Nota: Siempre que sea necesario utilizar el método Simplex, éste se aplicará en la forma de SIMPLEX REVISADO

Nombre y apellidos:____e-mail:_____________________

Ejercicio 1 2,5 puntos

En una empresa azulejera se ha desarrollado un modelo de programación lineal para obtener una **planificación de la producción semanal** en la fábrica. Se consideran 4 tipos distintos de azulejos y una serie de restricciones que se comentan a continuación. La empresa dispone de 4 **hornos** que trabajan las 24 horas del día, 6 días por semana. De igual manera en la empresa existen 2 turnos rotatorios de 7 horas durante 6 días a la semana con 5 **trabajadores** por turno. Los costes de producción semanal no pueden sobrepasar un **presupuesto** de 325.000 €. De igual manera, la nueva normativa Europea de emisiones limita a 3 Kg. por semana la cantidad de metales pesados que se permite **emitir** a la atmósfera. En la siguiente tabla se muestra la información asociada a la fabricación de cada tipo de azulejo:

Recurso	Productos			
	Azulejo 1	Azulejo 2	Azulejo 3	Azulejo 4
Horno	0,85 min/m^2	0,95 min/m^2	1,1 min/m^2	1,3 min/m^2
Personal	0,24 min/m^2	0,26 min/m^2	0,28 min/m^2	0,3 min/m^2
Presupuesto	8 €/m^2	9,25 €/m^2	10 €/m^2	14 €/m^2
Emisiones	0,09 grs./m^2	0,06 grs./m^2	0,1 grs./m^2	0,08 grs./m^2

El **precio de venta al público** para los 4 tipos de azulejos es de 12, 13, 15 y 18 €/m^2 respectivamente. Por motivos técnicos es necesario producir por semana al menos 12000, 8.000, 12.000 m^2 de los azulejos 1, 2 y 3 respectivamente y como máximo 15.000 m^2 de azulejo 1 y 10.000 m^2 de azulejo 2.

El modelo que permite maximizar el beneficio semanal y los resultados del mismo obtenidos con LINGO son los siguientes:

```
!Variables: Xi: m² de azulejo que se producen a la semana, donde i=(1,…,4);
[FO] MAX= 4*X1 + 3.75*X2 + 5*X3 + 4*X4;
! Restricciones;
[HORNO]       0.85*X1 + 0.95*X2 + 1.1* X3 + 1.3*X4 <= 34560;
[PERSONAL]    0.24*X1 + 0.26*X2 + 0.28*X3 + 0.3*X4 <= 25200;
[PRESUPUESTO] 8*X1 + 9.25*X2 + 10*X3 + 14*X4 <= 325000;
[EMISIONES]   0.09*X1 + 0.06*X2 + 0.1* X3 + 0.08*X4 <= 3000;
[limiteI_X1] X1 >= 12000;    [limiteS_X1] X1 <= 15000;
[limiteI_X2] X2 >= 8000;     [limiteS_X2] X2 <= 10000;
[limiteI_X3] X3 >= 12000;

Objective value:                          151500.0
                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        12000.00            0.000000
                                    X2        10000.00            0.000000
                                    X3        13200.00            0.000000
                                    X4        0.000000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                    FO        151500.0            1.000000
                                 HORNO        340.0000            0.000000
```

PERSONAL	16024.00	0.000000
PRESUPUESTO	4500.000	0.000000
EMISIONES	0.000000	50.00000
LimiteI_X1	0.000000	-0.5000000
LimiteS_X1	3000.000	0.000000
LimiteI_X2	2000.000	0.000000
LimiteS_X2	0.000000	0.7500000
LimiteI_X3	1200.000	0.000000

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	4.000000	0.5000000	INFINITY
X2	3.750000	INFINITY	0.7500000
X3	5.000000	1.250000	0.000000
X4	4.000000	0.000000	INFINITY

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
HORNO	34560.00	INFINITY	340.0000
PERSONAL	25200.00	INFINITY	16024.00
PRESUPUESTO	325000.0	INFINITY	4500.000
EMISIONES	3000.000	30.90909	120.0000
LimiteI_X1	12000.00	1333.333	2428.571
LimiteS_X1	15000.00	INFINITY	3000.000
LimiteI_X2	8000.000	2000.000	INFINITY
LimiteS_X2	10000.00	1172.414	2000.000
LimiteI_X3	12000.00	1200.000	INFINITY

