Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de Simplex Revisado

Nombre y apellidos:___________________________________e-mail:____________________

1 Una empresa fabrica cuatro tipos diferentes de productos A, B, C y D para cuya elaboración precisan pasar por dos máquinas: M1 y M2. El tiempo de máquina requerido por cada unidad de producto así como el tiempo disponible de cada tipo de máquina se muestran en la siguiente tabla.

	Tiempo de Máquina 1 (minutos/unidad)	Tiempo de Máquina 2 (minutos/unidad)
Producto A	4	5
Producto B	3	8
Producto C	5	9
Producto D	6	2
Disponibilidad diaria	8 h	16 h

Los **precios de venta** son de 7,20 € para cada unidad de A. Para cada unidad del producto B el precio de venta es de 8,40 € cuando la cantidad fabricada es menor o igual a 300 unidades, y es de 6,00 €, cuando es superior a 300 unidades. Los precios de venta para los productos C y D son 7,80 € y 5,70 € respectivamente.

Por otro lado, los **costes de fabricación** ascienden a 1,80 € por unidad para el producto B, mientras que para A este coste es de 2,40 € por unidad si se fabrican menos de 200 unidades, y pasa a ser de sólo 1,20 € si se fabrican 200 unidades o más. En el caso de C y D, los costes de fabricación de cada unidad ascienden a 1,90 € y 1,10 € respectivamente.

a) Plantea un modelo de **Programación Lineal Entera** que proporcione el plan óptimo de producción que maximice el beneficio. (1.5 puntos)

b) Incluye en el modelo formulado en el apartado anterior las siguientes condiciones (**en todos los casos, indica claramente las modificaciones sobre las variables, restricciones y función objetivo y ten en cuenta que el modelo resultante ha de seguir siendo lineal**):

b.1) Deben producirse al menos tres tipos de producto. (0.75 puntos)

b.2) La producción de los productos A y C es incompatible. Es decir, no es posible producir en el plan óptimo unidades de A y C simultáneamente. (0.5 puntos)

b.3) Si se producen unidades del producto B, hay que producir unidades del producto D. (0.5 puntos)

b.4) Es posible realizar mejoras en la capacidad de las máquinas que implicarían un aumento de las horas disponibles con un cierto coste. Concretamente, el modelo debe incluir la posibilidad de aumentar la disponibilidad de la M1 en 2 horas adicionales lo que implicaría un coste de 30 € así como el aumento de la disponibilidad de la M2 en 1h adicional en cuyo caso el coste sería 15 €. Solo es posible ampliar una de las dos máquinas. (0.75 puntos)

(Puntuación: 4 puntos)

2 Dado el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} &\text{MAX } Z = 2X1 + X2 \\ &\text{s.a} \quad X1 - X2 \leq 5 \\ &\qquad 4X1 + 3X2 \leq 10 \\ &\qquad X1, X2 \geq 0 \text{ y } \textbf{enteras} \end{aligned}$$

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente (X3 es la variable de holgura de la primera restricción):

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	-¼	5/2
X1	0	¼	5/2
$c_B^t B^{-1}$	0	½	Z=5

a) Aplica el algoritmo de **Bifurcación y Acotación** hasta encontrar **una solución entera.** Utiliza como **estrategia** de **bifurcación** la de **mejor cota.** <u>En cada nodo empieza acotando inferiormente (≥) las variables</u>. Indica claramente el valor de las variables y la función objetivo en cada uno de los subproblemas. (3 puntos)

b) Dibuja el árbol de soluciones que se ha generado en el apartado anterior. Identifica los subproblemas calculados en el apartado anterior. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál habría sido el árbol de soluciones en caso de haber aplicado la técnica de la cota más reciente? (0.5 puntos)

(Puntuación: 4 puntos)

3 Una compañía agrícola dispone de 1.000 hectáreas de terreno para el cultivo de trigo y centeno. Por cada hectárea dedicada al cultivo de trigo, la compañía tiene un coste de 150 unidades monetarias (u.m) y se obtienen 2 toneladas de este cereal, mientras que cada hectárea dedicada al centeno tiene un coste de 200 u.m. y produce 3 toneladas. La próxima temporada se debe atender un pedido de 2.500 toneladas de cada uno de estos dos cereales. Dado que no dispone de suficientes hectáreas para poder atender este pedido mediante la cosecha de sus terrenos, la compañía va a recurrir al mercado para comprar las cantidades de trigo y centeno que precisa para cubrir exactamente esta demanda, con un coste de 200 u.m. por cada tonelada de trigo y 180 u.m. por cada tonelada de centeno. Los objetivos que se plantea la compañía se concretan en minimizar los costes totales y maximizar las hectáreas de terreno cultivadas.

