se obtiene la **regla de Kirchhoff para las intensidades**:

Regla de Kirchhoff para las intensidades

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 , \quad (2.35)$$

que establece que

*la suma de todas las intensidades en un nudo es nula.*



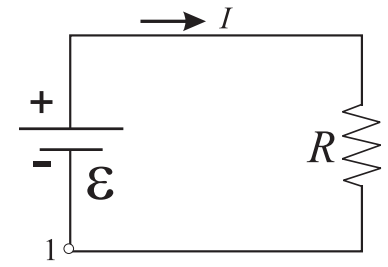
## 2.7. Aplicación a circuitos de CC

Denominaremos circuito de corriente continua (cc) a la interconexión de un número arbitrario de resistencias y generadores de cc. La interconexión puede tener cualquier topología, siendo la más simple la mostrada en la figura adjunta. La aplicación de las dos reglas de Kirchhoff anteriores conducirá, en general, a un sistema de ecuaciones, cuya resolución nos dará los valores de las magnitudes buscadas. Para el caso simple de la anterior figura, tendremos que solo existe una intensidad,  $I$ , que recorre el circuito. La aplicación de la regla de Kirchhoff (2.32) para la tensión al anterior circuito (recorrido en el sentido horario desde el punto 1 hasta él mismo) dice que

$$V_{11} = 0 = IR - \mathcal{E} ,$$

por lo que la intensidad será

$$I = \mathcal{E}/R .$$



Para un circuito más complejo como el mostrado en la Fig. 2.3, tomamos

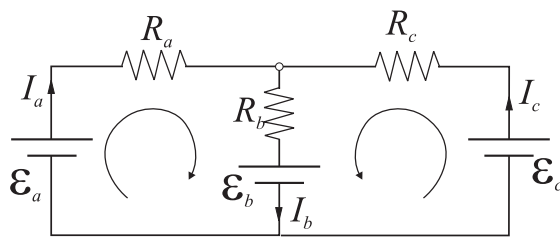


Figura 2.3:

como incógnitas las intensidades que recorren cada rama:  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ . Las reglas de Kirchhoff dan lugar al siguiente sistema lineal de tres ecuaciones:

$$I_a R_a + I_b R_b = \mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b \quad (2.36a)$$

$$I_c R_c + I_b R_b = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_b \quad (2.36b)$$

$$I_b = I_a + I_c , \quad (2.36c)$$

que tras sustituir  $I_b$  queda como

$$I_a(R_a + R_b) + I_c R_b = \mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b \quad (2.37a)$$

$$I_a R_a + I_c(R_b + R_c) = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_b . \quad (2.37b)$$

La resolución del anterior sistema por cualquiera de los métodos conocidos permitirá obtener las intensidades en cada una de las ramas.

### (\*) Método de las corrientes de malla

Existen algunas métodos que permiten resolver los **circuitos lineales** (circuitos cuyos componentes muestran una relación lineal entre la intensidad y la tensión) planteando de forma sistemática un sistema de ecuaciones para ciertas variables auxiliares. Uno de estos métodos es el

conocido como *método de las corrientes de malla*. Este método simplemente “reorganiza” las expresiones resultantes de la aplicación de las reglas de Kirchhoff, de modo que las variables incógnitas son las denominadas **intensidades de malla**. Antes de presentar el método, es conveniente determinar con precisión el significado de ciertas denominaciones:

- **Rama:** Conexión en serie de componentes.
- **Nudo:** Punto en el que concurren tres o más ramas.
- **Red:** Conjunto de nudos y ramas.
- **Malla:** Recorrido de una red, tal que partiendo de un punto se vuelve a él sin pasar dos veces por un mismo nudo.

En la aplicación del método, se debe empezar identificando un número mínimo de mallas que recubra completamente el circuito. En el caso del circuito de la Figura 2.3, podemos comprobar que el circuito es recubierto por al menos dos mallas, siendo su elección más trivial, la malla de la izquierda (malla 1) y la de la derecha (malla 2). Para cada una de estas mallas definiremos su intensidad de malla respectiva (con su sentido) como aquella intensidad que recorre la malla:  $I_1$  e  $I_2$ ; de modo que  $I_1$  es la intensidad que recorre la rama  $a$  y parcialmente la rama  $b$ . Por su parte, la intensidad de la rama  $b$  vendrá dada por

$$I_b = I_1 + I_2 .$$

En general, el sistema planteado para las intensidades de malla,  $I_j$ , es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \sum_{j=1}^N R_{ij} I_j \\ i &= 1, \dots, N , \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde

- $N$  es el número de mallas;
- $\mathcal{E}_i$  es la fem *total* de la malla, tomando el signo de cada f.e.m. parcial positivo si el campo electromotor va en el mismo sentido que la intensidad de malla, y negativo en otro caso;
- $R_{ij}$  es la resistencia total *común* de la malla  $i$  y  $j$ , cuyo signo será

$$\text{sign}(R_{ij}) = \begin{cases} + & \text{si sentido } I_i = \text{sentido } I_j \\ - & \text{si sentido } I_i \neq \text{sentido } I_j . \end{cases}$$

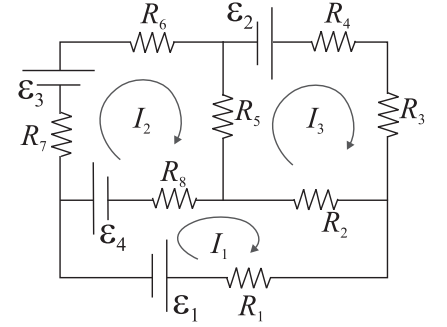
Si aplicamos la técnica anterior al circuito de la Figura 2.3, obtendremos el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b \\ \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + R_b & R_b \\ R_b & R_b + R_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Ejemplo 2.3 Obtenga el sistema de ecuaciones para las intensidades de malla del siguiente circuito de tres mallas

En el circuito de la figura adjunta definimos una intensidad para cada una de las mallas señaladas, tomando el sentido de esta intensidad tal y como se muestra en la figura. Siguiendo los criterios de signos ya señalados para las resistencias y fuerzas electromotrices, encontramos que el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial que caracteriza al circuito es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4 \\ \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 \\ \mathcal{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_8 & -R_8 & -R_2 \\ -R_8 & R_5 + R_6 + R_7 + R_8 & -R_5 \\ -R_2 & -R_5 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$



### 2.7.1. Teorema de superposición

En aquellos circuitos en los que existe más de una fuente de tensión podemos usar el principio de superposición para derivar el siguiente teorema (es básicamente el principio de superposición aplicado a circuitos):

*La respuesta en cualquier elemento de un circuito lineal que contenga dos o más fuentes es la suma de las respuestas obtenidas para cada una de las fuentes actuando separadamente y con todas las demás fuentes anuladas.*

Para demostrar este teorema podemos partir del sistema de ecuaciones que nos daba el método de análisis de mallas,

$$[\mathcal{E}] = [R][I] , \quad (2.40)$$

o, equivalentemente,

$$[I] = [R]^{-1}[\mathcal{E}] . \quad (2.41)$$

Si ahora consideramos una descomposición de las fuentes, de manera que

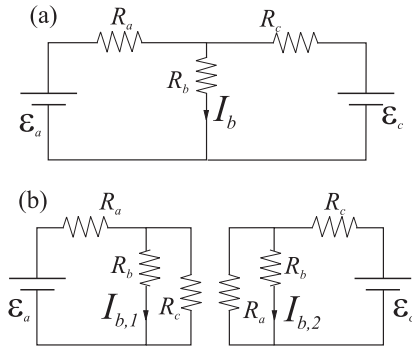
$$[\mathcal{E}] = \alpha[\mathcal{E}]_1 + \beta[\mathcal{E}]_2 , \quad (2.42)$$

tendremos entonces que existe una descomposición análoga para la intensidad,

$$\begin{aligned} [I] &= [R]^{-1}[\mathcal{E}] = \alpha[R]^{-1}[\mathcal{E}]_1 + \beta[R]^{-1}[\mathcal{E}]_2 \\ &= \alpha[I]_1 + \beta[I]_2 . \end{aligned} \quad (2.43)$$

La ecuación anterior muestra que toda combinación lineal de fuerzas electromotrices provoca una correspondiente combinación lineal de intensidades.

Ejemplo 2.4 Aplicar el teorema de superposición para calcular la intensidad  $I_b$  en el circuito de la parte (a) de la figura.



El cálculo de la corriente  $I_b$  mediante la aplicación del teorema de superposición requiere la descomposición de la excitación provocada por las dos fuentes en dos excitaciones distintas debidas a cada una de las fuentes actuando por separado. De esta manera

$$I_b = I_{b,1} + I_{b,2} ,$$

y, por tanto, debemos resolver dos problemas más simples según muestra la parte (b) de la figura. Para calcular  $I_{b,1}$ , tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\mathcal{E}_a = I_a R_a + I_{b,1} R_b$$

$$I_{b,1} R_b = I_c R_c$$

$$I_a = I_{b,1} + I_c .$$

Asimismo para calcular  $I_{b,2}$ , se resolverá

$$\mathcal{E}_c = I_c R_c + I_{b,2} R_b$$

$$I_{b,2} R_b = I_a R_a$$

$$I_c = I_{b,2} + I_a .$$

Aunque el ejemplo anterior no muestra ninguna ventaja de cálculo en la resolución del circuito, existen múltiples situaciones en las que la aplicación de este teorema puede ser muy beneficioso para simplificar los cálculos. Una situación en la que este teorema muestra su utilidad se encuentra cuando tengamos en un mismo circuito fuentes de corriente continua y de corriente alterna. Algún ejemplo de esta situación se mostrará en el tema de corriente alterna.

### 2.7.2. Teorema de Thevenin

Este teorema puede enunciarse de la siguiente manera:

*En un circuito de CC que contenga resistencias y fuentes de fem del cual salen dos terminales, éstos pueden ser considerados a efectos de cálculo como los terminales de un circuito que contiene una única fuente de tensión,  $\mathcal{E}_{TH}$ , de valor igual a la diferencia de potencial que aparece entre los terminales, y una única resistencia,  $R_{TH}$ , equivalente a la que aparece entre los terminales cuando se anulan todas las fuentes de fem del circuito.*

El contenido del teorema puede interpretarse diciendo que todo circuito lineal activo con terminales de salida  $A$  y  $B$  puede sustituirse por una fuente de tensión en serie con una resistencia (ver Fig. 2.4). Los valores concretos de esta fuente de tensión y de la resistencia se determinan según el procedimiento descrito por el propio teorema.

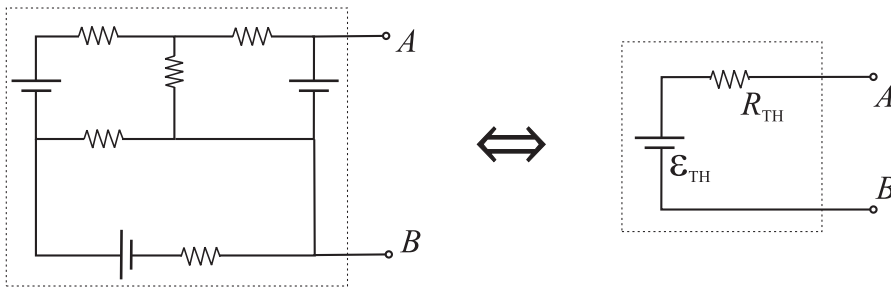


Figura 2.4: Red compuesta por múltiples fuentes de fem y resistencias junto con su circuito equivalente Thevenin.

### Ejemplo 2.5 Calcular el equivalente Thevenin del circuito de la figura

Para aplicar el teorema de Thevenin, debemos calcular el valor de la resistencia y de la fuente de tensión de Thevenin.

En primer lugar calcularemos  $R_{TH}$ , para lo cual debe obtenerse la resistencia equivalente cuando se anula (cortocircuita) la fuente. En primer lugar obtenemos la resistencia paralelo,  $R_{||}$ , debido a las resistencias de  $60\Omega$  y  $40\Omega$ :

$$\frac{1}{R_{||}} = \frac{1}{40} + \frac{1}{60},$$

de donde  $R_{||} = 24\Omega$ . La resistencia Thevenin será simplemente

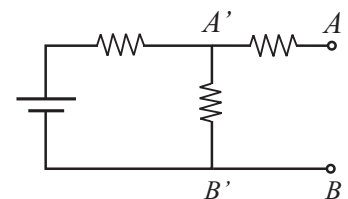
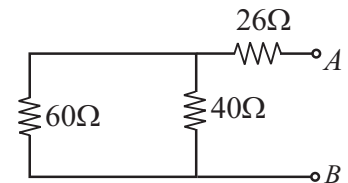
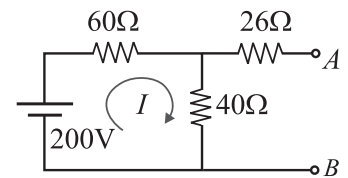
$$R_{TH} = R_{||} + 26 = 50\Omega.$$

Para obtener la fuente de tensión Thevenin, obtendremos la diferencia de potencial entre los terminales A y B dado que  $\mathcal{E}_{TH} = V_{AB}$ . La intensidad,  $I$ , que recorre el circuito será

$$I = \frac{200 \text{ V}}{60\Omega + 40\Omega} = 2 \text{ A}.$$

Teniendo en cuenta que por las ramas A o B no circula intensidad, tenemos que:  $V_{AB} = V_{A'B'}$  y por tanto

$$\mathcal{E}_{TH} = 40I = 80 \text{ V}.$$



### 2.7.3. Teorema de Norton

Este teorema puede enunciarse de la siguiente manera:

*En un circuito de CC que contenga resistencias y fuentes de fem del cual salen dos terminales, éstos pueden ser considerados a efectos de cálculo como los terminales de un circuito que contiene un generador de corriente,  $I_{NR}$ , de valor igual a la intensidad de la corriente que aparece entre los terminales en cortocircuito, y una resistencia en paralelo,  $R_{NR}$ , equivalente a la que aparece entre los terminales cuando se anulan todas las fuentes de fem del circuito.*

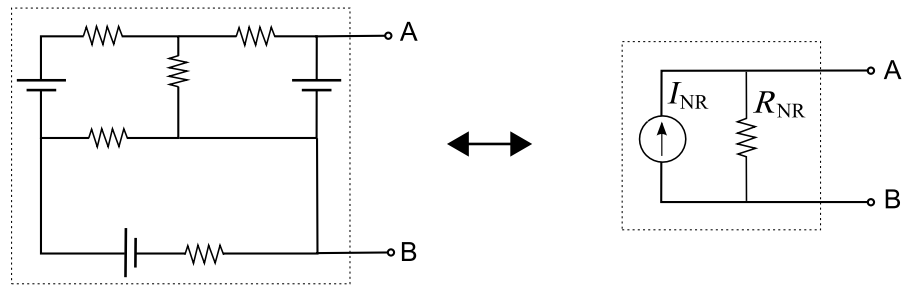


Figura 2.5: Red compuesta por múltiples fuentes de fem y resistencias junto con su circuito equivalente Thevenin.

El contenido del teorema puede interpretarse diciendo que todo circuito lineal activo con terminales de salida  $A$  y  $B$  puede sustituirse por un generador de corriente en paralelo con una resistencia (ver Fig. 2.5). Los valores concretos de esta fuente de intensidad y de la resistencia se determinan según el procedimiento descrito por el propio teorema.

Nótese que los equivalentes Thevenin y Norton están relacionados mediante las siguientes expresiones

$$I_{NR} = \frac{\mathcal{E}_{TH}}{R_{TH}} \quad \text{y} \quad R_{NR} = R_{TH} .$$

#### 2.7.4. Balance de potencia

En los apartados 2.4 y 2.5 se ha discutido la potencia disipada en una resistencia y la proporcionada por una fuente de tensión. En un circuito compuesto de varias fuentes de tensión y resistencias resulta evidente, a partir del principio de conservación de la energía, que la potencia total (energía por unidad de tiempo) disipada en todas las resistencias debe coincidir con la potencia suministrada por el conjunto de todas las fuentes. En otras palabras, si tenemos  $N$  fuentes de tensión, cada una de ellas suministrando una potencia dada por

$$P(\mathcal{E}_n) = I_n \mathcal{E}_n$$

(siendo  $I_n$  la intensidad de la corriente que circula por la fuente  $\mathcal{E}_n$ ) y  $M$  resistencias, disipando cada una de ellas una potencia

$$P(R_m) = I_m V_m$$

(siendo  $V_m$  e  $I_m$  respectivamente la caída de tensión y la intensidad en la resistencia  $R_m$ ), entonces debe cumplirse que

$$\sum_{n=1}^N P(\mathcal{E}_n) = \sum_{m=1}^M P(R_m) , \quad (2.44)$$

o equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^N I_n \mathcal{E}_n = \sum_{m=1}^M I_m V_m = \sum_{m=1}^M I_m^2 R_m = \sum_{m=1}^M V_m^2 / R_m . \quad (2.45)$$

Potencia suministrada por todas las fuentes de tensión debe ser igual a potencia consumida en todas las resistencias

## 2.8. Circuito RC. Carga y descarga de un condensador

Un circuito RC será aquel formado por resistencias, condensadores y generadores de fuerza electromotriz. La principal diferencia con los circuitos con generadores y resistencias que hemos visto hasta ahora reside en el hecho de que el condensador sufre procesos *temporales* de carga y descarga, lo que hace que la corriente que fluya por el circuito sufra una variación temporal, denominada **transitorios**, hasta que se alcanza finalmente un régimen estacionario.

### Descarga de un condensador

Veamos lo anteriormente expuesto en el proceso de descarga de un condensador. Supongamos que el condensador de capacidad  $C$  ha sido cargado previamente, adquiriendo una carga final  $Q_0$ . Si como muestra la Fig. 2.6 el interruptor se cierra en el instante  $t = 0$ , entonces empezará a fluir carga desde una placa a otra del condensador a través del circuito

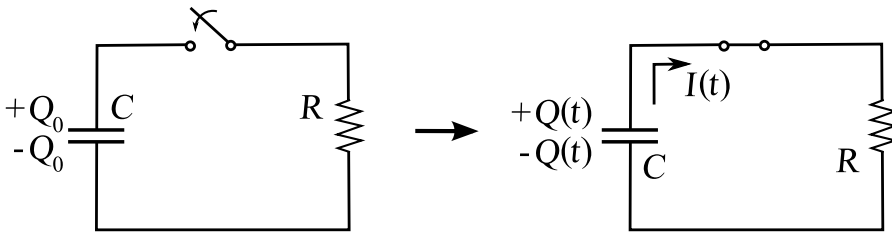


Figura 2.6: Esquema de la descarga de un condensador a través de un circuito con una resistencia.

con la resistencia  $R$ . Ciertamente este proceso continuará hasta que se anule la carga en las placas del condensador (y consecuentemente la diferencia de potencial entre dichas placas). La ecuación que rige el anterior proceso viene dada por la regla de Kirchhoff de las tensiones, que nos dice que

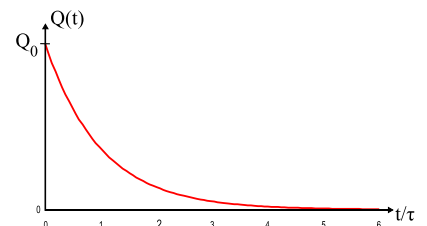
$$V_C = V_R . \quad (2.46)$$

Teniendo en cuenta que  $V_C = Q/C$  y que  $V_R = RI = R dQ/dt$ , la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} \implies \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{RC} = 0 . \quad (2.47)$$

Notemos que la anterior ecuación es una *ecuación diferencial*, lo que significa que los distintos términos de la ecuación relacionan cierta función con sus derivadas. En otras palabras debemos encontrar la función  $Q(t)$  cuya derivada sea igual a ella misma multiplicada por  $1/RC$ . Es fácil reconocer que la única función cuya derivada es proporcional a ella misma es la función *exponencial*. En este sentido podemos comprobar que la solución a la ecuación (2.47) es

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} , \quad (2.48)$$



donde  $Q_0$  es precisamente el valor de la carga en el condensador en el instante  $t = 0$  ( $Q(0) = Q_0$ ).

La expresion anterior nos dice que la carga en el condensador va decreciendo de forma exponencial, siendo el factor  $\tau = RC$ , denominado *constante de tiempo*, el que rige el ritmo de decrecimiento. Podemos comprobar que para tiempos  $t \gtrsim 4\tau$  la carga del condensador es prácticamente despreciable y podemos considerar, a efectos prácticos, que el condensador ya se ha descargado.

Para calcular la intensidad de la corriente que fluye en el proceso de descarga simplemente debemos derivar la expresión (2.48) para obtener

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}, \quad (2.49)$$

donde  $I_0$  es el valor de la intensidad de la corriente en el instante  $t = 0$ ,  $I(0) = I_0 = Q_0/RC$ .

### Carga de un condensador

El proceso contrario a la descarga del condensador será precisamente la carga de dicho condensador. En este proceso debemos contar con un generador de fuerza electromotriz,  $\mathcal{E}$ , que nos proporcione la energía suficiente para llevar a cabo este proceso. Consideremos el circuito mostrado en la Fig. 2.7. Si en el instante  $t = 0$  cerramos el interruptor del circuito

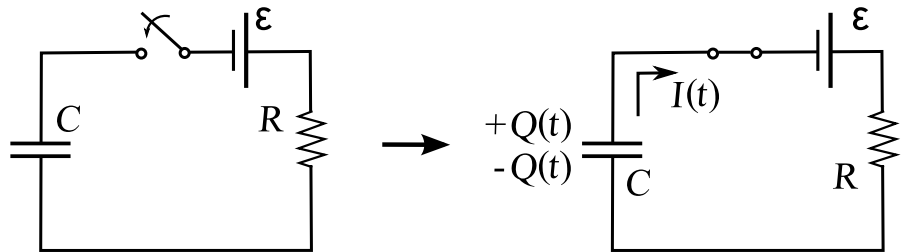


Figura 2.7: Esquema de la carga de un condensador a través de un circuito con una resistencia  $R$  y un generador de fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$ .

y suponemos el condensador inicialmente descargado  $Q(t = 0) = 0$ , entonces a partir de dicho momento el generador provoca un movimiento de cargas entre las placas del condensador que sólo cesará cuando la diferencial de potencial entre las placas del mismo se iguale al valor de la fuerza electromotriz. Aplicando la regla de Kirchooff de las tensiones al circuito tenemos que

$$\mathcal{E} = V_C + V_R, \quad (2.50)$$

ecuación que podemos reescribir como

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} \implies \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (2.51)$$

Esta ecuación diferencial es muy similar a (2.47) excepto en el miembro no nulo de la derecha. La solución es similar a la de (2.47) aunque ahora debemos añadir un término más, y así obtendremos que

$$Q(t) = C\mathcal{E} + Q' e^{-t/RC}. \quad (2.52)$$



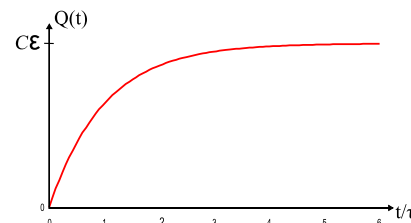
El coeficiente  $Q'$  podemos obtenerlo a partir de la *condición inicial* para la carga, que nos decía que  $Q(t=0) = 0$ . Aplicando esta condición a (2.52) obtenemos que

$$C\mathcal{E} + Q = 0 \implies Q' = -C\mathcal{E},$$

lo que nos permite escribir finalmente que

$$Q(t) = C\mathcal{E} \left( 1 - e^{-t/RC} \right). \quad (2.53)$$

Notemos que el proceso de carga viene caracterizado por una función monótonamente creciente, de manera que el tránsito de carga dura aproximadamente un tiempo  $t \approx 4\tau$ . Dependiendo de los valores de  $R$  y  $C$  este intervalo de carga (y también el de descarga) puede durar desde tiempos casi infinitesimales hasta tiempos del orden de segundos.



## 2.9. Problemas propuestos

**2.1:** En un tubo fluorescente de 3 cm de diámetro pasan por un punto y por cada segundo  $2 \times 10^{18}$  electrones y  $0,5 \times 10^{18}$  iones positivos (con una carga  $+q_e$ ) ¿Cuál es la intensidad de la corriente en el tubo?.

**Sol.** 0,4 A.

**2.2:** Para saber la longitud del cable que ha sido arrollado en una bobina se mide la resistencia de este cable, encontrándose un valor de  $5,18 \Omega$ . Si la resistencia de una longitud de 200 cm de este mismo cable es de  $0,35 \Omega$ , ¿cuál era la longitud inicial del cable en la bobina?.

**Sol.:**  $l = 2960$  cm.

**2.3:** **a)** ¿Cuál es el valor del módulo del campo eléctrico en el interior de un conductor de cobre de resistividad  $\rho = 1,72 \times 10^{-8} \Omega m$  si éste está recorrido por una corriente eléctrica de densidad de corriente  $J = 2,54 \times 10^6$  A/m<sup>2</sup>. **b)** ¿Cuál sería la diferencia de potencial entre dos puntos separados 100 m?.

**Sol.:** **a)**  $E = 43,7$  mV/m; **b)**  $\Delta V = 4,37$  V.

**2.4:** Cierta dispositivo mueve una carga de 1.5 C una distancia de 20 cm en una región del espacio sometida a un campo eléctrico uniforme de módulo  $E = 2 \times 10^3$  N/C. ¿Qué fuerza electromotriz desarrolla el dispositivo?.

**Sol.:**  $\mathcal{E} = 400$  V.

**2.5:** ¿Cuánto calor produce en 5 minutos una resistencia eléctrica de hierro recorrida por una intensidad de 5 A y sometida a una diferencia de potencial de 120 V?.

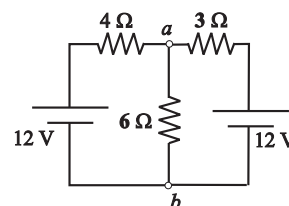
**Sol.** Calor  $\approx 2,23 \times 10^5$  J.

**2.6:** Dos conductores de la misma longitud pero distinta área de sección transversal se conectan en serie y en paralelo. ¿Qué conductor de la combinación disipará más calor si ambas son sometidas a la misma diferencia de potencial?.

**Sol.** Serie: el conductor con menor área; Paralelo: el conductor con mayor área.

**2.7:** En el circuito de la figura, determine: **a)** la corriente en cada resistencia; **b)** la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ ; y **c)** la potencia suministrada por cada batería.

**Sol.:** **a)**  $I_4 = 2/3$  A,  $I_3 = 8$  A,  $I_6 = 14/9$  A; **b)**  $V_b - V_a = -28/3$  V; **c)** 8 W suministradas por la batería de la izquierda,  $32/3$  W suministrados por la otra.

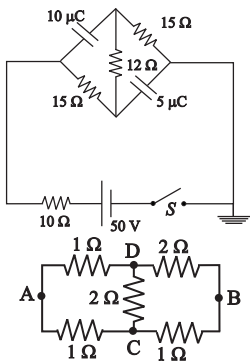


**2.8:** Se dispone de dos baterías, una con  $\mathcal{E}_1 = 9$  V,  $r_1 = 0,8 \Omega$  y otra con  $\mathcal{E}_2 = 3$  V,  $r_2 = 0,4 \Omega$ .

**a)** ¿Cómo deberían conectarse para dar la máxima corriente a través de una resistencia  $R$ ?

**b)** Calcular la corriente para  $R = 0,2 \Omega$  y  $R = 1,5 \Omega$ .

**Sol.:** **a)** En paralelo para  $R$  pequeño, en serie para  $R$  grande; **b)**  $I_{0,2} = 10,7$  A,  $I_{1,5} = 4,44$  A.

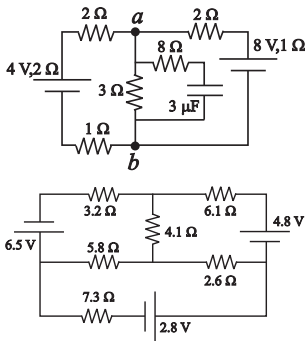


**2.9:** Los condensadores del circuito de la figura están inicialmente descargados. **a)** ¿Cuál es el valor inicial de la corriente suministrada por la batería cuando se cierra el interruptor  $S$ ? **b)** ¿Cuál es la intensidad de la corriente de la batería después de un tiempo largo? **c)** ¿Cuáles son las cargas finales en los condensadores?

**Sol.:** **a)** 3,42 A; **b)** 0,962 A; **c)**  $Q_{10} = 260 \mu\text{C}$ ,  $Q_5 = 130 \mu\text{C}$ .

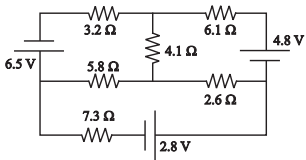
**2.10:** En el circuito de la figura se conecta entre los puntos A y B una batería de 10 V y de resistencia interna  $1 \Omega$ . Determinése: **a)** la corriente por la batería; **b)** la resistencia equivalente entre A y B; **c)** la diferencia de potencial entre las placas de un condensador que se conectase entre los nudos C y D.

**Sol.:** **a)** 32/7 A; **b)** 1,18  $\Omega$ ; **c)** 4/7 V.



**2.11:** En el circuito de la figura, determinar: **a)** la intensidad en cada rama, **b)** la d.d.p. entre  $a$  y  $b$  por todos los caminos posibles, **c)** la carga del condensador **d)** la potencia suministrada por las fuentes y la consumida por las resistencias.

**Sol.:** **a)** 0 A, 4/3 A, 4/3 A; **b)** 4 V; **c)** 12  $\mu\text{C}$ ; **d)** suministradas:  $P(\xi = 4V) = 0 \text{ W}$ ,  $P(\xi = 8V) = 10,67 \text{ W}$ ; consumidas:  $P = 10,76 \text{ W}$ .

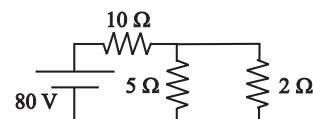


**2.12:** Determinése las corrientes en el circuito de la figura.

**Sol.:** 1.1 A, 0.87 A, 0.73 A, 0.36 A, 0.15 A y 0.22 A.

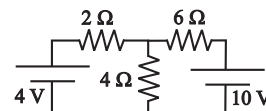
**2.13:** En el circuito de la figura: **a)** determínense las corrientes; **b)** hágase el balance de potencia.

**Sol.:** **a)** 7 A, 2 A y 5 A; **b)** suministrada: 560 W; consumidas:  $P(R = 10) = 490$  W,  $P(R = 5) = 20$  W,  $P(R = 2) = 50$  W.



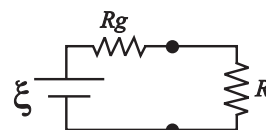
**2.14:** Determinar la corriente por  $R = 6\ \Omega$  por dos métodos: **a)** utilizando las leyes de Kirchhoff; **b)** mediante el equivalente de Thévenin.

**Sol.:** **a)**  $i_{R=6} = 1$  A ; **b)**  $V_{Th} = 22/3$  V y  $R_{Th} = 4/3\ \Omega$ ,  $i_{R=6} = 1$  A.



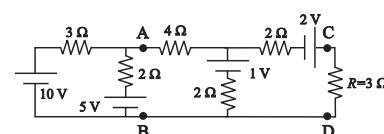
**2.15:** En el circuito de la figura determinar la potencia consumida en la resistencia de carga  $R$  y encontrar el valor de dicha resistencia para el cual la potencia antes calculada es máxima. Complétese el estudio anterior representando gráficamente la función potencia consumida en  $R$  en función del valor de  $R$ .

**Sol.:**  $P(R) = \xi^2 R(R + R_g)^{-2}$ ;  $P(R)$  es máxima si  $R = R_g$ .



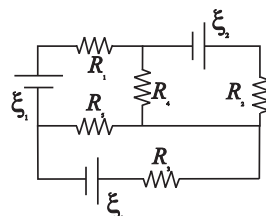
**2.16:** En el circuito de la figura calcúlese la intensidad que circula por la resistencia  $R = 3\ \Omega$  utilizando dos técnicas diferentes: **a)** leyes de Kirchhoff; **b)** aplicando sucesivamente el equivalente de Thévenin, primero entre los puntos A y B y seguidamente entre los puntos C y D.

**Sol.:** **a)=b)**  $i_{R=3} = 21/29$  A.



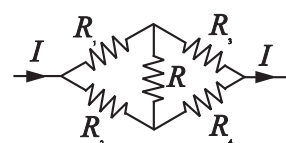
**2.17:** Plantear las ecuaciones de Kirchhoff para el circuito de la figura. Una vez planteadas, considérese ahora que  $R_5 = R_3$  y bajo esta hipótesis elijase un posible conjunto de valores para las fuentes de tensión de forma que la intensidad que circula por la fuente  $\xi_1$  sea nula.

**Sol.:** Una posible solución sería  $\xi_1 = 1$  V,  $\xi_2 = 0$  V y  $\xi_3 = 2$  V. Obsérvese que existen infinitas soluciones.



**2.18:** En el circuito de la figura encuéntrese la relación entre las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  para que la intensidad por la resistencia  $R$  sea nula.

**Sol.:**  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ .





## Tema 3

# Magnetostática

---

### 3.1. Introducción

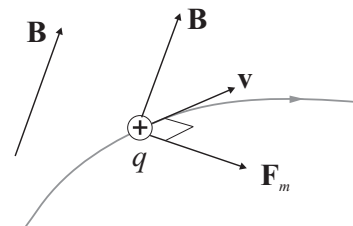
En los temas precedentes se han estudiado las interacciones entre distribuciones de carga invariantes en el tiempo (Tema 1) así como el movimiento de las cargas en el interior de conductores filiformes (Tema 2). Todas las posibles interacciones y fenómenos pudieron ser descritos en función de campos y potenciales eléctricos y sus efectos sobre las cargas.

Desde muy antiguo es también conocido que existe en la naturaleza una fuerza cuyo origen no está ligado a las cargas eléctricas estáticas pero que sin embargo tiene efectos sobre las cargas eléctricas *en movimiento*. Esta nueva interacción es conocida con el nombre de interacción *magnética* y se manifiesta, por ejemplo, en las fuerzas de atracción y repulsión entre imanes y/o cables que transportan corrientes, la atracción de trozos de hierro (y otros metales) por imanes o bien la orientación permanente de una aguja imantada hacia el Norte magnético de la Tierra. El estudio de esta nueva interacción (tal como se hizo en el caso de la Electrostática) se llevará a cabo mediante la introducción de un campo vectorial llamado **campo magnético**  $\vec{B}$ . Esto nos permitirá estudiar la interacción magnética obviando las fuentes que la producen. En el presente tema sólo estaremos interesados en estudiar los *campos magnéticos que no varían en el tiempo*, es decir, los campos *magnetostáticos* y, en consecuencia, este tema se denomina **Magnetostática**.

### 3.2. Fuerza de Lorentz

Supuesta una región del espacio donde existe un campo magnético  $\vec{B}$ , *experimentalmente* se encuentra que sobre una carga prueba,  $q$ , que se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  (medida en el mismo sistema de referencia donde se ha medido  $\vec{B}$ ) actúa una fuerza,  $\vec{F}_m$ , con las siguientes características:

- La fuerza es proporcional al producto  $q\vec{v}$ . Esto implica que esta fuerza no actúa sobre partículas neutras o bien sobre partículas cargadas en reposo.



- La fuerza está dirigida normal al plano formado por los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , siendo nulo su módulo cuando  $\vec{v} \parallel \vec{B}$  y máximo cuando  $\vec{v} \perp \vec{B}$ .

Los anteriores resultados experimentales pueden ser descritos en forma matemática por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.1)$$

que determina completamente la fuerza magnética sobre una carga móvil. A partir de la anterior expresión puede deducirse que las unidades de campo magnético en el SI, llamadas **teslas** (T), vendrán dadas por

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N/C}}{\text{m/s}}. \quad (3.2)$$

La unidad de campo magnético es una unidad relativamente *grande*, esto es, es difícil conseguir campos magnéticos del orden de los teslas o mayores. De hecho, el campo magnético terrestre es del orden de  $10^{-4}$  T. Por esta razón suele usarse como unidad de campo magnético el **gauss** (G), de modo que

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}. \quad (3.3)$$

Si en una región del espacio, además del campo magnético  $\vec{B}$ , existe un campo eléctrico  $\vec{E}$ , H.A. Lorentz (1853-1928) propuso que la fuerza total sobre una carga puntual  $q$ , o **fuerza de Lorentz**, podía escribirse como la superposición de la fuerza eléctrica,  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ , más la fuerza magnética,  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , esto es,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.4)$$

### 3.2.1. Movimiento de una carga puntual en presencia de un campo magnético

Antes de tratar la fuerza magnética, es importante recordar que la fuerza externa  $\vec{F}_{\text{ext}}$  que actúa sobre una partícula se puede descomponer en dos partes, una tangente al movimiento,  $\vec{F}_\tau$ , y otra normal,  $\vec{F}_n$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n = F_\tau \hat{\tau} + F_n \hat{n}.$$

En consecuencia, la ecuación de movimiento

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

se puede reescribir (teniendo en cuenta que  $\vec{v} = v\hat{\tau}$ ) como

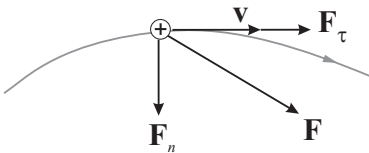
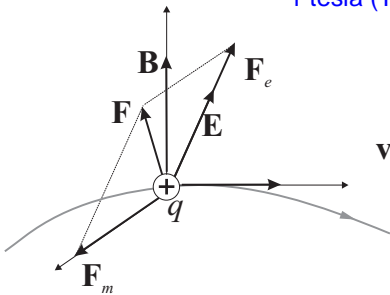
$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt}(v\hat{\tau}) &= m \frac{dv}{dt} \hat{\tau} + mv \frac{d\hat{\tau}}{dt} \\ &= m \frac{dv}{dt} \hat{\tau} + m \frac{v^2}{r} \hat{n} \\ &= F_\tau \hat{\tau} + F_n \hat{n}, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$F_\tau = m \frac{dv}{dt} \quad (3.5)$$

$$F_n = m \frac{v^2}{r}, \quad (3.6)$$

Unidad de campo magnético  
1 tesla (T)



siendo  $r$  el radio de curvatura de la trayectoria.

La ecuación de movimiento para una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en el seno de una región donde existe un campo magnético  $\vec{B}$  viene dada por

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.7)$$

y puesto que  $\vec{F}_m$  es perpendicular a  $\vec{v}$  (debido a la presencia del producto vectorial), podemos deducir que

- La fuerza magnética no realiza trabajo sobre la partícula puesto que  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = 0$  al ser  $\vec{v} \perp \vec{F}$ .
- Como  $F_\tau = 0$ , según (3.5):  $dv/dt = 0$  ( $v = \text{cte}$ ), por lo que la fuerza magnética no cambia el módulo de la velocidad sino simplemente su dirección.
- Puesto que  $F_n = |\vec{F}_m|$ , (3.6) y (3.7) nos dicen que

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \sin \theta, \quad (3.8)$$

(siendo  $\theta$  el ángulo formado por  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ ) por lo que el módulo de la velocidad será

$$v = \frac{qBr}{m} \sin \theta. \quad (3.9)$$

Si el vector velocidad se expresa como suma de dos componentes, una paralela a  $\vec{B}$  y otra perpendicular:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp},$$

la fuerza magnética puede expresarse como

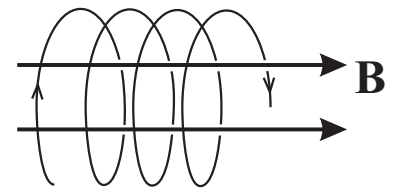
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}.$$

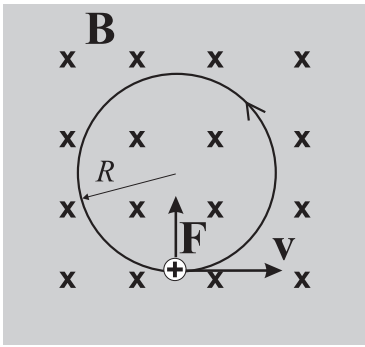
Dado que  $\vec{F}_m$  carece de proyección a lo largo de  $\vec{B}$ , podemos escribir las siguientes ecuaciones para las velocidades  $\vec{v}_{\parallel}$  y  $\vec{v}_{\perp}$ :

$$m \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \vec{F}_m = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}. \quad (3.11)$$

Estas ecuaciones nos dicen que la componente de la velocidad paralela a  $\vec{B}$  no cambia por efecto del campo magnético,  $\vec{v}_{\parallel} = \text{cte}$ , y que la componente perpendicular,  $\vec{v}_{\perp}$ , es afectada por una fuerza normal a ésta que únicamente cambia su dirección. Estos hechos dan lugar a que el movimiento de la partícula pueda descomponerse en un movimiento uniforme a lo largo de la dirección marcada por  $\vec{B}$  junto con un movimiento circular en un plano perpendicular, es decir, la trayectoria de la partícula es de tipo helicoidal a lo largo de un eje dirigido según  $\vec{B}$ .





En el caso particular de que la velocidad inicial de la partícula no tuviese componente paralela al campo magnético,  $\vec{v}_{\parallel} = 0$ , el movimiento de ésta en la región donde existe  $\vec{B}$  será un *movimiento circular* puro. El radio  $R$  del círculo recorrido por la partícula puede deducirse a partir de (3.8) ( $\theta = \pi/2$ ):

$$m \frac{v^2}{R} = qvB ,$$

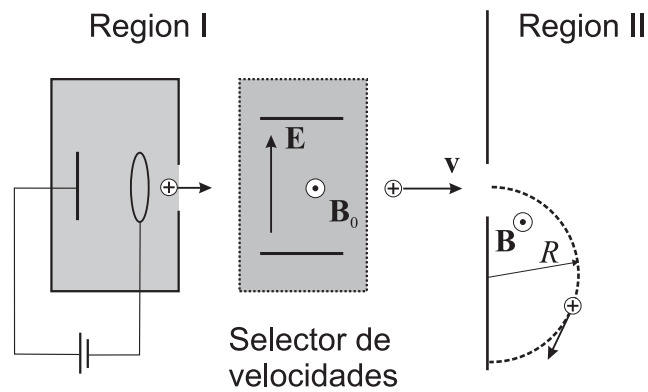
esto es,

$$R = \frac{mv}{qB} . \quad (3.12)$$

Recordando que  $\omega = v/R = 2\pi/T$ , el periodo de este movimiento vendrá dado por

$$T = 2\pi \frac{m}{qB} . \quad (3.13)$$

**Ejemplo 3.1** Determinar la masa de una partícula de carga  $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$  que al penetrar en una región con un campo  $B = 4000 \text{G}$  describe un círculo de radio 21 cm, habiendo sido previamente seleccionada su velocidad con una disposición como muestra la figura con  $E = 3,2 \times 10^5 \text{V/m}$ .



En el selector de velocidades, se cumplirá que sólo aquellas partículas para las que se verifique

$$F_e = F_m \Rightarrow E = vB_0$$

pasarán a la región II. En consecuencia las partículas que llegan a esta región tendrán una velocidad:

$$v = \frac{E}{B_0} = \frac{3,2 \times 10^5}{0,4} \text{m/s} = 8,05 \times 10^6 \text{m/s} .$$

Una vez en la región II, las partículas por efecto de la fuerza magnética normal a la trayectoria describirán un círculo de radio:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

y por tanto su masa será

$$m = \frac{qRB}{v} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \cdot 0,21 \cdot 0,4}{8,05 \times 10^6} = 1,67 \times 10^{-27} \text{kg} .$$

Dada la carga y masa de la partícula, se puede concluir que ésta es un protón.



### 3.2.2. Efecto Hall

Se conoce como *efecto Hall* a la aparición de una diferencia de potencial entre los extremos transversales de un conductor por el que circula una corriente cuando éste es sometido a un campo magnético externo.

Este fenómeno es fácilmente detectable para el caso de un conductor en forma de paralelepípedo (por ejemplo, una cinta conductora) y con un campo magnético aplicado normal al conductor. Nótese que para los casos de corriente eléctrica sostenida por cargas positivas y negativas mostrados en la figura 3.1(a) y (b) respectivamente, y dado que  $q\vec{v}$  tiene

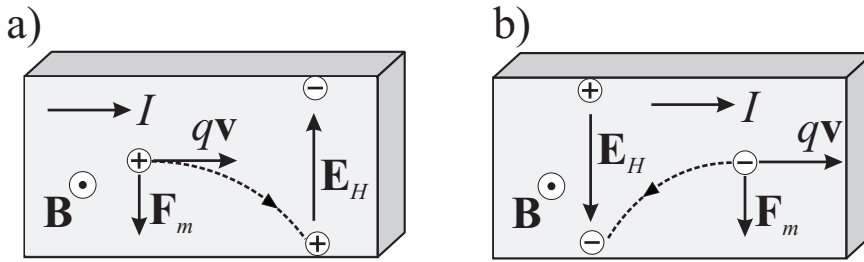


Figura 3.1: Corriente eléctrica hacia la derecha sostenida por (a) cargas positivas y (b) cargas negativas

el mismo sentido en ambos casos, la fuerza magnética  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$  hace que los portadores de carga móviles deriven hacia la cara inferior de la cinta conductora, acumulándose allí. Debido a la neutralidad de la carga en el interior del conductor, el exceso de carga en esta cara de la cinta es compensado por la aparición de una carga igual pero de sentido contrario en la otra cara de la cinta conductora. La existencia de esta separación de cargas da lugar a un campo  $\vec{E}_H$  de origen electrostático y, por tanto, a la aparición de una fuerza eléctrica  $\vec{F}_e$  que se opondrá a  $\vec{F}_m$ . Este proceso de deriva de portadores libres de carga tiene lugar hasta que la fuerza magnética es estrictamente compensada por la fuerza eléctrica, esto es, cuando

$$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_e|$$

$$qvB = qE_H,$$

por lo que el campo eléctrico Hall que se instaura alcanza finalmente un valor

$$E_H = vB. \quad (3.14)$$

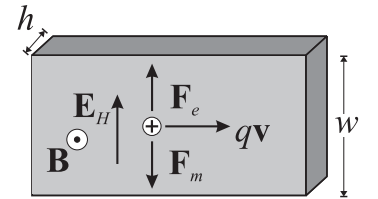
La presencia de este campo eléctrico Hall da lugar a una diferencia de potencial entre los extremos de la cinta de anchura  $w$  dado por

$$V_H = vBw. \quad (3.15)$$

Esta diferencial de potencial se conoce **voltaje Hall**,  $V_H$ , y ha sido obtenida suponiendo que el campo  $\vec{E}_H$  puede considerarse uniforme en el interior de la cinta conductora.

