AMA - FORMULARIO BÁSICO

VALOR ABSOLUTO EN $\mathbb{R}$ (UT1)

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad ; \quad |x| \geq b \;\Leftrightarrow (x \geq b \text{ o } x \leq -b) \quad ; \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

NÚMEROS COMPLEJOS (UT1)

Forma binómica: $z = a + bi$, $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$

Conjugado: $\overline{z} = a - bi \;\Rightarrow\; z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Forma trigonométrica: $z = |z|\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$, $\alpha = \arg(z)$; $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{|z|}$, $\sin(\alpha) = \dfrac{b}{|z|}$

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL (UT2)

Función par: $f(-x) = f(x)$, Función impar: $f(-x) = -f(x)$
Funciones exponenciales: $a^x > 0$, $a^0 = 1$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x/a^y = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$
Funciones logarítmicas:

$$\begin{aligned} \log_a(1) &= 0, \quad \log(e) = 1, \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y), \\ \log_a(x^y) &= y\log_a(x), \quad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \end{aligned}$$

Funciones trigonométricas: $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1; \quad \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x); \quad \cos(-x) = \cos(x); \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \quad ; \quad \cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

Propiedades de las derivadas:

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x), \quad (\alpha f)'(x) = \alpha f'(x), \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Regla de la cadena: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
Derivadas de funciones elementales:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= nx^{n-1} \\ \left(\sqrt{x}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \log_a'(x) &= \frac{1}{x\log(a)} \\ (a^x)' &= a^x\log(a) \\ \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Crecimiento/Decrecimiento: $f'(x) > / < 0 \Rightarrow f$ estrictamente creciente/decreciente
Extremos relativos: $f'(x) = 0$ y $f''(x) > / < 0 \Rightarrow f$ tiene mínimo/máximo relativo en x
Concavidad/Convexidad: $f''(x) > / < 0 \Rightarrow f$ cóncava/convexa
Puntos de inflexión: f tiene un punto de inflexión en $x \Rightarrow f''(x) = 0$

INTEGRACIÓN DE RIEMANN (UT3)

f monótona en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$, f continua en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$

f, g integrables en $[a,b] \Rightarrow \alpha f + \beta g$ y $f \cdot g$ integrables en $[a,b]$ pero $\int_a^b f \cdot g \neq \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)$

f, g integrables en $[a,b]$ i $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$; $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Área (plana) del recinto limitado por $y = f(x)$ y OX, entre $x = a$ y $x = b$: $A = \int_a^b |f|$

Regla de Barrow : f integrable en $[a,b]$ y $h' = f$ (h primitiva de f) en $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f = h(b) - h(a)$
Primitivas inmediatas:

$\int k dx = kx + c$

$\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c,\ (p \neq -1)$	$\int u^p(x)u'(x)dx = \frac{u^{p+1}(x)}{p+1} + c,\ (p \neq -1)$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln\|u(x)\| + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{u(x)}u'(x)dx = e^{u(x)} + c$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + c,\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$\int a^{u(x)}u'(x)dx = \dfrac{a^{u(x)}}{\ln(a)} + c,\ (a > 0,\ a \neq 1)$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$	$\int \cos(u(x))u'(x)dx = \sin(u(x)) + c$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$	$\int \sin(u(x))u'(x)dx = -\cos(u(x)) + c$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan(x) + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}dx = \tan(u(x)) + c$
$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(1 + \cot^2 x\right) dx = -\cot(x) + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}dx = -\cot((u(x)) + c$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(x) + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}dx = \arcsin(u(x)) + c$
$\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \arctan(x) + c$	$\int \dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}dx = \arctan(u(x)) + c$

Integración por partes : $\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f' \cdot g$
Integración por cambio de variable : $\int_{a=g(c)}^{b=g(d)} f = \int_c^d (f \circ g)g'$; $x = g(t)$ cdv

INTEGRACIÓN APROXIMADA (UT3)