a) Se desea obtener **soluciones eficientes**, en un contexto multiobjetivo. Por ello, **plantea el modelo multiobjetivo** que permita decidir cuántas hectáreas de trigo y de centeno deben ser cultivadas y cuántas toneladas de estos cereales deben ser adquiridas en el mercado, para minimizar los costes totales y maximizar las hectáreas de terreno cultivadas. [0,8 puntos]

b) **Plantea los modelos matemáticos** necesarios (indicando claramente función objetivo y restricciones) para obtener el punto ideal y el punto antiideal del problema multiobjetivo planteado en el apartado (a). Es decir, si tuvieras que calcular dichos puntos numéricamente, ¿qué modelos necesitarías resolver? [0,4 puntos]

c) La compañía decide flexibilizar sus objetivos y plantear un **modelo de programación por metas**. En particular, se desea que los costes totales no superen las 180.000 u.m. y que el terreno cultivado sea de al menos 800 hectáreas. **Modeliza** el problema de forma que las metas planteadas se cumplan tanto como sea posible. [0,8 puntos]

(Puntuación: 2 puntos)

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1:

a)

VARIABLES:

A1: unidades a fabricar de A con coste unitario 2.40€
A2: unidades a fabricar de A con coste unitario 1.20€
B1: unidades a fabricar de B con pvp 8.40€
B2: unidades a fabricar de B con pvp 6€
C: unidades a fabricar de C
D: unidades a fabricar de D
YA1: 1: Se aplicar el coste de 2.40€; 0: no se aplica
YA2: 1: Se aplica el coste de 1.20€; 0: no se aplica
YB1: 1: Se aplicar el PVP de 8.40€; 0: no se aplica
YB2: 1: Se aplica el coste de 6€; 0: no se aplica

FUNCIÓN OBJETIVO: Max Bº= P.V.P. – Coste = 7.2(A1+A2) + 8.4B1 + 6B2 + 7.8C + 5.70D-
-(2.4A1 + 1.2A2 + 1.8(B1+B2) + 1.90C + 1.10D)

RESTRICCIONES:

[Cap_M1] 4(A1+A2) + 3(B1+B2) + 5C + 6D ≤ 8·60 (minutos)
[Cap_M2] 5(A1+A2) + 8(B1+B2) + 9C + 2D ≤ 16·60 (minutos)

[Costes_A] A1 ≤ 200 YA1
200 YA2 ≤ A2 ≤ M YA2

YA1 + YA2 =1

Nota1: Esta condición se podría modelizar con una sola v.Binaria que en uno de sus dos valores indicara que se aplica el primer coste y en el otro valor, que se aplica el segundo coste a la totalidad de las unidades producidas.

[PVP_B] B1 ≤ 300 YB1
300 YB2 ≤ B2 ≤ M YB2

YB1 + YB2 =1

Nota2: Esta condición se podría modelizar con una sola v.Binaria que en uno de sus dos valores indicara que se aplica el primer PVP y en el otro valor, que se aplica el segundo PVP a la totalidad de las unidades producidas.

[No_negatividad] A1, A2, B1, B2, C, D ≥ 0

b.1)

VARIABLES:

Adicionalmente a las variables definidas en el apartado a), son necesarias las siguientes:

Y1: 1: se produce el producto A; 0: no se produce
Y2: 1: se produce el producto B; 0: no se produce
Y3: 1: se produce el producto C; 0: no se produce
Y4: 1: se produce el producto D; 0: no se produce

$m\,Y1 \le A1 + A2 \le M\,Y1$
$m\,Y2 \le B1 + B2 \le M\,Y2$
$m\,Y3 \le C \le M\,Y3$
$m\,Y4 \le D \le M\,Y4$

$Y1 + Y2 + Y3 + Y4 \ge 3$

Siendo M un valor arbitrariamente grande y m un valor pequeño que no restrinjan en ninguno de los dos casos las unidades a producir.

b.2)

además de las variables y restricciones definidas en b.1, añadir la restricción:

$$Y1 + Y3 \le 1$$

b.3)

además de las variables y restricciones definidas en b.1, añadir la restricción:

$$Y2 \le Y4$$

b.4)

VARIABLES adicionales:

Ym1: 1: se realiza la ampliación de M1; 0: caso contrario
Ym2: 1: se realiza la ampliación de M2; 0: caso contrario

FUNCIÓN OBJETIVO: Max Bº= P.V.P. – Coste = 7.2(A1+A2) + 8.4B1 + 6B2 + 7.8C + 5.70D- -(2.4A1 + 1.2A2 + 1.8(B1+B2) + 1.90C + 1.10D) – 30Ym1 – 15Ym2

RESTRICCIONES:

[Cap_M1] 4(A1+A2) + 3(B1+B2) + 5C + 6D ≤ 8·60 + 120Ym1 (minutos)
[Cap_M2] 5(A1+A2) + 8(B1+B2) + 9C + 2D ≤ 16·60 + 60Ym2 (minutos)

$Ym1 + Ym2 \le 1$

resto del modelo igual

EJERCICIO 2:

a)

P0:
X1=5/2; X2=0 Z=5

P1=P0(X1, X2, X3, X4) + X1>= 3; X1 = 3 + l1; l1≥ 0 , necesitamos incrementar X1

VNB en P0: X2, X4

$$Y_{X2} = B^{-1} a_{X2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

NO EXISTE SOLUCIÓN YA QUE NO EXISTE α_{ij} que permita incrementar el valor de X1 respecto al que toma en P0.

P2=P0(X1, X2, X3, X4) + X1<= 2; X1 = 2 – u1; 0 ≤ u1 ≤ 2, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X2, X4.

Tanto con X2 como con X4 podemos decrementar X1 hasta 2, lo tenemos que hacer de la forma más eficiente posible: Aplicamos el algoritmo Dual del Simplex y seleccionaremos la variable JE según:

$$\textbf{JE}: x_j \,/ \left|\frac{C_{xj} - Z_{xj}}{y_{xj}}\right| = \left\{ \min_{1 \le k \le n} \left|\frac{C_{xj} - Z_{xj}}{y_{xj}}\right| \;\middle|\; y_{xk} > 0 \right\}$$

$$\mathbf{C_{X2} - Z_{X2}} = 1 - \left((0, 1/2)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -1/2$$

$$\mathbf{C_{X4} - Z_{X4}} = 0 - \left((0, 1/2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1/2$$

$$\mathbf{Min} \left|\frac{C_{xj} - Z_{xj}}{y_{xj}}\right| = \mathbf{Min} \left(\frac{1/2}{3/4}; \frac{1/2}{1/4}\right) = \mathbf{2/3} \rightarrow \mathbf{JE = X2}$$

- Para decrementar el valor de X1 necesitamos αij>0, y después de aplicar el criterio de entrada del Dual se elige a X2 como variable a entrar en la base ya que decrementa x1 de la forma más eficiente→ **JE=X2. La variable IS=x1 que se reemplaza por u1.** El pivote del cambio de base será ¾.
- El modelo equivalente al reemplazar x1 por 2-u1 es el siguiente:

MAX Z= 2(2-u1) + X2	≡	MAX Z= 4 - 2u1 + X2
s.a. 2 -u1-X2 ≤ 5		-u1-X2 ≤ 3
4(2-u1) + 3X2 ≤ 10		-4u1+3X2 ≤ 2

En P2: VB: X3, X2; VNB: U1, X4

$$X_B = B^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + (0,1) \begin{pmatrix} 11/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 4 + 2/3 = 14/3 = 4.67$$

P2: Variables: U1, X2, X3, X4

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	1/3	11/3
X2	0	1/3	2/3
$c^t_B B^{-1}$			Z = 14/3

La solución en P2:
X1=2; x2=2/3; Z=14/3

SEGUIMOS A PARTIR DE P2:

P3= P2 (U1, X2, X3, X4) + X2 >= 1; X2 = 1 + l2; l2≥ 0

Necesitamos incrementar el valor de X2 respecto al que tiene en P2, por tanto debe entrar en la solución alguna variable no básica cuyo α_{ij} sea negativo.

VNB: U1, X4

$$Yu_1 = B^{-1} a\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

– Para incrementar el valor de X2 necesitamos αij<0, por tanto sólo nos sirve u1 → **JE=u1. La variable IS=x2 que se reemplaza por l2.** El pivote del cambio de base será -4/3
– El modelo equivalente al reemplazar x2 por 1+l2 es el siguiente:

MAX Z= 4 - 2u1 + (1+l2)		MAX Z= 5 - 2u1 + l2
s.a. -u1-(1+l2) ≤ 3	≡	-u1-l2 ≤ 4
-4u1+3(1+l2) ≤ 2		-4u1+l2 ≤ -1

En P3 VB: X3, U1; VNB: X4, l2

$$X_B = B^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + 1 + (0,-2) \begin{pmatrix} 17/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = 5 - 2/4 = 18/4 = 4.5$$

P3: Variables: U1, l2, X3, X4

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	-1/4	17/4
U1	0	-1/4	1/4
$c^t_B B^{-1}$			Z = 18/4

La solución en P3 es: **X1=2-U1=7/4; X2=1; Z=4.5**

VOLVEMOS A P2:

P4= P2 (U1, X2, X3, X4) + X2 <= 0; X2 = 0 – U2; 0 ≤ U2 ≤ 0, necesitamos decrementar X2