Dado que el módulo de la velocidad de los portadores puede deducirse de

$$I = JS = (nqv)(wh),$$



esto es,

$$v = \frac{I}{nqwh},$$

el voltaje Hall puede expresarse como

Voltaje Hall

$$V_H = R_H \frac{IB}{h}, \quad (3.16)$$

donde  $R_H = 1/nq$  se conoce como *coeficiente de Hall*.

Es interesante destacar que mientras que el sentido de la corriente no aporta ninguna información sobre el signo de los portadores de carga móviles, la medida del voltaje Hall permitiría distinguir el signo de la carga móvil, tal y como se hace patente al comparar las figuras 3.1(a) y (b). A finales del siglo pasado, el efecto Hall permitió comprobar que la corriente en los buenos conductores metálicos, como Au, Ag, Cu, Pt, ... , estaba efectivamente sostenida por portadores de carga negativa, esto es, electrones. No obstante, analizando otros conductores (y algunos semi-conductores) como Fe, Co, Zn, ... , se descubrió sorprendentemente que la corriente eléctrica parecía estar sostenida en estos materiales por *cargas positivas*. Este hecho no encontró ninguna explicación en aquel momento y hubo que esperar hasta el desarrollo de la teoría cuántica de los electrones en sólidos (Teoría de Bandas) para hallar una explicación satisfactoria a este fenómeno.

Además del uso del efecto Hall para determinar el signo de los portadores (así como la densidad de éstos, supuesta conocida su carga), éste suele utilizarse en la construcción de *teslámetros*, esto es, medidores de campo magnético. Para medir el campo magnético puede construirse una sonda Hall en la que  $R_H$  es conocido y por la que se hace pasar una intensidad determinada. Si se mide el voltaje Hall, el valor del campo magnético puede obtenerse fácilmente a partir de la expresión (3.16).

**Ejemplo 3.2** En una región donde existe un campo magnético de 1,5 T, una tira conductora de cobre de espesor 1 mm y anchura 1,5 cm transporta una corriente de 2 A, produciéndose un voltaje Hall de  $0.22 \mu\text{V}$ . Calcular la densidad de portadores de carga y comparar con el resultado para este dato que ya se obtuvo en el Ejemplo 2.1.

Dado que el voltaje Hall viene dado por la expresión

$$V_H = \frac{IB}{nqh},$$

la densidad de portadores será

$$n = \frac{IB}{qhV_H} = \frac{(2\text{A})(1,5\text{T})}{(1,6 \times 10^{-19}\text{C})(0,001\text{m})(0,22 \times 10^{-6}\text{V})} \\ \approx 8,45 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3.$$

Puede comprobarse que este dato es muy similar al número de átomos por  $\text{m}^3$  que se obtuvo en el Ejemplo 2.1. Esto permite verificar que efectivamente cada átomo de cobre contribuye con un solo electrón de conducción.

### 3.3. Fuerzas magnéticas sobre conductores

#### 3.3.1. Fuerza magnética sobre un hilo

La expresión (3.1) describía la fuerza que ejercía un campo magnético  $\vec{B}$  sobre una carga prueba  $q$  con una velocidad  $\vec{v}$  respecto al campo magnético. A partir de esta expresión puede obtenerse fácilmente la fuerza que ejerce el campo magnético sobre un hilo conductor recorrido por una corriente  $I$  considerando que sobre cada elemento diferencial de carga móvil del hilo conductor se ejercerá una fuerza de valor

$$d\vec{F}_m = dq\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.17)$$

Dado que el elemento diferencial de carga móvil forma parte de la corriente  $I$ , éste puede expresarse como  $dq = I dt$  y, por tanto, escribir

$$dq\vec{v} = I\vec{v}dt = I d\vec{l},$$

donde  $d\vec{l}$  es un vector cuyo módulo es un diferencial de longitud a lo largo del hilo y su sentido es el de recorrido de la corriente eléctrica. Sustituyendo ahora  $dq\vec{v}$  en (3.17) tenemos que

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.18)$$

y consecuentemente la fuerza total sobre un hilo recorrido por una intensidad  $I$  vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_m = \int d\vec{F}_m = \int_{\text{hilo}} I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.19)$$

En aquellas situaciones en las que tanto  $I$  como  $\vec{B}$  no varíen a lo largo de todo el hilo, la expresión anterior puede reescribirse como

$$\vec{F}_m = I \left( \int_{\text{hilo}} d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B}, \quad (3.20)$$

donde  $\vec{l}$  es un vector cuyo módulo es la longitud total del hilo y su sentido coincide con el de la corriente eléctrica.

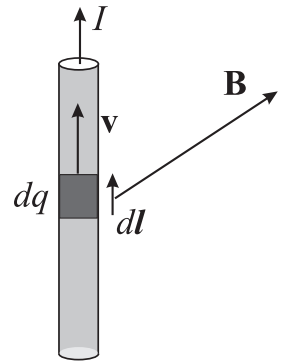
#### 3.3.2. Par de fuerzas sobre una espira de corriente

En el caso de una espira de corriente (conductor filiforme cerrado sobre sí mismo) recorrida por una intensidad  $I$ , la fuerza magnética sobre ésta, de acuerdo a la expresión (3.19), viene dada por

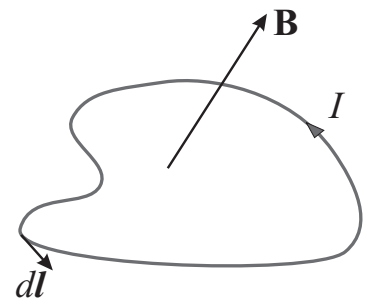
$$\vec{F}_m = I \oint_{\text{espira}} d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.21)$$

Si se considera ahora el caso particular y usual en el cual el campo  $\vec{B}$  es uniforme en la región donde está inmersa la espira, entonces dado que

$$\vec{F}_m = I \left[ \oint_{\text{espira}} d\vec{l} \right] \times \vec{B} \quad \text{siendo} \quad \oint_{\text{espira}} d\vec{l} = 0,$$



Fuerza magnética sobre un hilo



observamos que no se ejerce fuerza magnética neta sobre la espira. No obstante, el hecho de que no haya fuerza total resultante no implica que la espira no se mueva, sino simplemente que la espira no tendrá movimiento de *traslación*. La espira podría “moverse” realizando un movimiento de *rotación* supuesto que el momento dinámico de la fuerza en la espira fuese no nulo.

Para calcular el momento dinámico de la fuerza consideraremos la espira rectangular mostrada en la Figura 3.2. La fuerza sobre los lados 1 y

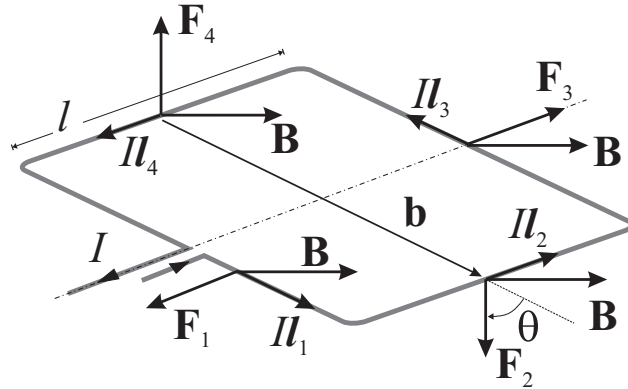


Figura 3.2: Fuerzas magnéticas sobre cada uno de los lados de una espira rectangular recorrida por una intensidad  $I$

3 es una fuerza de deformación que generalmente está compensada por la resistencia a la deformación del material conductor. Por el contrario, la disposición de las fuerzas sobre los lados 2 y 4 puede reconocerse como un *par de fuerzas* aplicado sobre la espira. El cálculo del momento dinámico,  $\vec{M}$ , de este par de fuerzas viene dado por

$$\vec{M} = \vec{b} \times \vec{F}, \quad (3.22)$$

donde  $\vec{b}$  es el *brazo* de la fuerza. La dirección de  $\vec{M}$  es perpendicular a  $\vec{b}$  y a  $\vec{F}$  ( $\vec{M}$  presenta la misma dirección y sentido que  $\vec{F}_3$ ) y su módulo:

$$M = bF \sin \theta. \quad (3.23)$$

Teniendo ahora en cuenta que, para este caso,  $F$  viene dada por  $F = IlB$ , al sustituir en la expresión anterior tenemos que

$$M = bIlB \sin \theta = ISB \sin \theta, \quad (3.24)$$

donde  $S = bl$  es el área de la espira.

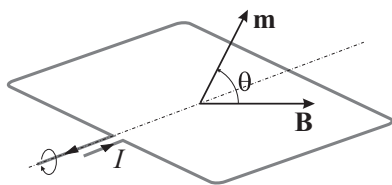
Dado que el módulo de  $\vec{M}$  viene dado por (3.24) y su dirección es idéntica a la de  $\vec{F}_3$ , el momento del par de fuerzas puede expresarse como

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad (3.25)$$

donde

$$\vec{m} = NIS\vec{\tau} \quad (3.26)$$

es un vector que se conoce como **momento dipolar magnético** (o simplemente momento magnético), cuyo módulo es  $m = NIS$  ( $N$  numero de arrollamientos de la espira) y su dirección y sentido coinciden con las de



la normal a la superficie de la espira (el sentido de  $\vec{m}$  viene determinado por el sentido de recorrido de la corriente siguiendo la regla de la mano derecha). Es importante notar que aunque la expresión (3.25) se ha deducido para el caso particular de una espira rectangular, esta expresión es válida para cualquier tipo de espira (supuesto que  $\vec{B}$  sea uniforme).

El par de fuerzas sobre la espira recorrida por una corriente eléctrica provoca entonces un giro de la espira sobre su eje tratando de alinear  $\vec{m}$  con  $\vec{B}$ . La aparición de este par de fuerzas magnético constituye el fundamento físico del funcionamiento de los **motores eléctricos**. Un esquema elemental de un motor eléctrico es precisamente una espira recorrida por una intensidad que, en presencia de un campo magnético, sufre un par de fuerzas que da lugar a un movimiento de rotación. Dado que la espira tratada anteriormente no giraría de forma continua (el momento del par de fuerzas tendería más bien a hacer *oscilar* la espira), habría que diseñar un dispositivo que hiciera cambiar el sentido del par de fuerzas en el momento adecuado. Si la espira es fijada a algún rotor, se conseguiría transformar energía eléctrica/magnética en energía cinética de rotación, que posteriormente puede transformarse mediante los mecanismos adecuados en energía asociada a cualquier otro tipo de movimiento.

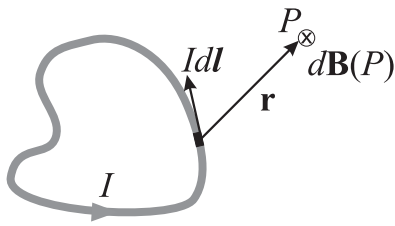
### 3.4. Ley de Biot-Savart

Hasta ahora se han discutido algunos efectos del campo magnético  $\vec{B}$  sin referirnos a las posibles *fuentes* de este campo. Una posible fuente de campo magnético conocida desde muy antiguo son los **imanes** permanentes. Estos imanes son trozos de ciertos materiales (por ejemplo, la magnetita) que tienen entre sus propiedades más aparentes la de atraer fragmentos de hierro. Una carga prueba móvil en presencia de un imán sufre igualmente el efecto de una fuerza magnética que está perfectamente definida por la expresión (3.1). A pesar de que los imanes son conocidos y usados desde hace mucho tiempo, un estudio realista del origen del campo magnético producido por estos imanes sólo puede ser llevado a cabo en el marco de la Física Cuántica y, por tanto, no se abordará esta tarea en el presente tema.

Los experimentos de H. C. Oersted ( $\sim 1820$ ) demostraron que los efectos sobre cargas móviles e hilos de corriente (recogidos en las expresiones (3.1) y (3.19)) producidos por campos magnéticos originados por imanes eran perfectamente reproducidos cuando estos imanes son sustituidos por cargas en movimiento o bien hilos de corriente. Esto implica que, en general, *las cargas eléctricas en movimiento son fuentes del campo magnético*. Dado que en el presente tema sólo estamos interesados en campos *magnetostáticos*, en este apartado estudiaremos únicamente las fuentes que producen este tipo de campos constantes en el tiempo. Experimentalmente se encuentra por tanto que

*las fuentes del campo magnetostático son las corrientes eléctricas invariantes en el tiempo.*

La forma concreta en que estas corrientes estacionarias crean campos magnéticos viene dada por la **ley de Biot y Savart** ( $\sim 1830$ ) que establece

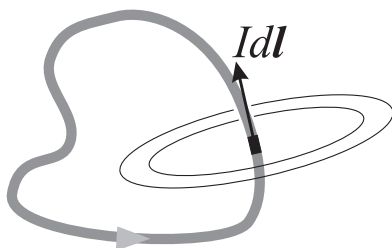


que el campo magnético en el punto de observación,  $P$ , producido por un elemento diferencial de corriente,  $Id\vec{l}$ , que forma parte de una corriente continua viene dado por

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (3.27)$$

donde  $\vec{r}$  es el radiovector que va desde el elemento diferencial de corriente hasta el punto  $P$  donde se evalúa el campo y  $\mu_0$  es una constante conocida como **permeabilidad del vacío** de valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}. \quad (3.28)$$



Líneas de campo  $\vec{B}$  debidas a  $Idl$

Obsérvese que la expresión (3.27) es similar a la obtenida en (1.10) que nos daba el campo electrostático producido por un elemento diferencial de carga. Ambas expresiones muestran la misma dependencia respecto a  $r$ , esto es,  $r^{-2}$ . No obstante, una importante diferencia entre ambas expresiones es que la dirección del campo es distinta en una y otra. Si, para el caso electrostático, la dirección del campo eléctrico venía determinada por el radiovector que unía el punto fuente con el punto de observación, para el campo magnetostático la dirección de  $d\vec{B}$  viene determinada por el producto vectorial

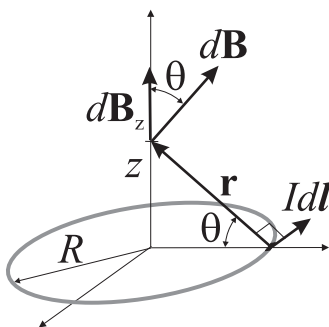
$$Id\vec{l} \times \hat{r},$$

por lo que la dirección de  $d\vec{B}$  en el punto de observación siempre será perpendicular a su radiovector asociado (esto es,  $d\vec{B} \perp \hat{r}$ ). Esta dirección puede obtenerse por la regla de la mano derecha haciendo apuntar el dedo pulgar derecho en la dirección del elemento de corriente, el dedo índice coincidiendo con  $\vec{r}$  y el dedo corazón marcando la dirección del campo. Así, por ejemplo, las líneas de campo producidas por un elemento diferencial de corriente serían *circunferencias* concéntricas a un eje dirigido según el elemento de corriente. La discusión anterior indica que *las líneas de  $\vec{B}$  no tienen principio ni fin*, pudiendo ser, como en este caso, líneas cerradas.

El campo total producido por la corriente continua que circula en una espira podrá, por tanto, escribirse como la integral de (3.27) a lo largo de los diferentes elementos diferenciales de corriente,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{espira}} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.29)$$

Campo magnético debido a una espira de corriente continua



**Ejemplo 3.3** Cálculo del campo magnético en cualquier punto del eje de una espira circular de radio  $R$ .

En la figura adjunta puede apreciarse que  $d\vec{l} \perp \vec{r}$  y por tanto el módulo de  $d\vec{B}$  para el presente caso viene dado por

$$dB(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}.$$

Dada la simetría del problema, únicamente las componentes de  $\vec{B}$  a lo largo del eje  $z$  se suman mientras que las perpendiculares a este eje se anulan entre sí.

Consecuentemente sólo nos interesa  $dB_z$ :

$$\begin{aligned} dB_z(P) &= dB(P) \cos \theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRdl}{r^3} \end{aligned}$$

(nótese que  $\cos \theta = R/r$ ). Para obtener el campo total hay que integrar la expresión anterior y dado que tanto  $r$  como  $R$  permanecen constantes al recorrer la espira, se tiene que

$$\begin{aligned} B_z(P) &= \oint_{\text{espira}} dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \oint_{\text{espira}} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} 2\pi R \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{r^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

### 3.5. Ley de Gauss para el campo magnético

En el apartado 1.6 se estudió la ley de Gauss para el campo electrostático, donde se vio que el flujo de dicho campo a través de una superficie cerrada estaba relacionado con el valor de la carga total en el interior de esta superficie mediante

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

En ese apartado discutimos que este hecho podía relacionarse con la forma de las líneas de campo electrostático (es decir, que las líneas “parten” de las cargas positivas y “acaban” en las cargas negativas), de modo que si en el interior de una superficie había una sola carga positiva, entonces era claro que las líneas de campo “salían” de dicha superficie dando entonces un flujo del campo electrostático positivo. Si por el contrario en el interior de la superficie había una sola carga negativa las líneas de campo “entraban” en dicha superficie. Si había una carga positiva y otra negativa del mismo valor en el interior de la superficie, entonces el mismo número de líneas de campo “entra” y “sale” de la superficie, dando flujo total nulo.

Para el caso del campo magnético, la ley de Biot y Savart nos dice que las líneas de campo asociadas con elementos de corriente no tienen principio ni fin, es decir, son generalmente *líneas cerradas*. Esta afirmación puede relacionarse con la no existencia de “cargas magnéticas” positivas/negativas en la naturaleza. Es decir, no existe un símil de la carga eléctrica positiva/negativa para el caso del magnetismo.<sup>1</sup> Estos hechos han sido confirmados experimentalmente de forma inequívoca, y quedan recogidos “matemáticamente” por la siguiente ley de Gauss para el magnetismo:

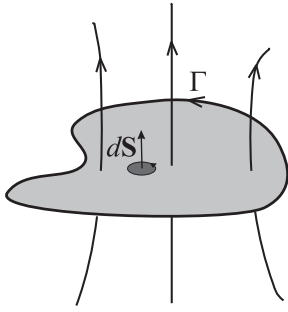
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.30)$$

Ley de Gauss para el magnetismo

es decir, el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo.

<sup>1</sup>Los conocidos como “polos” positivo y negativo de un imán permanente no están relacionados con la existencia de cargas magnéticas positivas/negativas. De hecho nunca puede existir un “polo” positivo aislado de un “polo” negativo.

### 3.6. Ley de Ampère



La ley de Ampère ( $\sim 1830$ ) para el campo magnetostático nos dice que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\Gamma} , \quad (3.31)$$

esto es, la circulación del campo magnetostático,  $\vec{B}$ , a lo largo de una curva  $\Gamma$  es  $\mu_0$  veces el flujo de la densidad de corriente,  $\vec{J}$ , que atraviesa una superficie  $S(\Gamma)$  cuyo contorno es la curva  $\Gamma$ . El sentido de recorrido de la curva  $\Gamma$  determina igualmente el sentido de  $d\vec{S}$  (siguiendo la ley de la mano derecha) y por tanto el signo del flujo a través de la superficie. El flujo de la densidad de corriente que atraviesa la superficie  $S(\Gamma)$  es obviamente el valor de la intensidad de la corriente “interceptada”,  $I_{\Gamma}$ , por la superficie

En la figura adjunta, la aplicación de la ley de Ampère para la curva  $\Gamma_1$  establece que

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3) ,$$

dado que  $I_3$  tiene sentido contrario a  $I_1$  e  $I_2$ , mientras que  $I_4$  no atraviesa la superficie apoyada en la curva. Para el caso de la curva  $\Gamma_2$ , tendremos que

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 ,$$

puesto que la misma intensidad atraviesa en los dos sentidos la superficie apoyada en la curva.

**Nota:** Obviamente, el hecho de que la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de  $\Gamma_2$  sea cero no implica que  $\vec{B}$  sea nulo. De hecho, para el campo electrostático se encontraba que  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  para toda curva  $\Gamma$ . Esto simplemente quería decir que el campo electrostático “derivaba” de un potencial. Dado que para el campo magnetostático, la circulación de éste no es siempre nula,  $\vec{B}$  no puede expresarse, en general, como el gradiente de un potencial escalar.

Es interesante notar que la ley de Ampère es *siempre válida* cuando se aplica al campo magnetostático pero que sin embargo *no siempre es útil*. Esta ley es particularmente útil para calcular el campo magnético en aquellos casos en los que es posible encontrar una curva  $\Gamma$  tal que la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de esa curva pueda expresarse como

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{\Gamma} dl .$$

Ley de Ampère siempre válida para campos magnetostáticos y útil para cálculo del campo en situaciones de alta simetría.

Esta situación se encuentra generalmente en situaciones de *alta simetría* donde es posible predecir la forma de las líneas de campo de  $\vec{B}$  y por tanto encontrar una curva que sea tangente a las líneas de campo y donde éste sea constante en módulo.



### 3.6.1. Campo magnético producido por un hilo infinito y rectilíneo de radio $R$ recorrido por una intensidad $I$

En el presente caso, la simetría del problema indica que el módulo del campo magnético sólo puede depender de la distancia al hilo (puntos con la misma distancia  $\rho$  al hilo “ven” exactamente la misma disposición de fuentes del campo magnético, por lo que el módulo del campo será el mismo). Con respecto a la dirección del campo, ésta puede deducirse de ley de Biot y Savart (3.27). En la figura puede observarse que la dirección del campo es siempre tangente a una circunferencia centrada en el hilo (puesto que  $d\vec{l} \times \vec{r}$  tiene esa dirección). Por tanto, podemos escribir que

$$\vec{B} = B(\rho)\hat{\tau}, \quad (3.32)$$

siendo las líneas de campo circunferencias centradas en el hilo, donde además el módulo del campo es constante ( $\hat{\tau}$  es el vector unitario tangente a la circunferencia centrada en el hilo). Este hecho sugiere aplicar la ley de Ampère en estas curvas para obtener el valor del campo, obteniendo que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{\Gamma} dl = \mu_0 I_{\Gamma}, \quad (3.33)$$

donde  $I_{\Gamma}$  es la corriente que atraviesa la superficie interior a  $\Gamma$ . Dado que la intensidad total de corriente,  $I$ , que recorre el hilo de radio  $R$  es *uniforme*, la densidad de corriente vendrá dada por

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{z}$$

y, por tanto,  $I_{\Gamma}$  vendrá dada por

$$I_{\Gamma} = \int_{S(\Gamma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} J\pi\rho^2 & \text{si } \rho \leq R \\ I & \text{si } \rho > R. \end{cases}$$

Al introducir la anterior expresión en (3.33) se tiene que

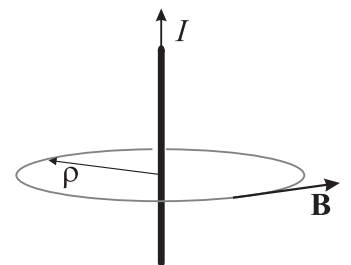
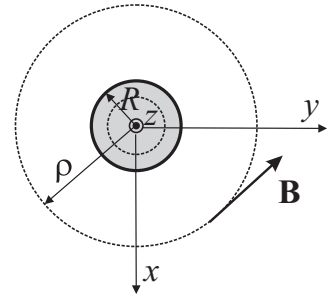
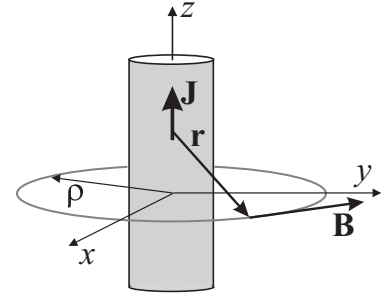
$$B2\pi\rho = \mu_0 \begin{cases} J\pi\rho^2 & \text{si } \rho \leq R \\ I & \text{si } \rho > R, \end{cases}$$

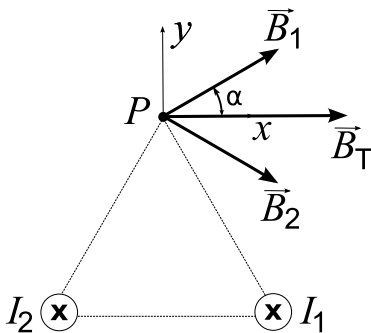
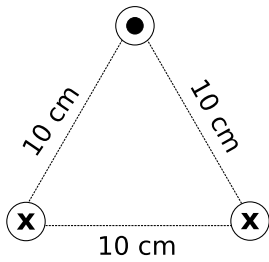
de donde se puede obtener finalmente que

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \rho \hat{\tau} & \text{si } \rho \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\tau} & \text{si } \rho > R. \end{cases} \quad (3.34)$$

Para el caso particular de un hilo cuyo radio pueda considerarse despreciable, el campo magnético producido por este hilo recto infinito en cualquier punto viene dado por

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\tau}. \quad (3.35)$$





**Ejemplo 3.4** Tres conductores rectilíneos largos y paralelos pasan a través de los vértices de un triángulo equilátero de lado 10 cm, según la figura, donde los puntos indican que la corriente está dirigida hacia el lector y la cruz indica que está dirigida hacia el papel. Si cada corriente vale 15 A, hallar **(a)** el campo magnético  $\vec{B}$  en el conductor superior y **(b)** la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre el conductor superior debido a los otros dos conductores inferiores.

**(a) Cálculo del campo magnético.**

Para calcular el campo magnético en el vértice superior del triángulo (punto  $P$ ) aplicamos superposición, de modo que el campo total  $\vec{B}_T$  en el punto  $P$  se escribirá como

$$\vec{B}_T(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P),$$

donde  $\vec{B}_1(P)$  y  $\vec{B}_2(P)$  son los campos magnéticos en el punto  $P$  debidos a las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  (ver figura adjunta). Dichos campos magnéticos vienen dados por

$$\vec{B}_i(P) = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi \rho_i} \hat{\tau}_i,$$

donde, en este caso,  $I_i \equiv I = 15 \text{ A}$ ,  $\rho_i \equiv D = 10 \text{ cm}$  y

$$\hat{\tau}_1 = \cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y}$$

$$\hat{\tau}_2 = \cos \alpha \hat{x} - \sin \alpha \hat{y},$$

con  $\alpha = \pi/6$ .

Al realizar la suma vectorial de ambos campos, obtenemos finalmente que

$$\vec{B}_T(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} 2 \cos \alpha \hat{x} = 5,196 \times 10^{-5} \hat{x}, \text{ T.}$$

**(b) Cálculo de la fuerza por unidad de longitud.**

Para obtener la fuerza sobre el hilo situado en el vértice superior debemos aplicar (3.20), que en nuestro caso se escribirá como

$$\vec{F}(P) = I_3 \vec{l}_3 \times \vec{B}_T(P),$$

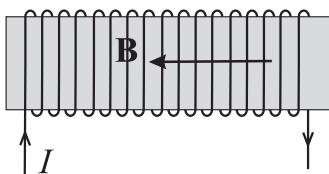
donde  $I_3 \equiv I = 15 \text{ A}$  es la corriente del hilo situado en el vértice superior y  $\vec{l}_3 = l \hat{z}$  es el vector "longitud" correspondiente a dicho hilo de corriente. En consecuencia, la fuerza por unidad de longitud,  $\vec{f} = \vec{F}/l$ , en el hilo situado en el vértice superior será

$$\vec{f}(P) = I_3 \hat{z} \times B_T(P) \hat{x} = I_3 B_T(P) \hat{y} = 7,794 \times 10^{-4} \hat{y} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

### 3.6.2. Campo magnético en un solenoide

Un solenoide es básicamente un cable arrollado de manera compacta en forma de hélice o, equivalentemente, una superposición de espiras muy juntas. Un solenoide *esbelto* (más largo que ancho) se usa generalmente para crear campos magnéticos intensos y uniformes dado que el campo magnético en el interior de los solenoides tiene estas características. En este sentido, el solenoide juega el mismo papel respecto al campo magnético que el condensador plano para el campo eléctrico.

Dado que una deducción teórica de la forma de las líneas del campo  $\vec{B}$  producido por un solenoide es relativamente complicado, usaremos argumentos *experimentales* para determinar la forma de estas líneas. Los



experimentos demuestran que las líneas de campo son aproximadamente líneas rectas paralelas al eje del solenoide en el interior de éste cerrándose por el exterior de modo que la magnitud del campo magnético exterior se reduce a medida que el solenoide se hace más esbelto. Para el caso de un solenoide infinitamente largo, que puede servir como un modelo aproximado de un solenoide esbelto, el campo magnético será nulo en el exterior. Dado que las líneas de campo son paralelas al eje del solenoide y por simetría no pueden variar a lo largo de la dirección paralela al eje (desde cualquier punto de una misma línea el solenoide se ve invariante), la aplicación de la ley de Ampère a la curva  $ABCD$  mostrada en la figura nos dice que

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l},$$

ya que  $\vec{B} \perp d\vec{l}$  en los tramos de curva  $\overline{BC}$  y  $\overline{DA}$  y  $\vec{B} = 0$  a lo largo de  $\overline{CD}$ . Por la forma de las líneas de  $\vec{B}$  en el interior del solenoide y teniendo en cuenta que el sentido de  $\vec{B}$  está marcado por el sentido de recorrido de la intensidad, obtenemos que

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl,$$

siendo  $l$  la longitud del segmento  $\overline{AB}$ . Por otra parte, la intensidad interceptada por el rectángulo interior a la curva  $ABCD$  será

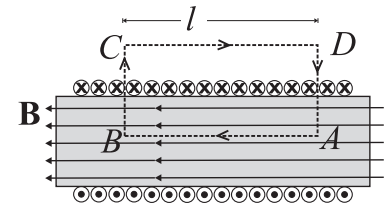
$$\int_{S(ABCD)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = NI,$$

esto es, intercepta  $N$  espiras cada una de ellas transportando una intensidad de corriente  $I$ .

Teniendo en cuenta los resultados de las dos últimas expresiones y la dirección del campo, podemos concluir según la ley de Ampère que

$$\vec{B}(P) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{u} & \text{en el interior del solenoide} \\ 0 & \text{en el exterior del solenoide} \end{cases} \quad (3.36)$$

siendo  $n = N/l$  el número de espiras por unidad de longitud en el solenoide y  $\hat{u}$  el vector unitario en la dirección del eje del solenoide.



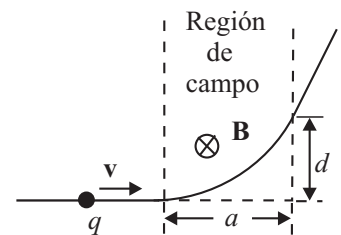
### 3.7. Problemas propuestos

**3.1:** ¿Cuál es el radio de la órbita de un protón de energía 1 MeV en el seno de un campo magnético de  $10^4$  G.

**Sol.**  $R = 14,4$  cm.

**3.2:** Una partícula de carga  $q$  entra a velocidad  $v$  en una región donde existe un campo magnético uniforme (dirigido hacia el interior de la página). El campo desvía a la partícula una distancia  $d$  de su trayectoria original al atravesar la región del campo, como se muestra en la figura. Indicar si la carga es positiva o negativa y calcular el valor de su *momentum* de la partícula,  $p$ , en términos de  $a$ ,  $d$ ,  $B$  y  $q$ .

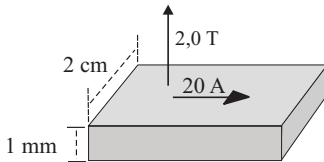
**Sol.:** es positiva;  $p = qB(a^2 + d^2)/(2d)$ .



**3.3:** Un alambre conductor paralelo al eje  $y$  se mueve con una velocidad  $\vec{v} = 20 \hat{x}$  m/s en un campo magnético  $\vec{B} = 0,5 \hat{z}$  T. **a)** Determinar la magnitud y la dirección de la fuerza magnética que actúa sobre un electrón en el conductor. **b)** Debido a esta fuerza magnética,

los electrones se mueven a un extremo del conductor, dejando el otro extremo positivamente cargado hasta que el campo eléctrico debido a esta separación de carga ejerce una fuerza sobre los electrones que equilibra la fuerza magnética. Calcular la magnitud y dirección de este campo eléctrico en estado estacionario. **c)** Si el cable tiene 2 m de longitud, ¿cuál es la diferencia de potencial entre sus dos extremos debido a este campo eléctrico?

**Sol.:** **a)**  $\vec{F} = 1,6 \times 10^{-18} \text{ N } \hat{y}$  ; **b)**  $\vec{E} = 10 \text{ V/m } \hat{y}$  ; **c)**  $V = 20 \text{ V}$ ;



**3.4:** Una cinta de metal de 2 cm de ancho y 1 mm de espesor lleva soportada una corriente de 20 A. La cinta está situada en un campo magnético de 2 T normal a la misma. En estas condiciones se mide un valor del potencial Hall de  $4,7 \mu\text{V}$ . Determinar la velocidad media de los electrones de conducción de la cinta así como la densidad de dichos electrones.

**Sol.:**  $v = 1,07 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ ,  $n = 5,85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

**3.5:** Un conductor cilíndrico de longitud infinita es macizo siendo  $b$  el radio de su sección transversal. Por dicho conductor circula una intensidad,  $I$ , uniformemente distribuida en su sección transversal. **a)** Determinar el campo  $\vec{B}$  en cualquier punto del espacio; **b)** repetir el apartado anterior suponiendo que ahora el cilindro posee una cavidad cilíndrica en su interior de radio  $a$  ( $a < b$ ).

$$\text{Sol.: a) } B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi b^2} & \text{si } r < b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r > b \end{cases} ; \text{ b) } B(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)} & \text{si } a < r < b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r > b \end{cases}$$

En ambos apartados, las líneas de campo son circunferencias con centro en el eje del conductor y contenidas en planos perpendiculares al mismo.

**3.6:** Una placa metálica de espesor despreciable y extensión infinita está situada en el plano  $z = 0$ . Por dicha placa circula un corriente eléctrica en sentido positivo del eje  $X$ . Si dicha intensidad está uniformemente distribuida a razón de  $\vec{J} = J\hat{x}$  (A/m) ( $J$  representa en este problema la corriente que atraviesa un segmento perpendicular al eje  $X$  y de longitud 1 metro), calcular el campo  $\vec{B}$  en todo punto del espacio (nota: utilizar el teorema de Ampère).

**Sol.:** si  $z > 0$ ,  $\vec{B} = -\mu_0 J/2 \hat{y}$ ; si  $z < 0$ ,  $\vec{B} = \mu_0 J/2 \hat{y}$ .

**3.7:** Repetir el problema anterior si, además de la citada placa, se coloca en el plano  $z = -d$  una nueva placa idéntica a la anterior pero que cuya densidad de corriente tiene sentido contrario, esto es,  $\vec{J} = -J\hat{x}$  (A/m).

**Sol.:** Entre ambas placas (esto es,  $0 > z > -d$ ),  $\vec{B} = \mu_0 J \hat{y}$ ; para el resto de los puntos (esto es,  $z > 0$  o  $z < -d$ ), el campo es nulo.

**3.8:** Un conductor recto infinitamente largo y circulado por una intensidad  $I$  se dobla en la forma indicada en la figura. La porción circular tiene un radio  $R = 10 \text{ cm}$  con su centro a distancia  $r$  de la parte recta. Determinar  $r$  de modo que el campo magnético en el centro de la porción circular sea nulo.

**Sol.**  $r = 3,18 \text{ cm}$ .

**3.9:** Dos conductores filiformes rectos y paralelos entre sí de longitud 90 cm están separados una distancia de 1 mm. Si ambos conductores son recorridos por una corriente de 5 A en sentidos opuestos, ¿cuál es la magnitud y el sentido de las fuerzas entre ambas corrientes?

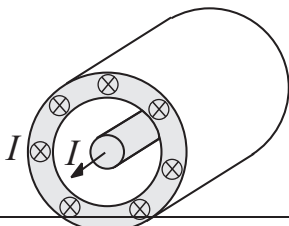
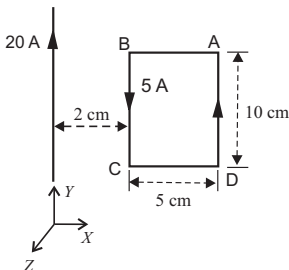
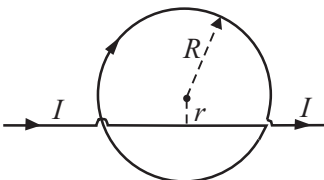
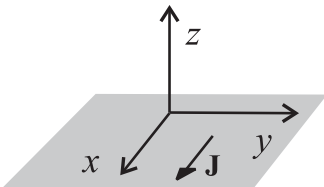
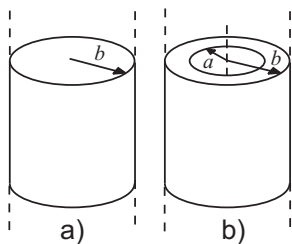
**Sol.:** 4,5 mN, siendo una fuerza repulsiva.

**3.10:** Por un conductor rectilíneo de longitud infinita circula una corriente de 20 A, según se indica en la figura. Junto al conductor anterior se ha dispuesto una espira rectangular cuyos lados miden 5 cm y 10 cm. Por dicha espira circula una corriente de 5 A en el sentido indicado en la figura. **a)** Determinar la fuerza sobre cada lado de la espira rectangular así como la fuerza neta sobre la espira; **b)** calcular el flujo a través de la espira del campo  $\vec{B}$  creado por el conductor rectilíneo.

**Sol. a)** lado AB:  $-2,5 \times 10^{-5} \text{ N } \hat{y}$ , lado BC:  $10^{-4} \text{ N } \hat{x}$ , lado CD:  $2,5 \times 10^{-5} \text{ N } \hat{y}$ , lado DA:  $-2,85 \times 10^{-5} \text{ N } \hat{x}$ ,  $\vec{F}_{\text{neto}} = 7,15 \times 10^{-5} \text{ N } \hat{x}$ ; **b)**  $\Phi = 5,01 \times 10^{-7} \text{ weber}$ .

**3.11:** El cable coaxial de la figura transporta una intensidad  $I$  por el conductor interno y la misma intensidad pero en sentido contrario por el externo. Utilizando la ley de Ampère, calcular el campo magnético entre ambos conductores y en el exterior del cable.

**Sol.:** Entre los conductores  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ , donde  $r$  es la distancia al eje del cable, y siendo las líneas de campo circunferencias con centro en el eje del cable. En el exterior el campo es nulo.



**3.12:** Un solenoide esbelto de  $n_1$  vueltas por unidad de longitud está circulado por una intensidad  $I_1$  y tiene una sección transversal circular de radio  $R_1$ . En su interior, y coaxial con él, se ha colocado un segundo solenoide de  $n_2$  vueltas por unidad de longitud y de sección transversal circular de radio  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ). Si este segundo solenoide está circulado por una intensidad  $I_2$ , determinar: **a)** el campo magnético en todos los puntos del espacio; **b)** la magnitud y sentido que debería tener  $I_2$  para que, fijada  $I_1$ , el campo en el interior del segundo solenoide sea nulo.

**Sol.: a)** 
$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 n_1 I_1 \pm \mu_0 n_2 I_2 & \text{si } r < R_2 \\ \mu_0 n_1 I_1 & \text{si } R_2 < r < R_1 \\ 0 & \text{si } r > R_1 \end{cases}$$

donde  $r$  es la distancia al eje de los solenoides y el signo más/menos se toma si ambas intensidades circulan en igual/opuesto sentido; **b)**  $I_2 = -n_1 I_1 / n_2$ .

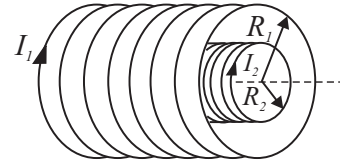
**3.13:** Dos conductores filiformes, rectilíneos y de longitud infinita son perpendiculares al plano  $XY$  y cortan a dicho plano en los puntos  $(0, a, 0)$  y  $(0, -a, 0)$ . Por dichos conductores circulan las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente. Calcular el campo magnético generado por ambas corrientes en cualquier punto del espacio (nota: la solución del problema debe ser válida para cualquier sentido de las intensidades por los conductores).

**Sol.:**

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \left( \frac{(a-y)I_1}{x^2 + (a-y)^2} - \frac{(a+y)I_2}{x^2 + (a+y)^2} \right) \hat{x} + \left( \frac{xI_1}{x^2 + (a-y)^2} + \frac{xI_2}{x^2 + (a+y)^2} \right) \hat{y} \right\},$$

donde las intensidades se consideran positivas si van en el sentido positivo del eje  $z$  y negativas en el caso contrario.

**3.14:** Un alambre de longitud  $l$  se arrolla en una bobina circular de  $N$  espiras. Demostrar que cuando esta bobina transporta una corriente  $I$ , su momento magnético tiene por magnitud  $Il^2/(4\pi N)$ .





## Tema 4

# Inducción electromagnética

---

### 4.1. Introducción

En el Tema 3 se vio que las corrientes eléctricas son fuentes de campos magnéticos, en concreto sobre 1820 H.C. Oersted comprobó que un cable recorrido por una intensidad de corriente continua produce un campo magnetostático en su entorno (detectado por ejemplo por el efecto que tiene sobre una aguja imantada). Dado que las corrientes eléctricas producen campos magnéticos, cabe plantearse igualmente si se produce el fenómeno inverso, es decir, si campos magnéticos pueden producir corrientes eléctricas. En este sentido se llevó a cabo una intensa labor experimental que parecía negar esa posibilidad. No obstante, los experimentos elaborados por M. Faraday (1791-1867) alrededor de 1830 permitieron establecer que la generación de corriente eléctrica en un circuito estaba relacionada con la variación en el tiempo del flujo magnético que atravesaba dicho circuito. En consecuencia, campos magnetostáticos nunca producirían corrientes eléctricas en circuitos fijos.

Conviene recordar (según se discutió en el Tema 2) que debido al efecto Joule existe una disipación de energía en las resistencias presentes en todos los circuitos *reales*, lo que implica que para mantener una corriente eléctrica en el circuito es necesario un aporte continuo de energía. La pérdida de energía de los portadores de carga móviles en los choques con los átomos del material resistivo debe ser compensada por una “fuerza externa impulsora” sobre estos mismos portadores. Dado que el impulso sobre los portadores móviles puede estar localizado en una parte del circuito o bien *distribuido* a lo largo de éste, la magnitud relevante es la integral de esta fuerza a lo largo de todo el circuito. De esta manera, se definió la fuerza electromotriz (fem),  $\mathcal{E}$ , como la fuerza tangencial por unidad de carga en el cable integrada sobre la longitud del circuito completo, esto es,

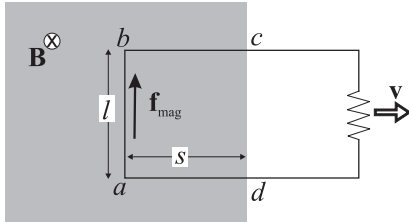
$$\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l}. \quad (4.1)$$

En consecuencia, la presencia de una intensidad de corriente eléctrica en

un circuito estará relacionada con la existencia de una fuente de fem que la mantenga. El origen de la fem puede ser diverso, de origen químico en baterías y pilas, de origen mecánico en el generador de Van der Graff, de origen óptico en las células fotovoltaicas, etc. De forma general podemos decir que el efecto de un generador de fem es transformar algún tipo de energía en energía eléctrica. En el caso de los experimentos realizados por Faraday, el mecanismo de generación de fem está directamente involucrado con las variaciones del flujo del campo magnético. Esta fem *inducida* por el campo magnético tendrá unas consecuencias importantísimas, tanto conceptuales como tecnológicas, estando en la base de la generación de energía eléctrica en las centrales eléctricas, en el funcionamiento de los circuitos de corriente alterna y en la generación de las ondas electromagnéticas.

## 4.2. Ley de Faraday

### 4.2.1. Fuerza electromotriz de movimiento



Una forma posible de generar una fem en un circuito sería hacer uso de la aparición de una fuerza magnética sobre los portadores de carga móviles en una región donde exista un campo  $\vec{B}$ . Por ejemplo, el movimiento de un conductor en el seno de un campo magnético dará lugar a lo que se conoce como *fem de movimiento*. En particular, considérese la situación mostrada en la figura adjunta donde la región sombreada indica la presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme (producido por ejemplo por un imán) dirigido hacia el papel y un circuito moviéndose con velocidad  $\vec{v} = v\hat{x}$  hacia la derecha. En esta situación, las cargas móviles del segmento  $ab$  experimentarán la siguiente fuerza de Lorentz por unidad de carga:

$$\vec{f}_{\text{mag}} = \frac{\vec{F}_{\text{mag}}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.2)$$

cuyo efecto global es justamente impulsar las cargas desde  $a$  hasta  $b$ . Este impulso dará lugar a una corriente en el circuito (en el mismo sentido que esta fuerza) debida a la aparición de una fem de valor

$$\mathcal{E} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}, \quad (4.3)$$

que puede reducirse en el presente caso a

$$\mathcal{E} = \int_a^b \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b vB dl = vBl, \quad (4.4)$$

donde  $l$  es la longitud del segmento  $ab$ , siendo nulas las contribuciones a la fem de los segmentos paralelos al desplazamiento dado que la fuerza impulsora es aquí perpendicular al hilo ( $\vec{f}_{\text{mag}} \perp d\vec{l}$ ). La intensidad,  $I$ , que circula por el circuito de resistencia  $R$  será por tanto

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBl}{R}. \quad (4.5)$$

Aunque la fem de movimiento ha podido deducirse a partir de la fuerza de Lorentz sobre los portadores de carga móviles, es interesante notar



que el valor de la fem de movimiento también se habría podido obtener como menos la variación temporal del flujo del campo magnético,  $\Phi_m$ , que atraviesa el área del circuito; esto es, mediante la expresión

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} . \quad (4.6)$$

Para comprobar este hecho, tengamos en cuenta que el flujo magnético se obtiene como

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.7)$$

y puesto que en el presente caso:  $\vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS$ , tenemos que

$$\Phi_m = \int_S B dS = B \int_S dS = BS = B l s , \quad (4.8)$$

siendo  $l s$  el área del circuito situada en la región donde el campo magnético no es nulo. La variaciones temporales de flujo magnético vendrán entonces dadas por

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} B l s = -B l v ,$$

ya que  $v = -ds/dt$  (esto es, la velocidad es positiva cuando  $s$  decrece), lo que da lugar a la misma fem que la obtenida en (4.3) cuando se integra directamente la fuerza de Lorentz por unidad de carga.