Fórmula de Trapecios: $T_n f = \dfrac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b)\right)$; $h = \dfrac{b - a}{n}$

$$\text{Cota de error: } E_n = \left|\int_a^b f - T_n f\right| \leq \frac{nh^3}{12}M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \ ;\ M_2 \geq \max_{[a,b]} |f''|$$

Fórmula de Simpson (n par) : $S_n f = \dfrac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a + (2k+1)h) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a + 2kh) + f(b)\right)$

$$\text{Cota de error: } E_n = \left|\int_a^b f - S_n f\right| \leq \frac{nh^5}{180}M_4 = \frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4 \ ;\ M_4 \geq \max_{[a,b]} \left|f^{(iv)}\right|$$

SUCESIONES (UT4)

$a > 1 \Rightarrow \lim(a^n) = +\infty \quad ; \quad |a| < 1 \Rightarrow \lim(a^n) = 0$

Fórmula de Euler: $(a_n) \to 1,\ (b_n) \to \pm\infty \ \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = e^{\lim\{b_n(a_n-1)\}}$

Stolz (cociente): (b_n) creciente, $(b_n) \to +\infty \Rightarrow \lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lim \dfrac{(a_{n+1}-a_n)}{(b_{n+1}-b_n)}$

Órdenes de magnitud (a_n y b_n de términos positivos y divergentes a $+\infty$):

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} l \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow a_n \in \Theta(b_n) \text{ y diremos } a_n \approx b_n \text{ (del mismo orden)} \\ 0 \Longrightarrow a_n \in O(b_n) \text{ y diremos } a_n \ll b_n \\ +\infty \Longrightarrow a_n \in \Omega(b_n) \text{ y diremos } a_n \gg b_n \end{cases}$$

Recurrencias lineales (2º orden y coeficientes constantes; método aplicable a primer orden):

Caso homogéneo: $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$; ec. característica: $r^2 + pr + q \overset{r_1,\, r_2}{=} 0$

$r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a_n^h = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a_n^h = c_1 r^n + c_2 n \cdot r^n \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$r_1 = \rho_\alpha\ ,\ r_2 = \rho_{-\alpha} \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad a_n^h = \rho^n(c_1 \cos(n\alpha) + c_2 \sin(n\alpha)) \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Caso completo: $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = t_n$; $(t_n = P(n),\ k^n,\ P(n)k^n)$

$a_n^c = a_n^h + u_n$; con u_n solución particular *similar* a t_n (coef. indeterminados)

CONVERGENCIA DE SERIES NUMÉRICAS (UT5)

Condición (criterio) del resto: $\sum a_n$ converge $\Rightarrow (a_n) \to 0$

$\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ (armónica generalizada) converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Criterio de Leibniz: $\sum(-1)^{n+1}a_n\ ,\ a_n > 0;\ (a_n)$ decreciente y $(a_n) \to 0 \Rightarrow \sum(-1)^{n+1}a_n\ C$

SUMA DE SERIES NUMÉRICAS (UT5)

Serie geométrica (Suma exactas): $\sum_{n=p}^{\infty} r^n = \dfrac{r^p}{1-r}$,

$$\text{Sumas aproximadas: } \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = s \text{ (converge por Leibniz)} \ \Rightarrow\ E_n = |s - s_n| \leq a_{n+1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n = s\ ,\ \text{con } |A_n| \leq cK^n \ \Rightarrow\ E_n = |s - s_n| \leq \dfrac{cK^{n+1}}{1-K} \end{cases}$$

SERIES DE POTENCIAS (UT6)

Toda serie de potencias $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ es convergente en un intervalo de la forma $I =]-\rho, \rho[\ ,\ \rho \in [0, +\infty]$

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n\ ,\ |x| < \rho \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}\ ,\ |x| < \rho\ .\ \text{Por derivación sucesiva: } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \\ \int f = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C\ ,\ |x| < \rho \end{cases}$$

$$\text{Fórmula de McLaurin:} \quad f(x) = \overbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}^{P_n f(x)} + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!}x^{n+1}}^{R_n f(x)}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\ ,\ |x| < 1 \quad ; \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ ,\ x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$