Necesitamos decrementar el valor de X2 respecto al que tiene en P2, por tanto debe entrar en la solución alguna variable no básica cuyo α_{ij} sea positivo.

$$Yu_1 = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix};\ Y_{X4} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

– Para decrementar el valor de X2 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X4 → **JE=x4. La variable IS=x2 que se reemplaza por u2.** El pivote del cambio de base será 1/3
– El modelo equivalente al reemplazar x2 por 0-u2 es el siguiente:

MAX Z= 2(2-u1) + (0-u2)		MAX Z= 4 - 2u1 - u2
s.a. 2 -u1-(0-u2) ≤ 5	≡	-u1+u2 ≤ 3
4(2-u1) + 3(0-u2) ≤ 10		-4u1-3u2 ≤ 2

En P4: VB: X3, X4; VNB: U1, U2

$$X_B = B^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + (0,0) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

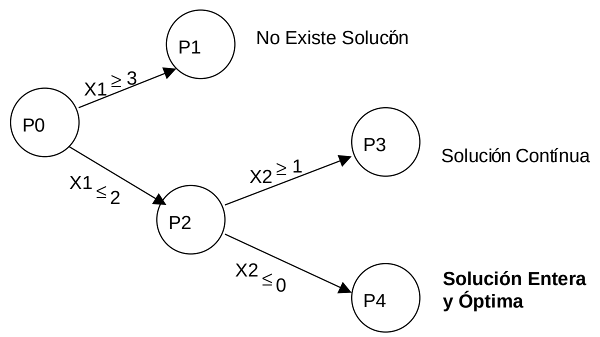
P4: Variables: U1, U2, X3, X4

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	0	3
X4	0	1	2
$c^t_B B^{-1}$			Z = 4

La solución en P4 es: X1=2; x2=0; Z=4

LA SOLUCIÓN DE P4 ES ENTERA POR TANTO **FIN.**

b)



c)

El árbol de soluciones en caso de haber aplicado la técnica de la cota más reciente continuaría a partir de P3 hasta llegar a una hoja. Entonces volvería al nodo padre y así hasta volver de nuevo a P2 y resolver P4 que como ya sabemos es una hoja del proceso de búsqueda.

Por tanto utilizando la misma numeración del apartado b), la secuencia sería: P0, P1, P2, P3, <subproblemas hasta llegar a hojas y volver a P2>, P4.

EJERCICIO 3:

a)

Definimos las variables de decisión siguientes:

hT = **hectáreas** dedicadas al trigo.

hC = **hectáreas** dedicadas al centeno.

tT = **toneladas** de trigo compradas en el mercado.

tC = **toneladas** de centeno compradas en el mercado.

La modelización queda como sigue:

Eff f(x)=[Coste; HaCultivadas]

O también: Eff = Max (-(150 hT + 200 hC + 200 tT + 180 tC) ; (hT + hC))

s.a: 2 hT + tT = 2500

3 hC + tC = 2500

hT + hC <= 1000

hT, hC, tT, tC >=0

b)

Para obtener el punto ideal y el punto anti-ideal del problema multiobjetivo planteado en a) hay que resolver el modelo matemático tantas veces como funciones objetivo a optimizar evaluando el resto de funciones objetivo. En este caso tenemos dos funciones objetivo. Por tanto, resolveremos el modelo matemático dos veces, cada vez con una de las funciones objetivo:

Min Z = 150 hT + 200 hC + 200 tT + 180 tC

hT + hC =HaCultivadas

2 hT + tT = 2500

3 hC + tC = 2500

hT + hC <= 1000

hT, hC, tT, tC, HaCultivadas >=0

Max W =hT + hC

150 hT + 200 hC + 200 tT + 180 Tc = Costes

2 hT + tT = 2500

3 hC + tC = 2500

hT + hC <= 1000

hT, hC, tT, tC, Costes >=0

El punto ideal se obtendrá con los valores de Z* y W* (valores óptimos de cada objetivo al resolver cada modelo de forma independiente) y el punto anti-ideal se obtendrá con HECTAREAS, COSTES (valores de la función objetivo que no se optimiza al resolver cada modelo).

c)

Definimos las variables desviación positiva y negativa asociadas a las metas de costes y de hectáreas cultivadas: P1, N1, P2, N2. Las desviaciones no deseadas en cada caso son P1 y N2 respectivamente.

El modelo de programación por metas es el siguiente:

MIN Z = P1 + N2

2 hT + tT = 2500

3 hC + tC = 2500

hT + hC <= 1000

150 hT + 200 hC + 200 tT + 180 tC – P1 + N1 = 180000

hT + hC – P2 + N2 = 800

hT, hC, tT, tC, P1, P2, N1, N2 >=0