#### (\*) Balance de potencia

Es interesante notar que si el campo magnético ha dado lugar a una fem que genera una corriente, la velocidad de los portadores de carga móviles en el segmento  $ab$  será la composición de un movimiento hacia la derecha más otro hacia arriba, esto es, la velocidad total,  $\vec{w}$ , de los portadores será

$$\vec{w} = v\hat{x} + u\hat{y} , \quad (4.9)$$

por lo que la fuerza por unidad de carga que afecta a una de las cargas móviles vendrá dada por

$$\vec{f}_{\text{mag}} = -uB\hat{x} + vB\hat{y} . \quad (4.10)$$

Evidentemente sólo la parte de la fuerza dirigida según  $y$  es responsable de la aparición de la fem de movimiento (causando una corriente en la misma dirección que esta fuerza). La componente  $x$  de  $\vec{f}_{\text{mag}}$  da cuenta de la fuerza que ejerce el campo magnético sobre la corriente. Dado que esta fuerza por unidad de carga es

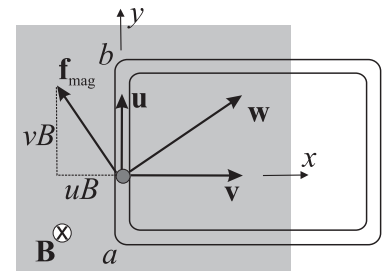
$$\vec{f}_x = -uB\hat{x} , \quad (4.11)$$

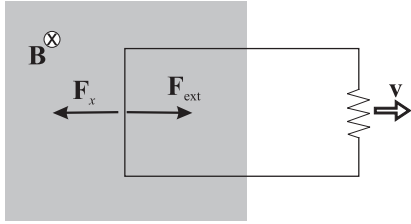
la fuerza total sobre el conductor  $ab$  será el producto de (4.11) por la carga total de este conductor, esto es,

$$\vec{F}_x = -nqAluB\hat{x} , \quad (4.12)$$

siendo  $n$  el número de electrones por unidad de volumen y  $A$  el área transversal del conductor. Puesto que la intensidad de la corriente que recorre el circuito es

$$I = nqAu ,$$





$\vec{F}_x$  puede expresarse como

$$\vec{F}_x = -IlB\hat{x}, \quad (4.13)$$

expresión que coincidiría con la aplicación directa al presente caso de la expresión (3.20):  $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ .

La existencia de esta fuerza sobre el conductor  $ab$  implica que para que éste se mueva a velocidad constante,  $\vec{v} = v\hat{x}$ , un agente externo debe compensar dicha fuerza ejerciendo una fuerza,  $\vec{F}_{\text{ext}}$ , de igual módulo y sentido opuesto, esto es,

$$\vec{F}_{\text{ext}} = IBl\hat{x}. \quad (4.14)$$

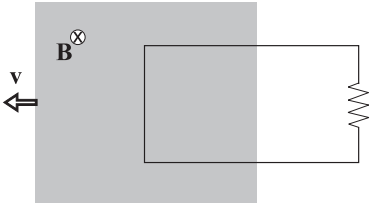
La potencia,  $P$ , suministrada por el agente externo al circuito vendrá dada por

$$P = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = IBlv, \quad (4.15)$$

que puede reescribirse, teniendo en cuenta la expresión (4.5), como

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = I^2 R. \quad (4.16)$$

Esta potencia es precisamente el valor de la potencia Joule disipada en la resistencia, por lo que podemos concluir que la potencia suministrada por el agente externo que mueve el circuito es justamente aquella disipada en la resistencia por efecto Joule.



#### 4.2.2. Fuerza electromotriz inducida

La discusión de la situación analizada en la sección 4.2.1 ha mostrado que la aparición de una fuerza electromotriz en el circuito *móvil* podía atribuirse a la existencia de una fuerza de Lorentz. Ahora bien, si consideramos que el circuito permanece quieto y es el agente que crea el campo magnético (por ejemplo, un imán) el que se mueve hacia la izquierda, es razonable suponer que también aparecerá una fem de igual magnitud y sentido que en el caso anterior puesto que lo que debe importar, según el principio de relatividad, es el *movimiento relativo* entre el campo  $\vec{B}$  y el circuito y no cuál de ellos se mueve.

Los experimentos muestran que efectivamente la suposición anterior es cierta. No obstante, si analizamos el caso del circuito fijo y el imán moviéndose según nuestra teoría, dado que las cargas móviles en el circuito estarán ahora *en reposo*, no existirá fuerza de Lorentz que impulse a las cargas. Por tanto, si no hay fuerza de Lorentz actuando sobre las cargas, ¿de dónde proviene la fem inducida en el circuito?. Podemos responder que el agente que crea ahora la fem debe ser un campo eléctrico, que evidentemente no puede ser un campo electrostático (ver discusión en el apartado 2.5) sino *un nuevo tipo de campo eléctrico que debe estar relacionado con las variaciones temporales del campo magnético*.

El punto en común de los dos fenómenos equivalentes descritos anteriormente se encuentra en que en ambos casos existen variaciones temporales del flujo magnético que atraviesa el circuito. Este hecho no es una coincidencia sino que M. Faraday encontró experimentalmente ( $\sim 1830$ ) que

*La fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  inducida en un circuito viene dada por la variación temporal del flujo magnético,  $\Phi$ , que atraviesa dicho circuito.*

En forma matemática, esta ley puede expresarse como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.17)$$

Ley de Faraday

donde el signo menos está relacionado con el sentido de la fem inducida. Teniendo en cuenta que el origen de la fem es la aparición de un campo  $\vec{E}$  no electrostático, la ley de Faraday puede también expresarse en forma integral como

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (4.18)$$

donde la curva  $\Gamma$  es precisamente el recorrido del circuito. El signo menos de la ley de Faraday queda ahora completamente determinado ya que el sentido de recorrido de la integral de camino a la largo de  $\Gamma$  está relacionado con el sentido de  $d\vec{S}$  según la regla de la mano derecha. La expresión (4.18) pone claramente de manifiesto que la fem inducida está, en general, *distribuida* a lo largo de todo el circuito<sup>1</sup>.

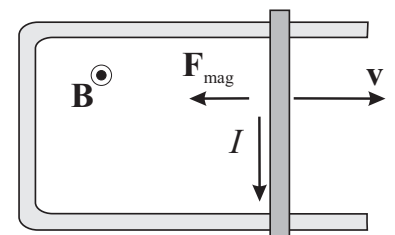
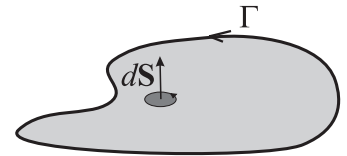
Una manera muy útil y sencilla de determinar a veces el sentido de la fem y de la intensidad inducida lo proporciona la **ley de Lenz**. Esta ley establece que

*La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la causa que las produce.*

La ley de Lenz no hace referencia a la causa (o causas) concreta que provoca la aparición de la fem inducida sino simplemente sugiere que la reacción del sistema generando una fem y corriente inducidas será siempre actuar en contra de la causa que las provoca. Este hecho parece congruente pues de lo contrario el circuito *favorecería* la causa que provoca la corriente inducida, intensificando su efecto indefinidamente.

A efectos prácticos, la deducción del sentido de la fem y corriente inducidas puede hacerse considerando el carácter creciente o decreciente del flujo magnético con respecto al tiempo (este carácter lo da el signo de su derivada temporal). Si, por ejemplo, el flujo es creciente en cierto instante de tiempo, entonces la fem y corriente inducidas deben tener un sentido tal que originen un campo magnético que contrarreste el crecimiento del flujo (lo contrario debe ocurrir si el flujo es decreciente).

Veamos el efecto de la ley de Lenz en el circuito móvil mostrado en la figura. En este ejemplo, la barra móvil se desplaza hacia la derecha con una velocidad  $\vec{v}$  debido a la acción de un agente externo. Según se ha discutido en el apartado 4.2.1 y de acuerdo a ley de Lenz, el sentido de la corriente inducida en el circuito es tal que la fuerza magnética que actúa sobre la barra móvil,  $\vec{F}_{\text{mag}} = I\vec{l} \times \vec{B}$ , se oponga al movimiento impuesto



<sup>1</sup>Al contrario de lo que ocurriría, por ejemplo, en una pila, donde la fuerza electromotriz (y por tanto el campo electromotor) estaba confinada exclusivamente a la región interior de la batería.

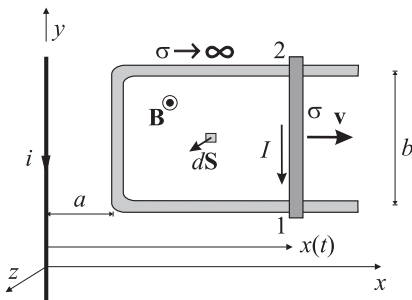
externamente. Si la corriente inducida fuese en sentido opuesto al mostrado en la figura, la fuerza magnética sobre la barra móvil favorecería el movimiento hacia la derecha de la barra de modo que ésta se aceleraría continuamente, causando un aumento incesante de energía cinética que obviamente no tiene sentido.

Hemos encontrado, por tanto, que siempre que exista una variación de flujo magnético en un circuito aparecerá una fem inducida en dicho circuito. En consecuencia, algunas de las causas que provocarían la aparición de una fem inducida son:

- Movimiento de un circuito o deformación de su área en una región donde existe un campo magnético constante en el tiempo.
- Movimiento del agente que produce el campo magnético (por ejemplo un imán) de modo que un circuito fijo intercepte un flujo magnético variable en el tiempo. Por ejemplo, el movimiento de aproximación y alejamiento de un imán daría lugar a una fem inducida en el circuito.
- Variación de la corriente que pasa por un circuito primario de modo que el flujo interceptado por un circuito secundario próximo varíe en el tiempo.
- Combinación simultánea de algunas de las causas anteriores.

En el caso de una corriente variable en un circuito primario que induce una corriente en un circuito secundario, es importante observar que esta corriente inducida se ha generado *sin que exista contacto eléctrico entre los circuitos*. Desde un punto de vista energético, la energía asociada a la corriente inducida en el circuito secundario debe ser obviamente suministrada por la fuente de fem del primario. Dado que no ha habido contacto físico entre ambos circuitos, la única explicación de la aparición de una energía en el secundario es que ésta haya sido transmitida desde el primario hasta el secundario por el campo electromagnético a través del espacio. Esto indica que el campo es un agente capaz de transmitir energía y por tanto debe ser considerado como un ente con realidad física propia.

**Ejemplo 4.1** Obtener el sentido y el valor de la intensidad inducida en el dispositivo mostrado en la figura. Datos. Barra móvil:  $\sigma = 10^8 (\Omega\text{m})^{-1}$ ,  $b = 10\text{ cm}$ ,  $r = 2\text{ mm}$ ,  $v = 5\text{ m/s}$ ;  $i = 200\text{ mA}$ ,  $a = 20\text{ cm}$ .



En la situación mostrada en la figura, dado que la barra vertical se mueve, el flujo magnético que atraviesa el circuito (debido al campo magnético del hilo recto infinito) varía en el tiempo, por lo que se inducirá una  $\mathcal{E}$  en el circuito. Dado que el circuito muestra una resistencia,  $R$  (debida a la conductividad finita de la barra móvil), la intensidad que circula por él vendrá dada por

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (4.19)$$

Según los datos que nos da el problema, la resistencia de la barra móvil será

$$R = \frac{b}{\sigma S} = \frac{0,1}{10^8 \cdot \pi(2 \times 10^{-3})^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi} \Omega.$$

Antes de calcular la  $\mathcal{E}$  inducida notemos que, en el plano  $z = 0$  donde se sitúa el circuito móvil, el valor del campo magnético creado por el hilo recto e infinito viene dado por

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{z}. \quad (4.20)$$

Puesto que al moverse la barra móvil hacia la derecha, el flujo magnético del circuito *crece*, aplicando la ley de Lenz, tenemos que la reacción del circuito generando una corriente inducida debe ser la de contrarrestar la acción que la produce. En consecuencia, la corriente inducida,  $I$ , en el circuito debe ser tal que genere un campo magnético,  $\vec{B}_{\text{ind}}$  que contrarreste el campo externo. Esta corriente debe ir dirigida por tanto según el sentido mostrado en la figura de modo que el sentido de  $\vec{B}_{\text{ind}}$  sea el opuesto al de (4.20). Dado que hemos determinado el sentido de la corriente, nos preocuparemos a continuación únicamente por el módulo de la  $\mathcal{E}$  y de la intensidad inducidas.

La  $\mathcal{E}$  inducida puede calcularse en este caso por dos procedimientos:

#### ■ Fuerza de Lorentz.

Dado que las cargas de la barra vertical se mueven en una región donde existe un campo magnético, encontraremos una fuerza magnética por unidad de carga,  $\vec{f}_m = \vec{v} \times \vec{B}$ , sobre las cargas móviles. Al aplicar la expresión (4.3), esta fuerza magnética provoca la aparición de una  $\mathcal{E}$  en el circuito dada por

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 v B dy = v B b.$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.20) del campo magnético, y admitiendo que la posición de la barra móvil viene dada por

$$x(t) = a + vt, \quad (4.21)$$

tenemos que la  $\mathcal{E}$  puede escribirse como

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mu_0 I v b}{2\pi(a + vt)}. \quad (4.22)$$

#### ■ Ley de Faraday.

Para aplicar la ley de Faraday dada por la expresión (4.17) debemos calcular primero el flujo magnético  $\Phi$ .

Dado que el diferencial de superficie puede escribirse como  $d\vec{S} = dx dy \hat{z}$ , el diferencial de flujo magnético,  $d\Phi$ , a través la superficie del circuito será

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dy.$$

Para calcular el flujo hay que integrar la expresión anterior en la superficie total del circuito, de modo que

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^b dy \left\{ \int_a^x dx \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right\} = \int_0^b dy \left\{ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x}{a} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{x}{a} \int_0^b dy = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dado que la  $\mathcal{E}$  es la derivada temporal del flujo magnético, debemos derivar con respecto al tiempo (4.23). Si hacemos esto tenemos que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{d}{dt} \left( \ln \frac{x}{a} \right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dx/dt}{x(t)} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{v}{x(t)}.$$

Para aplicar la ley de Lenz observamos que el signo de  $d\Phi/dt$  en la expresión anterior es siempre positivo, por lo que la corriente inducida debe generar un campo magnético que se oponga a este crecimiento. Este campo

debe tener dirección  $-\hat{z}$  y, consecuentemente, debe estar generado por una corriente dirigida en sentido horario (tal como se dedujo anteriormente). Finalmente encontramos que el módulo de la  $\mathcal{E}$  será

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{v}{a + vt}, \quad (4.24)$$

expresión que coincide con la obtenida previamente en (4.22).

Finalmente el valor de la intensidad inducida será

$$I(t) = \mathcal{E}(t) \frac{\sigma S}{b} = \frac{\mu_0 I \sigma S}{2\pi} \frac{v}{a + vt}. \quad (4.25)$$

Tras un minuto de movimiento, la intensidad toma el siguiente valor:

$$I(60) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 0,2 \cdot 10^8 \cdot 4\pi^2 \times 10^{-6}}{2\pi} \frac{5}{0,2 + 5 \cdot 60} \approx 2,6\mu\text{A}.$$

## 4.3. Inductancia

### 4.3.1. Inductancia mutua

Si calculamos el flujo magnético,  $\Phi_{21}$ , que atraviesa la superficie del circuito 2 (véase la figura adjunta), debido al campo magnético,  $\vec{B}_1$ , generado por la corriente,  $I_1$ , que circula a través del circuito 1, encontraríamos que

$$\Phi_{21} \propto I_1,$$

esto es, el flujo magnético es proporcional a la intensidad. Este hecho puede explicarse fácilmente si se considera que según la ley de Biot y Savart, el campo magnético  $\vec{B}$  generado por una corriente  $I$  en el punto  $P$  viene dado por

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{espira}} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (4.26)$$

lo que implica que  $\vec{B}_1$  puede escribirse como

$$\vec{B}_1(P) = I_1 \vec{\beta}_1(P), \quad (4.27)$$

donde  $\vec{\beta}_1(P)$  es una función que depende de la posición y de la forma geométrica del circuito 1. El flujo magnético  $\Phi_{21}$  se obtiene como

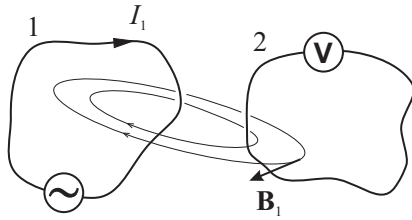
$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S},$$

donde al sustituir la forma de  $\vec{B}_1$  dada por (4.27), se tiene que

$$\Phi_{21} = I_1 \int_{S_2} \vec{\beta}_1 \cdot d\vec{S}. \quad (4.28)$$

La expresión anterior nos confirma que existe una relación de proporcionalidad entre el flujo magnético y la intensidad. Al factor de proporcionalidad entre el flujo magnético en un circuito debido a la intensidad que recorre otro se le denomina **inductancia mutua** y se denota como  $M$ . En nuestro caso tendríamos que

$$\Phi_{21} = M I_1. \quad (4.29)$$



Las unidades de inductancia en el SI se denominan **henrios** (H), de modo que

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}} . \quad (4.30)$$

Unidad de inductancia  
1 henrio (H)

Usando razonamientos que no serán discutidos aquí encontraríamos que la relación entre el flujo que atraviesa el circuito 1,  $\Phi_{12}$ , debido a un campo  $\vec{B}_2$  producido por una intensidad  $I_2$  que recorriese el circuito 2 vendría dada por la misma razón de proporcionalidad, esto es,

$$\Phi_{12} = M I_2 . \quad (4.31)$$

**Ejemplo 4.2** Flujo magnético que atraviesa una espira rectangular debido al campo de un hilo recto e infinito recorrido por una intensidad  $I$ .

En el plano  $z = 0$  donde se sitúa la espira rectangular, el valor del campo magnético creado por el hilo recto e infinito viene dado por

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{z} .$$

En el presente caso, el diferencial de superficie puede expresarse como  $d\vec{S} = dx dy \hat{z}$ , por lo que el diferencial de flujo magnético,  $d\Phi$ , a través de esta superficie es

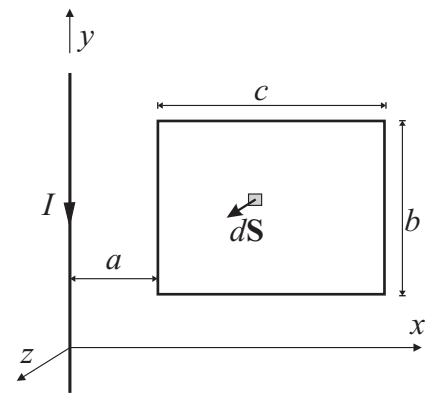
$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dy .$$

El cálculo del flujo total requiere la integración de la expresión anterior en la superficie de la espira rectangular, de modo que

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^b dy \left\{ \int_a^{a+c} dx \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right\} = \int_0^b dy \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+c}{a} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+c}{a} \int_0^b dy = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{a} . \end{aligned}$$

La expresión anterior muestra que la inductancia mutua en el presente caso es

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{a+c}{a} .$$



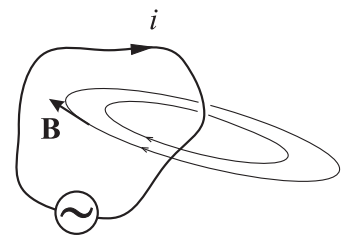
### 4.3.2. Autoinducción

Si consideramos ahora el caso en el que tenemos un solo circuito por el que circula una intensidad  $i$ , un cálculo similar al del apartado anterior nos muestra que el flujo magnético,  $\Phi$ , que atraviesa este circuito es igualmente proporcional a la intensidad que lo recorre:

$$\Phi \propto i .$$

Cuando el flujo magnético que atraviesa un circuito se debe únicamente a la corriente que circula por el propio circuito, este flujo se conoce como **autoflujo** y el parámetro de proporcionalidad entre el autoflujo y la intensidad se conoce como **autoinducción** y se denota como  $L$  (las unidades de esta inductancia son obviamente henrios). En consecuencia podemos escribir

$$\Phi = L i . \quad (4.32)$$



Ejemplo 4.3 Cálculo de la autoinducción de un solenoide esbelto de  $N = 100$  vueltas, longitud  $l = 1\text{cm}$  y  $r = 1\text{mm}$ .

Para un solenoide esbelto de  $N$  vueltas y longitud  $l$ , el campo magnético en el interior del solenoide puede escribirse según (3.36) como

$$\vec{B} = \mu_0 n i \hat{u},$$

donde  $n = N/l$  es la densidad lineal de espiras y  $\hat{u}$  es el vector unitario según el eje del solenoide. Dado que el diferencial de superficie de las espiras viene dado por  $d\vec{S} = dS\hat{u}$ , el flujo que atraviesa las  $N$  espiras del solenoide será

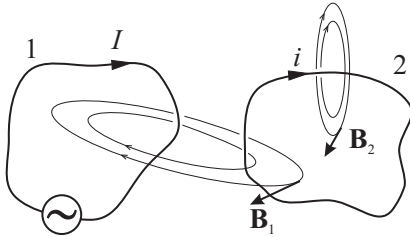
$$\Phi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_S B dS = NB \int_S dS = \mu_0 \frac{N^2}{l} i S,$$

de donde se deduce que la autoinducción  $L$  es

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 l S.$$

Sustituyendo ahora los datos del problema tenemos que

$$L = 4\pi \times 10^{-7} \frac{10^4}{10^{-2}} \pi \times 10^{-6} \approx 3,95\mu\text{H};$$



En el caso de que circule corriente tanto por el circuito 1 como por el circuito 2, el flujo *total*,  $\Phi_{\text{tot}}$ , que atraviesa la superficie del circuito 2 puede expresarse como

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}} &= \Phi_{21} + \Phi_{22} \\ &= \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{aut}}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde  $\Phi_{\text{ext}}$  es el flujo que atraviesa el circuito 2 debido a los agentes *externos*, en este caso, el campo generado por la intensidad,  $I$ , que recorre el circuito 1 y  $\Phi_{\text{aut}}$  es el autoflujo del circuito 2. Dadas las relaciones de proporcionalidad entre los flujos y las intensidades vistas en las expresiones (4.29) y (4.32), el flujo total puede escribirse como

$$\Phi_{\text{tot}} = MI + Li. \quad (4.34)$$

Según la ley de Faraday y teniendo en cuenta (4.33), la fem inducida en el circuito 2 vendrá dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} (\Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{aut}}). \quad (4.35)$$

En el caso frecuente de que la autoinducción y la inducción mutua no varíen en el tiempo (esto es, si la forma de los circuitos no cambia en el tiempo),  $\mathcal{E}$  puede escribirse como

$$\mathcal{E} = -M \frac{dI}{dt} - L \frac{di}{dt}. \quad (4.36)$$

El cálculo de la fem inducida en el circuito 2 según (4.36) no es trivial dado que esta fem depende de las variaciones temporales de  $i$ , pero esta



misma intensidad depende a su vez del valor de la fem inducida. Afortunadamente, existen muchas situaciones prácticas en las que las variaciones temporales del autoflujo son mucho menores que las correspondientes al flujo externo, por lo que la fem inducida en el circuito puede obtenerse muy aproximadamente como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt}.$$

Valor de la  $\mathcal{E}$  si autoflujo es despreciable

No obstante, existen otras situaciones donde el autoflujo no puede despreciarse. Un caso particularmente importante se encuentra cuando cuando las variaciones del flujo externo son nulas (por ejemplo cuando  $I = 0$ ). En este caso la fem inducida debe calcularse como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{aut}}}{dt}.$$

Valor de la  $\mathcal{E}$  si flujo externo nulo

### 4.3.3. Transitorios en circuitos $RL$

Una situación práctica donde el único flujo que atraviesa el circuito es el *autoflujo* se muestra en la figura adjunta, donde tenemos una batería de fem  $\mathcal{E}_B$  que mediante un conmutador alimenta una bombilla (o cualquier otro dispositivo). Desde un punto de vista circuital, la bombilla puede considerarse como una resistencia de valor  $R$ . Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones a la configuración anterior tendremos que la suma de las fem existentes en el circuito debe ser igual a la caída de tensión en la resistencia. Dado que existen dos fuentes de fem, una debida a la batería,  $\mathcal{E}_B$ , y otra fem *inducida*,  $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ , debida a las variaciones temporales del autoflujo, la ley de Kirchhoff dice que

$$\mathcal{E}_B + \mathcal{E}_{\text{ind}} = Ri. \quad (4.37)$$

Dado que en el presente caso:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}, \quad (4.38)$$

podemos reescribir (4.37) como

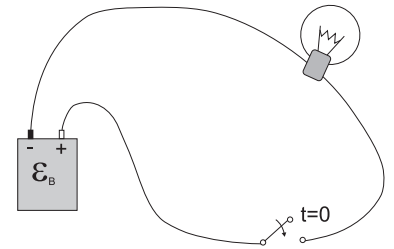
$$\mathcal{E}_B - L \frac{di}{dt} = Ri. \quad (4.39)$$

Para obtener el valor de la intensidad  $i(t)$  que circula por el circuito debemos resolver la *ecuación diferencial* anterior. Según esta ecuación, la fem inducida puede considerarse que actúa como una fuerza “contralectromotriz”, en el sentido de que actúa contra la fem de la batería intentando contrarrestar (según determinaba la ley de Lenz) los cambios de flujo magnético en el circuito. El efecto de esta fuerza contrelectromotriz se notará en que la corriente que circula por el circuito no cambiará bruscamente desde 0 hasta un valor de  $\mathcal{E}_B/R$  tal como ocurriría si se despreciase el efecto de la inducción electromagnética.

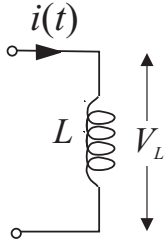
Aunque la expresión (4.39) proporciona una buena interpretación física de los fenómenos que suceden en el circuito, es usual reescribir esta ecuación como

$$\mathcal{E}_B = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (4.40)$$

$$= V_R + V_L. \quad (4.41)$$



Escrito en esta forma, la Teoría de Circuitos interpreta que la fem generada por la batería es igual a la caída de tensión en la resistencia,  $V_R = Ri$ , más una caída de tensión,  $V_L$ , debida a la autoinducción  $L$ . El *efecto distribuido* de la fem inducida en el circuito puede modelarse, por tanto, como una caída de potencial en un elemento de circuito, denominado genéricamente **inductor**, caracterizado por la inductancia  $L$  (ver figura adjunta):



$$V_L = L \frac{di}{dt} . \quad (4.42)$$

De este modo, los efectos de inducción electromagnética relacionados con el campo magnético variable se supone que están localizados en los inductores. Estos inductores son comúnmente elementos puestos a propósito en los circuitos para aumentar los efectos de inducción electromagnética, por ejemplo, **solenoides** o **bobinas**. Dado el alto valor del campo magnético en el interior de los solenoides y la posibilidad de miniaturizarlos, estos elementos son parte fundamental de los circuitos eléctricos y electrónicos.

En este sentido, consideraremos a la autoinducción o bobina como otro elemento del circuito donde se produce una caída de tensión al igual que en la resistencia; aunque obviamente la dependencia de  $V$  con la intensidad que recorre el elemento es distinto en la resistencia y en la bobina. Desde un punto de vista circuital, el circuito que debemos resolver se muestra en la figura adjunta, donde la intensidad  $i(t)$  que circula por este circuito será la solución de (4.40) o equivalentemente:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}_B}{L} . \quad (4.43)$$

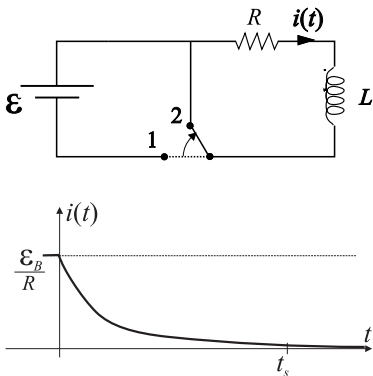
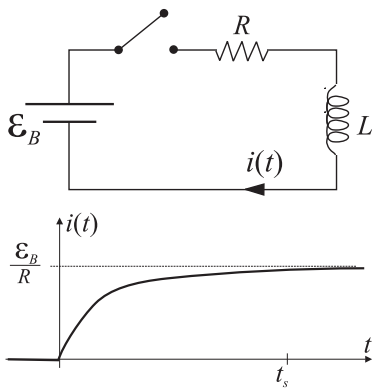
La solución de esta ecuación diferencial viene dada por

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}_B}{R} ,$$

donde la constante  $I_0$  se determina en función del valor de  $i(t)$  en  $t = 0$ . En el presente caso dado que  $i(0) = 0$  (esto es, la intensidad era nula antes de conmutar), se encuentra que  $I_0 = -\mathcal{E}_B/R$  y por tanto

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_B}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) . \quad (4.44)$$

La forma de  $i(t)$  claramente muestra que esta intensidad no cambia bruscamente sino que el valor final  $\mathcal{E}_B/R$  se alcanza aproximadamente tras un tiempo  $t_s \approx 4L/R$ . Si  $L$  tiene un valor alto (esto es, si los efectos de inducción electromagnética son importantes) el valor final de la corriente tarda más tiempo en alcanzarse.



Consideramos ahora la situación mostrada en la figura adjunta en la que el interruptor pasa de la posición  $1 \rightarrow 2$  en  $t = 0$ . Antes de conmutar, el circuito había alcanzado una situación estacionaria por lo que tendremos que en  $t = 0$ ,  $i(0) = \mathcal{E}_B/R$ . Para resolver la evolución de la corriente en el tiempo podemos notar que ahora tenemos la misma situación que en el caso anterior, pero con  $\mathcal{E}_B = 0$ . Esto hace que ahora el segundo miembro de la ecuación (4.43) sea nulo y, por tanto, la solución para  $i(t)$  venga dada por

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.45)$$

$$= \frac{\mathcal{E}_B}{R} e^{-\frac{R}{L}t} . \quad (4.46)$$

Podemos observar que, en la presente situación, la corriente no desciende a cero bruscamente sino que tardaría aproximadamente un tiempo  $t_s$  en alcanzar este valor.

## 4.4. Energía magnética

En el apartado anterior se ha visto que la evolución de un circuito serie  $RL$  tal como el mostrado en la figura adjunta venía regida por la ecuación

$$\mathcal{E} = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (4.47)$$

Multiplicando ambos términos de la ecuación por la intensidad,  $i$ , obtenemos

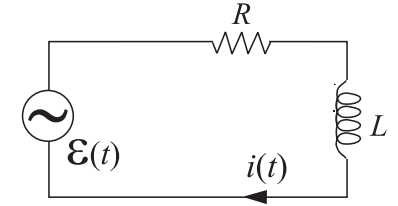
$$\mathcal{E}i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}, \quad (4.48)$$

donde el primer miembro de (4.48) nos da, según (2.27), la potencia suministrada por la batería y el segundo miembro debe ser, por tanto, la potencia “consumida” en el circuito. Dado que el primer término del segundo miembro,  $Ri^2$ , es la potencia disipada en la resistencia por efecto Joule –ver (2.22)–, podemos concluir que el segundo término,  $Li \frac{di}{dt}$ , estará exclusivamente asociado a la autoinducción. Este término puede entonces interpretarse como la energía por unidad de tiempo que se almacena en el campo magnético del inductor (recuérdese que en el circuito se ha supuesto que los efectos del campo magnético están localizados en este elemento). Si designamos por  $U_B$  a la energía magnética almacenada en el inductor, entonces la razón con la que se almacena esta energía puede escribirse como

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right). \quad (4.49)$$

En consecuencia, la energía magnética almacenada en el inductor vendrá dada por

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2. \quad (4.50)$$



Energía almacenada en el inductor

**Ejemplo 4.4** Calcular el calor disipado en la resistencia  $R_2$  cuando el conmutador pasa de la posición 1 a la 2.

Supuesto que en  $t = 0$  se realiza el cambio del conmutador de la posición 1 a la 2, podemos afirmar que el valor de la intensidad en este instante era

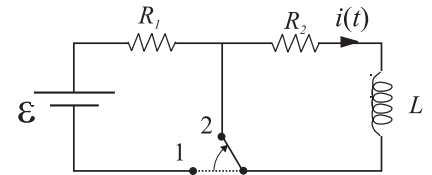
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2},$$

supuesto que el conmutador estuvo en la posición 1 por un tiempo considerable –ver expresión (4.44). Para  $t > 0$ , la intensidad que recorre el circuito  $R_2L$  será, según (4.45),

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R_2}{L}t}.$$

Dado que el calor disipado en la resistencia  $R_2$  por unidad de tiempo viene dado por

$$P_{R_2} = \frac{dW}{dt} = i^2 R_2,$$



el calor total disipado en esta resistencia,  $W$ , puede calcularse como

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty P_{R_2} dt = \int_0^\infty i^2 R_2 dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2R_2}{L}t} R_2 dt \\ &= I_0^2 R_2 \int_0^\infty e^{-\frac{2R_2}{L}t} dt . \end{aligned}$$

Si en la integral anterior se introduce el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{L}{2R_2} \alpha$$

se tiene que

$$W = I_0^2 R_2 \left( \frac{L}{2R_2} \int_0^\infty e^{-\alpha} d\alpha \right) = \frac{1}{2} L I_0^2 .$$

El calor disipado en la resistencia es justamente la energía magnética que estaba almacenada en el inductor.

La energía almacenada en el inductor podemos decir que está “contenida” en el campo magnético presente en este elemento y, consecuentemente,  $U_B$  puede identificarse como la energía del campo magnético. Para hacer este hecho más evidente, consideremos que el inductor es un solenoide esbelto (cuya autoinducción fue obtenida en el Ejemplo 4.3), por lo que podemos escribir que

$$U_B = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 l S i^2 = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 n^2 i^2 S l . \quad (4.51)$$

Dado que el campo en el interior de un solenoide se encontró que era  $B = \mu_0 n i$ , la expresión anterior puede reescribirse como

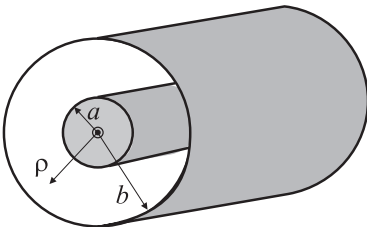
$$U_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \mathcal{V} , \quad (4.52)$$

siendo  $\mathcal{V} = S l$  el volumen del solenoide. Finalmente podemos deducir que en este inductor la densidad volumétrica de energía magnética,  $u_B$ , viene dada por

Densidad de energía magnética

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (4.53)$$

Aunque el resultado anterior se ha obtenido para un caso particular, cálculos más rigurosos demostrarían que este resultado es válido en general.



**Ejemplo 4.5** Cálculo de la autoinducción por unidad de longitud de una cable coaxial de radio interior  $a = 1\text{ mm}$  y radio exterior  $b = 3\text{ mm}$ .

Dado que un cable coaxial la corriente  $I$  que circula por el conductor interno retorna por el conductor externo, la aplicación de la ley de Ampère al presente caso nos dice que el campo magnético producido por ambas corrientes fuera de los conductores será

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{r} & \text{si } a \leq \rho \leq b, \\ 0 & \text{si } \rho > b. \end{cases} \quad (4.54)$$

La densidad volumétrica de energía magnética en el interior del cable coaxial vendrá entonces dada, según (4.53), por

$$u_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2}, \quad (4.55)$$

de donde podemos obtener la energía magnética almacenada en un conductor coaxial de longitud  $l$  como

$$U_B = \int_{\text{volumen}} u_B dV. \quad (4.56)$$

Teniendo en cuenta que en el presente caso y debido a la simetría cilíndrica del problema podemos escribir

$$dV = dS dl = 2\pi\rho d\rho dl,$$

la energía magnética se calculará como

$$U_B = \int_0^l dl \left\{ \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2} 2\pi\rho d\rho \right\} = \int_0^l dl \left\{ \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \right\} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Considerando ahora que la energía magnética almacenada en el inductor viene dada por (4.50), tenemos que

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) l I^2,$$

por lo que la autoinducción por unidad de longitud del cable coaxial será

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.57)$$

Sustituyendo ahora los valores de  $a$  y  $b$  obtenemos el siguiente valor numérico:

$$\frac{L}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \ln 3 \approx 0,22 \mu\text{H/m}. \quad (4.58)$$

## 4.5. Problemas propuestos

**4.1:** En el interior de un solenoide de 600 vueltas, el flujo magnético cae de  $8,0 \times 10^{-5}$  weber a  $3,0 \times 10^{-5}$  weber en 15 ms. ¿Cuál es la fem media inducida?

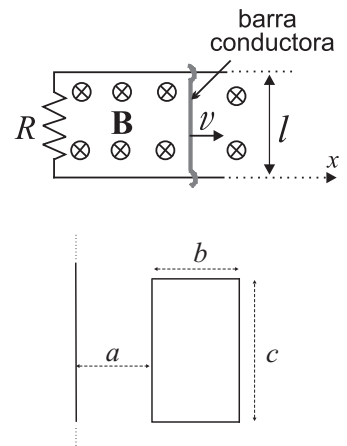
**Sol.:**  $\mathcal{E} = -2\text{V}$ .

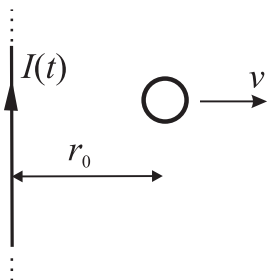
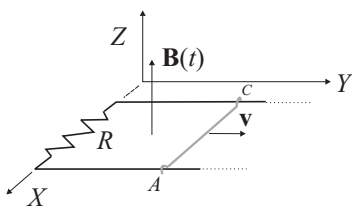
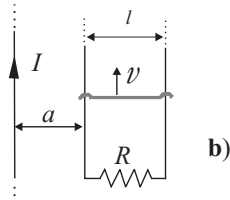
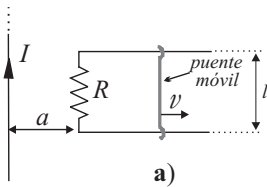
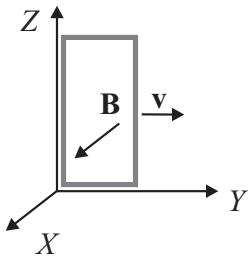
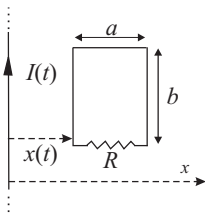
**4.2:** Una barra metálica se desplaza a velocidad constante,  $v$ , sobre dos varillas conductoras unidas por una resistencia  $R$  en sus extremos izquierdos. Se establece un campo magnético uniforme y estático,  $\vec{B}$ , como se indica en la figura. **a)** Calcúlese la fem inducida en el circuito así como la corriente inducida indicando su sentido; **b)** ¿Qué fuerza está siendo aplicada a la barra para que se mueva a velocidad constante?; **c)** Realízese un balance entre la potencia aplicada y la energía consumida. **Nota:** Despreciar el autoflujo del circuito.

**Sol.:** **a)**  $\mathcal{E} = -Blv$ ; **b)**  $\vec{F}_a = IlB\hat{x}$ ; **c)** Pot. aplicada =  $F_a v =$  Pot. consumida =  $I^2 R$ .

**4.3:** Determinar el coeficiente de inducción mutua entre el circuito rectangular de la figura y el conductor recto infinito.

**Sol:**  $M = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \left( \frac{a+b}{a} \right)$ .





**4.4:** Un conductor rectilíneo e infinitamente largo está recorrido por una intensidad  $I(t)$ . Una espira rectangular de lados  $a$  y  $b$  y resistencia  $R$  es coplanaria con dicho conductor y varía su posición de acuerdo con una ley de movimiento  $x(t)$  conocida. Calcúlese: **a)** el flujo magnético,  $\Phi(t)$ , que atraviesa la espira; **b)** la  $fem$  inducida en la espira, indicando que parte de la misma se debe al movimiento y cuál a la variación temporal del campo magnético; **c)** el valor de la corriente inducida en el instante  $t$  si  $I(t) = I_0$  y  $x(t) = vt$  ( $v > 0$ ). **Nota:** Despreciar el autoflujo del circuito.

**Sol.:** **a)**  $\Phi(t) = \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \ln \left( \frac{a+x(t)}{x(t)} \right)$ ;  
**b)**  $\mathcal{E}(t) = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \left[ \frac{dI(t)}{dt} \ln \left( \frac{a+x(t)}{x(t)} \right) - \frac{aI(t)v}{x(t)(a+x(t))} \right]$ ;  
**c)**  $I_{ind} = \frac{ab\mu_0 I_0}{2\pi R(at + vt^2)}$  en sentido horario.

**4.5:** Un circuito rectangular de  $2\ \Omega$  de resistencia se desplaza en el plano  $YZ$  en una zona donde existe un campo magnético  $\vec{B} = (6-y)\hat{x}$  T. Las dimensiones del circuito son de 0,5 m de altura por 0,2 m de anchura. Suponiendo que en el instante inicial ( $t = 0$ ) el lado izquierdo del circuito coincidía con el eje  $Z$  (según puede verse en el dibujo), calcular la intensidad inducida en el circuito en los casos siguientes: **a)** se desplaza a velocidad uniforme de 2 m/s hacia la derecha; **b)** transcurridos 100 segundos, si se mueve aceleradamente hacia la derecha con  $a = 2\text{ m/s}^2$  (supóngase que el circuito partió del reposo). **c)** Repetir los apartados anteriores suponiendo que el movimiento es ahora paralelo al eje  $Z$ . **Nota:** en todos los casos considérese despreciable el autoflujo.

**Sol.:** **a)** 0.1 A; **b)** 10 A; **c)** 0 A en los dos casos, ya que no hay variación del flujo magnético.

**4.6:** Un conductor rectilíneo infinito está recorrido por una intensidad  $I$ . Otro conductor en forma de U es coplanario con el primero, su base es una resistencia,  $R$ , y mediante un puente móvil, que se mueve a velocidad  $v$ , forma una espira rectangular de área variable (véase figura). Se consideran los casos en que  $R$  es paralela o perpendicular al conductor rectilíneo infinito (casos a) y b) en la figura respectivamente). Determinar en cada caso la intensidad de corriente inducida y la fuerza que es necesario aplicar al puente móvil para que se mueva a velocidad  $v$ . **Nota:** en ambos casos considérese despreciable el autoflujo del circuito en U.

**Sol.:** **a)**  $I_{ind} = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi R(a+vt)}$ ,  $F = \frac{v}{R} \left[ \frac{\mu_0 I l}{2\pi(a+vt)} \right]^2$ ;  
**b)**  $I_{ind} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln \left( \frac{a+l}{a} \right)$ ,  $F = \frac{v}{R} \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{a+l}{a} \right) \right]^2$ .

**4.7:** En la figura se muestra un campo magnético uniforme y no estacionario,  $\vec{B}(t) = (2 + 0,5t^2)\hat{z}$  T ( $t$  en segundos). En el seno de dicho campo se ha dispuesto un circuito formado por un conductor en forma de U, que contiene una resistencia  $R = 10\ \Omega$ , y que junto con la barra conductora móvil AC, de longitud  $l = 1\text{ m}$  y masa  $m\text{ kg}$ , forma una espira rectangular de área variable. Si la ley de movimiento de la barra AC es  $y(t) = 3t^2\text{ m}$ , calcular: **a)** el flujo magnético a través del circuito; **b)** la  $fem$  inducida en el circuito; **c)** la intensidad inducida, indicando su sentido; **d)** la fuerza debida al campo magnético que actúa sobre la barra en dirección  $y$ ; **e)** la fuerza que hemos de aplicar a la barra móvil para que satisfaga la mencionada ley de movimiento. **Nota:** Considere despreciable el autoflujo en el circuito.

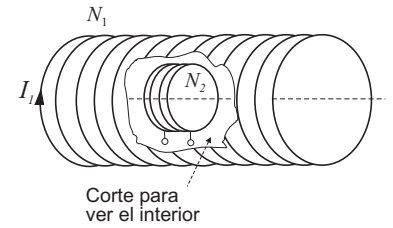
**Sol.:** **a)**  $\Phi(t) = 6t^2 + 1,5t^4$  weber; **b)**  $\mathcal{E}(t) = -(12t + 6t^3)\text{ V}$ ; **c)**  $I_{ind}(t) = 1,2t + 0,6t^3$  sentido horario; **d)**  $\vec{F}_{mag}(t) = -(2,4t + 1,8t^3 + 0,3t^5)\hat{y}$ ; **e)**  $\vec{F}_{aplic}(t) = (6m + 2,4t + 1,8t^3 + 0,3t^5)\hat{y}$ .

**4.8:** A través de un hilo conductor rectilíneo muy largo circula una corriente que varía con el tiempo según la expresión  $I(t) = at$ , donde  $a = 0,7\text{ A/s}$ . En las proximidades del hilo, y en un plano que contiene a éste, se encuentra una espira de radio  $b = 5\text{ mm}$  y resistencia  $R = 0,2\text{ m}\Omega$ . Esta espira se aleja del hilo con una velocidad constante  $v$ , estando situada en el instante inicial ( $t = 0$ ) a una distancia  $r_0$  del hilo. Obtener **a)** la expresión del flujo magnético que atraviesa la espira; **b)** la expresión de la fuerza electromotriz inducida; **c)** la intensidad inducida en la espira en el instante inicial, indicando su sentido. **Nota:** debido al pequeño tamaño de la espira, podemos considerar —a efecto de cálculo— que el campo magnético creado por el hilo es *uniforme* en el interior de la espira e igual a su valor en el centro de ésta).

**Sol.:** **a)**  $\Phi(t) = \frac{\mu_0 b^2 at}{2(r_0+vt)}$ ; **b)**  $\mathcal{E}(t) = \frac{\mu_0 b^2 ar_0}{2(r_0+vt)^2}$ ; **c)**  $I(0) = 4,39\ \mu\text{A}$ , sentido antihorario.

**4.9:** En la figura se muestra un solenoide esbelto de longitud  $l_1$  y un total de  $N_1$  espiras. Dentro del mismo y coaxial con el se ha dispuesto una bobina de radio  $R_2$  y un total de  $N_2$  espiras. Calcular: **a)** el coeficiente de inducción mutua entra ambos bobinados; **b)** la fem inducida entre los extremos de la bobina pequeña cuando por el solenoide esbelto circula una intensidad  $I_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . **c)** Repítanse los dos apartados anteriores suponiendo ahora que el eje de la bobina pequeña forma un ángulo  $\theta$  con el del solenoide.

**Sol.:** **a)**  $M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 N_1 N_2}{l_1}$ ; **b)**  $\mathcal{E} = M \omega I_0 \sin(\omega t)$ ; **c)** en este caso, los resultados anteriores se multiplican por  $\cos(\theta)$ .



**4.10:** Determinar la fem autoinducida en un solenoide de inductancia  $L = 23$  mH cuando: **a)** la corriente es de 25 mA en el instante inicial y aumenta con una rapidez de 37 mA/s; **b)** la corriente es cero en el instante inicial y aumenta con una rapidez de 37 mA/s; **c)** la corriente es de 125 mA en el instante inicial y disminuye con una rapidez de 37 mA/s; **d)** la corriente es de 125 mA y no varía.

**Sol.:** en los tres casos **a)**, **b)** y **c)**,  $\mathcal{E} = 851 \times 10^{-6}$  V, salvo que la polaridad es diferentes. Así, dado que la polaridad de fem autoinducida es tal que se opone a las variaciones de la intensidad, en los apartados **a)** y **b)** la polaridad es la misma (ya que en ambos casos la intensidad aumenta), siendo en **c)** contraria a los apartados anteriores (ya que en este caso disminuye); **d)**  $\mathcal{E} = 0$ .

**4.11:** La intensidad que circula una bobina de inductancia  $L$  varía de acuerdo con la expresión  $i(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$ , donde  $\tau$  es una constante. Determinése: **a)** la corriente inicial ( $t = 0$ ) y final ( $t = \infty$ ) en la bobina; **b)** las expresiones temporales de la energía magnética en la bobina y de la potencia recibida por la misma; **c)** el instante de tiempo,  $t$ , en el cual la potencia recibida es máxima; **d)** la energía final almacenada en la bobina (esto es, para  $t = \infty$ ).

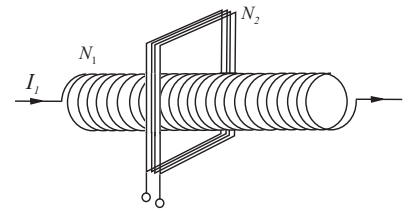
**Sol.:** **a)**  $i(0) = 0$ ,  $i(\infty) = I_0$ ; **b)**  $U_m(t) = \frac{L i^2(t)}{2}$ ,  $P(t) = \frac{L I_0 e^{-t/\tau} i(t)}{\tau}$ ; **c)**  $t = \tau \ln 2$ ;

**d)**  $U_m = \frac{L I_0^2}{2}$ .

**4.12:** En la figura se ha representado un solenoide esbelto de longitud  $l$  y área de sección transversal  $S$ , que posee un total de  $N_1$  espiras. Por dicho solenoide circula una intensidad  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ . Rodeando dicho solenoide se ha colocado una bobina rectangular de  $N_2$  espiras. Calcular: **a)** el campo magnético,  $B(t)$ , en el interior del solenoide; **b)** el coeficiente de autoinducción,  $L$ , del solenoide; **c)** la diferencia de potencial,  $V_1(t)$ , entre los extremos del solenoide; **d)** el flujo magnético que atraviesa la bobina rectangular,  $\Phi_2(t)$ , así como la fuerza electromotriz inducida,  $V_2(t)$ , entre los bornes de dicha bobina.

**Sol.:** **a)**  $B(t) = \frac{\mu_0 N_1 I_0}{l} \sin(\omega t)$ ; **b)**  $L = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l}$ ; **c)**  $V_1(t) = L \omega I_0 \cos(\omega t)$ ;

**d)**  $\Phi_2(t) = \mu_0 I_0 N_1 N_2 S \sin(\omega t)/l$ ,  $V_2(t) = -\mu_0 I_0 N_1 N_2 S \omega \cos(\omega t)/l$ .







## Tema 5

# Ecuaciones de Maxwell

---

### 5.1. Introducción

En los temas anteriores se han visto una serie de leyes (la mayoría extraídas directamente de la experimentación) que determinan el comportamiento de los campos eléctrico y magnético. Entre las múltiples leyes y expresiones que se han visto, puede escogerse un conjunto de cuatro de ellas que forman la *base* del Electromagnetismo y de donde se pueden derivar *todos* los fenómenos electromagnéticos. Estas leyes fueron recogidas por James C. Maxwell ( $\sim 1860$ ) en una labor que ha sido reconocida como una de las síntesis más fructíferas de toda la historia de la Física. Además de esta labor recopilatoria, Maxwell notó además una inconsistencia en la ley de Ampère que solucionó añadiendo a esta ecuación un término adicional relacionado con un nuevo tipo de corriente que denominó *corriente de desplazamiento*. Las ecuaciones de Maxwell son cuatro ecuaciones diferenciales o integro-diferenciales (aquí se optará por presentarlas en forma integro-diferencial) que compendian toda la información que hemos adquirido sobre los campos eléctricos y magnéticos y su relación con las fuentes que los producen.

La forma matemática de las ecuaciones condujo a Maxwell a exponer la hipótesis de que los campos eléctrico y magnético eran en realidad partes de un ente único que es la *onda electromagnética* (excepto en situaciones estáticas puras). Esta hipótesis fue verificada algunos años después por Hertz en 1887, constituyendo una de las predicciones teóricas más brillantes de la Ciencia. Las ondas electromagnéticas serán objeto de estudio en el Capítulo 8, donde veremos que éstas se deducen como una consecuencia natural de las ecuaciones de Maxwell.

## 5.2. Antecedentes

Un posible compendio de las leyes básicas descritas en los temas anteriores viene dado por

### 1. Ley de Gauss para el campo electrostático

En el Apartado 1.6 se presentó la ley de Gauss para el campo *electrostático*,  $\vec{E}(\vec{r})$ <sup>1</sup>, que podía expresarse como

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0}, \quad (5.1)$$

donde  $Q_S$  representa la carga total encerrada en el interior de la superficie  $S$  y  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{Nm}^2)$  es una constante que se conoce como *permitividad eléctrica del vacío*.

### 2. Ley de Gauss para el campo magnetostático

Según se discutió en el Apartado 3.5, las líneas del campo *magnetostático*,  $\vec{B}(\vec{r})$ , no tienen principio ni fin. Este hecho puede expresarse matemáticamente como

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (5.2)$$

Esta ley, a veces conocida como ley de Gauss para el campo magnetostático, establece que el flujo del campo magnetostático a través de cualquier superficie cerrada es nulo. No es difícil imaginar que si las líneas de campo son líneas que no tienen principio ni fin, el “número” de líneas que entran y salen en cualquier superficie cerrada será el mismo y, por tanto, el flujo total es nulo.

### 3. Ley de Faraday

La ley de inducción electromagnética discutida en el apartado 4.2.2 establecía que la fem,  $\mathcal{E}$ , inducida en un circuito era igual a menos la variación temporal del flujo magnético que atravesaba dicho circuito:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (5.3)$$

En términos de los campos eléctrico y magnético, esta ley podía expresarse como

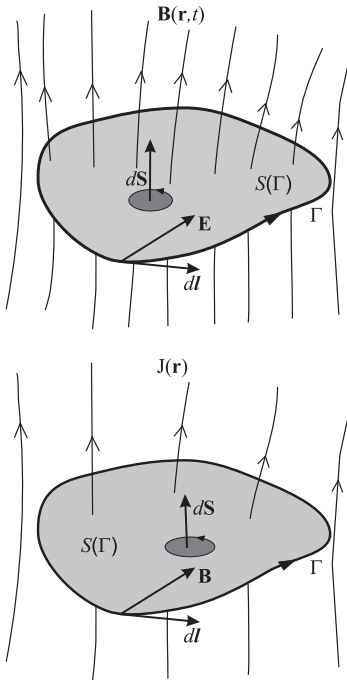
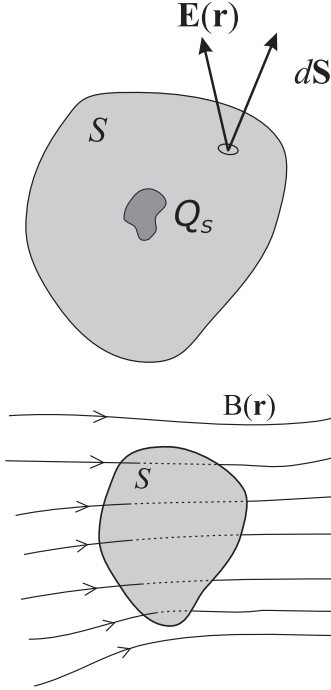
$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S(\Gamma)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}, \quad (5.4)$$

esto es, la circulación del campo eléctrico,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , a lo largo del circuito  $\Gamma$  era igual a menos la variación del flujo magnético del campo  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  que atravesaba dicho circuito (nótese que los campos magnético y eléctrico se han supuesto dependientes del tiempo). Es importante recordar que la ley de Faraday siempre hace referencia al medio material (conductores del circuito) como el lugar donde se genera el campo no electrostático que provoca la fem inducida.

### 4. Ley de Ampère para el campo magnetostático

La ley básica que determina la forma del campo *magnetostático*,

<sup>1</sup>En este tema y en los siguientes, el vector  $\vec{r}$  denotará la **posición** del punto donde se observan los campos.



$\vec{B}(\vec{r})$  es la ley de Ampère introducida en el Apartado 3.6. Esta ley establecía que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}, \quad (5.5)$$

es decir, la circulación del campo magnetostático a través de una curva  $\Gamma$  es igual a  $\mu_0$  veces la intensidad de la *corriente continua* que atravesaba la superficie  $S(\Gamma)$ . La constante  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$  se denomina *permeabilidad magnética del vacío*.

## 5.3. Aportaciones de Maxwell

Maxwell realiza una revisión de las leyes expuestas en el apartado anterior, extendiéndolas a campos eléctricos y magnéticos **variables en el tiempo**. Sus aportaciones pueden resumirse en lo siguiente:

### 5.3.1. Ley de Gauss para el campo eléctrico

Maxwell extendió la validez de la ley de Gauss (que en su forma inicial (5.1) sólo era aplicable a campos eléctricos constantes en el tiempo; es decir, a campos electrostáticos) a campos eléctricos que varían en el tiempo,  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ . De este modo, la ley de Gauss para el campo eléctrico puede escribirse, en general, como

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S(t)}{\epsilon_0}, \quad (5.6)$$

Ley de Gauss para  $\vec{E}(\vec{r}, t)$

donde  $Q_S(t)$  es la carga *total* (que ahora puede variar en el tiempo) encerrada en el interior de la superficie  $S$ .

### 5.3.2. Ley de Gauss para el campo magnético

Dado que experimentalmente se encuentra que las líneas de campo magnético no divergen ni convergen en ningún punto del espacio (es decir, no existen cargas magnéticas), la ley de Gauss para el campo magnetostático, (5.2), puede generalizarse a campos magnéticos variables en el tiempo,  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ :

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (5.7)$$

Ley de Gauss para  $\vec{B}(\vec{r}, t)$

El flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo.

### 5.3.3. Ley de Faraday-Maxwell

La ley de inducción electromagnética según fue establecida por Faraday estaba directamente ligada a la presencia de conductores, de modo que en la expresión (5.4), la curva  $\Gamma$  coincidía estrictamente con el recorrido del circuito. Maxwell notó que la identidad matemática expresada por

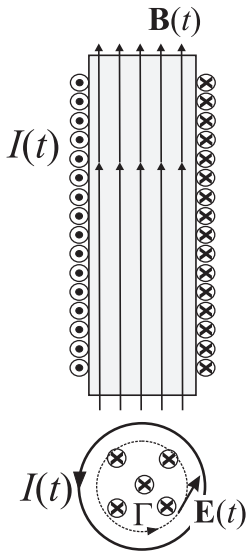
(5.4) no tenía por qué ligarse a la existencia de conductores; esto es, no hay nada en (5.4) que exija que la curva  $\Gamma$  deba coincidir con el recorrido del circuito. Con esta concepción en mente, la ley de Faraday-Maxwell:

Ley de Faraday-Maxwell

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (5.8)$$

establece que la circulación del campo eléctrico a través de una curva arbitraria,  $\Gamma$ , es igual a menos la variación del flujo magnético que atraviesa una superficie  $S(\Gamma)$  cuyo contorno se apoya en  $\Gamma$ . Esta reinterpretación de la ley de Faraday dice mucho más que la ley original pues establece

*la existencia de un campo eléctrico en cualquier punto del espacio donde exista un campo magnético variable en el tiempo.*



Ejemplo 5.1 Cálculo del campo eléctrico en el interior de un solenoide alimentado por una corriente  $I(t)$

En el Apartado 3.6.2 se calculó el campo magnetostático producido por un solenoide recorrido por una intensidad  $I$ . Puesto que en el presente caso la intensidad que recorre el solenoide es variable en el tiempo, puede suponerse, a semejanza de (3.36), que el campo magnético en el interior del solenoide vendrá ahora dado por

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 n I(t) \hat{u}.$$

Dado que en el interior del solenoide existe un campo magnético variable en el tiempo, el vector  $\partial \vec{B} / \partial t$  toma el siguiente valor:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n \dot{I}(t) \hat{u},$$

donde  $\dot{I}(t)$  representa la derivada temporal de  $I(t)$ .

Es interesante observar ahora la analogía formal que existe entre la ley (5.8) y la ley de Ampère. Ambas pueden escribirse formalmente como

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S(\Gamma)} \vec{V} \cdot d\vec{S}, \quad (5.9)$$

siendo  $\vec{A}$  y  $\vec{V}$  las magnitudes correspondientes en cada caso:  $\vec{B}$  y  $\mu_0 \vec{J}$  en la ley de Ampère y  $\vec{E}$  y  $-\partial \vec{B} / \partial t$  en la ley de Faraday-Maxwell. Esto significa que los procedimientos matemáticos que encontramos relacionados con la aplicación de la ley de Ampère pueden ahora aplicarse igualmente con respecto a (5.8). En este sentido, dada la simetría cilíndrica del presente problema, podemos deducir que las curvas donde el módulo del vector  $\vec{E}$  no variará espacialmente serán circunferencias centradas en torno al eje del solenoide. En consecuencia, el primer término de (5.8) puede escribirse como

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(\rho, t) 2\pi\rho. \quad (5.10)$$

Como el vector  $-\partial \vec{B} / \partial t$  es uniforme en el interior del solenoide, el flujo a través de  $S(\Gamma)$  (esto es, el segundo miembro de (5.8)) vendrá dado por

$$\int_{S(\Gamma)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\mu_0 n \dot{I}(t) \pi \rho^2. \quad (5.11)$$

Al igualar ahora ambos (5.10) con (5.11) y tener en cuenta la dirección y sentido de  $\vec{E}$  obtenemos finalmente que

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 n \dot{I}(t)}{2} \rho \hat{r} . \quad (5.12)$$

**Ejemplo 5.2** Si en el ejemplo anterior, la corriente viene dada por  $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$  (siendo  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ ), calcule para  $\rho = 1$  cm el valor de la frecuencia,  $f$ , para el que los valores de la densidad de energía promedio por periodo  $T$  asociada al campo magnético y al eléctrico coinciden.

Para obtener el anterior valor debemos calcular primero los valores de la densidad de energía eléctrica y magnética, que vienen dados por

$$u_B(t) = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0^2 n^2 I^2(t)}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2 \sin^2(\omega t)}{2}$$

$$u_E(t) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 n^2 [\dot{I}(t)]^2 \rho^2}{8} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 n^2 \omega^2 I_0^2 \cos^2(\omega t) \rho^2}{8} .$$

La energía media por periodo se calculará como

$$\langle u_B \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_B(t) dt = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2}{4}$$

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_E(t) dt = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 n^2 \omega^2 I_0^2 \rho^2}{16} ,$$

por lo que su cociente será

$$\frac{\langle u_E \rangle}{\langle u_B \rangle} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\omega^2 \rho^2}{4} .$$

El valor de frecuencia,  $f$ , para el que cociente anterior es igual a la unidad es

$$f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \pi \rho} = \frac{3 \times 10^8}{\pi \times 10^{-2}} \approx 10^{10} \text{ Hz} .$$

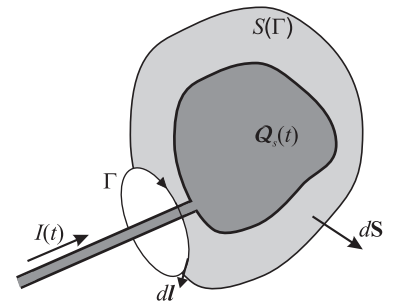
Observamos que sólo a frecuencias muy elevadas ( $f \sim 10$  GHz), la energía eléctrica será del orden de la energía magnética. Dado que las frecuencias usuales de trabajo en los circuitos son mucho más bajas que esta, podemos concluir que en una bobina  $\langle u_B \rangle \gg \langle u_E \rangle$ , por lo que la bobina se considera comúnmente como un elemento básicamente “magnético”.

#### 5.3.4. Ley de Ampère-Maxwell

La ley de Ampère tal como se escribió en (5.5) sólo era válida, en principio, para campos magnetostáticos y corrientes continuas. Para generalizar la ley de Ampère, es tentador seguir el mismo procedimiento que permitió extender las leyes de Gauss (inicialmente formuladas para campos estáticos) a campos variables en el tiempo y formular

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} \stackrel{?}{=} \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} . \quad (5.13)$$

Para comprobar la validez de la expresión (5.13) basta considerar el proceso de carga de un conductor recorrido por una intensidad  $I(t)$ , donde la curva  $\Gamma$  rodea al conductor y la superficie  $S(\Gamma)$  es tal como se muestra



en la figura. Al tomar el límite cuando la curva  $\Gamma$  se hace tender a cero, la superficie  $S(\Gamma)$  cierra el conductor obteniéndose que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = 0, \quad (5.14)$$

puesto que el valor del campo magnético en los puntos de la curva  $\Gamma$  tiende a cero en el límite  $\Gamma \rightarrow 0$ .<sup>2</sup> Ahora bien, supuesta cierta (5.13), la expresión (5.14) también implicaría que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{S(\Gamma)} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (5.16)$$

es decir, el flujo de  $\vec{J}$  a través de la superficie cerrada es nulo. Esto es claramente incorrecto en nuestro caso puesto que observamos que entra una intensidad  $I(t)$  en la superficie  $S(\Gamma)$ .

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad de la carga, discutida en el Apartado 2.2:

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} Q_S(t), \quad (5.17)$$

#### Ecuación de continuidad de carga

que establece que la variación por unidad de tiempo de la carga encerrada en una superficie cerrada  $S$ ,  $Q_S(t)$ , es igual al flujo total de densidad de corriente que atraviesa dicha superficie, observamos una clara contradicción entre lo que dice la ecuación de continuidad de la carga (5.17) y la expresión (5.16) derivada directamente de la ley de Ampère al aplicarla a campos variables en el tiempo. Dado que no cabe discusión acerca de la validez de la ecuación de continuidad de la carga (ésta no es más que la expresión local del *principio de conservación de la carga*), tenemos que concluir que la extensión de la ley de Ampère, tal y como se expresó en (5.5), NO es válida para situaciones no estacionarias. Siguiendo el razonamiento de Maxwell debemos asumir que esta ley debe modificarse para hacerla compatible con la ecuación de continuidad de la carga. Así, si consideramos la expresión de la ley de Gauss dada en (5.6), la ecuación de continuidad de la carga puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} &= -\frac{d}{dt} \left( \oint_S \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \right) \\ &= -\oint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

o bien

$$\oint_S \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S} = 0. \quad (5.19)$$

A la vista de la expresión anterior, es claro que reescribiendo la ley de Ampère de la siguiente forma:

#### Ley de Ampère-Maxwell

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S} \quad (5.20)$$

<sup>2</sup>Recuérdese que en el Apartado 3.6.1 se mostró que el campo magnetostático en el interior de un conductor cilíndrico rectilíneo de radio  $R$  recorrido por una intensidad  $I$  venía dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \hat{\tau}. \quad (5.15)$$

y siguiendo el mismo procedimiento de paso al límite de la curva  $\Gamma$ , entonces esta ley es ya congruente con la ecuación de continuidad de la carga.

En el segundo miembro de (5.20) aparecen dos términos de corriente, a saber:

- **la densidad de corriente de conducción:**  $\vec{J}$   
que es la corriente que hasta ahora se ha estudiado y que podemos identificar con el movimiento neto de las cargas eléctricas. Claramente esta corriente aparece donde haya un movimiento neto de cargas, por ejemplo, en el interior de un conductor recorrido por una corriente eléctrica.
- **la densidad de corriente de desplazamiento:**  $\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ,  
que es un término de corriente que no está directamente relacionado con el movimiento de cargas (aunque puede ser consecuencia de ello) sino que debemos asociarlo exclusivamente a las variaciones temporales del campo eléctrico. (Recuérdese que una corriente estacionaria que recorre un conductor no da lugar a campo eléctrico alguno.) El origen de esta corriente podemos explorarlo en el paso de la ecuación (5.17) a (5.19) y relacionar la existencia de este tipo de corriente con la mera presencia de una carga eléctrica variable en el tiempo. En consecuencia, la densidad de corriente de desplazamiento existirá en todos los puntos del espacio donde haya un campo eléctrico variable en el tiempo.

Es interesante hacer notar que en el caso de que no haya corriente de conducción, la ley de Ampère-Maxwell se escribiría como

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (5.21)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (5.8) y establece

*la existencia de un campo magnético asociado a la existencia de una campo eléctrico variable en el tiempo.*

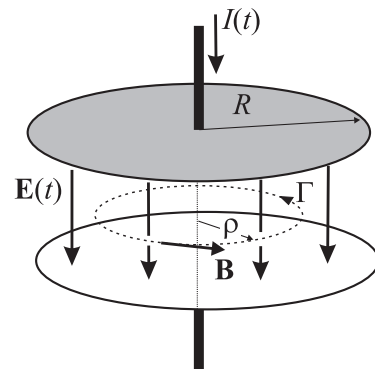
**Ejemplo 5.3** Cálculo del campo magnético en el interior de un condensador de placas circulares de radio  $R$  alimentado por una corriente  $I(t)$

El campo eléctrico en el interior de un condensador de placas paralelas de densidad superficial de carga  $\sigma$  viene dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}$$

donde  $\hat{u}$  es el vector unitario que va desde la placa cargada positivamente a la cargada negativamente. Expresando ahora la densidad superficial de carga  $\sigma$  en función de la carga total en la placa  $Q(t)$  se tiene que

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi R^2} \hat{u},$$



y obviamente esto implica la existencia de una corriente de desplazamiento,  $\vec{J}_D(t)$ , en el interior del condensador que viene dada por

$$\vec{J}_D(t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{I(t)}{\pi R^2} \hat{u}.$$

Aplicando ahora la ley de Ampère-Maxwell según (5.21), esto es,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J}_D \cdot d\vec{S}.$$

nos encontramos con un problema muy similar al del cálculo del campo magnetostático en el interior de un conductor cilíndrico rectilíneo (Apartado 3.6.1), con la diferencia de que en dicho problema la corriente era de conducción.

Consecuentemente usando la expresión (5.15) se llegaría a que en el interior del condensador

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi R^2} \rho \hat{\tau} \quad (r \leq R)$$

Por último es importante destacar que la combinación de las ecuaciones

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (5.8)$$

y

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (5.22)$$

sugiere la existencia de una perturbación electromagnética que puede *autosustentarse* en el vacío (es decir, en ausencia de cargas y corrientes eléctricas). La ecuación (5.8) nos dice que la presencia de un campo magnético variable en el tiempo provoca la aparición de un campo eléctrico, pero a su vez la ecuación (5.22) establece que la presencia de un campo eléctrico variable en el tiempo da lugar a la aparición de un campo magnético. En consecuencia, la existencia de un campo magnético variable en el tiempo generaría otro campo magnético que a su vez generaría otro.... (igualmente ocurriría con campos eléctricos variables en el tiempo). Tenemos, por tanto, una situación en la que los campos electromagnéticos se autosustentan ya que serían ellos mismos su propia causa y efecto. En el Tema 8 veremos que este fenómeno es precisamente el origen de las ondas electromagnéticas.



## Tema 6

# Circuitos de Corriente Alterna

---

### 6.1. Introducción

Dado que en el Tema 4 se han establecido algunas de las leyes físicas que rigen el comportamiento de los campos eléctrico y magnético cuando éstos son variables en el tiempo, en el presente capítulo estamos ya preparados para tratar circuitos con corriente variable en el tiempo y así extender los conceptos de circuitos de corriente continua (Tema 2) al caso de circuitos de corriente variable en el tiempo.

Entre las posibles dependencias temporales de la corriente,  $I(t)$ , en este tema estudiaremos únicamente aquélla cuya variación es *armónica*, esto es, del tipo

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (6.1)$$

(ver Apéndice B para una descripción de las funciones armónicas). Las razones fundamentales para estudiar este tipo de corriente variable en el tiempo, denominada de forma genérica **corriente alterna**, son dos:

#### 1. Relevancia tecnológica.

Desde un punto de vista tecnológico, el uso de la corriente alterna es muy conveniente debido a que ésta es muy fácil de generar y su transporte puede realizarse fácilmente a altas tensiones (y pequeñas intensidades) minimizando así las pérdidas por efecto Joule (posteriormente, por inducción electromagnética, la corriente alterna puede fácilmente transformarse a las tensiones usuales de trabajo). Estas características junto con su fácil aplicación para motores eléctricos hizo que, a partir de finales del siglo XIX, la corriente alterna se impusiera para uso doméstico e industrial y que, por tanto, la tecnología eléctrica se haya desarrollado en torno a esta forma de corriente (en Europa la frecuencia de la corriente alterna es de 50 Hz). Una característica adicional de esta corriente es que su forma armónica se conserva cuando la corriente es modificada por el efecto de elementos lineales, a saber: resistencias, condensadores, bobinas, transformadores, etc.

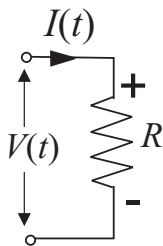
## 2. Relevancia matemática.

Debido a que cualquier función periódica puede expresarse como la suma de diferentes armónicos (teorema de Fourier), el estudio de la corriente alterna constituye la base para el análisis de señales variables en el tiempo en redes lineales.

## 6.2. Relación $I \leftrightarrow V$ para Resistencia, Condensador y Bobina

### ■ Resistencia.

Según se discutió en el Apartado 2.3.2, en corriente continua la relación que existía entre la caída de potencial  $V$  y la intensidad  $I$  en una resistencia caracterizada por  $R$  venía dada por la ley de Ohm, esto es,  $V = RI$ . Experimentalmente puede verificarse que la ley de Ohm sigue siendo válida para corrientes alternas y, por tanto, puede escribirse que<sup>1</sup>



$$I(t) = \frac{V(t)}{R} . \quad (6.2)$$

### ■ Condensador.

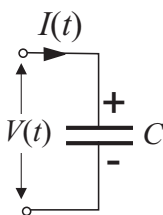
En la expresión (1.57) se definió la capacidad  $C$  de un condensador como la relación entre la carga  $Q$  de las placas y la caída de potencial  $V$  entre éstas, esto es,

$$C = \frac{Q}{V} . \quad (6.3)$$

Esta relación se cumple igualmente para corrientes alternas, de donde puede deducirse que la carga variable en el tiempo,  $Q(t)$ , puede escribirse como

$$Q(t) = CV(t) . \quad (6.4)$$

Al derivar la expresión anterior respecto al tiempo obtenemos la siguiente relación entre la intensidad  $I(t)$  y la caída de potencial entre las placas  $V(t)$ :

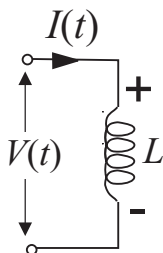


$$I(t) = C \frac{dV(t)}{dt} . \quad (6.5)$$

Esta relación indica que la *derivada temporal* de la caída de potencial entre las placas está relacionada linealmente mediante el parámetro  $C$  con la intensidad que llega al condensador.

### ■ Bobina.

Tal y como se expresó en (4.42), el efecto de autoinducción electromagnética de una bobina caracterizada por una inductancia  $L$  y recorrida por una intensidad  $I(t)$  podía considerarse como una caída de potencial en la bobina,  $V(t)$ , dada por



$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} . \quad (6.6)$$

<sup>1</sup>Los signos más y menos en la resistencia y en otros elementos en los circuitos de corriente alterna indican los puntos de potencial más alto y más bajo en dichos elementos cuando la corriente tiene el sentido supuesto en la correspondiente figura.

La bobina puede considerarse, por tanto, como un elemento de circuito que relaciona linealmente, mediante el parámetro  $L$ , la derivada temporal de la intensidad que circula por ella con la caída de potencial en la misma.

### 6.3. Generador de fem alterna

Anteriormente se ha señalado que una de las propiedades más destacadas y que hacen más útiles el uso de la corriente alterna es su fácil generación. El generador de fem alterna basa su funcionamiento en la ley de inducción electromagnética de Faraday (ver Apartado 4.2.2), transformando energía mecánica en energía electromagnética (en una forma opuesta a lo que hace el motor eléctrico, ver Apartado 3.3.2). Un esquema básico de un generador de fem alterna se muestra en la figura 6.1, donde podemos observar que el flujo magnético que atraviesa la espira giratoria

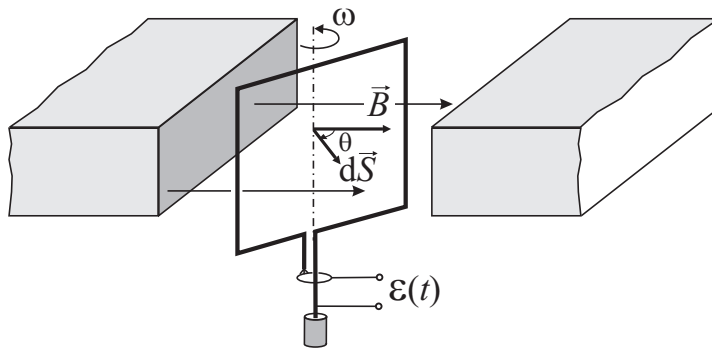


Figura 6.1: Esquema básico de un generador de fuerza electromotriz alterna.

viene dado por

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \theta, \quad (6.7)$$

donde se ha supuesto que el campo magnético es uniforme en la región donde se mueve la espira.

Si el movimiento que se le imprime a la espira es un *movimiento angular uniforme* caracterizado por una velocidad angular  $\omega$  constante (como por ejemplo el que produciría un chorro de vapor constante dirigido a unas aspas conectadas con la espira), dado que  $\theta = \omega t + \theta_0$ , el flujo magnético que atraviesa la espira puede expresarse como

$$\Phi(t) = BS \cos(\omega t + \theta_0). \quad (6.8)$$

Haciendo uso de la ley de inducción de Faraday (4.17), la fem  $\mathcal{E}(t)$  inducida en un conjunto de  $N$  espiras similares a la de la figura anterior será

$$\mathcal{E}(t) = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin(\omega t + \theta_0), \quad (6.9)$$

esto es, se ha generado una fem alterna que puede expresarse en general como

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \delta), \quad (6.10)$$

donde, en el presente caso,  $\mathcal{E}_0 = NBS\omega$  y  $\delta = \theta_0 - \pi/2$ .

## 6.4. Valores eficaces

El valor eficaz,  $I_{\text{ef}}$ , de una corriente alterna,

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta) , \quad (6.11)$$

se define como la raíz cuadrada del valor cuadrático medio  $\langle I^2(t) \rangle$  de la corriente, es decir,

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle} , \quad (6.12)$$

donde el valor medio de una función periódica,  $f(t)$ , de periodo  $T$  se define como

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt . \quad (6.13)$$

El valor eficaz de la corriente, al igual que otras magnitudes circuitales que varíen armónicamente, tiene mucha importancia práctica dado que el valor que miden los polímetros analógicos es precisamente el valor eficaz. Siguiendo la definición (6.12) y teniendo en cuenta (6.13) se tiene que

$$I_{\text{ef}}^2 = \langle I_0^2 \cos^2(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} I_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt = \frac{I_0^2}{2} ,$$

por lo que el valor eficaz se relaciona con la amplitud,  $I_0$ , de la corriente mediante la siguiente expresión:

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} . \quad (6.14)$$

Análogamente, el valor eficaz de cualquier otra magnitud que varíe armónicamente en el tiempo se define como la amplitud de dicha magnitud dividida por  $\sqrt{2}$ .

Es interesante observar que el valor eficaz,  $I_{\text{ef}}$ , de una corriente alterna,  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$ , que recorre una resistencia  $R$  es justamente el valor de la intensidad de la corriente *continua* que produce el mismo efecto Joule durante un periodo de tiempo  $T$ . La energía  $W_{\text{CA}}$  disipada por efecto Joule en una resistencia  $R$  por una corriente alterna durante un periodo de tiempo  $T$  puede calcularse como

$$W_{\text{CA}} = \int_0^T P(t) dt , \quad (6.15)$$

donde  $P(t)$  es la *potencia instantánea* disipada en la resistencia, que viene dada por el producto de la intensidad por la tensión, esto es:

$$P(t) = I(t)V(t) . \quad (6.16)$$

Dado que según (6.2) la caída de potencial en la resistencia es  $V(t) = RI(t)$ , la energía disipada por la corriente *alterna* en esta resistencia puede escribirse como

$$W_{\text{CA}} = I_0^2 R \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt = I_0^2 R \frac{T}{2} = I_{\text{ef}}^2 RT , \quad (6.17)$$

que es precisamente el valor de la energía disipada por efecto Joule durante un periodo de tiempo  $T$  en dicha resistencia  $R$  si ésta fuese recorrida por una corriente *continua* de valor  $I_{\text{ef}}$ , esto es,

$$W_{\text{CC}} = I_{\text{ef}}^2 RT . \quad (6.18)$$

Valor eficaz de la corriente alterna

## 6.5. Análisis fasorial de circuitos de CA

Dado que el estudio de la corriente alterna implica el tratamiento de funciones con una dependencia temporal de tipo armónica, la introducción de los **fasores** asociados a estas funciones simplificará enormemente el cálculo matemático necesario. Tal y como se explica en el Apéndice B.2, a una función armónica  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$  se le hace corresponder un fasor  $\tilde{I}$ :

$$I(t) \leftrightarrow \tilde{I} ,$$

que viene dado por

$$\tilde{I} = I_0 e^{j\delta} , \quad (6.19)$$

de modo que

$$I(t) = \text{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t}) . \quad (6.20)$$

Fasor  $\tilde{I}$  asociado a  
 $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$

Las propiedades básicas de los fasores se discuten en el Apéndice B.2, donde también se muestra que una propiedad muy útil para el presente tema es la que relaciona la derivada temporal de una función armónica con su fasor asociado, esto es,

$$\frac{dI(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{I} . \quad (6.21)$$

### 6.5.1. Expresiones fasoriales para resistencia, condensador y bobina

Haciendo uso de las relaciones fasoriales apropiadas es posible expresar las relaciones fundamentales para resistencias, condensadores y bobinas en la siguiente forma:

#### ■ Resistencia.

La relación (6.2) puede expresarse en forma fasorial simplemente como

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R} , \quad (6.22)$$

o bien como

$$\tilde{V} = R \tilde{I} . \quad (6.23)$$

#### ■ Condensador.

Para el condensador, haciendo uso de la propiedad (6.21), la relación (6.5) puede expresarse como

$$\tilde{I} = j\omega C \tilde{V} , \quad (6.24)$$

o equivalentemente

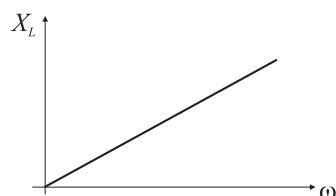
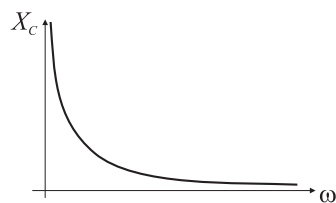
$$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I} . \quad (6.25)$$

La expresión anterior suele también escribirse como

$$\tilde{V} = -jX_C \tilde{I} , \quad (6.26)$$

donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (6.27)$$



se denomina **reactancia capacitiva** y se expresa en ohmios ( $\Omega$ ). Esta magnitud *depende* de la frecuencia tendiendo a cero para frecuencias muy altas y a infinito para frecuencias muy bajas. Esto se manifiesta en el hecho de que para frecuencias bajas el condensador se comporta como un elemento que apenas deja fluir la corriente mientras que a frecuencias altas casi no impide la circulación de la corriente.

#### ■ Bobina.

La relación (6.21) para la bobina puede expresarse en forma fasorial como

$$\tilde{V} = j\omega L \tilde{I} . \quad (6.28)$$

Si se define la **reactancia inductiva**,  $X_L$ , como

$$X_L = \omega L , \quad (6.29)$$

la expresión fasorial (6.28) puede también escribirse como

$$\tilde{V} = jX_L \tilde{I} . \quad (6.30)$$

La reactancia inductiva viene dada en ohmios y es un parámetro que *depende* linealmente con la frecuencia, de modo que tiende a cero para frecuencias bajas y a infinito para frecuencias altas. Podemos afirmar entonces que la bobina se comporta como un elemento que se opondría al paso de la corriente a medida que la frecuencia de ésta aumenta.

Es interesante observar que las relaciones tensión/intensidad <sup>2</sup> para el condensador y la bobina fueron expresadas en el Apartado 6.2 mediante expresiones *diferenciales* han podido ser ahora reescritas como simples expresiones *algebraicas* mediante el uso de sus fasores asociados. Es más, se ha encontrado que el fasor  $\tilde{V}$  siempre puede relacionarse linealmente con el fasor  $\tilde{I}$  mediante un parámetro genérico  $Z$ ,

$$\tilde{V} = Z \tilde{I} , \quad (6.31)$$

que denominaremos **impedancia** y que, en general, es un número complejo (notar que no es un fasor) que toma los siguientes valores para el caso de resistencias, condensadores y bobinas:

Impedancia de una resistencia,  
condensador y bobina

$$Z = \begin{cases} R & \text{Resistencia} \\ -jX_C & \text{Condensador} \\ jX_L & \text{Bobina} . \end{cases} \quad (6.32)$$

### 6.5.2. Reglas de Kirchhoff

Las reglas de Kirchhoff junto con las relaciones tensión/intensidad en los distintos elementos que constituyen los circuitos nos permitirán determinar el comportamiento de las magnitudes eléctricas en corriente alterna. Las reglas de Kirchhoff fueron introducidas en el Capítulo 2 para

<sup>2</sup>Recordemos que **tensión** es sinónimo de **diferencia de potencial** y de **voltaje**.

los circuitos de corriente continua, donde suponíamos que se había establecido una situación estacionaria (es decir, las magnitudes no variaban en el tiempo). En los circuitos de corriente alterna supondremos que las reglas de Kirchhoff siguen siendo válidas para cada instante de tiempo<sup>3</sup>. En consecuencia podemos expresar las reglas de Kirchhoff de la siguiente manera:

► Regla de Kirchhoff para la tensión:

$$V_{12}(t) = \sum_j V_j(t) - \sum_i \mathcal{E}_i(t) , \quad (6.33)$$

donde  $V_j(t)$  es la caída de potencial en el elemento  $j$ -ésimo y  $\mathcal{E}_i(t)$  es la  $i$ -ésima fem del recorrido.

En el ejemplo mostrado en la figura adjunta, la regla (6.33) nos dice que

$$V_{12}(t) = [V_1(t) - V_2(t) + V_3(t) + V_4(t)] - [-\mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t)] .$$

► Regla de Kirchhoff para las intensidades:

$$\sum_{i=1}^N I_i(t) = 0 , \quad (6.34)$$

esto es, en cada instante de tiempo, la suma de todas las intensidades que llegan y salen de un nudo es cero.

Las anteriores reglas pueden también expresarse en forma fasorial, adoptando entonces la siguiente forma:

■ Regla de Kirchhoff fasorial para la tensión

$$\tilde{V}_{12} = \sum_j \tilde{V}_j - \sum_i \tilde{\mathcal{E}}_i , \quad (6.35)$$

o, equivalentemente,

$$\tilde{V}_{12} = \sum_j Z_j \tilde{I}_j - \sum_i \tilde{\mathcal{E}}_i , \quad (6.36)$$

donde  $Z_j$  es la impedancia del elemento  $j$ -ésimo recorrido por la intensidad fasorial  $\tilde{I}_j$ . En el ejemplo de la figura (siguiendo los criterios de signos ya explicados para los circuitos de corriente continua), al aplicar (6.36) obtenemos

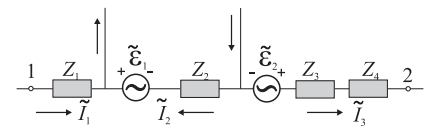
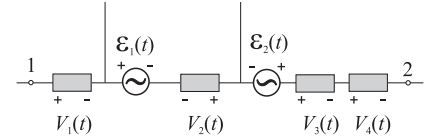
$$\tilde{V}_{12} = Z_1 \tilde{I}_1 - Z_2 \tilde{I}_2 + (Z_3 + Z_4) \tilde{I}_3 - [-\tilde{\mathcal{E}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_2] .$$

■ Regla de Kirchhoff fasorial para las intensidades

$$\sum_{i=1}^N \tilde{I}_i = 0 , \quad (6.37)$$

es decir, la suma de todas las intensidades fasoriales que llegan y salen de un nudo es cero.

<sup>3</sup>Básicamente estamos admitiendo que en cada instante de tiempo se alcanza una situación estacionaria.



### 6.5.3. Circuito RLC serie

Debemos observar que las reglas de Kirchhoff tal como han sido establecidas en (6.36) y (6.37) son “idénticas” a las reglas (2.34) y (2.35) establecidas para corriente continua, considerando que ahora tenemos fasores e impedancias en vez de números reales y resistencias. Como un ejemplo sencillo de aplicación de las leyes de Kirchhoff fasoriales consideraremos a continuación un circuito RLC serie en corriente alterna.

Si el generador de fem alterna proporciona una  $\mathcal{E}$  dada por

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \delta_{\mathcal{E}}), \quad (6.38)$$

cuyo fasor asociado es

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{j\delta_{\mathcal{E}}}, \quad (6.39)$$

al aplicar la ley de Kirchhoff de las tensiones (6.33) al circuito de la figura tendremos que

$$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t), \quad (6.40)$$

o bien en forma fasorial:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{V}_R + \tilde{V}_C + \tilde{V}_L. \quad (6.41)$$

Teniendo ahora en cuenta las expresiones fasoriales (6.23), (6.26) y (6.30), se tiene que

$$\tilde{\mathcal{E}} = [R + j(X_L - X_C)] \tilde{I} \quad (6.42)$$

$$= Z \tilde{I}, \quad (6.43)$$

donde la impedancia,  $Z$ , del circuito RLC serie será

$$Z = R + j(X_L - X_C), \quad (6.44)$$

esto es, la suma de las impedancias de cada uno de los elementos del circuito. Esta impedancia puede también expresarse en forma módulo y argumento como

$$Z = |Z| e^{j\delta_Z} \quad (6.45)$$

donde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (6.46)$$

y

$$\delta_Z = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (6.47)$$

Despejando en la expresión (6.43), el fasor intensidad puede calcularse como

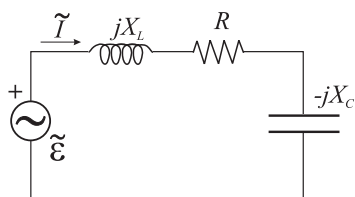
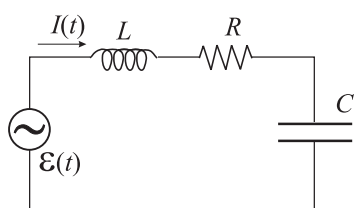
$$\tilde{I} = I_0 e^{j\delta_I} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{Z}. \quad (6.48)$$

Sustituyendo ahora (6.39) y (6.45) en la expresión anterior,  $\tilde{I}$  puede reescribirse como

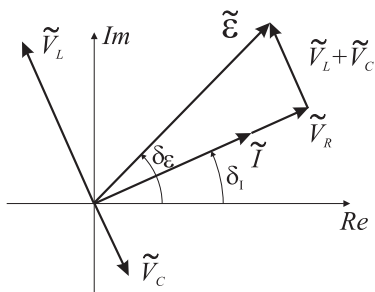
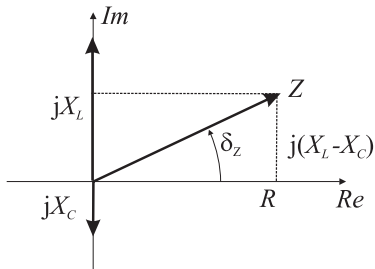
$$\tilde{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} e^{j(\delta_{\mathcal{E}} - \delta_I)},$$

de donde concluimos que la amplitud y fase del fasor intensidad vienen dados por

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (6.49)$$



Impedancia de un circuito serie RLC





y

$$\delta = \delta_{\mathcal{E}} - \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (6.50)$$

Obviamente, la expresión temporal de la intensidad puede obtenerse al sustituir las expresiones anteriores para  $I_0$  y  $\delta$  en  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$ .

### Resonancia

Si la amplitud de la intensidad para el circuito serie RLC, según se ha obtenido en (6.49), se expresa explícitamente como una función de la frecuencia, obtendríamos que

$$I_0(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (6.51)$$

o, equivalentemente,

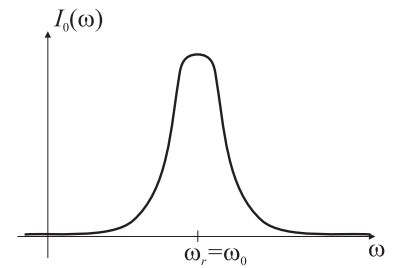
$$I_0(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2}}. \quad (6.52)$$

Definiendo la frecuencia  $\omega_0$  como

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (6.53)$$

podemos reescribir (6.52) como

$$I_0(\omega) = \frac{\omega \mathcal{E}_0}{\sqrt{\omega^2 R^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad (6.54)$$



donde puede observarse que la amplitud de la intensidad en el circuito serie RLC depende claramente de la frecuencia y presenta un máximo absoluto para un valor de frecuencia  $\omega = \omega_0$ . Este fenómeno se conoce en general como *resonancia* y aparece en múltiples situaciones prácticas (por ejemplo, en los osciladores forzados). La frecuencia,  $\omega_r$ , a la que aparece el máximo de amplitud recibe el nombre de **frecuencia de resonancia**, siendo para el circuito serie RLC:  $\omega_r = \omega_0$ ; cumpliéndose además a esta frecuencia que  $X_L = X_C$ , por lo que, según (6.47), la impedancia es puramente real. Los fenómenos de resonancia tienen múltiples aplicaciones prácticas; por ejemplo, si el circuito serie RLC se utiliza como el circuito de sintonía de una radio, la capacidad del condensador puede variarse de modo que la frecuencia de resonancia vaya cambiando, sintonizándose así las diferentes emisoras (esto es, la emisora que emita con frecuencia igual a la de resonancia es la que se recibiría con más intensidad).

#### 6.5.4. Análisis de mallas

La resolución del circuito RLC serie en corriente alterna ha puesto de manifiesto que mediante el uso de los fasores y de la impedancia asociada a cada elemento, la resolución de un circuito de corriente alterna es

equivalente a la de uno de corriente continua en la que las magnitudes intensidad y tensión son ahora fasores y las impedancias juegan el papel de resistencias. De este modo, todas las técnicas introducidas en el Capítulo 2 para la resolución de circuitos de corriente continua pueden ser ahora aplicadas a la resolución de circuitos de corriente alterna, teniendo en cuenta las equivalencias antes mencionadas.

Como ejemplo, un circuito como el mostrado en la Figura 6.2 puede

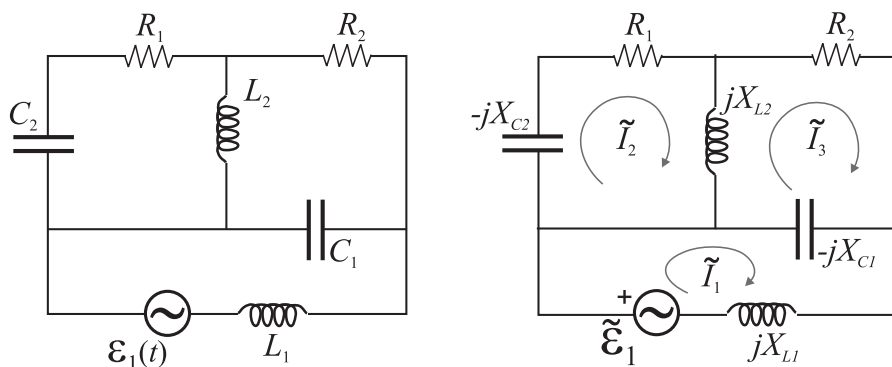


Figura 6.2: Circuito de tres mallas

resolverse mediante la aplicación del método de las corrientes de mallas. Definiendo los fasores intensidades de malla en cada una de las tres mallas del circuito según se muestra en la figura y teniendo en cuenta el valor de las impedancias de cada uno de los elementos implicados, la ecuación para las intensidades de malla puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [Z_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_3 \end{bmatrix},$$

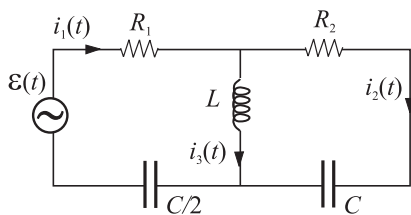
donde la matriz de impedancias viene dada por

$$[Z_{ij}] = \begin{bmatrix} j(X_{L1} - X_{C1}) & 0 & jX_{C1} \\ 0 & R_1 + j(X_{L2} - X_{C2}) & -jX_{L2} \\ jX_{C1} & -jX_{L2} & R_2 + j(X_{L2} - X_{C1}) \end{bmatrix}.$$

Para los cálculos en los ejercicios es siempre conveniente trabajar con *números* sustituyendo las expresiones algebraicas por sus valores numéricos concretos antes de resolver el correspondiente sistema de ecuaciones.

**Ejemplo 6.1** En el circuito de la figura, determine las intensidades fasoriales,  $\tilde{I}_1$ ,  $\tilde{I}_2$  e  $\tilde{I}_3$  y las instantáneas,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  e  $i_3(t)$ .

Datos:  $\mathcal{E}(t) = 20 \sin(4 \times 10^4 t) \text{ V}$ ,  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ mH}$  y  $C = 3,125 \mu\text{F}$ .



Lo primero que debemos hacer es obtener los fasores fuerza electromotriz y las impedancias de cada elemento. Dado que la fuente proporciona una fem de valor

$$\mathcal{E}(t) = 20 \sin(4 \times 10^4 t) \text{ V} = 20 \cos(4 \times 10^4 t - \pi/2) \text{ V},$$

de aquí obtenemos que la frecuencia angular,  $\omega$ , de la fuente es

$$\omega = 4 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

y su correspondiente fasor asociado es

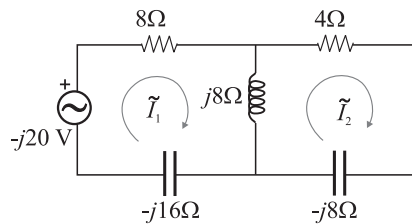
$$\tilde{\mathcal{E}} = 20e^{-j\pi/2} = -j20 \text{ V}.$$

Para obtener las impedancias de la bobina y los condensadores, debemos calcular primero las reactancias inductivas y capacitivas, esto es,

$$X_L = \omega L = 4 \times 10^4 \cdot 2 \times 10^{-4} = 8\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{4 \times 10^4 \cdot 3,125 \times 10^{-6}} = 8\Omega,$$

por lo que el circuito equivalente que debemos resolver es el mostrado en la figura adjunta.



Las ecuaciones para las intensidades fasoriales de malla,  $\tilde{I}_1$  e  $\tilde{I}_2$ , son

$$\begin{bmatrix} -j20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - j8 & -j8 \\ -j8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix},$$

o bien simplificando al dividir por 4:

$$\begin{bmatrix} -j5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - j2 & -j2 \\ -j2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Las intensidades de mallas pueden ahora calcularse usando, por ejemplo, el método de sustitución. Así de la segunda ecuación obtenemos

$$\tilde{I}_2 = 2j\tilde{I}_1,$$

que al sustituir en la primera ecuación, nos lleva a que

$$-j5 = (2 - j2)\tilde{I}_1 - j2j2\tilde{I}_1 = (2 - j2 + 4)\tilde{I}_1 = (6 - j2)\tilde{I}_1.$$

Despejando tenemos que

$$\tilde{I}_1 = \frac{-j5}{6 - j2} = \frac{-j5(6 + j2)}{(6 - j2)(6 + j2)} = \frac{-j5(6 + j2)}{5 \cdot 8} = \frac{-j6 + 2}{8} = \frac{1 - j3}{4}$$

y sustituyendo ahora este valor para obtener  $\tilde{I}_2$ , obtenemos

$$\tilde{I}_2 = \frac{2j(1 - j3)}{2 \cdot 2} = \frac{3 + j}{2}.$$

Para calcular ahora el fasor  $\tilde{I}_3$ , asociado a  $i_3(t)$ , debemos tener en cuenta que

$$\tilde{I}_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2,$$

por lo que

$$\tilde{I}_3 = \frac{1 - j3}{4} - \frac{3 + j}{2} = \frac{1 - j3 - 6 - j2}{4} = \frac{-5 - j5}{4}.$$

Antes de obtener las expresiones de las intensidades instantáneas es conveniente expresar los fasores anteriores en forma módulo y argumento:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= \frac{\sqrt{10}}{4} e^{j \arctan(-3)} = \frac{\sqrt{10}}{4} e^{-j1,249} \\ \tilde{I}_2 &= \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j \arctan(1/3)} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j0,291} \\ \tilde{I}_3 &= \frac{5\sqrt{2}}{4} e^{j \arctan(-1/-1)} = \frac{5\sqrt{2}}{4} e^{j5\pi/4} .\end{aligned}$$

(Notar que  $\tilde{I}_3$  se encuentra en el tercer cuadrante, por lo que su fase será  $\pi + \pi/4 = 5\pi/4$ ).

Finalmente las intensidades instantáneas vienen dadas por

$$\begin{aligned}i_1(t) &= \frac{\sqrt{10}}{4} \cos(4 \times 10^4 t - 1,249) \text{ A} \\ i_2(t) &= \frac{\sqrt{10}}{2} \cos(4 \times 10^4 t + 0,291) \text{ A} \\ i_3(t) &= \frac{5\sqrt{2}}{4} \cos(4 \times 10^4 t + 5\pi/4) \text{ A} .\end{aligned}$$

## 6.6. Balance de potencia

### 6.6.1. Potencia media

Consideremos una rama de un circuito de CA caracterizada por una impedancia  $Z$  donde se han medido las siguientes tensión e intensidad instantáneas:

$$\begin{aligned}V(t) &= V_0 \cos \omega t \\ I(t) &= I_0 \cos(\omega t - \delta) ,\end{aligned}$$

siendo  $-\delta$  el ángulo de desfase entre la tensión y la intensidad (en el presente caso se ha tomado por sencillez la fase inicial de la tensión igual a cero, aunque este hecho no afecta a las conclusiones y resultados del presente apartado).

La potencia *instantánea*,  $P(t)$ , consumida en dicha rama vendrá dada por la siguiente expresión:

$$P(t) = I(t)V(t) = I_0 V_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \delta) , \quad (6.55)$$

donde debemos observar que dicha potencia es una función variable y *periódica* en el tiempo ( $T = 2\pi/\omega$ ). Debido al carácter variable y periódico de esta magnitud, la idea de “potencia consumida en el sistema” puede relacionarse más convenientemente con la **potencia media** en un periodo,  $P_{\text{med}}$ , cuya expresión será

$$P_{\text{med}} = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt . \quad (6.56)$$

La potencia media es justamente el valor que usualmente se proporciona al referirnos al consumo de cualquier aparato eléctrico. Esta magnitud nos da una idea clara de cómo se comporta el sistema puesto

que lo que ocurre en el intervalo “natural” de tiempo en el sistema (esto es, el periodo  $T$ ) determina el comportamiento del sistema en cualquier otro intervalo de tiempo mayor —éste será simplemente una repetición de lo que sucede en uno de los periodos. Así, por ejemplo, la energía,  $\Delta E$ , consumida en el sistema en un intervalo de tiempo  $\Delta t \gg T$  será muy aproximadamente

$$\Delta E \simeq P_{\text{med}} \Delta t .$$

Introduciendo (6.55) en (6.56) para obtener la potencia media tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\text{med}} &= \frac{1}{T} I_0 V_0 \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t - \delta) dt \\ &= \frac{1}{T} I_0 V_0 \left[ \cos \delta \int_0^T \cos^2(\omega t) dt + \sin \delta \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \right] \end{aligned}$$

y dado que la segunda integral se anula mientras que la primera es  $\frac{1}{2}T$ , podemos concluir que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \delta = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \cos \delta . \quad (6.57)$$

Potencia media consumida

Es interesante observar que, desde un punto de vista operativo, la potencia media podría haberse calculado igualmente mediante la siguiente expresión:

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{V} \tilde{I}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{V}^* \tilde{I}) , \quad (6.58)$$

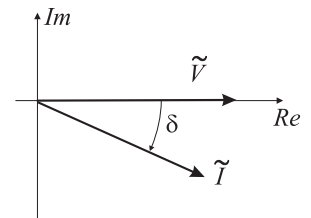
donde  $f^*$  significa *complejo conjugado* de  $f$ . Si tomamos las expresiones fasoriales correspondientes a la intensidad y tensión consideradas,

$$\tilde{I} = I_0 e^{-j\delta} \quad (6.59)$$

$$\tilde{V} = V_0 , \quad (6.60)$$

podemos comprobar que efectivamente

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}(V_0 I_0 e^{-j\delta}) = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \delta . \quad (6.61)$$

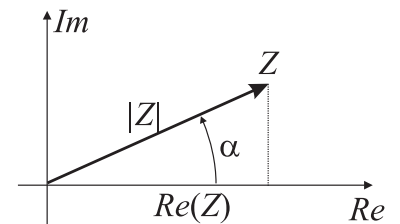


### 6.6.2. Factor de potencia

En la expresión (6.57) de la potencia media podemos apreciar que junto al producto de las amplitudes de la tensión e intensidad aparece un factor  $\cos \delta$  denominado **factor de potencia**. Este factor de máxima importancia práctica es determinante en el consumo/suministro de potencia en el sistema puesto que su valor está comprendido en el intervalo  $[-1, 1]$ . Por ejemplo, en la resonancia donde el desfase entre la tensión y la intensidad es nulo, el factor de potencia es uno y consecuentemente el consumo de potencia es máximo. Por el contrario si el desfase entre la tensión y la intensidad fuese de  $\pi/2$  el consumo de potencia sería nulo.

El factor de potencia puede expresarse en términos de la impedancia  $Z$  de la rama, que podemos escribir como

$$Z = |Z| e^{j\alpha} .$$



Dado que en el presente caso la fase del fasor  $\tilde{V}$  es nula, la fase del fasor intensidad  $\tilde{I}$  será la opuesta a la fase de la impedancia, esto es,

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= I_0 e^{-j\delta} \\ &= \frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{V_0}{|Z|e^{j\alpha}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j\alpha},\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} \quad (6.62)$$

y

$$\delta = \alpha. \quad (6.63)$$

Teniendo en cuenta que  $\cos \alpha = \text{Re}(Z)/|Z|$  y (6.63), el factor de potencia puede, por tanto, escribirse como

$$\cos \delta = \frac{\text{Re}(Z)}{|Z|} \quad (6.64)$$

y, consecuentemente, la potencia media puede también expresarse como

$$P_{\text{med}} = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \cos \delta = I_{\text{ef}} |Z| I_{\text{ef}} \frac{\text{Re}(Z)}{|Z|} = I_{\text{ef}}^2 \text{Re}(Z) \quad (6.65)$$

o expresiones equivalentes (en función de  $V_{\text{ef}}$ ).

### 6.6.3. Consumo de potencia

La expresión (6.65) indica que la potencia media consumida está directamente relacionada con la parte real de la impedancia. Si el sistema bajo estudio fuese un circuito “serie”, entonces la parte real de la impedancia vendría dada simplemente por la suma de las resistencias pero si el circuito fuese de otro tipo, la presencia de las partes reactivas del circuito (condensadores y bobinas) aparecerán explícitamente en la parte real de la impedancia. Evidentemente el consumo de potencia sólo se lleva a cabo en las resistencias (únicos elementos en los que tiene lugar efecto Joule) y no en las bobinas y condensadores. No obstante, esto no quiere decir que estos últimos elementos no influyan en el consumo de potencia, más bien habría que decir que la potencia se disipa en las resistencias pero que la presencia y disposición de bobinas y condensadores determina ciertamente cuánta potencia es disipada en estas resistencias.

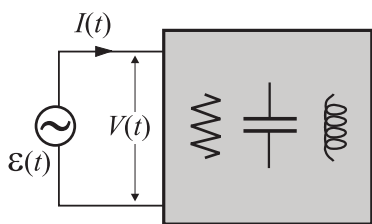
En el caso de un circuito alimentado por una fuente de tensión (ver figura adjunta), un análisis similar al del Apartado 6.6.1 nos dice que la potencia instantánea suministrada por el *generador* de fuerza electromotriz  $\mathcal{E}(t)$ , que proporciona una corriente  $I(t)$ , viene dada por

$$P(t) = \mathcal{E}(t)I(t), \quad (6.66)$$

por lo que la potencia media suministrada por dicho generador será

$$P_{\text{med}}^{\text{gen}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}(t)I(t) dt = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{\mathcal{E}}\tilde{I}^*). \quad (6.67)$$

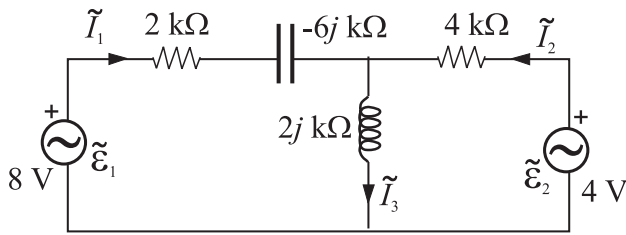
Dado que las potencias medias (6.67) y (6.57) representan físicamente la energía por periodo proporcionada por la fuente y la consumida en el circuito respectivamente, debe cumplirse que



Potencia media suministrada por un generador de fem

la suma de las potencias medias suministrada por los generadores debe ser igual a la suma de las potencias medias disipadas en las resistencias.

Ejemplo 6.2 En el circuito de la figura, comprobar que la potencia media suministrada por la fuente es igual a la suma de las potencias medias consumidas en las resistencias.



Teniendo en cuenta que  $\tilde{\mathcal{E}}_1 = 8$  y  $\tilde{\mathcal{E}}_2 = 4$ , tras resolver el circuito para obtener las intensidades fasoriales de rama obtendríamos que

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= 1 + j \text{ mA} = \sqrt{2} e^{j\pi/4} \text{ mA} \\ \tilde{I}_2 &= 1 - j \text{ mA} = \sqrt{2} e^{-j\pi/4} \text{ mA} \\ \tilde{I}_3 &= 2 \text{ mA} .\end{aligned}$$

Los fasores tensión en las resistencias se obtienen simplemente multiplicando los correspondientes fasores intensidad por el valor de la resistencia, de modo que

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{2k\Omega} &= 2\sqrt{2} e^{j\pi/4} \text{ V} \\ \tilde{V}_{4k\Omega} &= 4\sqrt{2} e^{-j\pi/4} \text{ V} .\end{aligned}$$

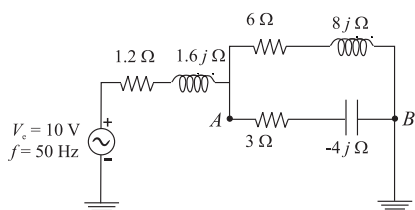
La potencia media,  $P_{\text{med}}$ , consumida en cada una de las respectivas resistencias puede obtenerse según (6.58) resultando

$$\begin{aligned}P_{\text{med}}(R = 2k\Omega) &= 2 \text{ mW} \\ P_{\text{med}}(R = 4k\Omega) &= 4 \text{ mW} .\end{aligned}$$

Análogamente la potencia media suministrada por cada una de las fuentes de fem será

$$\begin{aligned}P_{\text{med}}(\mathcal{E}_1) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left( \tilde{I}_1 \tilde{\mathcal{E}}_1^* \right) = 4 \text{ mW} \\ P_{\text{med}}(\mathcal{E}_2) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left( \tilde{I}_2 \tilde{\mathcal{E}}_2^* \right) = 2 \text{ mW} .\end{aligned}$$

Obtenemos que la potencia media total suministrada por las fuentes coincide con la potencia media total consumida en las resistencias.



**Ejemplo 6.3** En el circuito de la figura, calcular: (1) la intensidad (instantánea y eficaz) que circula por la fuente; (2) la potencia media consumida por el circuito; (3) el equivalente Thevenin entre los puntos  $A$  y  $B$ ; y (4) la energía almacenada por la bobina de reactancia inductiva  $X_L = 1,6 \Omega$  en un instante  $t$ .

1. Para calcular el fasor intensidad,  $\tilde{I}$ , que circula por la fuente, podemos calcular en primer lugar la impedancia,  $Z$ , en serie con dicha fuente. Para ello notemos que

$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{6 + j8} + \frac{1}{3 - j4} = 0,18 + j0,08 = 0,2 e^{j0,418},$$

por lo que

$$Z_{AB} = 4,6 - j2 = 5 e^{-j0,418}$$

y, por consiguiente, encontramos que

$$Z = (1,2 + j1,6) + (4,6 - j2) = 5,8 - j0,4 = 5,8 e^{-j0,069}.$$

Ahora podremos calcular el fasor intensidad a partir de

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{Z} = \frac{10}{5,8 e^{-j0,069}} = 1,72 e^{j0,069},$$

de donde finalmente obtenemos que

$$I_e = 1,72 \text{ A}$$

$$I(t) = 2,43 \cos(100\pi t + 0,069) \text{ A},$$

recordando que la amplitud de la intensidad instantánea,  $I_0$ , vendrá dada por  $I_0 = I_e \sqrt{2}$ .

2. Teniendo en cuenta que la potencia media consumida en el circuito será idéntica a la proporcionada por la fuente de fem, usando la expresión (6.67), tenemos que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{\mathcal{E}} \tilde{I}^*) = 10 \times 1,72 \times \cos(0,069) = 17,16 \text{ W}.$$

3. Para calcular el equivalente es quizás conveniente dibujar el circuito original en la forma mostrada en la figura adjunta. Así para calcular la impedancia Thevenin,  $Z_{\text{TH}}$ , tendremos que calcular la impedancia equivalente a las tres ramas en paralelo resultantes tras cortocircuitar la fuente de fem, esto es,

$$\frac{1}{Z_{\text{TH}}} = \frac{1}{4,6 - j2} + \frac{1}{1,2 + j1,6},$$

que tras operar nos da

$$Z_{\text{TH}} = 1,43 + j0,95 = 1,72 e^{j0,588}.$$

Para obtener el fasor de tensión Thevenin,  $\tilde{V}_{\text{TH}}$ , notemos que debido a que las tres ramas están en paralelo

$$\tilde{V}_{\text{TH}} = \tilde{V}_{AB} = Z_{AB} \tilde{I} = 8,6 e^{-j0,349},$$

resultado que también podría haberse obtenido si consideramos que

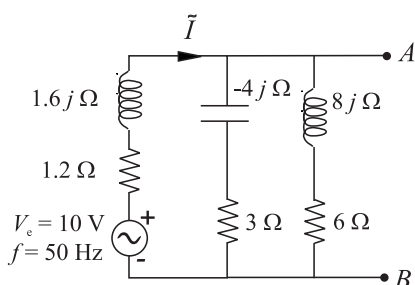
$$\tilde{V}_{\text{TH}} = \tilde{\mathcal{E}} - (1,2 + j1,6) \tilde{I}.$$

4. Para calcular la energía instantánea almacenada en la bobina debemos usar la siguiente expresión:

$$U_m(t) = \frac{1}{2} L I^2(t),$$

que al operar nos da

$$\begin{aligned} U_m(t) &= \frac{1}{2} \frac{1,6}{100\pi} [1,72 \sqrt{2} \cos(100\pi t + 0,069)]^2 \\ &= 0,015 \cos^2(100\pi t + 0,069) \text{ J}. \end{aligned}$$





## 6.7. Problemas propuestos

**6.1:** Una bobina de 200 vueltas posee un área de  $4 \text{ cm}^2$  y gira dentro de un campo magnético. ¿Cuál debe ser el valor del módulo de este campo magnético para que genera un fem máxima de 10 V a 60 Hz?

**Sol.** 0,332 T.

**6.2:** Calcular el valor eficaz y la amplitud de la corriente de un secador eléctrico de una lavandería que proporciona 5,0 kW eficaces cuando se conecta a una red de **a)** 240 V eficaces y **b)** 120 V eficaces.

**Sol.:** **a)**  $I_{\text{ef}} = 20,8 \text{ A}$ ,  $I_0 = 29,5 \text{ A}$ ; **b)**  $I_{\text{ef}} = 41,7 \text{ A}$ ,  $I_0 = 58,9 \text{ A}$ .

**6.3:** Un determinado dispositivo eléctrico consume 10 A eficaces y tiene una potencia media de 720 W cuando se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz. **a)** ¿Cuál es el módulo de la impedancia del aparato? **b)** ¿A qué combinación en serie de resistencia y reactancia es equivalente este aparato? **c)** Si la corriente se adelanta a la fem, ¿es inductiva o capacitiva la reactancia?

**Sol.:** **a)**  $|Z| = 12 \Omega$ ; **b)**  $R = 7,2 \Omega$ ,  $X = 9,6 \Omega$ ; **c)** Capacitiva.

**6.4:** En un nudo de una red concurren cuatro ramas. Las intensidades que recorren tres de ellas son:  $i_1(t) = 3 \cos(\omega t) \text{ A}$ ,  $i_2(t) = 4 \cos(\omega t + \pi/4) \text{ A}$  e  $i_3(t) = 2 \cos(\omega t + 5\pi/4) \text{ A}$ . Utilizando la técnica de fasores, determinar la intensidad,  $i_4(t)$ , en la cuarta rama.

**Sol.:**  $i_4(t) = 4,414 \cos(\omega t + 0,31) \text{ A}$ .

**6.5:** En el circuito de la figura, determinar la d.d.p. entre los extremos de  $R_2$  cuando se conecta entre los terminales  $a$  y  $b$ : **a)** una fuente de continua de 100 V; **b)** una fuente de alterna de valor eficaz 100 V y frecuencia  $f = 400/\pi \text{ Hz}$ .

**Sol.:** **a)** 50 V; **b)**  $V(t) = 79,05\sqrt{2} \cos(800t - 0,3217) \text{ V}$ .

**6.6:** En el circuito de la figura, se conecta entre los terminales  $A$  y  $B$  una fuente de alterna de valor eficaz 500 V y frecuencia 50 Hz. Determinar: **a)** la impedancia total entre  $A$  y  $B$ ; **b)** la intensidad,  $i(t)$ , que circula por la fuente; **c)** la capacidad del condensador y la inductancia de la bobina; **d)** la potencia media consumida en el circuito.

**Sol.:** **a)**  $Z_{AB} = (100/41)(121 + 18j) \Omega$ ; **b)**  $i(t) = 2,37 \cos(100\pi t - 0,1477) \text{ A}$ ;

**c)**  $C = 12,73 \mu\text{F}$ ,  $L = 1,273 \text{ H}$ ; **d)**  $P = 828,8 \text{ W}$ .

**6.7:** En el circuito de la figura determinar: **a)** la impedancia de cada elemento y la admitancia del conjunto; **b)** la intensidad  $i(t)$  que circula por la fuente; **c)** las intensidades complejas por las ramas de la resistencia y de la bobina, dibujando, además, el diagrama fasorial de intensidades; **d)** el valor de la capacidad,  $C$ , que conectada en serie en el punto  $M$  hace que la intensidad que circula por la fuente esté en fase con la tensión de la misma.

**Sol.:** **a)**  $R = 20 \Omega$ ,  $Z_L = 4j \Omega$ ; **b)**  $i(t) = 56,09\sqrt{2} \cos(\omega t - 1,3734) \text{ A}$ ;

**c)**  $\tilde{I}_R = 11\sqrt{2} \text{ A}$ ,  $\tilde{I}_L = -55\sqrt{2}j \text{ A}$ ; **d)**  $C = 650 \mu\text{F}$ .

**6.8:** Una bobina de 0.1 H está conectada en serie con una resistencia de  $10 \Omega$  y con un condensador. El condensador se elige de forma que el circuito esté en resonancia al conectarlo a una fuente de alterna de 100 V (voltaje máximo) y 60 Hz. Calcular el valor del condensador utilizado así como la d.d.p. entre los extremos del condensador ( $V_C(t)$ ) y de la bobina ( $V_L(t)$ ).

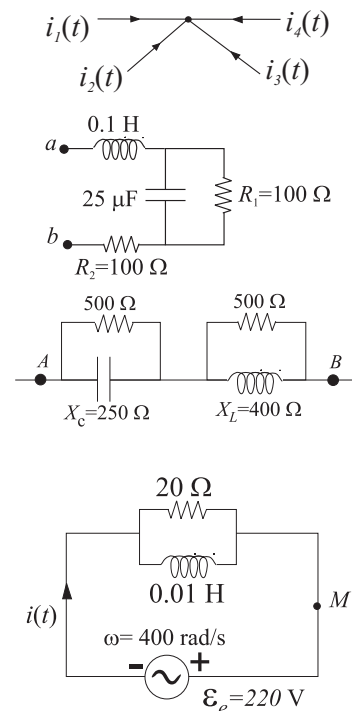
**Sol.:**  $C = 70,4 \mu\text{F}$ ,  $V_C(t) = 120\pi \cos(120\pi t + \pi/2) \text{ V}$ ,  $V_L(t) = 120\pi \cos(120\pi t - \pi/2) \text{ V}$ .

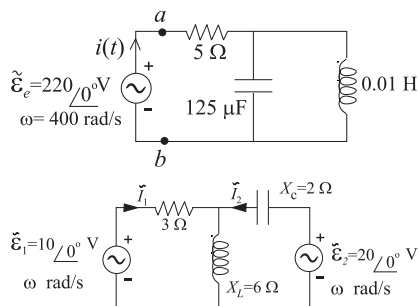
**6.9:** Un receptor de radio se sintoniza para detectar la señal emitida por una estación de radio. El circuito de sintonía –que puede esquematizarse como un circuito  $RLC$  serie– utiliza un condensador de  $32.3 \text{ pF}$  y una bobina de  $0.25 \text{ mH}$ . Calcular la frecuencia de emisión de la estación de radio.

**Sol.:** 1.77 MHz.

**6.10:** Un método para medir autoinducciones consiste en conectar la bobina en serie con una capacidad y una resistencia conocidas, un amperímetro de ca y un generador de señales de frecuencia variable. La frecuencia del generador se varía y se mantiene constante la fem hasta que la corriente es máxima. Si  $C = 10 \mu\text{F}$ ,  $\mathcal{E}_{\text{max}} = 10 \text{ V}$ ,  $R = 100 \Omega$ , siendo la intensidad máxima para  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ , calcular cuánto vale  $L$  e  $I_{\text{max}}$ .

**Sol.**  $L = 4 \text{ mH}$ ,  $I_{\text{max}} = 100 \text{ mA}$ .





**6.11:** En el circuito de la figura determinar: **a)** la impedancia  $Z_{ab}$ ; **b)** la intensidad,  $i(t)$ , que atraviesa la fuente; **c)** la potencia activa suministrada y la potencia media consumida (verificar el balance de las mismas); **d)** el elemento que debe conectarse entre los puntos  $a$  y  $b$  para que la intensidad y tensión en la fuente estén en fase.

**Sol.:** **a)**  $Z_{ab} = 5 + 5j \Omega$ ; **b)**  $i(t) = 44 \cos(400t - \pi/4)$  A; **c)**  $P_{\text{act}} = P_R = 4840$  W; **d)** un condensador de  $250 \mu\text{F}$ .

**6.12:** En el circuito que se muestra en la figura, calcular: **a)** las intensidades (expresiones temporales y fasoriales) y representar el diagrama fasorial de las mismas; **b)** la potencia media suministrada y consumida.

**Sol.:**  $\tilde{I}_1 = -10(1 + j)/3$  A,  $\tilde{I}_2 = 5$  A,  $i_1(t) = 10\sqrt{2}/3 \cos(\omega t - 3\pi/4)$  A,  $i_2(t) = 5\cos(\omega t)$  A; **b)** fuente(1) consume  $50/3$  W, fuente(2) suministra  $50$  W, resistencia consume  $100/3$  W.

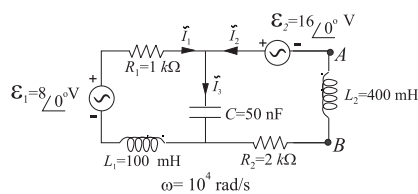
**6.13:** Se desea diseñar un dispositivo RLC serie destinado a funcionar conectado a una fuente de frecuencia angular  $\omega$  y resistencia de salida  $R_s$ . Determinar los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  (en función de  $\omega$  y  $R_s$ ) para que el dispositivo cumpla las tres especificaciones siguientes: 1) la tensión eficaz entre los bornes de  $R$  debe ser igual a la que exista entre los bornes de  $L$ ; 2) el dispositivo debe ser globalmente resistivo, esto es, debe equivaler a una resistencia; 3) la potencia consumida en la resistencia de salida de la fuente debe ser igual a la consumida en el dispositivo. Determinar también la intensidad que circularía en el circuito si la fuente utilizada tuviese amplitud máxima  $V_0$ .

**Sol.:**  $R = R_s$ ,  $L = R_s/\omega$  y  $C = 1/(\omega R_s)$ ;  $i(t) = \frac{V_0}{2R_s} \cos(\omega t)$

**6.14:** En el circuito de la figura: **a)** obtener las intensidades fasoriales y temporales en las ramas, representado el diagrama fasorial; **b)** calcular las potencias medias suministradas y consumidas; **c)** encontrar el equivalente Thévenin entre los terminales  $A$  y  $B$ , obteniendo, además, la intensidad que circularía entre dichos terminales al conectar entre ellos un condensador de  $50$  nF.

**Sol.:** **a)**  $\tilde{I}_1 = 2 + 6j$  mA,  $\tilde{I}_2 = 2$  mA,  $\tilde{I}_3 = 4 + 6j$  mA,  
 $i_1(t) = \sqrt{40}\cos(10^4 t + \arctan(3))$  mA,  $i_2(t) = 2\cos(10^4 t)$  mA,  
 $i_3(t) = \sqrt{52}\cos(10^4 t + \arctan(3/2))$  mA;

**b)** Suministradas fuentes:  $P_1 = 8$  mW,  $P_2 = 16$  mW, consumida resistencias:  $P_{R_1} = 20$  mW,  $P_{R_2} = 4$  mW; **c)**  $\tilde{V}_{\text{Th}} = 8j$ ,  $Z_{\text{Th}} = (2 + 2j) \text{ k}\Omega$ ,  $i_C(t) = 4 \cos(10^4 t - \pi/2)$  mA.



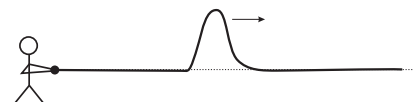
## Tema 7

# Nociones generales de Ondas

---

### 7.1. Nociones generales de ondas

En la Naturaleza existen muchos fenómenos físicos en los que una perturbación física viaja sin que ello lleve aparejado un desplazamiento neto de materia. Un ejemplo de esto puede ser la *ola* que se produce en el agua tras arrojar una piedra. En este fenómeno se observa el desplazamiento de una ondulación en la superficie del agua en la que las partículas individuales de agua *no viajan* sino que realizan un simple movimiento de vaivén (movimiento oscilatorio). Otro ejemplo, es la propagación del sonido, que básicamente es un desplazamiento de un cambio de presión en el aire pero sin que ello implique que las partículas de aire viajen desde el lugar donde se originó el sonido hasta el receptor; más bien cada partícula transmite su movimiento oscilatorio a la siguiente antes de volver a su posición original. Otro ejemplo bastante visual de este tipo de fenómenos se produce al agitar una cuerda por uno de sus extremos. En este caso se observaría claramente el desplazamiento de un pulso en la cuerda, siendo también evidente que cada segmento de cuerda no viaja junto a este pulso.



En todos los ejemplos anteriores una perturbación física se desplaza a través de un medio (agua, aire y cuerda respectivamente) sin que las partículas de este medio hayan sufrido un desplazamiento neto.<sup>1</sup> Estos ejemplos son casos concretos de un tipo general de fenómenos físicos denominados **ondas**, las cuales pueden definirse como

*Propagación de una perturbación física sin que exista un transporte neto de materia.*

Debe notarse que la propagación de la perturbación en la onda implica el transporte de cierta energía y momento lineal. En este sentido, el comportamiento ondulatorio debe discernirse claramente del comportamiento

<sup>1</sup>Debe notarse que la ausencia de un desplazamiento *neto* no implica la existencia de movimiento nulo. El movimiento oscilatorio de una partícula en torno a un punto fijo es un claro ejemplo de movimiento en el cual no existe traslación neta.

de las *partículas*, puesto que estas últimas siempre transportan energía y momento lineal asociado a un transporte neto de materia.

Entre las posibles formas de clasificar a las ondas, a continuación se presentan dos de ellas:

#### ■ Naturaleza física de la perturbación

- Ondas mecánicas: cuando la perturbación física es de naturaleza mecánica, por ejemplo: desplazamiento, velocidad, presión, torsión, etc.
- Ondas electromagnéticas: cuando la perturbación es un campo electromagnético.

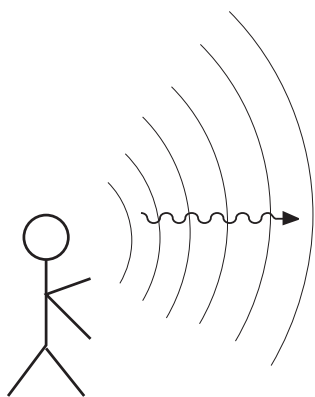
#### ■ Dirección relativa de la perturbación y el desplazamiento ondulatorio

- Ondas longitudinales: cuando la dirección de la perturbación física y de la propagación ondulatoria coinciden, por ejemplo: onda de sonido.
- Ondas transversales: cuando la perturbación física se realiza en un plano transversal a la dirección de propagación de la onda; por ejemplo: el desplazamiento de un pulso en una cuerda, ondas electromagnéticas, etc.

Cuando se trata de caracterizar una onda, algunos conceptos usuales son:

- Foco: Es el recinto donde se produce la perturbación inicial.
- Superficie/Frente de Onda: Es el lugar geométrico de los puntos en que han sido alcanzados simultáneamente por la perturbación.
- Velocidad de Fase: Velocidad con la que se propagan las superficies de onda.

Los conceptos anteriores pueden clarificarse si los concretamos en el caso de la propagación del sonido. En este caso, el *foco* sería el lugar donde se emiten los sonidos (por ejemplo la boca de alguien), la *superficie de onda* serían superficies aproximadamente esféricas centradas en el foco, y la *velocidad de fase* sería la velocidad a la que se viaja el frente de ondas, esto es, la velocidad del sonido  $\sim 340$  m/s.



## 7.2. Ecuación de ondas

Del mismo modo que existe una ecuación general que determina el momento lineal,  $\vec{p}$ , de una partícula (o conjunto de ellas) en función de la fuerza externa,  $\vec{F}$ ,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7.1)$$

(o bien  $F = m d^2x/dt^2$  para el caso de movimiento monodimensional), existe también una ecuación, denominada *ecuación de ondas*, que se aplica a

todos los fenómenos ondulatorios. La ecuación que describe el comportamiento ondulatorio de una perturbación física descrita matemáticamente como  $u(x, t)$  que se propaga con velocidad constante  $v$  sin distorsión (**onda no-dispersiva**) a lo largo del eje  $x$  viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \quad (7.2)$$

Ecuación de ondas no dispersiva monodimensional

Para mostrar que la ecuación anterior describe matemáticamente el fenómeno ondulatorio, analizaremos la propagación de un pulso en una cuerda dado que este ejemplo ofrece una imagen visual inmediata. En este caso, la perturbación  $u(x, t)$  es justamente el desplazamiento vertical de cada trocito de cuerda. La forma del pulso para un instante arbitrario, que podemos tomar como  $t = 0$ , se muestra en la Figura 7.1(a), esto es, la forma matemática de la onda en ese instante de tiempo viene completamente descrita por la función  $u(x)$ . Si tras un tiempo  $t$ , el pulso viaja sin distorsión hacia la derecha una distancia  $a$ , el perfil de la cuerda será como el mostrado en la Figura 7.1(b), pudiéndose describir matemáticamente por la función  $u(x - a)$ . Ahora bien, si el pulso viaja a una velocidad

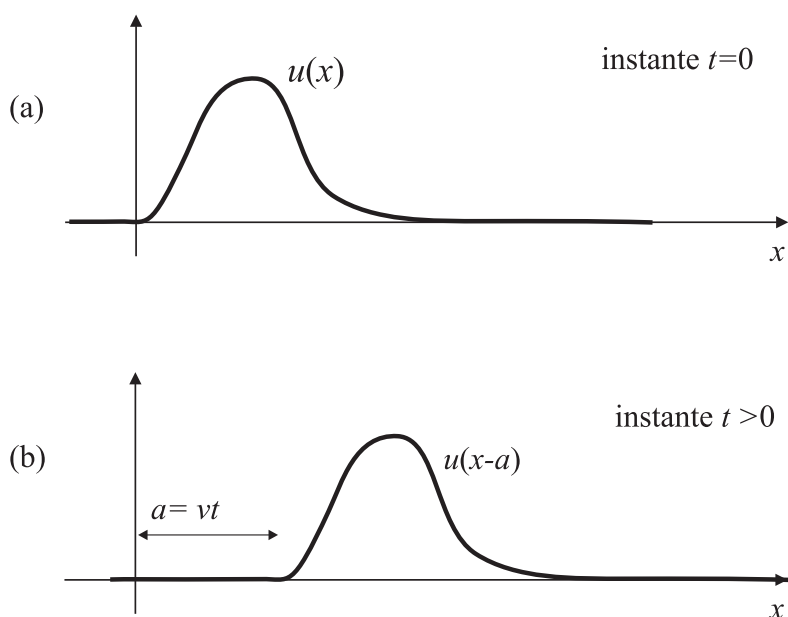


Figura 7.1: Evolución del pulso en una cuerda en dos instantes

$v$ , la distancia  $a$  recorrida por el pulso puede escribirse como  $a = vt$  y consecuentemente la expresión matemática de la onda en el instante  $t$  será

$$u(x, t) = f(x - vt) . \quad (7.3)$$

Evidentemente, el pulso podría haber viajado igualmente hacia la izquierda, en cuyo caso, la expresión matemática de la onda viajera en la cuerda sería

$$u(x, t) = f(x + vt) , \quad (7.4)$$

de modo que un movimiento ondulatorio general en la cuerda podría ser descrito por la función

$$u(x, t) = f(\chi) \quad \text{siendo} \quad \chi = x \pm vt , \quad (7.5)$$

que representaría una onda que puede viajar tanto hacia la izquierda como hacia la derecha. Para encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es una función del tipo (7.5), diferenciaremos la función  $u(x, t)$  con respecto a  $x$  y a  $t$ , esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} = u'(\chi) \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \pm v u'(\chi) . \quad (7.7)$$

Dado que las primeras derivadas no pueden relacionarse entre sí debido a la indefinición en el signo de (7.7), procedemos para obtener las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{d}{d\chi} [u'(\chi)] \frac{\partial \chi}{\partial x} = u''(\chi) \quad (7.8)$$

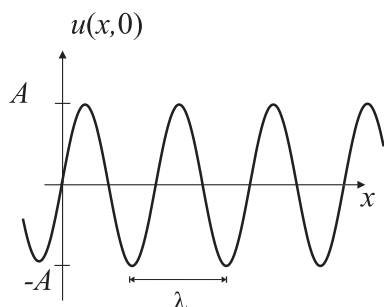
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{d}{d\chi} [\pm v u'(\chi)] \frac{\partial \chi}{\partial t} = v^2 u''(\chi) . \quad (7.9)$$

Si observamos ahora la forma de los segundos miembros de (7.8) y (7.9), podemos comprobar que al eliminar  $u''(\chi)$  obtendríamos precisamente la ecuación general de ondas mostrada en (7.2). En consecuencia, esta ecuación diferencial en derivadas parciales tiene por soluciones a funciones del tipo (7.3) y (7.4) con la única condición de que éstas sean diferenciables hasta el segundo orden (la forma concreta de estas funciones en cada caso particular vendrá determinada por las condiciones iniciales del problema).

Una propiedad muy importante de la ecuación general de ondas es que ésta es *lineal*, lo que implica que si  $u_1(x, t)$  y  $u_2(x, t)$  son soluciones individuales de la ecuación de ondas, entonces la superposición de ambas,  $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ , también lo es. Esta propiedad de linealidad de la ecuación de ondas simplemente expresa en forma matemática el siguiente principio físico conocido como **principio de superposición de ondas**:

Principio de superposición  
de ondas

la perturbación ondulatoria resultante es igual a la suma de las perturbaciones coincidentes.



### 7.3. Ondas armónicas

Según se ha explicado en el apartado anterior, la expresión matemática general de una onda monodimensional no-dispersiva venía dada por (7.5). De entre las posibles formas matemáticas que puede tener este tipo de ondas, hay una especialmente interesante conocida como **onda armónica**. La forma de una onda armónica es una curva tipo senoidal, cuya instantánea en  $t = 0$  puede venir dada por la siguiente expresión matemática:

$$u(x, 0) = A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right) . \quad (7.10)$$

La constante  $A$  es la **amplitud** de la onda y representa el valor máximo de la perturbación,  $\lambda$  es la **longitud de onda** o periodo espacial, esto es, la distancia en la que se repite la perturbación (por ejemplo, la distancia

entre dos mínimos sucesivos). Si la onda se mueve hacia la derecha con cierta velocidad  $v$ , la función de onda en cualquier instante de tiempo  $t$  posterior vendrá dada por

$$u(x, t) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] . \quad (7.11)$$

El tiempo que tarda la onda en recorrer una longitud de onda se conoce como **periodo**  $T$ , por lo que

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \text{o} \quad \lambda = vT . \quad (7.12)$$

El periodo  $T$  corresponde igualmente al tiempo empleado por la perturbación en realizar una oscilación completa en un punto fijo.

Usando la definición del periodo, (7.11) puede escribirse como

$$u(x, t) = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] . \quad (7.13)$$

La expresión anterior indica claramente que la onda armónica muestra una doble periodicidad, tanto en el espacio como en el tiempo:

$$u(x, t) = u(x + n\lambda, t + mT) . \quad (7.14)$$

Esta doble periodicidad es una consecuencia de la periodicidad temporal de la perturbación en el foco ( $x = 0$ ), que se refleja en una periodicidad espacial<sup>2</sup>.

La función de onda armónica puede expresarse en una forma más conveniente si se definen dos cantidades,  $k$  y  $\omega$  que corresponden a la frecuencia espacial o **número de ondas** y a la frecuencia angular respectivamente, esto es,

$$k = 2\pi/\lambda \quad (7.15)$$

$$\omega = 2\pi/T . \quad (7.16)$$

Combinando las expresiones (7.15) y (7.16) junto con (7.12), obtenemos la siguiente relación para la frecuencia angular y el número de ondas de una onda armónica:

$$\omega = vk . \quad (7.17)$$

La frecuencia angular  $\omega$  suele expresarse comúnmente en términos de la **frecuencia temporal**,  $f$  (siendo ésta la inversa del periodo:  $f = 1/T$ ) mediante

$$\omega = 2\pi f . \quad (7.18)$$

La frecuencia temporal representa por tanto el número de oscilaciones realizadas por unidad de tiempo, siendo su unidad el **hertzio** (Hz).

Teniendo en cuenta las definiciones dadas en (7.15) y (7.16), la función de onda armónica que viaja en el sentido positivo de las  $x$  puede escribirse como

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t) . \quad (7.19)$$

La expresión anterior es un caso particular de la siguiente expresión genérica usando la función coseno:

<sup>2</sup>De manera análoga a como un pastelero soltando pasteles cada tiempo  $T$  en un extremo de una cinta transportadora (periodicidad temporal en el foco) que se mueve con velocidad  $v$  da lugar a una periodicidad espacial en dicha cinta; esto es, los pasteles aparecen distanciados una longitud de onda.

Unidad de frecuencia: 1 hertzio (Hz  
 $\equiv \text{s}^{-1}$ )

Expresión matemática de la onda armónica viajando en el sentido positivo de las  $x$

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx - \varphi) , \quad (7.20)$$

donde el argumento completo del coseno se conoce como **fase** de la onda y la constante  $\varphi$  como **fase inicial** y se introduce para posibilitar que en  $t = 0$  la perturbación en el foco ( $x = 0$ ) pueda tomar un valor arbitrario:  $u(0, 0) = A \cos \varphi$ . Una onda armónica viajando en el sentido *negativo* de las  $x$  tendrá la siguiente forma general:

$$u(x, t) = A \cos(\omega t + kx - \varphi) . \quad (7.21)$$

Es interesante notar que el carácter viajero de la onda en sentido positivo/negativo del eje  $x$  lo determina la desigualdad/igualdad entre los signos que acompañan a  $\omega t$  y  $kx$  en la fase.

Para facilitar las operaciones con ondas armónicas, éstas suelen expresarse en forma de exponencial compleja, de manera que la onda armónica dada en (7.20) se escribirá usualmente como

$$u(x, t) = A e^{-j(kx + \varphi)} e^{j\omega t} \quad (7.22)$$

(ver Apéndice B para un estudio de los fasores), aunque debe considerarse que  $u(x, t)$  tal como se ha expresado en (7.20) es solamente la parte real de (7.22):

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx - \varphi) = \text{Re} \left( A e^{-j(kx + \varphi)} e^{j\omega t} \right) . \quad (7.23)$$

No obstante, en lo que sigue del tema, cuando tratemos con ondas armónicas usaremos la notación compleja por simplicidad, debiéndose sobreentender que la onda verdadera es la parte real de la expresión compleja.

## 7.4. Energía e Intensidad de la onda

La **intensidad** de una onda se define como la energía que fluye por unidad de tiempo a través de una superficie unidad situada perpendicularmente a la dirección de propagación. Si  $\rho_U$  es la densidad volumétrica de energía de la onda (esto es, la energía media por unidad de volumen contenida en el medio donde se propaga la onda) y  $v$  la velocidad de propagación de la onda, la intensidad  $I$  de la onda es

$$I = \rho_U v , \quad (7.24)$$

cuyas unidades son  $(\text{ms}^{-1})(\text{Jm}^{-3}) = \text{Js}^{-1}\text{m}^{-2} = \text{Wm}^{-2}$ ; es decir, potencia por unidad de área.

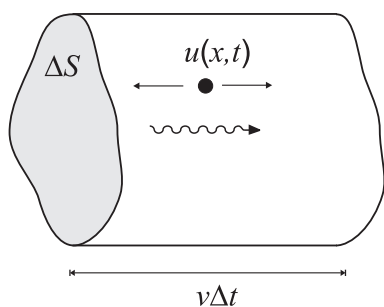
Analicemos el caso particular en el que una perturbación ondulatoria *no-dispersiva armónica* (por ejemplo una onda sonora) se propaga a lo largo de la dirección  $x$  en un medio homogéneo, isótropo y no absorbente de densidad de masa  $\rho_m$ . En este caso, el movimiento armónico de cada partícula (y también su energía) es transmitida a las restantes partículas del medio que la rodea. La expresión matemática del desplazamiento de las partículas será

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx) , \quad (7.25)$$

donde la fase inicial se ha tomado como cero por simplicidad ( $\varphi = 0$ ). Las partículas de este medio adquieren, al paso de la onda, un cierta

Expresión matemática compleja de la onda armónica

Intensidad de la onda





velocidad,  $\dot{u}(x, t) = \partial u / \partial t$ , y por tanto una energía mecánica debida al movimiento armónico que realizan. En este tipo de movimiento, la energía total de las partículas puede igualarse a la energía cinética *máxima* que adquieren. Por tanto, la energía,  $\Delta U$ , de un elemento de volumen,  $\Delta \mathcal{V}$  (de sección transversal  $S$  y anchura  $\Delta l = v \Delta t$ , siendo  $v$  la velocidad de propagación de la perturbación ondulatoria) puede expresarse como

$$\Delta U = \frac{1}{2} \Delta m \dot{u}_{\max}^2 = \frac{1}{2} \rho_m S v \Delta t \dot{u}_{\max}^2. \quad (7.26)$$

Para calcular la velocidad máxima,  $\dot{u}_{\max}$ , de las partículas, primero debemos obtener su velocidad derivando su desplazamiento  $u(x, t)$  con respecto al tiempo, esto es,

$$\dot{u}(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t - kx). \quad (7.27)$$

El máximo del módulo de la velocidad que adquieren las partículas será por tanto  $\dot{u}_{\max} = \omega A$ , por lo que la energía puede reescribirse como

$$\Delta U = \frac{1}{2} \rho_m S v \Delta t \omega^2 A^2, \quad (7.28)$$

por lo que la densidad volumétrica de energía vendrá dada por

$$\rho_U = \frac{\Delta U}{\Delta \mathcal{V}} = \frac{1}{2} \rho_m \omega^2 A^2. \quad (7.29)$$

La potencia, o energía transmitida a cada capa del medio por unidad de tiempo, se obtiene a partir de

$$\text{Potencia} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho_m S v \omega^2 A^2. \quad (7.30)$$

Dado que la intensidad,  $I$ , de la onda viajera es potencia por unidad de área, se tiene finalmente que

$$I = \frac{\text{Potencia}}{\text{Área}} = \frac{1}{2} \rho_m \omega^2 A^2 v. \quad (7.31)$$

Intensidad de la onda armónica mecánica:  $I \propto A^2$

Para el caso particular que estamos analizando, teniendo en cuenta (7.29), observamos que (7.31) puede también expresarse como  $I = \rho_U v$ , en concordancia con la expresión general (7.24). Es también interesante notar en (7.31) que la intensidad de la onda armónica mecánica es proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud de la perturbación.

**Ejemplo 7.1** A 1000 Hz, el umbral de audibilidad del oído humano corresponde a una intensidad de  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ . ¿Cuál es el desplazamiento máximo de las moléculas de aire en este límite?

Datos:  $\rho_{\text{aire}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $v = 340 \text{ m/s}$ .

Dado que la intensidad de la onda sonora viene dada por

$$I = \frac{1}{2} \rho_m \omega^2 A^2 v,$$

la amplitud,  $A$ , correspondiente al desplazamiento máximo de las moléculas del medio será

$$A = \sqrt{\frac{2I}{\rho_m \omega^2 v}}.$$

Al sustituir los datos del presente problema tendremos que

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12}}{1,2 \cdot 4\pi^2 \times 10^6 \cdot 340}} \approx 1,1 \times 10^{-11} \text{ m} .$$

Este desplazamiento es minúsculo, lo que demuestra la alta sensibilidad del oído humano.

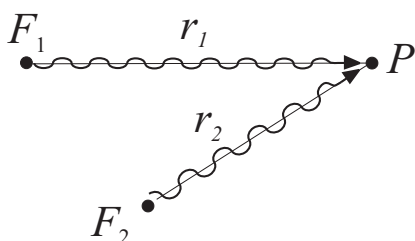
## 7.5. Interferencia de Ondas

Cuando dos o más ondas coinciden en el espacio en el mismo instante de tiempo se produce un fenómeno que se conoce como **interferencia**. El principio de superposición de ondas establece que cuando dos o más ondas coinciden en un punto y en un instante de tiempo, la perturbación resultante es la *suma* de las perturbaciones individuales (este principio ya fue relacionado en el Apartado 7.2 con la linealidad de la ecuación de ondas). En consecuencia, la perturbación resultante en un punto  $P$  y en un instante de tiempo  $t$ ,  $u(P, t)$ , debido a la coincidencia de  $N$  ondas  $u_i(x, t)$  se obtendrá mediante la siguiente expresión:

$$u(P, t) = \sum_{i=1}^N u_i(P, t) . \quad (7.32)$$

### 7.5.1. Superposición de dos ondas armónicas

Para estudiar los aspectos cuantitativos de la interferencia consideraremos la *superposición de dos ondas armónicas monodimensionales de la misma frecuencia pero distinta amplitud y fase inicial*,



y

$$u_1(r, t) = A_1 \cos(\omega t - kr - \varphi_1)$$

$$u_2(r, t) = A_2 \cos(\omega t - kr - \varphi_2) ,$$

en cierto punto  $P$ . Si  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias desde los focos respectivos al punto  $P$ , la perturbación resultante vendrá dada por

$$u(P, t) = u_1(r_1, t) + u_2(r_2, t) . \quad (7.33)$$

Si usamos la notación compleja, la perturbación suma puede obtenerse a partir de

$$\begin{aligned} u(P, t) &= A_1 e^{-j(kr_1 - \omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{-j(kr_2 - \omega t + \varphi_2)} \\ &= [A_1 e^{-j\varepsilon_1} + A_2 e^{-j\varepsilon_2}] e^{j\omega t} \\ &= A(P) e^{-j\varepsilon(P)} e^{j\omega t} , \end{aligned} \quad (7.34)$$

donde

$$\varepsilon_i = kr_i + \varphi_i \quad (7.35)$$

y  $A(P)$  y  $\varepsilon(P)$  son respectivamente la amplitud y la fase de la perturbación resultante en el punto  $P$ . Operando en (7.34) encontramos que

$$\begin{aligned} A(P)e^{-j\varepsilon(P)} &= A_1e^{-j\varepsilon_1} + A_2e^{-j\varepsilon_2} \\ &= (A_1 \cos \varepsilon_1 - jA_1 \sin \varepsilon_1) + (A_2 \cos \varepsilon_2 - jA_2 \sin \varepsilon_2) \\ &= (A_1 \cos \varepsilon_1 + A_2 \cos \varepsilon_2) - j(A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2) , \end{aligned} \quad (7.36)$$

de donde obtenemos que la amplitud puede ser calculada como sigue:

$$\begin{aligned} A^2(P) &= A_1^2 \cos^2 \varepsilon_1 + A_2^2 \cos^2 \varepsilon_2 + 2A_1A_2 \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + \\ &\quad A_1^2 \sin^2 \varepsilon_1 + A_2^2 \sin^2 \varepsilon_2 + 2A_1A_2 \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) , \end{aligned}$$

esto es,

$$A(P) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta(P)} , \quad (7.37)$$

Amplitud de la interferencia de 2 ondas armón. de igual frecuencia

siendo

$$\begin{aligned} \delta(P) &= kr_1 - kr_2 + \varphi_1 - \varphi_2 \\ &= k\Delta r + \Delta\varphi . \end{aligned} \quad (7.38)$$

En la expresión anterior,  $\delta(P)$  se denomina **diferencia de fase**,  $\Delta r = r_1 - r_2$  se conoce como **diferencia de camino** entre el recorrido de las dos ondas al propagarse desde los focos respectivos hasta el punto  $P$  y  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  es la **diferencia de fase inicial** entre las dos ondas. El último término de la expresión anterior,

$$2A_1A_2 \cos \delta(P) ,$$

se denomina usualmente **término de interferencia** puesto que es el responsable de que la amplitud de la interferencia varíe al variar la diferencia de camino hasta el punto  $P$ . En concreto, si notamos que  $-1 \leq \cos \delta(P) \leq 1$  encontraremos que la amplitud en un punto podrá tomar en general valores comprendidos entre

$$(A_1 - A_2) \leq A \leq (A_1 + A_2) . \quad (7.39)$$

Para obtener la intensidad resultante de la superposición de las dos ondas armónicas de igual frecuencia en el punto  $P$  debemos tener en cuenta que, según (7.31), la intensidad de las ondas armónicas depende del cuadrado de la amplitud ( $I \propto A^2$ ). En consecuencia, a partir de (7.37), podemos deducir que la intensidad resultante será

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \delta(P) . \quad (7.40)$$

### 7.5.2. Focos incoherentes

En el apartado anterior observamos que la amplitud resultante en el punto  $P$  oscilaba entre dos valores dependiendo del valor concreto de  $\delta$  en dicho punto. No obstante, en la práctica ocurre frecuentemente que la diferencia de fase no es constante en el tiempo sino que  $\delta = \delta(t)$ . Esto puede ser debido a una posible variación temporal de las condiciones de emisión de los focos (usualmente en un tiempo del orden de  $10^{-10}$  s); por ejemplo:

1. La frecuencia de los focos no es estrictamente constante sino que presenta pequeñas fluctuaciones arbitrarias que provocan que el número de ondas (y equivalentemente la longitud de onda) oscile ligeramente en torno a cierto valor promedio,  $\langle k \rangle$

$$k(t) = \langle k \rangle + \Delta k(t) .$$

2. Las fases iniciales de los dos focos presentan fluctuaciones al azar de modo que las funciones  $\varphi_1(t)$  y  $\varphi_2(t)$  no están correlacionadas de ninguna manera dando lugar a que la diferencia de fase inicial sea una función del tiempo,

$$\Delta\varphi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = f(t) ,$$

que varía igualmente al azar.

Cuando nos encontramos con alguna de las condiciones anteriores decimos que los focos son **incoherentes**. Debido a esta rápida variación arbitraria en el tiempo de la diferencia de fase, el término de interferencia *se anula en promedio* durante el intervalo de observación debido a que el valor medio del coseno de un argumento que varía al azar es cero:

$$\langle \cos \delta(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \delta(t) dt = 0 .$$

Esto hecho implica que la intensidad promedio en el punto  $P$ ,  $\langle I(P) \rangle$ , venga dada por

$$\langle I(P) \rangle = I_1 + I_2 \quad \text{focos incoherentes.} \quad (7.41)$$

Notemos que en el presente caso de focos incoherentes, la anulación en promedio del término de interferencia hace que la intensidad de la perturbación no dependa de la posición del punto de observación. Este hecho provoca que aunque podamos, en un sentido estricto, hablar de interferencia, ésta *no será observable* y usualmente diremos que “no existe interferencia”.

A menudo cuando se habla de un *único* foco también podemos decir que este foco es “incoherente”. En este caso, en realidad estamos queriendo decir que este único foco tiene cierta extensión espacial, y que las distintas partes del foco (asimilables a diversos focos puntuales) no son coherentes entre sí.

### 7.5.3. Focos coherentes

Cuando la fase inicial de los dos focos está completamente correlacionada, de modo que

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) \neq f(t) ,$$

manteniendo una diferencia de fase inicial constante, se dice que los dos focos son **coherentes**. En el caso de que  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\delta$  sólo dependerá de la diferencia de camino (en general  $\Delta r$ ),

$$\delta = k\Delta r = 2\pi\Delta r/\lambda , \quad (7.42)$$

dando lugar así a una interferencia que sí podría ser observable.

En las circunstancias anteriores, podemos distinguir dos casos de interés, dependiendo de si  $\cos \delta$  es 1 o -1, esto es, si  $A$  adquiere su valor máximo (**interferencia constructiva**) o bien su valor mínimo (**interferencia destructiva**). Por tanto, si

$$\delta = \begin{cases} 2n\pi & \Rightarrow A = A_1 + A_2 & \text{Interferencia Constructiva} \\ (2n+1)\pi & \Rightarrow A = A_1 - A_2 & \text{Interferencia Destructiva.} \end{cases} \quad (7.43)$$

Teniendo en cuenta (7.42), la condición de interferencia constructiva o destructiva para  $\Delta r$  en  $P$  vendrá dada por

$$\Delta r = \begin{cases} n\lambda & \text{Interferencia Constructiva} \\ (2n+1)\frac{\lambda}{2} & \text{Interferencia Destructiva ;} \end{cases} \quad (7.44)$$

es decir, si la diferencia de camino es un múltiplo *entero/semientero* de la longitud de onda, entonces tendremos interferencia constructiva/destructiva.

Desde un punto de vista práctico, una forma usual de producir focos coherentes es generar dos focos secundarios a partir de la misma fuente primaria, asegurando así que la diferencia de fase inicial en los dos focos secundarios es una constante. Uno de los primeros experimentos que mostró el fenómeno de interferencia con luz es el **experimento de la doble rendija de Young** mostrado en la Figura 7.2(a), constatando así convincentemente la naturaleza ondulatoria de la luz. En este experimento, la

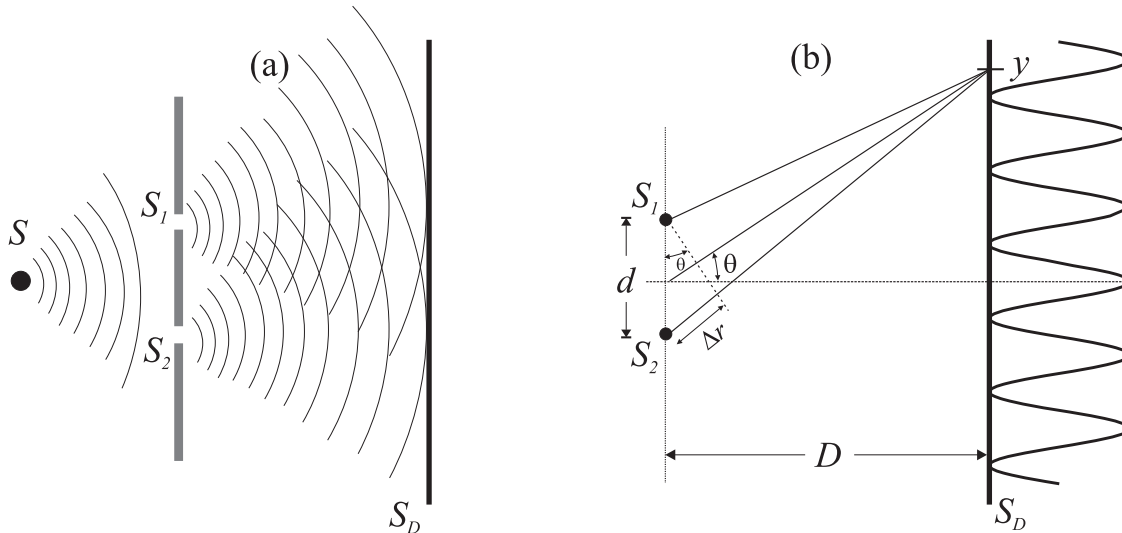


Figura 7.2: Experimento de la doble rendija de Young

luz (u otra perturbación ondulatoria) proveniente de un foco primario  $S$  se hace pasar por una pantalla en la que se han realizado dos ranuras  $S_1$  y  $S_2$  separadas una distancia  $d$ . Las rendijas se comportan como dos focos *coherentes* de luz cuyas ondas interfieren en el semiespacio derecho. Este fenómeno provoca un patrón de interferencias en la pantalla  $S_D$  donde aparecen regiones sombreadas (dibujadas en negro) junto a regiones más iluminadas tal y como se muestra en la Figura 7.3. En este experimento tenemos que la amplitud de las ondas que interfieren es idéntica, esto es,

$$A_1 = A_2 .$$

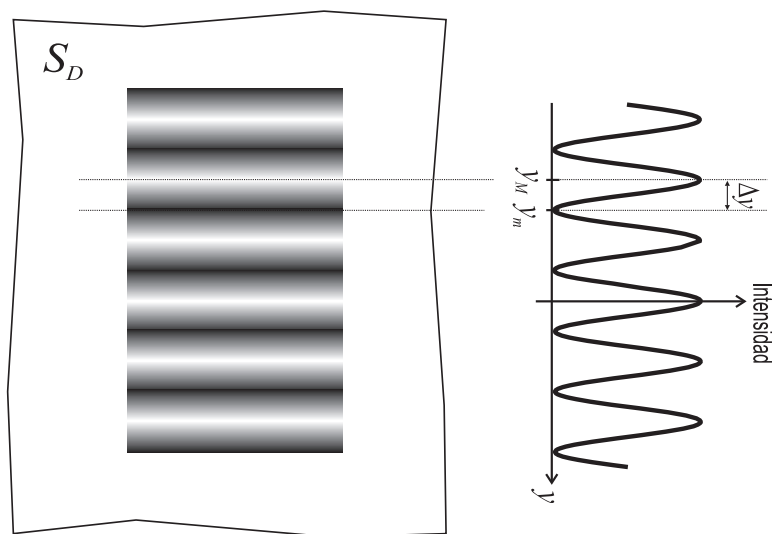


Figura 7.3: Patrón de interferencia resultante en el experimento de la doble rendija de Young

Si además consideramos que la pantalla  $S_D$  se coloca a una distancia tal que  $D \gg d$  de las rendijas y admitimos que  $\theta$  es muy pequeño, entonces, según muestra la Figura 7.2(b), encontramos que la diferencia de camino en la coordenada  $y$  de la pantalla viene dada por

$$\Delta r = d \sin \theta \approx d \tan \theta \approx d \frac{y}{D} . \quad (7.45)$$

En consecuencia, el patrón de interferencia obtenido en la pantalla  $S_D$  mostrará franjas de interferencia constructiva o bien destructiva según se cumplan las siguientes condiciones:

■ **Interferencia constructiva**,  $y = y_M$ :

$$k \Delta r = 2n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y_M}{D} = 2n\pi , \quad (7.46)$$

de donde se deduce que las franjas  $y = y_M$  de interferencia constructiva verifican

$$y_M = n \frac{D}{d} \lambda , \quad (7.47)$$

siendo la intensidad de la onda en estas franjas:  $I = 4I_1$ .

■ **Interferencia destructiva**,  $y = y_m$ :

$$k \Delta r = (2n + 1)\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y_m}{D} = (2n + 1)\pi , \quad (7.48)$$

de donde se deduce que las franjas  $y = y_m$  de interferencia destructiva verifican

$$y_m = \frac{2n + 1}{2} \frac{D}{d} \lambda , \quad (7.49)$$

siendo la intensidad de la onda en estas franjas  $I = 0$ .

Nótese que la diferencia  $\Delta y$  entre un máximo y un mínimo consecutivo es

$$\Delta y = \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2} . \quad (7.50)$$

Esta expresión nos proporciona adicionalmente un procedimiento muy sencillo para determinar el valor de la longitud de onda a partir de la medida de la distancia entre franjas de interferencia constructiva y destructiva.

Es interesante notar que en las franjas de interferencia constructiva se ha obtenido que la intensidad es *cuatro* veces (y no dos) el valor de la intensidad proporcionada por cada uno de los focos. Esto parece violar el principio de conservación de la energía, aunque tal hecho no se produce puesto que la energía de la onda no se distribuye homogéneamente en la pantalla  $S_D$  sino que, debido a la interferencia, existen puntos donde la energía es mayor que la suma de las energías provenientes de los focos pero también existen otros puntos donde la energía es menor (incluso cero) que la proveniente de los focos.

**Ejemplo 7.2** Un foco de luz amarilla ( $\lambda = 600 \text{ nm}$ ) incide sobre dos rendijas separadas una distancia  $d$ , observándose la interferencia de la luz proveniente de estas rendijas en una pantalla situada a una distancia de 3 m. Obtener la separación  $d$  entre las rendijas para que la distancia entre máximos y mínimos consecutivos del patrón de interferencia luminoso sea mayor que 5 mm.

Según la teoría expuesta anteriormente, la distancia entre máximos y mínimos consecutivos en el experimento de la doble rendija de Young viene dado por

$$\Delta y > \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}.$$

Al despejar en la expresión anterior  $d$  encontramos que

$$d < \frac{D\lambda}{2\Delta y} = \frac{3 \cdot 6 \times 10^{-7}}{2 \cdot 5 \times 10^{-3}} = 1,8 \times 10^{-4} \text{ m} = 180 \mu\text{m}.$$

El resultado anterior nos muestra que la separación entre rendijas debe ser muy pequeña (y aún menor si  $\Delta y$  se quiere mayor) por lo que en la práctica no es fácil llevar a cabo este experimento.

## 7.6. Ondas estacionarias

Observemos que cuando una perturbación viaja hacia la izquierda por una cuerda, al llegar al extremo, ésta se refleja de la forma mostrada en la figura adjunta.

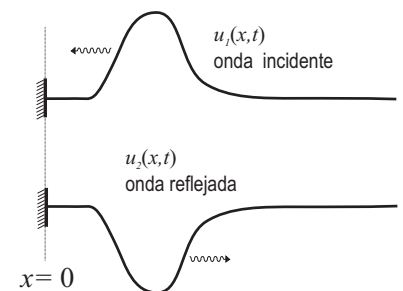
Si la situación anterior ocurre para una perturbación armónica que viaja hacia la izquierda por una cuerda con uno de sus extremos fijos:

$$u_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t + kx),$$

al llegar al extremo de la cuerda,  $x = 0$ , la onda se refleja dando lugar a una onda armónica viajando hacia la derecha:

$$u_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kx).$$

Dado que las dos ondas viajeras anteriores se encuentran en una misma *región* del espacio darán lugar a un fenómeno típico de superposición o



interferencia. Puesto que en el punto  $x = 0$ , la perturbación de la cuerda debe ser nula (puesto que, por hipótesis, es un extremo *fijo*) para cualquier instante de tiempo, tendremos que

$$\begin{aligned} u(0, t) &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \\ &= (A_1 + A_2) \cos \omega t = 0, \end{aligned} \quad (7.51)$$

de donde se deduce que  $A_1 = -A_2$ .

Como las dos perturbaciones ondulatorias anteriores coinciden simultáneamente en la misma región, la superposición de ambas (usando notación compleja) dará lugar a la siguiente onda:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -A_2 e^{j(\omega t + kx)} + A_2 e^{j(\omega t - kx)} = A_2 (-e^{jkx} + e^{-jkx}) e^{j\omega t} \\ &= A \operatorname{sen}(kx) e^{j(\omega t - \pi/2)} \end{aligned} \quad (7.52)$$

(donde  $A = 2A_2$  y  $-j$  se ha escrito como  $e^{-j\pi/2}$ ), cuya parte real puede finalmente escribirse como

$$u(x, t) = A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t. \quad (7.53)$$

Nótese que en la expresión (7.53) no aparecen explícitamente expresiones del tipo  $f(\omega t \pm kx)$ , lo que indica que esta perturbación no puede identificarse ya simplemente con una onda viajera, sino que constituye un nuevo tipo de onda conocido como **onda estacionaria**. En este tipo de perturbación ya no podemos decir que la energía viaja de un punto a otro sino que, como muestra la figura 7.4, esta onda estacionaria corresponde

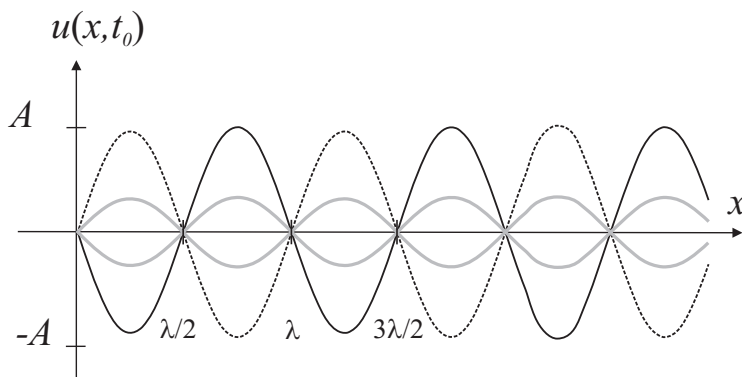


Figura 7.4: Instantánea de la onda estacionaria en  $t = t_0$ . Los nodos están separados una distancia  $\lambda/2$ .

a una situación en la que cada elemento individual de la cuerda realiza un *movimiento armónico simple* cuya amplitud es una función de  $x$ ,  $A(x)$ , pudiéndose escribir entonces que

$$u(x, t) = A(x) \operatorname{sen} \omega t, \quad (7.54)$$

siendo

$$A(x) = A \operatorname{sen} kx. \quad (7.55)$$

Observemos que en la situación anterior cada elemento de la cuerda es como si actuase de forma independiente, sin “transmitir su movimiento al siguiente”. De hecho podemos incluso encontrar puntos denominados



**nodos** donde la perturbación es nula para todo instante de tiempo. Estos puntos son aquellos que verifican que la amplitud es nula, es decir, aquellos que satisfacen la siguiente condición:

$$kx = n\pi \Rightarrow x_{\text{nodo}} = n\frac{\lambda}{2}, \quad (7.56)$$

siendo la distancia,  $\Delta$ , entre dos nodos sucesivos una semilongitud de onda ( $\Delta = \lambda/2$ ; recuérdese que la longitud de onda está determinada por la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda:  $\lambda = v/f$ ).

Si ahora imponemos al problema anterior una *segunda condición* consistente en que el otro extremo de la cuerda (el punto  $x = L$ ) también esté fijo, entonces ha de verificarse igualmente que

$$u(L, t) = 0,$$

lo cual requiere que

$$\text{sen } kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi. \quad (7.57)$$

La condición anterior implica que tanto el número de ondas como la longitud de onda de la onda estacionaria sólo pueden tomar ciertos valores *discretos* (fenómeno conocido como *cuantización*) dados por

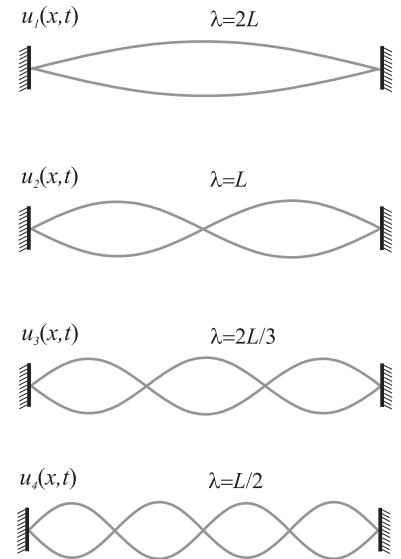
$$k_n = n\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \dots \quad (7.58)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \dots \quad (7.59)$$

Vemos entonces que la imposición de (7.57) ha limitado los valores de las longitudes de onda permitidas en la cuerda fija por sus dos extremos a aquéllos que cumplan la condición (7.59). De forma análoga, las frecuencias permitidas en la cuerda serán aquéllas que cumplan

$$\omega_n = vk_n = v\frac{n\pi}{L}. \quad (7.60)$$

En consecuencia podemos concluir que tanto las longitudes de onda como las frecuencias permitidas en la cuerda están **cuantizadas** y que esta cuantización es fruto de la imposición de condiciones de contorno en *ambos* extremos de la cuerda.



**Ejemplo 7.3** Una cuerda tensa de  $L = 60$  cm de longitud y que tiene una masa por unidad de longitud  $\rho_l = 60$  g/m es sometida a una tensión  $T = 900$  N. Suponiendo que la cuerda se hace vibrar en su segundo armónico, ¿cuál será la frecuencia del sonido que generará?

Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación de la onda en la cuerda viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}},$$

en el presente caso, esto implica que la velocidad será

$$v = \sqrt{\frac{900}{6 \times 10^{-2}}} \approx 122,47 \text{ m/s}.$$

Dado que la cuerda vibra en su segundo armónico ( $n = 2$ ), entonces la longitud de onda en este armónico será

$$\lambda_2 = 2L/2 = 0,6 \text{ m} ,$$

por lo que la frecuencia,  $f$ , de la perturbación será

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{122,47}{0,6} \approx 204,12 \text{ Hz} .$$

Dado que la cuerda vibrante es el foco sonoro, la frecuencia del sonido que escucharíamos será la misma que la de vibración de la cuerda.

Finalmente observemos que en la cuerda con extremos fijos cada una de las ondas estacionarias permitidas responden a la siguiente expresión:

$$u_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) ,$$

denominándose genéricamente como *armónicos*. Estos armónicos presentan la importante propiedad de que cualquier perturbación en la cuerda puede expresarse como una superposición de ellos, esto es,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_1 x) \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) , \end{aligned} \quad (7.61)$$

siendo

$$k_1 = \frac{\pi}{L} \quad , \quad \omega_1 = v \frac{\pi}{L}$$

y  $A_n$  la amplitud del  $n$ -ésimo armónico (esta amplitud será distinta en cada caso particular). El resultado anterior puede considerarse como una conclusión particular de un teorema más general, llamado **teorema de Fourier**, que básicamente dice que una función periódica puede expresarse como la suma de senos/cosenos cuyas frecuencias son un número entero de veces la frecuencia original del problema (un tratamiento detallado de este teorema puede encontrarse en cualquier libro de Cálculo).

## 7.7. Difracción

Uno de los fenómenos ondulatorios más característicos es el conocido como difracción. Este fenómeno se produce cuando una onda es distorsionada en su propagación por un obstáculo, aunque también se llama difracción a la interferencia producida por *muchos* focos coherentes elementales. Desde un punto de vista físico, la difracción no se diferencia básicamente de la interferencia puesto que ambos fenómenos son fruto de la superposición de ondas. La difracción puede ser, por ejemplo, la causa de la desviación de la luz de una trayectoria recta, explicando así por qué la luz llega a puntos que, en principio, no debería alcanzar si su propagación fuese estrictamente rectilínea. Un ejemplo de difracción puede verse en la Figura 7.5(b) que muestra el patrón de sombras cuando una fuente de luz *coherente* ilumina una esquina recta. En la Fig. 7.5(a) se muestra esta

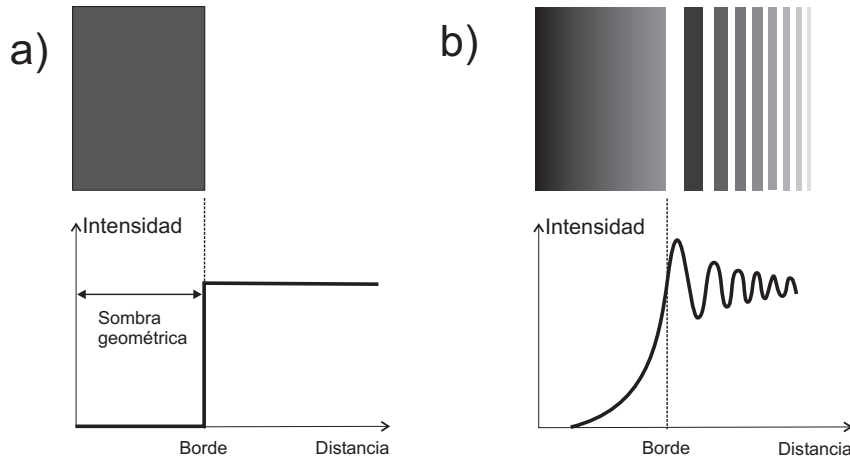


Figura 7.5: Sombra producida por una esquina recta iluminada por una fuente de luz cuando: (a) no se produce difracción, (b) sí se produce difracción

misma sombra cuando no se produce difracción (por ejemplo, cuando la fuente de luz es incoherente).

En el presente estudio de la difracción, consideraremos únicamente la denominada **difracción de Fraunhofer**, que se presenta cuando las ondas incidentes pueden considerarse planas (esto es, su frente de onda es un plano) y el patrón de difracción es observado a una distancia lo suficientemente lejana como para que solo se reciban los rayos difractados *paralelamente*. Este estudio lo basaremos en el **principio de Huygens**, que explica la propagación ondulatoria suponiendo que

*cada punto de un frente de ondas primario se comporta como un foco de ondas esféricas elementales secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a la onda primaria. La posición del frente de ondas primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de dichas ondas elementales.*



Siguiendo este principio, cuando un frente de onda alcanza una pantalla en la que existe una rendija de anchura  $b$ , tal y como se muestra en la Figura 7.6, sólo aquellos puntos del frente de ondas coincidentes con la rendija se convierten en focos emisores secundarios, de modo que la perturbación ondulatoria en cualquier punto a la derecha de la rendija puede calcularse como la superposición de las ondas originadas en cada uno de estos focos secundarios (ver Figura 7.6b).

En este sentido, y a efectos de cálculo, supondremos que existen  $N$  focos puntuales equiespaciados en la rendija. La perturbación ondulatoria,  $u(x, t)$ , en cierto punto  $P$  de una pantalla  $S_D$  (situada a una distancia  $D \gg d$ ) será fruto de la *interferencia* de un gran número de fuentes equiespaciadas de igual amplitud y fase inicial, esto es,

$$u(P, t) = \sum_{n=1}^N A_0 e^{-j(kr_n - \omega t)}, \quad (7.62)$$

donde  $r_n$  es la distancia desde el foco secundario  $n$ -ésimo hasta el punto  $P$  y  $A_0$  la amplitud constante de cada onda elemental. Notemos que, bajo

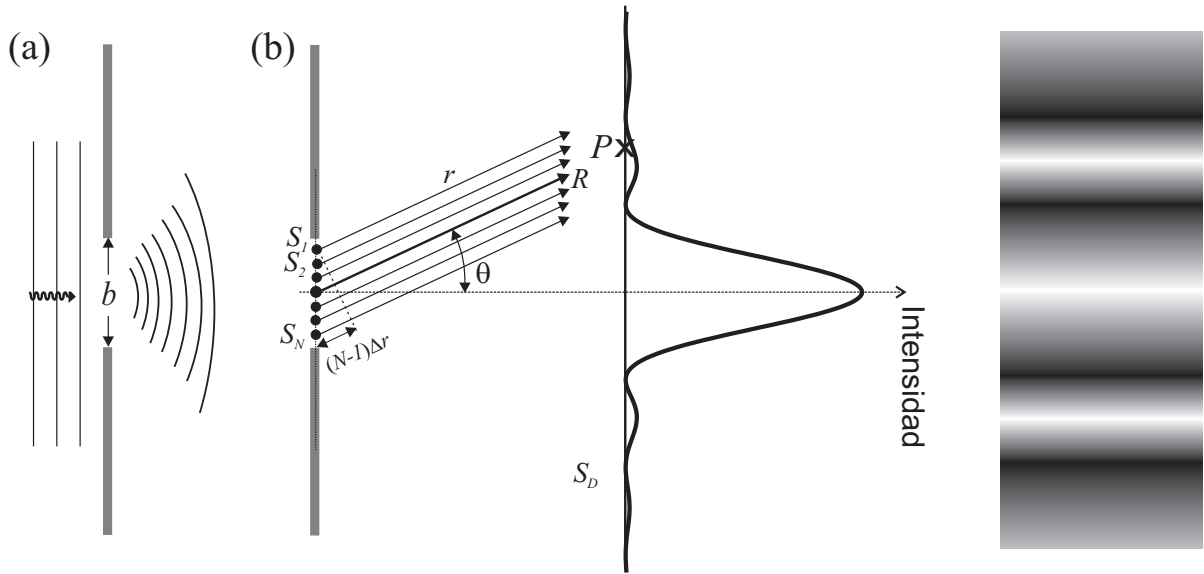


Figura 7.6: (a) Difracción de Fraunhofer de una rendija rectangular; (b) Cada punto de la rendija se comporta como un foco puntual emisor de ondas secundarias.

la presente aproximación, todos los rayos que llegan a  $P$  se consideran paralelos. Si llamamos  $r$  a la distancia desde el foco 1 hasta  $P$  y  $\Delta r$  a la diferencia de camino entre la perturbación que llega a  $P$  desde un foco y el siguiente,  $r_n$  puede escribirse como

$$r_n = r + (n - 1)\Delta r .$$

La perturbación en  $P$  según (7.62) puede entonces expresarse como

$$\begin{aligned} u(P, t) &= A_0 \left[ e^{-jk r} + e^{-jk(r+\Delta r)} + e^{-jk(r+2\Delta r)} + \dots \right] e^{j\omega t} \\ &= A_0 \left[ 1 + e^{-j\phi} + e^{-2j\phi} + \dots + e^{-(N-1)j\phi} \right] e^{-j(kr-\omega t)} , \end{aligned} \quad (7.63)$$

donde  $\phi = k\Delta r$  y pudiéndose identificar la suma entre corchetes como una serie geométrica,  $S_g$ , de razón  $q = e^{-j\phi}$ . Dado que la suma de la siguiente serie geométrica viene dada por

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q} ,$$

el resultado de la serie geométrica en (7.63) puede expresarse como

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{1 - e^{jN\phi}}{1 - e^{j\phi}} = \frac{e^{jN\phi/2} e^{-jN\phi/2} - e^{jN\phi/2}}{e^{j\phi/2} e^{-j\phi/2} - e^{j\phi/2}} \\ &= \frac{\text{sen}(N\phi/2)}{\text{sen}(\phi/2)} e^{j(N-1)\phi/2} , \end{aligned}$$

por lo que

$$u(P, t) = A_0 \frac{\text{sen}(kN\Delta r/2)}{\text{sen}(k\Delta r/2)} e^{-j[k(r + \frac{N-1}{2}\Delta r) - \omega t]} . \quad (7.64)$$

La expresión anterior puede reescribirse como

$$u(P, t) = A_P e^{-j(kR - \omega t)} , \quad (7.65)$$

donde

$$R = r + \frac{N-1}{2} \Delta r$$

es la distancia desde el centro de la rendija al punto  $P$  y

$$A_P = A_0 \frac{\text{sen}(kN\Delta r/2)}{\text{sen}(k\Delta r/2)} . \quad (7.66)$$

es la amplitud resultante en  $P$ . Dado que la amplitud de la onda en la pantalla varía punto a punto, también variará la intensidad, formando lo que se conoce como un **patrón de difracción**:

$$\frac{I(\theta)}{I_{\max}} = \frac{\text{sen}^2(Nk\Delta r/2)}{\text{sen}^2(k\Delta r/2)} . \quad (7.67)$$

Claramente existe un mínimo en la intensidad de la perturbación cuando  $A_P \rightarrow 0$ , esto es, cuando el numerador de (7.66) sea cero,

$$\text{sen}(kN\Delta r/2) = 0 ,$$

es decir, cuando el argumento verifica que

$$kN\Delta r/2 = m\pi . \quad (7.68)$$

Según se puede deducir de la Figura 7.6(b) (si  $N \gg 1$ ):

$$N\Delta r \approx (N-1)\Delta r = b \text{sen} \theta ,$$

por lo que la condición de mínimo (7.68) para  $A_P$  puede reescribirse como

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{b \text{sen} \theta}{2} = m\pi , \quad (7.69)$$

o equivalentemente

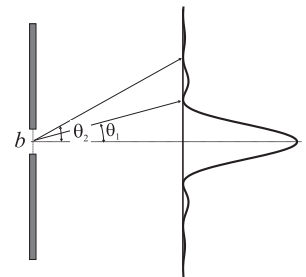
$$b \text{sen} \theta_m = m\lambda \quad m = 1, 2, \dots . \quad (7.70)$$

El primer mínimo (o mínimo de primer orden) ocurre para  $m = 1$ , verificándose entonces que

$$\text{sen} \theta_1 = \frac{\lambda}{b} . \quad (7.71)$$

Puede observarse que si  $\lambda \ll b$ ,  $\theta_1 \approx 0$ , por lo que apenas se observará patrón de difracción, es decir, la zona de sombra aparece bien definida tal como ocurriría si la onda se propagase en línea recta. A medida que el cociente  $\lambda/b$  crece, el ángulo  $\theta_1$  aumenta, haciéndose, por tanto, más evidente el fenómeno de difracción. En general, los fenómenos de difracción son más apreciables cuando las dimensiones de la rendija son del orden de la longitud de onda de la perturbación ondulatoria (no obstante, debe tenerse en cuenta que el análisis efectuado para obtener la expresión (7.70) es sólo válido si  $\lambda < b$ , puesto que de otro modo el seno sería mayor que uno para todo valor de  $m$ ).

Condición de intensidad nula en la difracción por una rendija



**Ejemplo 7.4** Hallar la anchura de la franja central del patrón de difracción producido en una pantalla situada a una distancia de 5 m de una rendija de anchura 0.3 mm por la que se ha hecho pasar una luz laser de 600 nm.

La anchura de la franja central puede obtenerse a partir del ángulo  $\theta_1$  que nos da el primer mínimo en el patrón de difracción. Según la expresión (7.71), este ángulo viene dado por

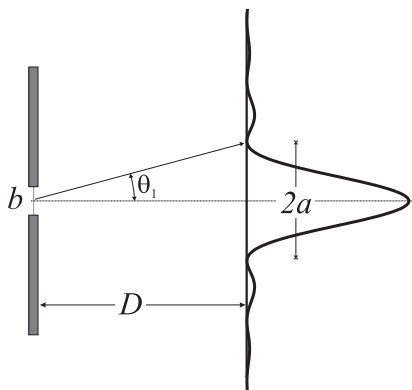
$$\text{sen } \theta_1 = \frac{\lambda}{b} = \frac{6 \times 10^{-7} \text{ m}}{3 \times 10^{-4} \text{ m}} = 2 \times 10^{-3}.$$

Dado que  $\text{sen } \theta_1 \ll 1$ , tenemos que

$$\text{sen } \theta_1 \approx \tan \theta_1$$

y, por tanto, la anchura de la franja central será

$$2a = 2D \tan \theta_1 \approx 2 \cdot 5 \cdot 2 \times 10^{-3} = 20 \text{ mm}.$$



## 7.8. Grupo de Ondas

Aunque hasta ahora hemos estado tratando con ondas armónicas, debe tenerse en cuenta que una onda armónica es una *idealización* que no puede representar, en sentido estricto, a una perturbación real. Claramente, cualquier perturbación o señal real debe *empezar* y *acabar* en determinados instantes de tiempo. La onda armónica representaría una señal que no empieza ni acaba nunca y que además tiene siempre la misma amplitud, fase y frecuencia. Una señal de este tipo, además de irreal, no transmitiría información alguna puesto que la información está necesariamente asociada a los cambios de alguna magnitud detectable (una conversación puede tener lugar porque se perciben cambios incesantes en la frecuencia y amplitud de la onda sonora).

Una onda que empieza en cierto instante de tiempo y que acaba un cierto tiempo después recibe el nombre de *pulso*. Ahora bien, este pulso no puede estar formado por la superposición de ondas armónicas de *igual frecuencia* y distinta amplitud, puesto que, como se señaló en el Apartado 7.3, la superposición de ondas armónicas de la misma frecuencia es simplemente otra onda armónica de la misma frecuencia. El pulso puede, sin embargo, construirse sumando ondas armónicas de *distinta frecuencia* y, consecuentemente, de distinto número de ondas. En este sentido denominaremos **grupo de ondas** a un conjunto de ondas armónicas de distinta frecuencia que se propagan superpuestas en la misma dirección. Entre los distintos grupos de ondas existe uno de mucho interés práctico que se conoce como **paquete de ondas**. Un paquete de ondas está formado por la superposición de un conjunto *infinito* de ondas armónicas de amplitud y frecuencia variables con respecto al número de ondas,  $k$ , que se propagan superponiéndose a lo largo del eje  $x$ . Una de las componentes infinitesimales de este grupo de ondas puede representarse por

$$u_k(x, t) = A_k e^{-j[kx - \omega(k)t]} \quad (7.72)$$

Si conocemos cómo varía tanto la amplitud como la frecuencia con respecto al número de ondas, podríamos formar el paquete de ondas superponiendo de forma continua ondas del tipo (7.72), es decir,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(x, t) dk = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-j[kx - \omega(k)t]} dk. \quad (7.73)$$

A continuación analizaremos la forma del paquete de ondas en función de la naturaleza dispersiva o no dispersiva del medio en el que se propaga la onda. En general diremos que un **medio no dispersivo** es aquel para el que se cumple que la función  $\omega(k)$  es una función *lineal* del número de ondas:

$$\omega = vk, \quad (7.74)$$

Medio NO dispersivo:  $\omega = vk$

tal como se dedujo en (7.17) a partir de la ecuación de ondas no dispersiva. Para el medio no dispersivo, al introducir (7.74) en (7.73) encontramos que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-jk(x-vt)} dk, \quad (7.75)$$

esto es, la integral es una función exclusivamente de  $x - vt$ . En consecuencia podemos escribir que

$$u(x, t) = f(x - vt), \quad (7.76)$$

representando así a una perturbación que se propaga *sin distorsión*. Concluimos entonces que en los medios no dispersivos el paquete de ondas se propaga sin distorsión, lo cual es imprescindible en el proceso de transmisión de información para recibir la misma “información” que se envió.

Desafortunadamente, la mayoría de los medios son **medios dispersivos** donde se observa que

- Ondas armónicas de diferente longitud de onda se propagan con diferente velocidad, esto es,  $v = v(k)$ .
- La forma de la onda se distorsiona cuando se propaga.

Para medios dispersivos, la ecuación de ondas no viene dada por (7.2) sino que en general aparecerán también derivadas de otros órdenes con respecto a  $x$  y  $t$ . Dado que en estos medios, la velocidad con que se propagan las ondas armónicas depende de la longitud de onda, encontramos que la frecuencia y el número de ondas no estarán relacionados linealmente, sino que

$$\omega(k) = v(k)k. \quad (7.77)$$

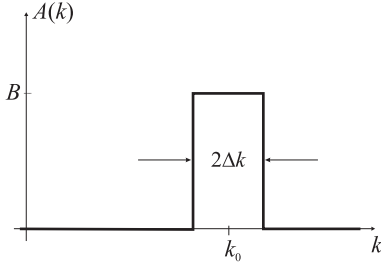
Medio dispersivo:  $\omega = v(k)k$

Una manera muy usual de reducir al máximo el inconveniente práctico de la deformación de la señal al transmitirse por un medio dispersivo consiste en la construcción de un tipo de paquete de ondas en el que la amplitud de las componentes armónicas de la onda muestre un máximo muy acusado en torno a cierto valor central  $k_0$  y decaiga rápidamente en un entorno  $\pm \Delta k$  respecto a  $k_0$ , siendo

$$\Delta k \ll k_0. \quad (7.78)$$

Así, si sumamos de forma continua ondas armónicas con un número de ondas  $k$  comprendido entre  $k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$ , el paquete de ondas resultante puede expresarse como la siguiente integral:

$$u(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{-j[kx - \omega(k)t]} dk, \quad (7.79)$$



Si, por ejemplo, suponemos que la dependencia de la amplitud con respecto al número de ondas viene dada por

$$A(k) = \begin{cases} B & \text{si } k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces el paquete de ondas puede obtenerse integrando la siguiente expresión:

$$u(x, t) = B \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{-j[kx - \omega(k)t]} dk. \quad (7.80)$$

Debido a que  $\Delta k \ll k_0$ ,  $\omega(k)$  puede desarrollarse en serie de Taylor en torno a  $k_0$  y quedarnos con el primer término:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0). \quad (7.81)$$

La validez de la aproximación anterior se deteriora si el medio es muy dispersivo o si aumentamos  $\Delta k$ . Definiendo en (7.81)

$$\omega_0 = \omega(k_0) \quad \text{y} \quad v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}, \quad (7.82)$$

$\omega(k)$  puede reescribirse como

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0)v_g, \quad (7.83)$$

lo que permite expresar

$$\begin{aligned} kx - \omega(k)t &= kx - \omega_0 t - (k - k_0)v_g t \\ &= (k_0 x - \omega_0 t) + (k - k_0)(x - v_g t). \end{aligned} \quad (7.84)$$

Introduciendo (7.84) en (7.80) y realizando el cambio de variable  $\alpha = k - k_0$ ,  $u(x, t)$  puede expresarse como

$$u(x, t) = B e^{-j(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{-j(x - v_g t)\alpha} d\alpha. \quad (7.85)$$

Al operar en la integral de (7.85) encontramos que

$$\int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{-j(x - v_g t)\alpha} d\alpha = \left. \frac{e^{-j(x - v_g t)\alpha}}{-j(x - v_g t)} \right|_{-\Delta k}^{\Delta k} = \frac{2 \operatorname{sen} [\Delta k (x - v_g t)]}{x - v_g t},$$

obteniéndose así la siguiente expresión para nuestro paquete de ondas:

$$u(x, t) = 2B \frac{\operatorname{sen} [\Delta k (x - v_g t)]}{x - v_g t} \cos(\omega_0 t - k_0 x). \quad (7.86)$$

Al analizar la forma matemática de la señal anterior, teniendo en cuenta que  $\Delta k \ll k_0$ , observamos que el paquete de ondas puede verse como



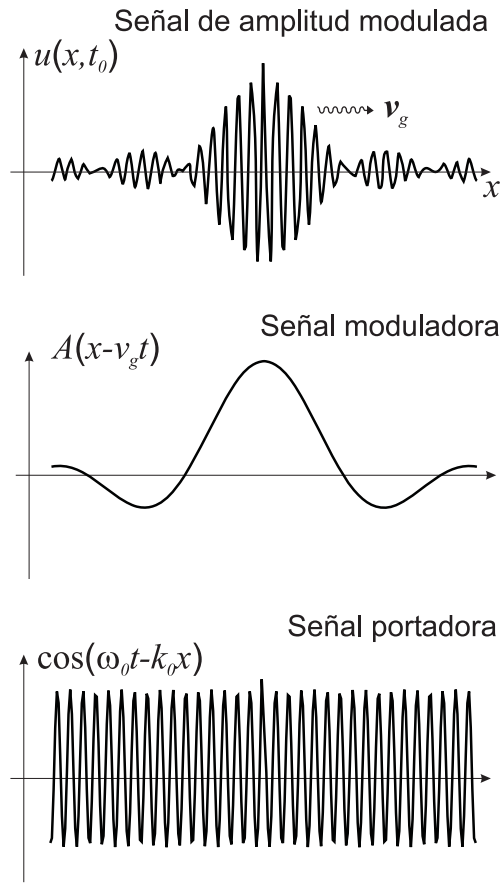


Figura 7.7: Detalle de la composición de un paquete de ondas consistente en una onda modulada en amplitud.

una **señal portadora** armónica de frecuencia  $\omega_0$  cuya *amplitud*,  $A(\cdot)$ , está *modulada* (ver Fig.7.7, esto es,

$$u(x, t) = A(x - v_g t) \cos(\omega_0 t - k_0 x) . \quad (7.87)$$

La señal resultante puede entonces considerarse como el producto de la señal portadora por una **señal moduladora**,

$$A(x - v_g t) = 2B \frac{\text{sen} [\Delta k (x - v_g t)]}{x - v_g t} , \quad (7.88)$$

que viaja *sin distorsión* apreciable a la velocidad  $v_g$  definida en (7.82). Dado que lo que se detectaría de la señal  $u(x, t)$  sería la variación en su amplitud, esto es:  $A(x - v_g t)$ , y ésta viaja a  $v_g$ , esta velocidad puede identificarse como la velocidad del grupo de ondas, por lo que se conoce como **velocidad de grupo**:

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} . \quad (7.89)$$

Velocidad de grupo

La discusión anterior nos permite observar que una posible manera de transmitir información consistiría en la **modulación** de una señal portadora de número de ondas  $k_0$  y frecuencia  $\omega_0$  por una señal moduladora

que contiene un rango de frecuencias espaciales  $\Delta k$  en el entorno de  $k_0$  y un rango de frecuencias temporales

$$\Delta\omega = \omega(k_0 + \Delta k) - \omega_0 \quad (7.90)$$

en torno a  $\omega_0$ . Notemos que si  $\omega(k)$  es una función suave respecto a  $k$ , entonces encontraremos que

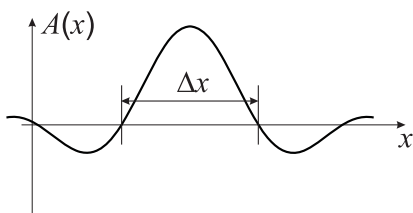
$$\Delta\omega \ll \omega_0 . \quad (7.91)$$

Al rango de frecuencias  $\Delta\omega$  se le denomina usualmente **ancho de banda** en frecuencia de la señal. Esta magnitud es muy importante en la práctica puesto que determina la “cantidad” de información que transmite una señal; por lo tanto, interesa aumentar el ancho de banda lo máximo posible. No obstante, según nos dice la expresión (7.91), para “soportar” señales moduladoras de gran ancho de banda es necesario que la frecuencia de la señal portadora sea bastante mayor que la de la señal moduladora. El interés en obtener señales portadoras con frecuencias lo más altas posibles (y que, consecuentemente, puedan “contener” más información) es precisamente la motivación principal para usar señales luminosas como ondas portadoras. Las señales luminosas tienen una frecuencia del orden de  $10^{15}$  Hz, por lo que permitirían ser moduladas por señales de muy alta frecuencia y con un gran contenido de información.

Es interesante resaltar que *en un medio dispersivo la velocidad de grupo no coincide con la velocidad de fase* ( $v_g \neq v$ ) sino que usando (7.82) y (7.77), la velocidad de grupo puede escribirse en función de la longitud de onda como

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} , \quad (7.92)$$

pudiendo ser esta velocidad de grupo mayor o menor que la velocidad de fase (en un medio no dispersivo  $v_g = v$ ). Si el medio es muy dispersivo, la envolvente del grupo de ondas se distorsionará apreciablemente al propagarse. Desde un punto de vista práctico, esta distorsión se puede reducir disminuyendo el ancho de banda de la señal moduladora.



Por último es interesante mencionar que la *anchura espacial* del grupo de ondas,  $\Delta x$ , se define como la distancia entre los dos primeros mínimos de amplitud para  $t = 0$  (si el medio no es muy dispersivo, un instante después, la amplitud habrá viajado una distancia  $v_g t$ , pero la distancia entre mínimos apenas habrá variado). Los dos primeros mínimos de amplitud ocurren, según (7.86), para  $x = \pm\pi/\Delta k$ , por lo que

$$\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

y consecuentemente se llega a la siguiente relación entre la anchura espacial,  $\Delta x$ , y el ancho de banda en  $k$ ,  $\Delta k$ :

$$\Delta x \Delta k = 2\pi . \quad (7.93)$$

## 7.9. Problemas propuestos

**7.1:** El rango de frecuencias de las ondas electromagnéticas utilizadas en emisoras comerciales (radio y TV) se extiende, aproximadamente, desde  $10^4$  Hz hasta  $10^9$  Hz. Si la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en vacío es  $c = 3 \times 10^8$  m/s, ¿cuál es el rango de longitudes de onda de las emisoras comerciales? Repítase el problema anterior para el rango de señales acústicas audibles que se extiende, aproximadamente, desde 20 Hz hasta 20 kHz, considerando que el sonido es una onda de presión que se propaga en el aire a una velocidad aproximada de 340 m/s.

**Sol.:** Ondas electromagnéticas comerciales:  $\lambda$  entre 30.000 m y 30 cm. Ondas sonoras audibles:  $\lambda$  entre 17 m y 17 mm.

**7.2:** Demuestre explícitamente que el pulso descrito por la función

$$y(x, t) = y_0 \exp \left[ - \left( \frac{x - vt}{x_0} \right)^2 \right]$$

es solución de la ecuación de onda.

**7.3:** El cable de un telesquí de 80 kg de masa asciende 400 m por la ladera de una montaña. Cuando el cable recibe un golpe transversal en un extremo, el pulso de retorno se detecta 12 segundos después. Calcular cuál es la velocidad de la onda y la tensión,  $T$ , en el cable. [Nota: la velocidad de la onda en la cuerda viene dada por  $v = \sqrt{\mu/T}$ , siendo  $\mu$  la densidad lineal de masa de la cuerda y  $T$  su tensión.]

**Sol.**  $v = 66,7$  m/s,  $T = 889$  N.

**7.4:** Dos pulsos de onda que se mueven sobre una cuerda están representados por las siguientes funciones de onda:

$$y_1(x, t) = \frac{0,02}{2 + (x - 2t)^2}$$

$$y_2(x, t) = \frac{-0,02}{2 + (x + 2t)^2},$$

donde  $x$  e  $y$  están en metros y  $t$  en segundos. **a)** Dibujar por separado cada onda en función de  $x$  para  $t = 0$  y describir el comportamiento de ambas al aumentar en el tiempo. **b)** Hallar la función de onda resultante para  $t = 0$  y  $t = 1$  s. **d)** Dibujar la función de onda resultante en este último caso.

**Sol.**  $y(x, 0) = 0$ ,  $y(x, 1) = \frac{0,16x}{36 - 4x^2 + x^4}$

**7.5:** Una onda armónica se mueve a lo largo de una cuerda uniforme e infinita bajo tensión constante. La cuerda está marcada a intervalos de 1 m. En la marca de 0 m, se observa que la cuerda alcanza su desplazamiento transversal máximo de 50 cm cada 5 s. La distancia entre máximos en un instante de tiempo cualquiera es 50 m. Encontrar la expresión de su función de onda, suponiendo que es armónica, que tiene su desplazamiento máximo en  $x = 0$  cuando  $t = 0$ , y que está moviendo a lo largo de la cuerda de izquierda a derecha.

**Sol.**  $y = 0,5 \cos(2\pi/50)(x - 10t)$  m.

**7.6:** La onda armónica en el hilo que se muestra en la figura tiene una amplitud de 25 mm, una velocidad de 46 m/s, una frecuencia angular de 160 rad/s y se propaga hacia  $+x$ . Determinar **a)** las componentes de velocidad; **b)** las componentes de aceleración de los elementos marcados por letras; **c)** la pendiente del hilo y **d)**  $\partial^2 y / \partial x^2$  en los elementos marcados por letras.

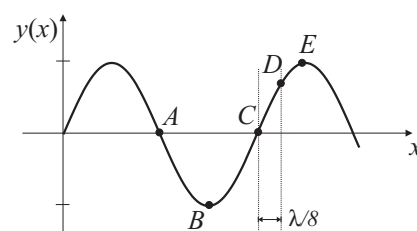
**Sol.:** **a)** 4,0, -4,  $-2\sqrt{2}$ , 0 (m/s); **b)** 0,640, 0,  $-320\sqrt{2}$ , -640 (m/s<sup>2</sup>); **c)** -87,0, 87,62, 0; **d)** 0,0, 3,0, -0,21, -0,3 m<sup>-1</sup>.

**7.7:** El desplazamiento transversal de una cuerda viene dado por una onda armónica de ecuación  $y(x, t) = 0,001 \sin(62,8x + 314t)$ , estando  $x$  e  $y$  expresadas en metros y  $t$  en segundos. **a)** ¿En qué sentido se desplaza la onda? **b)** Hallar la longitud de onda, frecuencia y periodo de la misma. **c)** ¿Cuál es el máximo desplazamiento de un segmento cualquiera de la cuerda?

**Sol.:** **a)** hacia las  $x$  negativas; **b)**  $\lambda = 0,1$  m,  $f = 50$  Hz,  $T = 0,02$  s; **c)** 1 mm.

**7.8:** Dos ondas de la misma amplitud ( $A = 46$  mm), frecuencia, velocidad y dirección de propagación, pero desfasadas entre sí, están presentes en un hilo, siendo la amplitud resultante 31 mm. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ambas ondas?

**Sol.:** 140°.



**7.9:** Hallar la onda resultante de la superposición de tres ondas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, que se mueven en la misma dirección y sentido y que vienen dadas por

$$\begin{aligned}y_1(x, t) &= 0,05 \sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{3}) \\y_2(x, t) &= 0,05 \sin(kx - \omega t) \\y_3(x, t) &= 0,05 \sin(kx - \omega t + \frac{\pi}{3}).\end{aligned}$$

**Sol.**  $y(x, t) = 1,5A \sin(kx - \omega t)$ .

**7.10:** Dos fuentes sonoras, accionadas en fase por el mismo amplificador están distantes 2m entre sí en el eje  $y$ . En un punto a distancia muy grande del eje, se oye una interferencia constructiva para el ángulo  $\theta_1 = 8^\circ$  y la siguiente se oye a  $\theta_1 = 16^\circ 10'$  respecto al eje  $x$ . Si la velocidad del sonido es de 340 m/s, **a)** ¿cuál es la longitud de onda de las ondas sonoras procedentes de las fuentes; **b)** ¿cuál es la frecuencia de las mismas?; **c)** ¿para qué otros ángulos se oye la interferencia constructiva?; **d)** ¿cuál es el ángulo más pequeño para el cual se contrarrestan entre sí por completo las ondas sonoras?

**Sol.:** **a)** 0.278 m ; **b)** 1.22 kHz ; **c)**  $24.7^\circ, 33.8^\circ, 44.1^\circ, 56.6^\circ, 77^\circ$  ; **d)**  $4^\circ$ .

**7.11:** Dos ondas armónicas planas,

$$\begin{aligned}y_1(x, t) &= A \cos(\omega t - kx + \phi_1) \\y_2(x, t) &= A \cos(\omega t + kx + \phi_2)\end{aligned}$$

interfieren dando lugar a una onda estacionaria. Determinése: **a)** la expresión de la onda estacionaria resultante; **b)** las posiciones de los planos nodales y ventrales en dos casos: **b.1)**  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  y **b.2)**  $\phi_1 = 0, \phi_2 = -\pi$ .

**Sol.:** **a)**  $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \cos[kx + (\phi_1 + \phi_2)/2] \cos[\omega t + (\phi_2 - \phi_1)/2]$ ;

**b.1)** nodos:  $x = (2n + 1)\lambda/4$ , vientres:  $x = n\lambda/2$  ( $n$  entero);

**b.2)** nodos:  $x = n\lambda/2$ , vientres:  $x = (2n + 1)\lambda/4$  ( $n$  entero).

**7.12:** En una columna de aire de longitud  $L = 2$  m, abierta en sus dos extremos, se propagan ondas sonoras del tipo

$$u(x, t) = C \cos(kx) \cos(\omega t)$$

(los extremos de la columna representan vientres para la onda sonora). Sabiendo que la frecuencia de su  $n$ -ésima armónica es 410 Hz y la frecuencia de su  $(n + 1)$  armónica es 492 Hz, determínese la velocidad del sonido en el aire bajo estas condiciones.

**Sol.:**  $v = 328$  m/s.

**7.13:** Dos focos  $S_1$  y  $S_2$  emiten ondas esféricas de igual frecuencia:

$$\begin{aligned}y_1(r_1, t) &= (A_1/r_1) \cos(\omega t - kr_1) \\y_2(r_2, t) &= (A_2/r_2) \cos(\omega t - kr_2)\end{aligned}$$

respectivamente, donde  $r_1$  y  $r_2$  indican la distancia desde el punto considerado hasta los focos  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente. Calcúlese: **a)** la amplitud de la señal resultante en cada punto; **b)** los puntos en los cuales la amplitud resultante es máxima y en los que es mínima (expresese el resultado en términos de la distancia de los puntos a los focos y de la longitud de onda).

**Sol. a)**  $A(r_1, r_2) = \{(A_1/r_1)^2 + (A_2/r_2)^2 + 2A_1A_2 \cos[k(r_1 - r_2)]/(r_1r_2)\}^{1/2}$ ; **b)** puntos de amplitud máxima:  $r_1 - r_2 = n\lambda$ , puntos de amplitud mínima:  $r_1 - r_2 = (2n + 1)\lambda/2$ .

**7.14:** Un haz de luz monocromático que puede asimilarse a una onda plana que incide sobre una rendija larga de anchura  $a$  perpendicular a su dirección de propagación. **a)** Obtener la expresión para la anchura del máximo central de difracción en función de la longitud de onda y de la distancia,  $D$ , de la pantalla de detección a la rendija. **b)** Utilizar el resultado anterior para encontrar la anchura del máximo central cuando la luz de una lámpara de sodio ( $\lambda = 590$  nm) es difractada por una rendija de anchura 0.3 mm, siendo la distancia de la pantalla a la rendija de 0.87 m.

**Sol.:** **a)** Anchura  $= 2\lambda D / \sqrt{a^2 - \lambda^2}$ . **b)** 3.4 mm.

**7.15:** Dos ondas armónicas planas que se propagan en igual sentido interfieren dando lugar a una onda plana que también se propaga en dicho sentido. Si las ecuaciones de dichas ondas son

$$\begin{aligned}y_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t + \phi_1) \\y_2(x, t) &= A \sin(kx - \omega t + \phi_2),\end{aligned}$$

obtégase la ecuación de la onda resultante de la interferencia, indicando en qué casos la amplitud resultante es máxima y en cuáles es mínima.

**Sol.:**  $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \cos(\Delta\phi/2) \sin[kx - \omega t + (\phi_1 + \phi_2)/2]$ , siendo  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ ; Amplitud máxima:  $\Delta\phi = 2n\pi$ , mínima:  $\Delta\phi = (2n + 1)\pi$ .

**7.16:** Dadas dos ondas sonoras armónicas de *distinta* frecuencia:

$$u_1(x, t) = A \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k)x]$$

$$u_2(x, t) = A \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)x] ,$$

**a)** obtenga la expresión de la superposición de dichas ondas. **b)** Si  $\Delta k \ll k_0$  y  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , represente gráficamente la onda. Si las ondas se propagan en un medio dispersivo determinado por  $\omega(k) = v_m \sqrt{k^2 - k_c^2}$ , siendo  $v_m = 200$  m/s,  $\omega_0 = 2\pi \times 10^4$  rad/s,  $\Delta\omega = 200\pi$  Hz y  $k_c = 100$  m<sup>-1</sup>, **c)** calcule los valores de la velocidad de fase,  $v_f$ , y velocidad de grupo,  $v_g = (d\omega/dk)_{k=k_0}$ , de la onda superposición.

**Sol.:** **a)**  $u(x, t) = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cos(\omega_0 t - k_0 x)$ ; **c)**  $v_f \approx 190,6$  m/s,  $v_g \approx 209,9$  m/s.

**7.17:** Un LED típico que opera a una  $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$  y presenta una anchura de línea  $\Delta\lambda = 100$  nm ilumina una fibra óptica "ideal". Calcule: **a)** el ancho de banda en frecuencia,  $\Delta f$ , correspondiente a la anterior anchura de línea; **b)** ¿cuántos canales de vídeo podrían transmitirse por esta fibra si cada canal de video ocupa 10 MHz?; **c)** ¿cuántos canales de audio separados cada 10 kHz podrían transmitirse?

**Sol. a)**  $\Delta f \approx 1,8 \times 10^7$  MHz; **b)**  $\sim 2 \times 10^6$  canales de vídeo; **a)**  $\sim 2 \times 10^9$  canales de audio.



## Tema 8

# Ondas Electromagnéticas

---

### 8.1. Introducción

En el tema anterior se ha discutido que una característica fundamental de una onda es que es capaz de transmitir una energía (junto con su correspondiente momento lineal/angular) sin que ello implique un transporte neto de materia. Usualmente, las ondas consisten en la propagación de alguna perturbación física a través de algún *medio material*, por ejemplo: olas en el agua, variaciones de presión en el aire (sonido), etc. No obstante, existe un tipo de fenómeno ondulatorio que no requiere la presencia de medios materiales para su propagación (esto es, la perturbación se puede propagar en el vacío o espacio libre) aunque ciertamente también puede propagarse en presencia de medios materiales. Estas ondas son las **ondas electromagnéticas**, que consisten en la transmisión de campos eléctricos y magnéticos a una velocidad  $v \leq c$ ; siendo  $c$  la velocidad de propagación en el vacío:  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s. El origen de estas ondas se esbozó al final del Capítulo 5 como una posible consecuencia sorprendente derivada de las ecuaciones de Maxwell en el vacío. La combinación de las ecuaciones (5.8) y (5.21) implicaba que, según la ley de Faraday-Maxwell, un campo magnético variable en el tiempo,  $\vec{B}_1(x, t)$ , podía ser la fuente de un campo eléctrico variable en el tiempo,  $\vec{E}_1(x, t)$ , y éste a su vez, según la ley de Ampère-Maxwell, podía ser la fuente de un campo magnético variable en el tiempo,  $\vec{B}_2(x, t)$ , y así sucesivamente:

$$\vec{B}_1(x, t) \Rightarrow \vec{E}_1(x, t) \Rightarrow \vec{B}_2(x, t) \Rightarrow \vec{E}_2(x, t) \Rightarrow \vec{B}_3(x, t) \Rightarrow \dots$$

De este modo, los campos eléctrico y magnético se generan mutuamente dando lugar a una onda electromagnética que se propaga en el espacio libre a una velocidad  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3 \times 10^8$  m/s. (Evidentemente si el campo *primario* fuese uno eléctrico, en vez de uno magnético, también se produciría una onda electromagnética). Esta hipótesis teórica deducida por Maxwell fue confirmada experimentalmente por H. Hertz en 1888. Adicionalmente, el hecho de que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas fuese justamente la velocidad medida experimentalmente para la propagación de la luz fue el primer indicio claro de que la luz era simplemente una onda electromagnética.

Las ondas electromagnéticas, además de constituir uno de los fenómenos físicos más predominantes en la naturaleza, tienen una importancia fundamental en el campo de las comunicaciones. Podría decirse que la mayoría de las comunicaciones actuales se sustentan en la transmisión de ondas electromagnéticas, ya sea a través del espacio libre: radio, televisión, teléfonos móviles, satélites,... o bien a través de medios materiales: telefonía convencional, televisión por cable, transmisión por fibra óptica, redes locales de ordenadores, etc. Existen muchas razones para justificar este extendido uso pero, entre otras, cabe destacar:

- la posibilidad de que las ondas electromagnéticas se propaguen en el vacío;
- el desarrollo de antenas (emisoras y receptoras) que permiten la transmisión y recepción de estas ondas involucrando muy poca energía;
- la posibilidad de “guiar” estas ondas mediante diversos sistemas de guiado: línea bifilar, cable coaxial, guías de ondas metálicas, fibras ópticas, etc;
- el hecho de poder usar señales portadores de muy alta frecuencia que permiten grandes anchos de banda;
- la facilidad de tratamiento de las señales electromagnéticas, por ejemplo su modulación/demodulación en fase, amplitud o frecuencia, que permite usar estas señales como soporte de información tanto analógica como digital; y
- la fácil integración de los equipos de generación/recepción con la circuitería electrónica.

## 8.2. Ecuación de Ondas

Según se discutió en el Apartado 7.2, la expresión matemática de cualquier magnitud física que represente a una onda debe satisfacer la ecuación de ondas (7.2). En este sentido, aparte de la idea cualitativa obtenida de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, en concreto de

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.1)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (8.2)$$

acerca de que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variaciones temporales} \\ \text{del campo eléctrico } \vec{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Variaciones temporales} \\ \text{del campo magnético } \vec{B} \end{array} \right\},$$

es fundamental verificar si los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en el vacío satisfacen la ecuación de ondas para verificar así que efectivamente estos campos son ondas. Por simplicidad, supondremos campos eléctricos/magnéticos del tipo

$$\vec{E} = \vec{E}(x, t) \quad ; \quad \vec{B} = \vec{B}(x, t), \quad (8.3)$$



es decir, campos variables en el tiempo cuya dependencia espacial es únicamente a lo largo de la dirección  $x$ . Si estos campos representaran a una onda electromagnética, ésta sería una **onda electromagnética plana**, dado que la perturbación física (campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ ) tomaría los mismos valores en los planos definidos por  $x = \text{Cte}$ ; es decir, su frente de ondas serían planos normales al eje  $x$ . Para obtener la ecuación diferencial que relaciona las derivadas espaciales y temporales de los campos, aplicaremos la ecuación (8.1) al contorno rectangular,  $\Gamma_{xy}$ , mostrado en la Fig. 8.1. Dado

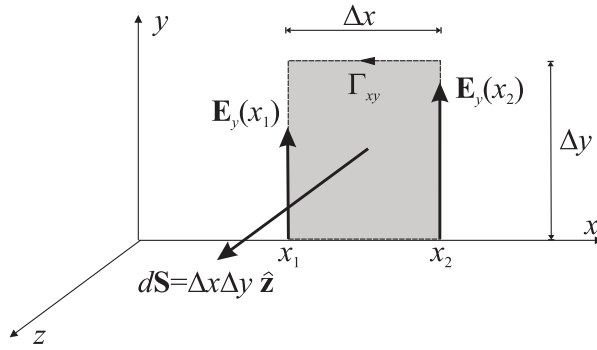
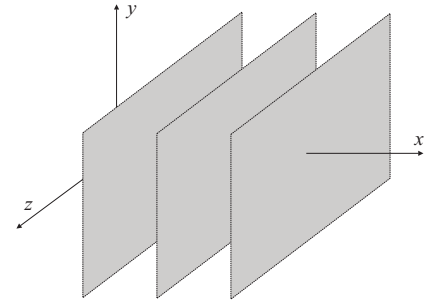


Figura 8.1:

que el camino de integración está situado en el plano  $xy$  obtendremos la siguiente expresión para la circulación de la componente  $y$  del campo eléctrico:

$$\oint_{\Gamma_{xy}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = [E_y(x_2) - E_y(x_1)] \Delta y, \quad (8.4)$$

donde  $E_y(x_2)$  y  $E_y(x_1)$  son los valores de la componente  $y$  del campo eléctrico en los puntos  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. No aparecen contribuciones del tipo  $E_x \Delta x$  pues éstas se anulan mutuamente en los tramos superior e inferior de  $\Gamma_{xy}$ . Suponiendo que  $\Delta x$  es muy pequeño, podemos realizar la siguiente aproximación:

$$E_y(x_2) - E_y(x_1) = \Delta E_y(x) \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x,$$

por lo que

$$\oint_{\Gamma_{xy}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (8.5)$$

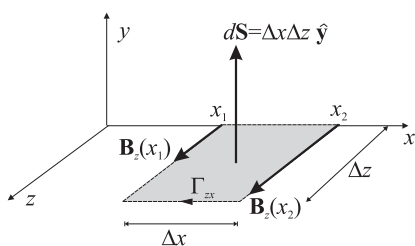
Para calcular el segundo miembro de (8.1), hemos de tener en cuenta que  $d\vec{S} = dS_z \hat{z}$  y por tanto el flujo del campo magnético a través del contorno rectangular será

$$-\int_{S(\Gamma_{xy})} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\int_{S(\Gamma_{xy})} \frac{\partial B_z}{\partial t} dS_z \approx -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y. \quad (8.6)$$

Igualando ahora (8.5) con (8.6), obtenemos la siguiente relación diferencial entre  $E_y$  y  $B_z$ :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (8.7)$$

esto es, si existe una componente de campo eléctrico dirigido según  $y$  que varía espacialmente en  $x$ , entonces existirá un campo magnético dirigido según  $z$  que varía temporalmente (o viceversa). Podemos obtener otra relación diferencial entre  $E_y$  y  $B_z$  aplicando la ecuación (8.2) a un contorno



rectangular,  $\Gamma_{zx}$ , situado en el plano  $xz$ . Procediendo de forma análoga a la anterior, obtendríamos la siguiente relación:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} . \quad (8.8)$$

Si derivamos con respecto a  $x$  ambos miembros de la ecuación (8.7) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) ,$$

que puede reescribirse, tras intercambiar el orden de las derivadas en el segundo miembro, como

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) , \quad (8.9)$$

Sustituyendo ahora en (8.9) el valor de  $\partial B_z / \partial x$  según (8.8) encontramos que

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) ,$$

lo que nos permite escribir la siguiente ecuación diferencial para  $E_y$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} , \quad (8.10)$$

que claramente es una *ecuación de ondas*. Procediendo de forma análoga, derivando con respecto a  $x$  (8.8) y haciendo la sustitución adecuada, se obtiene una ecuación de ondas similar para  $B_z$ :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} . \quad (8.11)$$

A la vista de las ecuaciones de onda (8.10) y (8.11) puede parecer que los campos  $E_y$  y  $B_z$  son independientes. No obstante, debe notarse que estas ecuaciones de onda provienen de las ecuaciones (8.7) y (8.8) en las que se observa claramente que ambos campos están relacionados entre sí; esto es, uno de ellos determina completamente al otro. En este sentido, puede afirmarse que *los campos eléctrico y magnético de una onda son simplemente dos manifestaciones distintas de un único ente físico: la onda electromagnética*.

Es fácil comprobar que aplicando la ecuación (8.1) al contorno  $\Gamma_{zx}$  y la ecuación (8.2) al contorno  $\Gamma_{xz}$ , tras realizar las sustituciones oportunas, obtendríamos unas ecuaciones de onda análogas a las anteriores para las componentes  $E_z$  y  $B_y$ . Dado que se ha supuesto que los campos sólo dependen espacialmente de la coordenada  $x$ , la aplicación de las ecuaciones (8.1) y (8.2) a un contorno situado en el plano  $yz$  nos daría circulaciones nulas y, por tanto, no obtendríamos ninguna relación diferencial para las componentes  $E_x$  y  $B_x$ .

En consecuencia podemos concluir que efectivamente se satisfacen las siguientes ecuaciones de onda monodimensionales para los campos eléctrico,  $\vec{E} = (0, E_y(x, t), E_z(x, t))$ , y magnético,  $\vec{B} = (0, B_y(x, t), B_z(x, t))$ :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.12)$$

Ecuaciones de onda monodimensionales para los campos eléctrico y magnético

y

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.13)$$

La solución de estas ecuaciones de onda son precisamente ondas electromagnéticas planas que se propagan en la dirección  $x$  a velocidad  $c$  y cuyos campos asociados tienen direcciones normales a la dirección de propagación. En consecuencia puede establecerse que

*las ondas electromagnéticas planas en el vacío son ondas transversales.*

El término  $1/c^2$  de la ecuación (7.2) puede identificarse en las ecuaciones (8.12) y (8.13) con  $\mu_0 \epsilon_0$ , esto es, el campo eléctrico y el magnético se propagan conjuntamente a una velocidad  $c$  cuyo valor viene dado por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (8.14)$$

Al sustituir los valores numéricos de  $\mu_0$  y de  $\epsilon_0$  en la expresión anterior se obtiene que

$$c = 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Dado que la velocidad a la que se propaga el campo electromagnético en el vacío (obtenida de forma teórica mediante manipulaciones en las ecuaciones de Maxwell) era muy próxima a la velocidad medida experimentalmente para la luz, esta sorprendente coincidencia sugería que la luz era una onda electromagnética. Debe notarse que en el momento en que se dedujo teóricamente la velocidad de propagación del campo electromagnético, se admitía que la luz era una onda pero se discutía sobre la *naturaleza* de esta onda<sup>1</sup>.

### 8.3. Ondas planas armónicas

Ya se indicó en el Apartado 7.3 que una solución particularmente importante de la ecuación de ondas era la solución armónica. Para el caso de ondas electromagnéticas planas, un campo eléctrico  $\vec{E}(x, t)$  de tipo *armónico* que satisfaga la ecuación de ondas (8.12) puede ser descrito por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{y} \quad (8.15)$$

<sup>1</sup>Se postulaba, por ejemplo, que la luz, en analogía con las ondas mecánicas, era una vibración de las partículas de un medio que “impregnaba” todo el universo denominado *éter*.

El campo magnético asociado a este campo eléctrico armónico en la onda electromagnética puede calcularse a partir de (8.7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ &= -kE_0 \sin(\omega t - kx) .\end{aligned}\quad (8.16)$$

Resolviendo ahora la anterior ecuación diferencial se tiene que

$$B_z(x, t) = -\int kE_0 \sin(\omega t - kx) dt = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx) , \quad (8.17)$$

esto es, el campo magnético vendrá dado por

$$\vec{B}(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \hat{z} , \quad (8.18)$$

donde, como  $\omega = kc$ , la relación entre las amplitudes del campo eléctrico y magnético es

$$B_0 = \frac{E_0}{c} . \quad (8.19)$$

A la vista de la forma de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  dados en (8.15) y (8.18) podemos establecer para la *onda electromagnética plana armónica* mostrada en la Fig.8.2 que

- los campos eléctrico y magnético están en fase; y
- $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{c}$  (siendo  $\vec{c}$  el vector velocidad de la onda; en el presente caso  $\vec{c} = c\hat{x}$ ) forman un triedro rectángulo, es decir, cada uno de estos vectores es perpendicular a los otros dos.

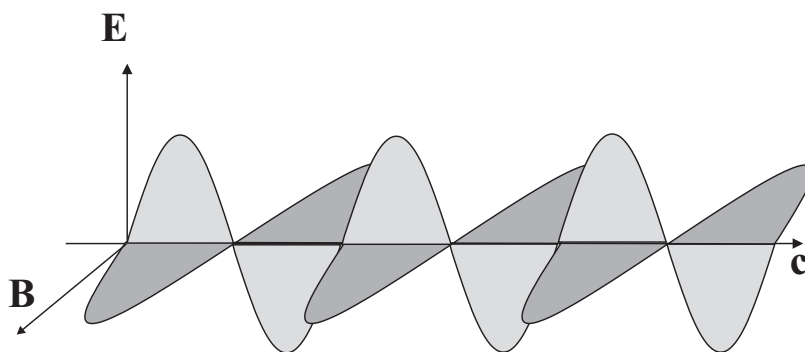


Figura 8.2:

Las dos anteriores conclusiones junto con la relación (8.19) pueden ser expresadas matemáticamente mediante la siguiente relación vectorial que cumplen los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana armónica:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c} . \quad (8.20)$$

**Ejemplo 8.1** Una onda electromagnética plana armónica de frecuencia  $f = 3$  GHz viaja en el espacio libre en la dirección  $x$ . El valor máximo del campo eléctrico es de 300 mV/m y está dirigido según el eje  $y$ . Calcular la longitud de onda de esta onda así como las

expresiones temporales de sus campos eléctrico y magnético.

Dado que  $f = 3$  GHz, la longitud de onda asociada a esta frecuencia será

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} = 10 \text{ cm}.$$

Asimismo, el número de ondas,  $k$ , y la frecuencia angular,  $\omega$ , de esta onda serán

$$\omega = 2\pi f = 6\pi \text{ GHz} \quad \text{y} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{6\pi \times 10^9}{3 \times 10^8} = 20\pi \text{ m}^{-1}.$$

Si el campo eléctrico,  $\vec{E}$ , de la onda plana armónica que viaja según  $x$  está dirigido según  $y$ , este campo vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y},$$

donde  $E_0$  representa la amplitud del campo que coincide con el valor máximo de éste, luego  $E_0 = 0,3$  V/m. Según se ha visto en el presente apartado, la expresión correspondiente para el campo magnético de esta onda será entonces

$$\vec{B}(x, t) = B_0 \cos(kx - \omega t) \hat{z},$$

siendo, según la expresión (8.19):

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3 \times 10^{-1}}{3 \times 10^8} = 10^{-9} \text{ T}.$$

Finalmente, las expresiones temporales de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  de esta onda electromagnética serán

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= 0,3 \cos(20\pi x - 6\pi \times 10^9 t) \hat{y} \text{ V/m} \\ \vec{B}(x, t) &= 10^{-9} \cos(20\pi x - 6\pi \times 10^9 t) \hat{z} \text{ T}. \end{aligned}$$

## 8.4. Intensidad de la onda electromagnética

Una de las propiedades más significativas de la onda electromagnética es que transporta energía. Así, la onda electromagnética que transporta la luz de una estrella, que ha viajado durante muchos millones de km antes de llegar a la Tierra, tiene todavía suficiente energía como para hacer reaccionar a los receptores de nuestros ojos. Según se vio en el Apartado 7.4, la magnitud relevante para caracterizar el contenido energético de una onda era su *intensidad*. En ese mismo apartado se definió la intensidad instantánea,  $I_{\text{inst}}$ , de una onda como la energía que fluye por unidad de tiempo a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Según la expresión (7.24), para calcular la intensidad de la onda electromagnética debemos obtener en primer lugar la densidad volumétrica de energía asociada con esta onda. La energía del campo eléctrico y del magnético ya se discutió en los Capítulos 1 y 4 donde se obtuvieron las expresiones (1.78) y (4.53) respectivamente. Concretamente se obtuvo que

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{densidad de energía eléctrica} \quad (8.21)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{densidad de energía magnética}, \quad (8.22)$$

por lo que la intensidad instantánea de la onda electromagnética vendrá dada por

$$I_{\text{inst}} = (u_E + u_B)c . \quad (8.23)$$

Para ondas planas armónicas, encontramos que la relación entre los módulos de los campos eléctrico y magnético de la onda electromagnética verificaban que  $E = cB$ . Esto nos permite escribir la densidad volumétrica de energía almacenada en el campo magnético como

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 , \quad (8.24)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$ . Hemos obtenido, por tanto, que para una onda plana electromagnética armónica, la densidad de energía almacenada en el campo magnético es idéntica a la almacenada en el campo eléctrico, esto es,

$$u_E = u_B . \quad (8.25)$$

La anterior igualdad nos permite escribir las siguientes expresiones para la densidad de energía de la onda electromagnética,  $u_{EB}$ :

$$u_{EB} = u_E + u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c} , \quad (8.26)$$

y, consecuentemente, podemos expresar la intensidad instantánea de dicha onda como

$$I_{\text{inst}} = u_{EB}c = c\epsilon_0 E^2 = c\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} . \quad (8.27)$$

En el espacio libre, la energía de la onda plana armónica viaja en la dirección de propagación de la onda, esto es, en una dirección perpendicular tanto a  $\vec{E}$  como  $\vec{B}$ . Por otra parte, para este tipo de ondas, la intensidad de la onda se puede expresar, según (8.27), en función de los módulos de los campos eléctrico y magnético de la onda. Todo ello nos sugiere la introducción de un vector  $\vec{S}$ , denominado **vector de Poynting**, que caracterice energéticamente a la onda electromagnética y que, por tanto, tenga por dirección la dirección de propagación de la energía y por módulo la intensidad instantánea de la onda electromagnética. A la vista de las expresiones anteriores, para una onda electromagnética plana armónica, este vector vendría dado por el siguiente producto vectorial:

Vector de Poynting

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} . \quad (8.28)$$

Aunque la expresión anterior del vector de Poynting se ha obtenido para el caso concreto de una onda plana armónica, cálculos más elaborados muestran que la expresión (8.28) tiene validez general para cualquier tipo de onda electromagnética en el espacio libre.

Para la onda plana armónica discutida en el apartado anterior, el vector de Poynting vendrá dado por

$$\vec{S}(x, t) = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \hat{x} = cu_{EB} \hat{x} , \quad (8.29)$$

por lo que la intensidad instantánea de esta onda será

$$I_{\text{inst}}(x, t) = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) . \quad (8.30)$$

Intensidad  
onda elect

Igualdad de las densidades de  
energía eléctrica y magnética en  
una onda electromagnética plana  
armónica

Tal y como se comentó en el Apartado 6.6, los valores instantáneos de magnitudes energéticas *armónicas* no tienen mucho interés práctico dado que usualmente estas magnitudes pueden variar muy rápidamente (del orden de  $10^{15}$  veces en un segundo para la luz). Es, por tanto, más significativo obtener el promedio de la intensidad,  $I_{\text{med}}$ , en un periodo de tiempo, para lo cual debemos promediar temporalmente (8.30):

$$\begin{aligned} I_{\text{med}} &= \langle I_{\text{inst}}(x, t) \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kx) dt \\ &= \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Intensidad promedio de una onda electromagnética armónica

**Ejemplo 8.2** Sabiendo que la amplitud del campo eléctrico de la radiación solar que llega a la superficie terrestre es de aproximadamente  $E_0 = 850 \text{ V/m}$ , calcule la potencia total que incidiría sobre una azotea de  $100 \text{ m}^2$ .

Para calcular la potencia promedio que incide en una superficie  $S$  debemos primero obtener el valor de la intensidad promedio,  $I_{\text{med}}$ , de la onda. En este caso dado que conocemos el valor de la amplitud del campo eléctrico, esta intensidad vendrá dada por

$$I_{\text{med}} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 = \frac{3 \times 10^8 \cdot 8,85 \times 10^{-12}}{2} (850)^2 \approx 959 \text{ W/m}^2.$$

Una vez calculada la intensidad promedio, la potencia promedio,  $P_{\text{med}}$ , que incide sobre la superficie será simplemente

$$P_{\text{med}} = I_{\text{med}} S = 959 \cdot 100 \approx 9,6 \times 10^4 \text{ W}.$$

Aunque esta potencia es realmente alta, debe tenerse en cuenta que está distribuida en una área grande y que su aprovechamiento total es imposible. De hecho con placas solares típicas se podría transformar en potencia eléctrica aproximadamente el 10% de la radiación solar, debiéndose tener en cuenta además que los datos dados en el problema se refieren a las horas de iluminación de días soleados.

## 8.5. Espectro electromagnético

Uno de los aspectos más interesantes de las ondas electromagnéticas es que distintos fenómenos ondulatorios aparentemente inconexos como la luz, las ondas de radio, las microondas, los rayos X, los rayos gamma, etc son todos ellos ondas electromagnéticas diferenciándose simplemente por su distinta frecuencia y longitud de onda. Todos los fenómenos anteriores son básicamente campos eléctricos y magnéticos oscilantes a determinada frecuencia. En el espacio libre, la relación entre la frecuencia  $f$  y la longitud de onda  $\lambda$  viene dada por

$$\lambda = \frac{c}{f}. \quad (8.32)$$

El conjunto de todas las radiaciones electromagnéticas se conoce **espectro electromagnético**, distinguiéndose en él las distintas denominaciones que toman las ondas electromagnéticas en función de la frecuencia, tal como se muestra en la Fig. 8.3.

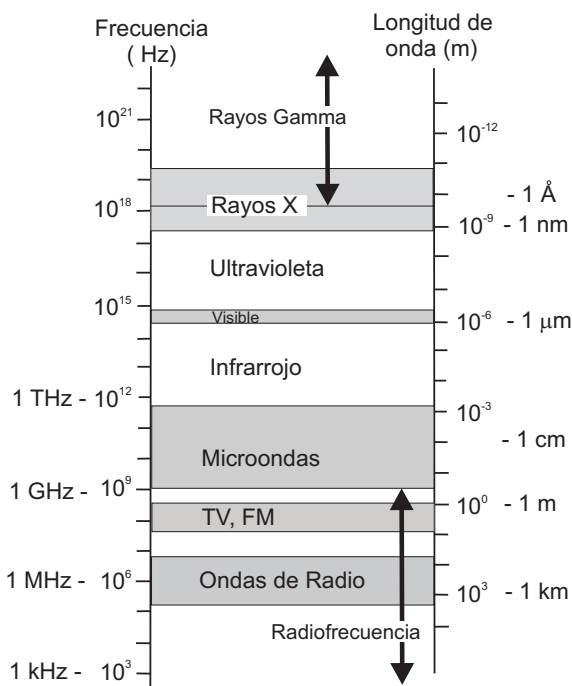


Figura 8.3: Espectro electromagnético

En el Capítulo 7 hemos visto cómo la longitud de onda y la frecuencia determinan fundamentalmente las propiedades de la onda. En este sentido se vio en el Apartado 7.7 que los fenómenos de difracción dependían básicamente de la relación entre la longitud de onda y el tamaño físico de los objetos donde se producía la difracción. Esto justificaba que los efectos de difracción de la luz sean apenas perceptibles debido a la corta longitud de onda de la luz visible ( $400 \lesssim \lambda(\text{nm}) \lesssim 700$ ) y que, por tanto, la luz pueda ser considerada en muchas situaciones prácticas como un rayo. La misma explicación sirve para entender por qué grandes obstáculos como edificios o montes no afectan drásticamente a la propagación de ondas de radio largas ( $10^7 \lesssim \lambda(\text{m}) \lesssim 10^2$ ). La interacción de la onda electromagnética con la materia también depende básicamente de la longitud de la onda y así, la pequeña longitud de onda de los rayos X ( $10^{-12} \lesssim \lambda(\text{m}) \lesssim 10^{-8}$ ) es la que explica por qué estos rayos pueden atravesar fácilmente muchos materiales que son opacos para radiaciones de mayor longitud de onda. Igualmente, al coincidir la longitud de onda de las ondas generadas en los hornos de microondas ( $\lambda \sim 15\text{cm}$ ) con el espectro de absorción de las moléculas de agua se explica que esta radiación sea absorbida por las moléculas de agua que contienen los alimentos y, consecuentemente, se calienten.



## 8.6. Fuentes de las Ondas Electromagnéticas

Hasta ahora hemos estado estudiando algunas de las características de las ondas electromagnéticas pero todavía no sabemos dónde y cómo se originan estas ondas. Dado que las ondas electromagnéticas son simplemente campos eléctricos y magnéticos oscilantes y las fuentes de estos campos son las cargas eléctricas estáticas y/o en movimiento, es razonable suponer que estas cargas serán las fuentes de las ondas electromagnéticas. No obstante, debemos notar que estamos hablando de las fuentes de los campos “primarios” puesto que, como se ha discutido anteriormente, una vez que se han generado estos campos primarios, son precisamente los propios campos los responsables de la generación de los subsiguientes campos. Ahora bien, para que los campos primarios generen otros campos, éstos debían ser campos variables en el tiempo por lo que *ni cargas estáticas ni las cargas en movimiento uniforme de una corriente estacionaria puede producir ondas electromagnéticas*<sup>2</sup>. Consecuentemente las cargas eléctricas aceleradas (único estado de movimiento no considerado hasta ahora) sí que originen estos campos primarios y, por tanto, podemos concluir que

*las cargas eléctricas aceleradas son fuentes de las ondas electromagnéticas.*

Cargas eléctricas oscilando a una determinada frecuencia  $\omega$  serán los focos de ondas electromagnéticas de esa misma frecuencia y con una longitud de onda en el espacio libre dada por:  $\lambda = 2\pi c/\omega$ .

Normalmente la oscilación de una única carga produce una onda cuya intensidad es prácticamente indetectable, por ello las ondas electromagnéticas suelen originarse en la práctica cuando un número importante de cargas están oscilando conjuntamente. Este hecho se produce, por ejemplo, en las **antenas**, que no son, en su forma básica, más que dos varillas conductoras alimentadas mediante un generador de corriente alterna. El generador de corriente alterna provoca que los electrones de las varillas conductoras viajen desde un extremo a otro de las varillas realizando un movimiento oscilatorio que viene determinado por la frecuencia del generador. Este tipo de antenas es el comúnmente usado para generar ondas de radio y TV ( $\text{MHz} \lesssim f \lesssim \text{GHz}$ ). Las ondas de la luz visible que oscilan a una  $f \sim 10^{15} \text{Hz}$  son originadas por el movimiento oscilatorio de las cargas atómicas y las radiaciones de mayor frecuencia por rápidas oscilaciones electrónicas y nucleares.

El mismo mecanismo que justifica que los electrones en movimiento en un conductor originan ondas electromagnéticas, esto es, forman una *antena emisora*, también explica por qué este mismo dispositivo (sin el generador) sería una *antena receptora*. Los campos eléctricos que llegan a la antena ejercen una fuerza sobre las cargas móviles del conductor (electrones) que las hacen oscilar a la misma frecuencia que la onda electromagnética incidente. Claramente, el movimiento de estas cargas, que simplemente sigue el patrón de la radiación incidente, produce una co-



<sup>2</sup>Recordemos que las cargas estáticas son las fuentes de campos eléctricos estáticos y las cargas en movimiento uniforme en un conductor (esto es, las corrientes eléctricas continuas) son las fuentes de los campos magnéticos estáticos.

riente eléctrica oscilante que puede ser detectada por algún dispositivo adecuado. De esta manera el patrón de variación temporal que se produjo en el generador de la antena emisora es ahora “recogido” en el detector de la antena receptora. (Los electrones de la antena receptora se mueven tal como lo hacían los electrones de la antena emisora, sólo que cierto intervalo de tiempo después; justamente el necesario para que la onda recorra la distancia entre las dos antenas). De esta manera se ha transmitido información desde un sitio a otro del espacio usando como intermediario a la onda electromagnética. Esta manera de transmitir información es muy eficaz ya que pone en juego muy poca energía y permite transmitir información entre puntos muy lejanos entre sí (incluyendo comunicaciones con satélites y vehículos espaciales).

## 8.7. Problemas propuestos

**8.1:** Demostrar por sustitución directa que la siguiente expresión:

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) = E_0 \sin k(x - ct),$$

donde  $c = \omega/k$ , satisface la ecuación (8.10).

**8.2:** Hallar la longitud de onda de **a)** una onda de radio de AM típica con una frecuencia de 100 kHz; **b)** una onda de radio de FM típica de 100 MHz; **c)** la frecuencia de una microonda de 3 cm y **d)** la frecuencia de unos rayos X con una longitud de onda de 0,1 nm.

**Sol. a)**  $\lambda = 300$  m ; **b)**  $\lambda = 300$  m ; **c)**  $f = 10$  GHz; **d)**  $f = 3 \times 10^{18}$  Hz. ;

**8.3:** Una onda electromagnética (OEM) plana se propaga en el vacío. Sabiendo que su frecuencia es de 98.4 MHz y su amplitud de campo eléctrico es de 20 mV/m, calcúlese: **a)** la amplitud del campo magnético; **b)** la intensidad de onda (potencia media por unidad de área).

**Sol.: a)**  $B_0 = 0,66 \times 10^{-10}$  T; **b)**  $I = 0,53 \mu\text{W/m}^2$ .

**8.4:** Una OEM plana se propaga a lo largo del eje  $X$  con una longitud de onda de 3 cm, transportando una potencia media por unidad de área de  $6 \mu\text{W/m}^2$ . Determinense las expresiones completas de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  sabiendo que el campo eléctrico está dirigido según el eje  $Y$ .

**Sol.:**  $\vec{E}(x, t) = 67,26 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^{10}t - 200\pi x/3 + \phi) \hat{y}$  V/m,  
 $\vec{B}(x, t) = 22,42 \times 10^{-11} \cos(2\pi \times 10^{10}t - 200\pi x/3 + \phi) \hat{z}$  T.

**8.5:** Cierta pulso de campo electromagnético puede asimilarse a una onda plana cuyos campos son  $\vec{E}(x, t) = E_0 e^{-(x-ct)^2} \hat{y}$  (V/m) y  $\vec{B}(x, t) = B_0 e^{-(x-ct)^2} \hat{z}$  (T). Demostrar que ambos campos verifican la ecuación de onda y obtener la relación entre  $E_0$  y  $B_0$  sabiendo que de acuerdo con la ley de Faraday debe cumplirse que  $\partial E_y(x, t)/\partial x = -\partial B_z(x, t)/\partial t$ .

**Sol.:**  $E_0 = cB_0$ .

**8.6:** La antena de un receptor radioeléctrico es equivalente a una barra conductora de 2 m de altura y está orientada paralelamente al campo eléctrico de la OEM que se desea sintonizar. Si la tensión eficaz entre los extremos de la antena al recibir la onda es de 4 mV, determinense las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda sintonizada, así como la potencia media por unidad de área transportada por la onda.

**Sol.:**  $E_e = 2 \times 10^{-3}$  V/m;  $B_e = 0,666 \times 10^{-11}$  T,  $I = 10^{-8}$  W/m<sup>2</sup>.

**8.7:** En la superficie de la Tierra, el flujo solar medio aproximado es de 0,75 kW/m<sup>2</sup>. Se desea diseñar un sistema de conversión de energía solar a eléctrica para que proporcione una potencia eléctrica de 25 kW que permita cubrir las necesidades de una casa. Si el sistema tiene una eficacia del 30 %, ¿cuál será el área necesaria de los colectores solares, supuestos que son absorbentes perfectos?.

**Sol.** 111 m<sup>2</sup>.

**8.8:** Un pulso de láser tiene una energía de 20 J y un radio de haz de 2 mm. La duración del pulso es de 10 ns y la densidad de energía es constante dentro del pulso. **a)** ¿Cuál es la

longitud espacial del pulso? **b)** ¿Cuál es la densidad de energía dentro del mismo? **c)** Hallar los valores de la amplitud de los campos eléctrico y magnético.

**Sol.:** **a)** 3 m; **b)**  $5,31 \times 10^5 \text{ J/m}^3$ ; **c)**  $E_0 = 3,46 \times 10^8 \text{ V/m}$ ,  $B_0 = 1,15 \text{ T}$ .

**8.9:** El campo eléctrico de una onda electromagnética oscila en la dirección  $z$ , viniendo su vector de Poynting dado por

$$\vec{S}(x, t) = -(100 \text{ W/m}^2) \cos^2[10x + (3 \times 10^9)t] \hat{x},$$

donde  $x$  está en metros y  $t$  en segundos. **a)** ¿En qué dirección se propaga la onda? **b)** Calcular la longitud de onda y la frecuencia. **c)** Hallar los campos eléctrico y magnético.

**Sol.:** **a)** sentido negativo de  $x$ ; **b)**  $\lambda = 0,620 \text{ m}$ ,  $f = 4,77 \times 10^8 \text{ Hz}$ ;

**c)**  $\vec{E} = (194 \text{ V/m}) \cos[10x + (3 \times 10^9)t] \hat{z}$ ,  $\vec{B} = (0,647 \times 10^{-6} \text{ T}) \cos[10x + (3 \times 10^9)t] \hat{y}$ .

**8.10:** El campo eléctrico de una onda electromagnética armónica plana tiene la expresión  $\vec{E}(z, t) = 3 \times 10^{-3} \cos(kz - 2\pi \times 10^8 t) \hat{y}$  (V/m). Determinése: **a)** la longitud de onda, frecuencia, periodo y número de onda; **b)** el campo magnético,  $\vec{B}$ , así como el vector de Poynting,  $\vec{S}$ , y la intensidad de onda,  $I$ .

**Sol.:** **a)**  $\lambda = 3 \text{ m}$ ,  $f = 100 \text{ MHz}$ ,  $T = 10 \text{ ns}$ ,  $k = 2\pi/3 \text{ m}^{-1}$ ;

**b)**  $\vec{B}(z, t) = -0,01 \cos(2\pi z/3 - 2\pi \times 10^8 t) \hat{x} \text{ nT}$ ,

$\vec{S}(z, t) = 0,0239 \cos^2(2\pi z/3 - 2\pi \times 10^8 t) \hat{z} \mu\text{W/m}^2$ ,  $I = \langle S \rangle = 0,01195 \mu\text{W/m}^2$ .

**8.11:** Una OEM armónica plana de longitud de onda  $\lambda = 6 \text{ m}$  se propaga en el sentido negativo del eje de las  $X$  siendo su campo magnético  $\vec{B}(x, t) = 2 \times 10^{-10} \cos(\omega t + kx + \pi/4) \hat{y} \text{ T}$ . Determinése: **a)** el número de ondas, la frecuencia y el periodo de la onda; **b)** las expresiones del campo eléctrico,  $\vec{E}$ , y del vector de Poynting,  $\vec{S}$ , así como la intensidad de onda,  $I$ .

**Sol.:** **a)**  $k = \pi/3 \text{ m}^{-1}$ ,  $f = 50 \text{ MHz}$ ,  $T = 20 \text{ ns}$ ;

**b)**  $\vec{E}(x, t) = 60 \times 10^{-3} \cos(\pi \times 10^8 t + kx + \pi/4) \hat{z} \text{ V/m}$ ,

$\vec{S}(x, t) = -(30/\pi) \cos^2(\pi \times 10^8 t + kx + \pi/4) \hat{x} \mu\text{W/m}^2$ ,  $I = \langle S \rangle = 15/\pi \mu\text{W/m}^2$ .

**Constantes:**  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ,  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ .

# Apéndice A

## Análisis vectorial

---

### A.1. Vectores

En la naturaleza existen magnitudes físicas que están completamente determinadas por su valor y sus unidades. De forma genérica puede decirse que estas magnitudes son *escalares*. Ejemplos de estas magnitudes son la masa, la distancia, la temperatura, etc. Por el contrario, existen otras magnitudes que además de su valor y unidades están “dotadas” de una propiedad adicional: su dirección. Este tipo de magnitudes se conocen con el nombre de magnitudes *vectoriales* e incluyen a magnitudes tales como la posición, la velocidad, la fuerza, el campo eléctrico, etc. Para expresar las magnitudes vectoriales se hace uso de los *vectores* y por tanto se hace imprescindible el álgebra de vectores.

#### A.1.1. Notación vectorial

Usualmente las magnitudes vectoriales suelen denotarse en los textos impresos mediante letras minúsculas o mayúsculas en tipo **negrita**,  $\vec{v}$ ,  $\vec{V}$ , dejándose usualmente la notación con una flecha/raya encima de dichas letras,  $\vec{v}$ ,  $\vec{V}$ , para la escritura manual de los mismos. No obstante en el texto de estos apuntes y con la idea de evidenciar más si cabe el carácter vectorial de las magnitudes usaremos la notación con una flechita encima de las variables. En las figuras aparecerán sin embargo los vectores denotados en tipo **negrita**.

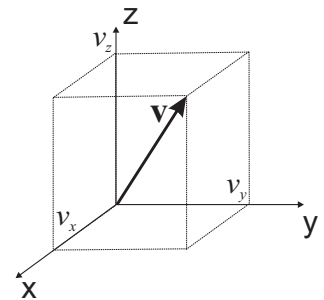
Para especificar los vectores se usan frecuentemente varios tipos de notación.

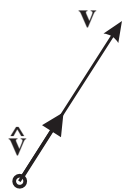
- Mediante una terna de números que son las **componentes** del vector en los ejes cartesianos  $x, y, z$ ,

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) . \quad (\text{A.1})$$

Geométricamente, las componentes del vector son las proyecciones de este vector en los ejes cartesianos.

- El vector  $\vec{v}$  puede también expresarse en función de su **módulo** y de su **vector unitario**. El módulo del vector  $\vec{v}$  suele denotarse como  $v$



Módulo del vector  $\vec{v}$ 

o bien  $|\vec{v}|$  y viene dado según el teorema de Pitágoras por

$$|\vec{v}| \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} . \quad (\text{A.2})$$

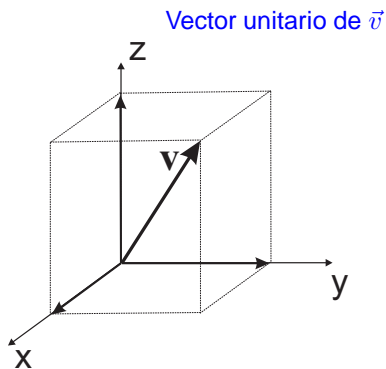
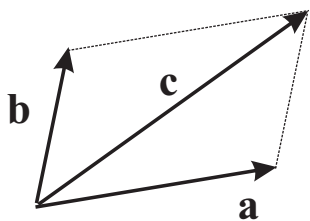
El vector unitario asociado con el vector  $\vec{v}$  se define como aquel vector de módulo unidad que tiene la misma dirección y sentido que  $\vec{v}$ . Dicho vector se denotará de forma genérica como  $\hat{v}$  o bien como  $\vec{v}$ , pudiéndose expresar como

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(v_x, v_y, v_z)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} . \quad (\text{A.3})$$

Obviamente el vector  $\vec{v}$  puede escribirse como:  $\vec{v} = v\hat{v}$ .

- Expresando el vector como suma de las componentes del vector por los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados. Los vectores unitarios a lo largo de los ejes  $x, y, z$  se denotaran como  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  respectivamente. Otras notaciones frecuentes para estos vectores unitarios son  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  o bien  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Usando esta notación, el vector  $\vec{v}$  se escribirá como:

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} . \quad (\text{A.4})$$

Vector unitario de  $\vec{v}$ 

### A.1.2. Suma de vectores

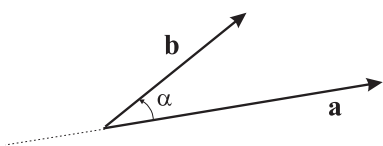
La suma de vectores se realiza sumando sus componentes. De este modo si

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z} ,$$

el vector  $\vec{c}$  suma de los dos anteriores será por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\ &= (a_x + b_x)\hat{x} + (a_y + b_y)\hat{y} + (a_z + b_z)\hat{z} . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$



### A.1.3. Producto escalar

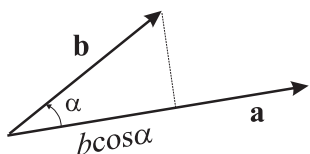
El producto escalar de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , denotado como  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  es un escalar fruto de la siguiente operación:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{A.6})$$

$$= ab \cos \alpha , \quad (\text{A.7})$$

siendo  $\alpha$  el ángulo formado por los dos vectores (es independiente si este ángulo se mide en dirección horaria o antihoraria ya que  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ). El producto escalar  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  puede interpretarse geométricamente como la proyección de uno de los vectores sobre el otro (salvo factores numéricos). Este hecho se manifiesta claramente en el producto escalar de  $\vec{a}$  por uno de los vectores unitarios según los ejes coordenados, esto es,

$$\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x ,$$



donde se ve claramente que  $\vec{a} \cdot \hat{x}$  es justamente la proyección del vector  $\vec{a}$  sobre el eje  $x$ .

Algunas de las propiedades del producto escalar son:

- El producto escalar es conmutativo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (\text{A.8})$$

- El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad (\text{A.9})$$

- El producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (\text{A.10})$$

- El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado del módulo de dicho vector:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2. \quad (\text{A.11})$$

#### A.1.4. Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , denotado como  $\vec{a} \times \vec{b}$ , es un vector definido como

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \alpha \hat{n}, \quad (\text{A.12})$$

siendo  $\alpha$  el ángulo *más pequeño* formado por los dos vectores y  $\hat{n}$  el vector unitario normal exterior al plano que contiene a los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . Puesto que el plano tiene dos normales (cada una con distinto sentido), el vector  $\hat{n}$  que aparece en (A.12) siempre se refiere a la normal que apunta según la *regla de la mano derecha*. Esta regla dice que usando la mano derecha y apuntando el dedo índice en la dirección de  $\vec{a}$  y el dedo corazón en la de  $\vec{b}$ , el dedo pulgar indicará la dirección de  $\hat{n}$ <sup>1</sup>. Geométricamente, el módulo del producto vectorial,  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , es igual al área del paralelogramo generado por los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

A partir de la definición del producto vectorial (A.12) pueden deducirse las siguientes propiedades:

- El producto vectorial es anticonmutativo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (\text{A.13})$$

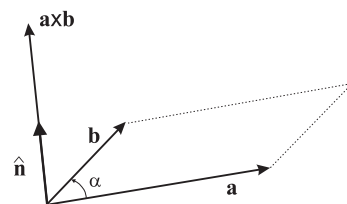
- El producto vectorial es distributivo respecto a la suma de vectores:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \quad (\text{A.14})$$

- El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (\text{A.15})$$

<sup>1</sup>Esta regla también se conoce a veces como *regla del tornillo* cuando dice que considerando el giro que va desde  $\vec{a}$  hasta  $\vec{b}$  por el camino más corto, si este giro se aplica a un tornillo, el sentido de avance o retroceso del tornillo indica hacia donde se dirige la normal.



- Multiplicación por un escalar  $\alpha$ :

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \alpha\vec{b}. \quad (\text{A.16})$$

Teniendo en cuenta la definición (A.12) y las propiedades (A.13)–(A.15), el producto vectorial de  $\vec{a}$  por  $\vec{b}$  puede obtenerse como

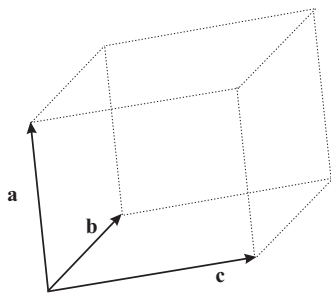
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Usando la definición del determinante, la expresión anterior puede escribirse como

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

### A.1.5. Productos triples

Dado que el producto vectorial de dos vectores es otro vector, este vector puede a su vez multiplicarse escalar o vectorialmente para formar lo que se conoce como productos triples.



- **Producto triple escalar:**  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Desde un punto de vista geométrico, este producto triple escalar puede interpretarse como el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  dado que según la figura adjunta  $|\vec{b} \times \vec{c}|$  es el área de la base y  $|a \cos \alpha|$  es la altura ( $\alpha$  es el ángulo entre  $\vec{a}$  y  $\vec{b} \times \vec{c}$ ). Usando esta interpretación geométrica es fácil deducir que

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (\text{A.19})$$

Es interesante notar que en la expresión anterior se ha preservado el “orden alfabético”.

El productor triple escalar puede también obtenerse a partir del siguiente determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

- **Producto triple vectorial:**  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Este producto triple vectorial puede también obtenerse como

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (\text{A.21})$$

Nótese que el vector

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (\text{A.22})$$

es un vector completamente diferente al definido en la expresión (A.21).

### A.1.6. Diferencial y derivada de funciones de una sola variable

Dada una función de una sola variable  $f = f(x)$ , se define la derivada de la función  $f(x)$  con respecto a  $x$  como

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (\text{A.23})$$

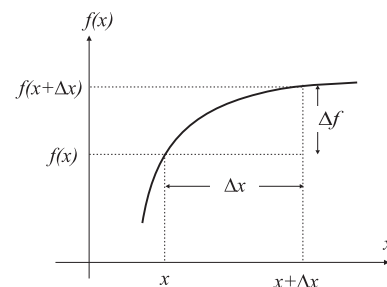
y expresa geoméricamente el valor de la pendiente de la tangente a la curva  $f(x)$  en el punto  $x$ . El concepto de **diferencial** de  $f(x)$ , denotado genéricamente como  $df$ , expresa la variación infinitesimal de la función  $f(x)$  entre  $x$  y  $x + dx$ , esto es,

$$df(x) = f(x + dx) - f(x). \quad (\text{A.24})$$

Desde un punto de vista matemático, este diferencial viene dado por el siguiente producto:

$$df(x) = \left( \frac{df}{dx} \right) dx. \quad (\text{A.25})$$

Debe notarse que  $df/dx$  **no** expresa un cociente entre  $df$  y  $dx$  sino que por el contrario debe entenderse como la acción del operador  $d/dx$  sobre la función  $f(x)$ . Este hecho se pone de manifiesto con otras notaciones que prefieren expresar la derivada de la función  $f(x)$  con respecto a  $x$  como  $D_x f(x)$ , donde  $D_x \equiv d/dx$  es precisamente el operador derivada.



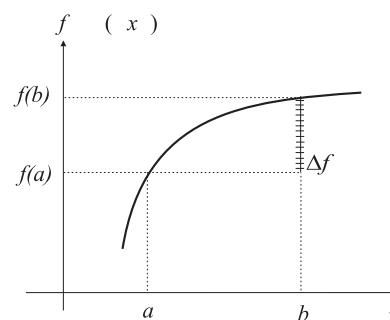
### A.1.7. Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo establece la siguiente relación entre las operaciones de integración y diferenciación de la función  $f(x)$ :

$$\int_a^b \left( \frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a). \quad (\text{A.26})$$

Es posible “deducir” la expresión anterior teniendo en cuenta que  $df(x) = \left( \frac{df}{dx} \right) dx$  y por tanto

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a). \quad (\text{A.27})$$



### A.1.8. Diferencial y derivada parcial de funciones de varias variables

Es muy frecuente que en la naturaleza las magnitudes dependan de más de una variable, así la temperatura de una habitación depende de la posición del punto donde se mide, esto es, de las tres coordenadas espaciales del punto. Este hecho se manifiesta matemáticamente diciendo que la temperatura es función de  $x, y$  y  $z$  y se denota como  $T = T(x, y, z)$ .

Similarmente al concepto de derivada introducido en la sección anterior para funciones de una sola variable, puede ahora definirse el concepto de *derivada parcial*. Esta derivada hace referencia a la variación de cierta



función con respecto a *una sola* de las variables cuando las demás permanecen constantes. Así, se define la derivada parcial de la función  $f(x, y, z)$  con respecto a  $x$  como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (\text{A.28})$$

y análogamente para las restantes variables. A partir del concepto de derivada parcial, puede deducirse que una variación infinitesimal de la función  $f(x, y, z)$  cuando dicha función varía entre los puntos  $x$  y  $x + dx$  podrá expresarse como:

$$df|_x = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx. \quad (\text{A.29})$$

La variación infinitesimal de la función  $f(x, y, z)$  cuando ésta varía entre los puntos  $(x, y, z)$  y  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  podría obtenerse, por tanto, sumando las variaciones parciales a lo largo de cada una de las coordenadas. De este modo, puede escribirse que

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) dz. \quad (\text{A.30})$$

### A.1.9. Operador gradiente

Es interesante notar en la expresión (A.30) que el diferencial de la función  $f(x, y, z)$ ,  $df$ , puede expresarse como el siguiente producto escalar:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz). \quad (\text{A.31})$$

Definiendo el operador vectorial  $\vec{\nabla}$  como

Operador  $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$\equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.33})$$

al aplicarlo a la función  $f(x, y, z)$  se obtiene el **gradiente** de  $f$ ,  $\vec{\nabla} f$ , que es evidentemente una magnitud *vectorial*:

Definición de gradiente de  $f$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (\text{A.34})$$

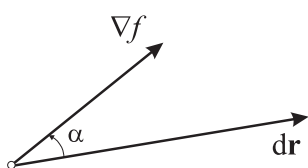
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.35})$$

Esta definición permite escribir el diferencial de la función  $f$  como el siguiente producto escalar:

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}, \quad (\text{A.36})$$

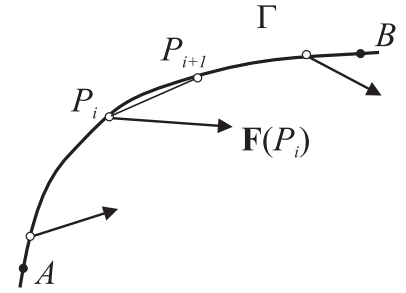
donde  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ .

Usando la definición de producto escalar,  $df$  también puede escribirse como



$$df = |\vec{\nabla} f| |d\vec{r}| \cos \alpha, \quad (\text{A.37})$$

lo que permite deducir que la máxima variación de la función  $f(x, y, z)$  se produce cuando  $\alpha = 0$ , esto es, cuando  $d\vec{r}$  es paralelo al gradiente de  $f$ ,  $\vec{\nabla} f$ . Consecuentemente, la dirección del vector  $\vec{\nabla} f$  marca la dirección de máxima variación de la función en el punto  $(x, y, z)$ .

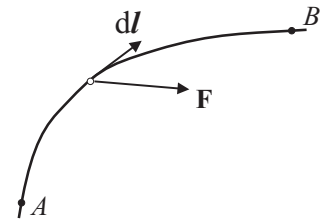


### A.1.10. Integral de camino

Dado un campo vectorial  $\vec{F}$  (esto es, una magnitud vectorial cuyas componentes dependen de la posición espacial), la integral de camino de  $\vec{F}$  entre dos puntos  $A$  y  $B$  a lo largo de la curva  $\Gamma$  se define como la siguiente integral:

$$\begin{aligned} C_A^B &= \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \lim_{P_{i+1} \rightarrow P_i(\Gamma)} \sum_i \vec{F}(P_i) \cdot \overline{P_i P_{i+1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

La integral anterior puede interpretarse como la superposición infinitesimal del producto escalar  $\vec{F} \cdot d\vec{l}$  para cada elemento diferencial de la curva  $\Gamma$  entre los puntos  $A$  y  $B$  (El vector  $d\vec{l}$  es un vector que tiene por módulo la longitud de un elemento diferencial de la curva y por dirección la de la tangente a la curva en dicho punto). Las integrales de camino son muy usuales en Física, definiendo, por ejemplo, el trabajo que realiza cierta fuerza entre dos puntos a través de cierta trayectoria. En general, la integral de camino depende del camino que se elija para ir desde  $A$  hasta  $B$ .



Algunas de las propiedades más importantes de las integrales de camino son:

- $\int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{B,\Gamma}^A \vec{F} \cdot d\vec{l}.$
- Si  $A'$  es un punto intermedio de la curva  $\Gamma$  entre  $A$  y  $B$ , se tiene que  $\int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{A,\Gamma}^{A'} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{A',\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l}.$

### A.1.11. Teorema fundamental del gradiente

De forma similar a como se hizo para funciones de una sola variable en (A.26), se verifica que

$$\int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A), \quad (\text{A.39})$$

donde la integral en la expresión anterior es una *integral de camino*.

La expresión (A.39) puede “justificarse” considerando la definición del diferencial de  $f$  dada por (A.36). A partir de esta definición, la integral en (A.39) puede verse como una superposición infinitesimal de las variaciones de la función entre los puntos  $A$  y  $B$ , y esto es precisamente  $f(B) - f(A)$ .

Dos importantes corolarios se pueden extraer de la expresión (A.39)

■

$$\int_{A,\Gamma}^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = \int_{A,\gamma}^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l}, \quad (\text{A.40})$$

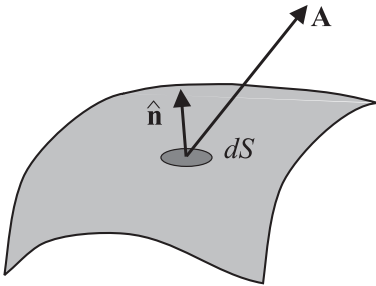
esto es,  $\int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l}$  es *independiente del camino* tomado entre los puntos  $A$  y  $B$ . Debe notarse que, en general, la integral de camino  $C_A^B = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$  sí depende del camino (considérese, por ejemplo, el trabajo realizado por un coche para desplazarse entre dos puntos siguiendo distintas carreteras).

■

$$\oint_{\Gamma} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l} = 0. \quad (\text{A.41})$$

La integral de camino anterior a través de cualquier curva cerrada,  $\Gamma$ , es nula.

## A.2. Integral de flujo



Una integral muy útil que aparece en Física es la integral de flujo. El flujo de un campo vectorial  $\vec{A}$  a través de una superficie  $S$  se define como la siguiente integral de superficie:

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{A.42})$$

donde  $S$  es una superficie arbitraria y  $d\vec{S}$  es el vector *diferencial de superficie*, definido como

$$d\vec{S} = dS \hat{n}, \quad (\text{A.43})$$

que tiene por módulo el área del elemento diferencial y por dirección y sentido el del vector unitario normal exterior a la superficie,  $\hat{n}$ . Por ejemplo, para el caso del plano  $z = \text{Cte}$ , el diferencial de superficie será  $d\vec{S} = dx dy \hat{z}$ .

## A.3. Problemas propuestos

- Expresar el vector  $(9, 8)$  como combinación lineal de los vectores  $(3, 1)$  y  $(1, 2)$  y representar gráficamente el resultado.  
**Sol.:**  $(9, 8) = 2(3, 1) + 3(1, 2)$ .
- Encontrar el unitario en la dirección dada por los puntos de coordenadas  $(3, 2, 0)$  y  $(6, 8, 2)$ .  
**Sol.:**  $\hat{n} = (3/7, 6/7, 2/7)$ .
- Calcular el vector unitario perpendicular al plano determinado por los puntos  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 3)$  y  $(3, 3, 1)$ .  
**Sol.:**  $(-7, 8, -3)/\sqrt{122}$
- Encontrar el ángulo formado por los vectores  $(3, 6, 2)$  y  $(8, 6, 0)$  utilizando dos técnicas diferentes (producto escalar y vectorial).  
**Sol.:**  $\alpha = 31,003^\circ$ .
- Utilizando el concepto de producto vectorial, determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas  $(1, 0, 0)$ ,  $(4, 5, 2)$  y  $(3, 1, 2)$ .  
**Sol.:** Área =  $\sqrt{117}/2$ .

6. Encontrar los vectores unitarios radial ( $\hat{\mathbf{r}}$ ) y tangente ( $\hat{\mathbf{t}}$ ) en los puntos  $(x, y)$  de una circunferencia de radio  $R$  que se halla en el plano XY y tiene su centro en el origen de coordenadas. Repetir lo anterior suponiendo ahora que la circunferencia tiene su centro en el punto  $(3, 2)$ .

**Sol.:** centro en  $(0, 0)$ :  $\hat{\mathbf{r}} = (x/R, y/R)$ ,  $\hat{\mathbf{t}} = (-y/R, x/R)$ ;

centro en  $(3, 2)$ :  $\hat{\mathbf{r}} = ((x-3)/R, (y-2)/R)$ ,  $\hat{\mathbf{t}} = (-(y-2)/R, (x-3)/R)$ .

7. Indicar cuales de las siguientes expresiones tienen sentido y cuales no:

a)  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ; b)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ; c)  $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ ; d)  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$ .

**Sol.:** correctas: b), c); incorrectas: a) y d) .

8. Utilizando el hecho de que  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ , demostrar que

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}.$$

9. Encontrar la componente del vector  $(7, 5, 2)$  en la dirección dada por la recta que une los puntos  $(5, 4, 3)$  y  $(2, 1, 2)$ .

**Sol.:**  $(6, 6, 2)$ .

10. Descomponer el vector  $\vec{A} = (1, 5, 5)$  en sus componentes paralela y perpendicular a la dirección dada por el unitario  $\hat{\mathbf{n}} = (0, 3/5, 4/5)$ .

**Sol.:**  $\vec{A} = \vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}$ , siendo  $\vec{A}_{\parallel} = (0, 21/5, 28/5)$  y  $\vec{A}_{\perp} = (1, 4/5, -3/5)$ .

11. Las coordenadas de una partícula móvil de masa  $m = 2$  kg en función del tiempo son  $\vec{r}(t) = (3t, t^2, t^3)$  m ( $t$  en segundos). Determinar: a) la velocidad y aceleración de la partícula; b) la fuerza que actúa sobre la misma en el instante  $t = 1$  s, así como las componentes de dicha fuerza en la dirección perpendicular y tangente a la trayectoria.

**Sol.:** a)  $\vec{v}(t) = (3, 2t, 3t^2)$  m/s,  $\vec{a}(t) = (0, 2, 6t)$  m/s<sup>2</sup>; b)  $\vec{F} = (0, 4, 12)$  N;  $\vec{F}_{\perp} = (-6, 0, 6)$  N, y  $\vec{F}_{\parallel} = (6, 4, 6)$  N.

12. Calcule el gradiente de la función  $\phi(x, y, z) = 2xy/r$ , siendo  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Sol.**  $\vec{\nabla}\phi = r^{-3} [2y(r^2 - x^2)\hat{\mathbf{x}} + 2x(r^2 - y^2)\hat{\mathbf{y}} - 2xyz\hat{\mathbf{z}}]$



## Apéndice B

# Funciones armónicas y Análisis fasorial

---

### B.1. Funciones Armónicas

Una función armónica  $f(t)$  es aquella que varía en el tiempo de la forma genérica:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) , \quad (\text{B.1})$$

donde  $A$  es la **amplitud**,  $\omega$  la frecuencia angular y  $\varphi$  el desfase. La amplitud,  $A$ , determina el rango de variación de la señal, esto es

$$-A \leq f(t) \leq A .$$

La frecuencia angular está relacionada con la frecuencia  $f$  a través de

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} , \quad (\text{B.2})$$

donde  $T$  el **periodo** de la señal, esto es, aquel valor tal que  $f(t) = f(t+T)$ . El desfase  $\varphi$  determina el origen del tiempo, esto es, cuál es el valor de la función en el instante  $t = 0$ :

$$f(0) = A \cos \varphi .$$

Es interesante recordar algunas relaciones trigonométricas de las funciones seno o coseno, a saber:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (\text{B.3})$$

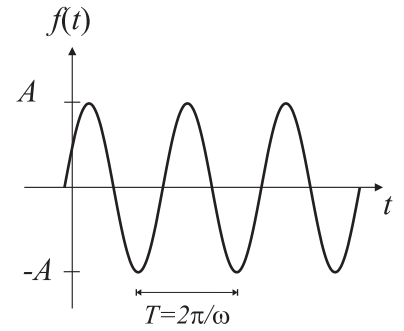
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b , \quad (\text{B.4})$$

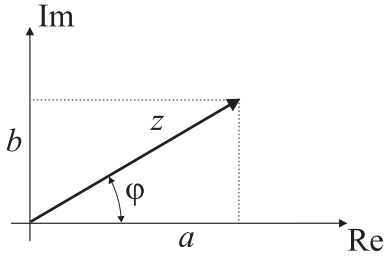
de donde puede deducirse, por ejemplo, que

$$\cos(\omega t + \varphi - \pi/2) = \sin(\omega t + \varphi) . \quad (\text{B.5})$$

### B.2. Análisis fasorial

En la resolución de ecuaciones de segundo grado, es frecuente encontrarse con soluciones que implican tomar la raíz cuadrada de un negativo,





por ejemplo  $\sqrt{-9}$ . No obstante, es fácil notar que no existe ningún número real (esto es, que pertenezca al conjunto  $\mathbb{R}$ ) tal que su cuadrado sea  $-9$ . Para solucionar esta cuestión se introducen los números *imaginarios*, que pueden formarse a partir de la definición de la **unidad imaginaria**,  $j$ :

$$j = \sqrt{-1}, \quad (\text{B.6})$$

de modo que

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1 \times 9} = \sqrt{-1} \times \sqrt{9} = j3.$$

Los números que tienen tanto parte real como imaginaria se conocen como **números complejos** y pueden definirse como

$$z = a + jb, \quad (\text{B.7})$$

donde  $a = \text{Re}(z)$  se dice que es la parte real de  $z$  y  $b = \text{Im}(z)$  la parte imaginaria de  $z$ .

Usualmente los números complejos se representan en un plano de modo que sobre el eje vertical se sitúa el eje imaginario y sobre el eje horizontal el eje real. De este modo, el número  $z$  queda caracterizado por un punto (como se muestra en la figura adjunta) que está a una distancia  $|z|$  dada por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (\text{B.8})$$

que se conoce como **módulo** de  $z$ , y con un ángulo  $\varphi$  medido en sentido antihorario a partir del eje real dado por

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \quad (\text{B.9})$$

que se denomina **argumento** de  $z$ .

Es fácil observar en la figura que  $z$  puede escribirse como

$$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

y dado que la *identidad de Euler* dice que

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi, \quad (\text{B.10})$$

se tiene que el número complejo  $z$  puede reescribirse como

$$z = |z|e^{j\varphi}. \quad (\text{B.11})$$

Teniendo en cuenta la identidad (B.10), es fácil notar que la función armónica

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

puede escribirse como

$$f(t) = \text{Re} \left( A e^{j(\omega t + \varphi)} \right) = \text{Re} \left( A e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right). \quad (\text{B.12})$$

Si ahora definimos el **fasor**,  $\tilde{f}$ , de la función  $f(t)$  como

$$\tilde{f} = A e^{j\varphi}, \quad (\text{B.13})$$

se tiene que

$$f(t) = \text{Re} \left( \tilde{f} e^{j\omega t} \right). \quad (\text{B.14})$$

La identidad (B.14) permite establecer una relación biunívoca entre las funciones armónicas y sus fasores asociados, de modo que a toda función armónica se le puede asociar un fasor, esto es,

$$f(t) \leftrightarrow \tilde{f}. \quad (\text{B.15})$$

Siguiendo las propiedades más elementales del cálculo de números complejos pueden demostrarse fácilmente las siguientes propiedades:

$$f_1(t) + f_2(t) \leftrightarrow \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 \quad (\text{B.16})$$

$$\alpha f(t) \leftrightarrow \alpha \tilde{f}, \quad (\text{B.17})$$

siendo  $f_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$  y  $\alpha$  un número real. Una propiedad adicional de fundamental importancia práctica es

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{f}. \quad (\text{B.18})$$

Esta última propiedad puede deducirse como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = -\omega A \cos(\omega t + \varphi - \pi/2) \\ &= \text{Re} \left( -\omega A e^{j(\omega t + \varphi - \pi/2)} \right) = \text{Re} \left( -\omega A e^{j\varphi} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \right) \\ &= \text{Re} \left( j\omega A e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right) = \text{Re} \left( j\omega \tilde{f} e^{j\omega t} \right), \end{aligned}$$

de donde se deduce que el fasor asociado a  $df/dt$  es precisamente  $j\omega \tilde{f}$ .