Basándote en este informe, responde a las siguientes cuestiones **justificando la respuesta**:

a) ¿Existe algún plan de producción donde se fabriquen m^2 de X4 y se obtenga el mismo beneficio? **(0,5 puntos)**

b) Se está considerando la posibilidad de aumentar el máximo número de m^2 que la fábrica es capaz de producir de azulejo 1 o de azulejo 2. Suponiendo que el coste de la ampliación es el mismo en cada caso, ¿cuál de las dos alternativas resultaría más rentable? **(0,5 puntos)**

c) Ante el excedente de personal que existe actualmente en la empresa, te han encargado realizar un expediente de regulación de empleo. Los turnos siempre deben tener el mismo número de trabajadores. Con todo esto, ¿de cuántos trabajadores se puede prescindir en cada turno manteniendo la solución óptima actual? **(0,5 puntos)**

d) Una empresa de ingenierías nos ofrece un filtro que es capaz de absorber antes de que salgan a la atmósfera un 1% de los metales pesados que se emiten cada semana. Además, este 1% de metales que se absorben incluye algunos muy valiosos (titanio, platino) y se podrían vender por un valor de 2.500 €. La empresa de ingenierías pide 12.000 € por la instalación y mantenimiento de este avanzado filtro **cada mes**. ¿Crees que interesa instalar este filtro? **(1 punto)**

Ejercicio 2 — 2,5 puntos

La empresa Quimilex SL puede producir hasta tres tipos diferentes de productos químicos, 1, 2 y 3, a partir de dos materias primas A y B. El proceso para elaborar los productos químicos se divide en dos fases, 1 y 2; cada fase se desarrolla en una planta diferente de la empresa y el orden entre ellas no es relevante.

La tabla siguiente detalla la cantidad de materia prima y el tiempo de proceso en cada fase que se necesitan para producir un litro de producto 1, 2 y 3.

	Mat. prima A (litros de A/ litro de producto)	Mat. prima B (litros de B/ litro de producto)	Fase 1 (minutos/ litro de producto)	Fase 2 (minutos/ litro de producto)
Producto 1	1,6	0,8	30	90
Producto 2	1,0	1,4	120	60
Producto 3	0,4	2,0	30	150

Recursos necesarios para la elaboración de cada producto.

La empresa dispone, cada mes, de 200 y 500 litros de materia prima A y B, respectivamente. Asimismo, el tiempo disponible inicialmente para cada fase del proceso productivo es de 600 horas/mes.

Los empleados y tecnología que no se utilicen en la fase 1 pueden ser reconvertidos y trasladados a la planta donde se realiza la fase 2, si ello fuese conveniente. En concreto, cada hora de trabajo eliminada de la fase 1 y trasladada a la fase 2 (hasta un máximo de 100 al mes) equivaldría a 0,75 horas más disponibles en la fase 2, y no supondría ningún coste.

La elaboración de cada litro de producto 1, 2 y 3 genera 20, 30 y 40 gramos de residuos sólidos contaminantes, respectivamente, así como 0,30, 0,20 y 0,10 litros de gases altamente nocivos, respectivamente. Para cumplir con la normativa medioambiental, la empresa no puede superar la tasa de 35 gramos de residuos sólidos contaminantes por litro de producción.

Cada litro producido y vendido de producto 1, 2 y 3 genera un beneficio económico de 50, 60 y 80 euros, respectivamente. Se supone que todo lo producido es vendido.

Formula un **modelo lineal** que permita a los responsables de Quimilex planificar su producción de modo que la cantidad total emitida de gases nocivos sea tan pequeña como sea posible, asegurando unas ganancias mensuales de al menos 20.000 euros y respetando todas las limitaciones enunciadas.

Ejercicio 3 4 puntos

Dado el siguiente programa lineal:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{Max} & z = 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2} x_3 \\
\text{s.a:} & [\text{R1}]\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
 & [\text{R2}]\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\
 & [\text{R3}]\ 2x_1 + x_2 = 6 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}\right\} (\text{P}).
$$

a) Obtén la tabla de la **solución básica inicial** a partir de la cual se aplicaría el algoritmo Simplex revisado. **[0,5 puntos]**

b) La siguiente tabla corresponde a una Solución Básica obtenida mediante la aplicación del algoritmo Simplex al problema (P), (donde h_2 es la variable de holgura de la restricción [R2]):

v.básicas	B^{-1}			x_B
x_3	1	0	-1/2	1
h_2	-1	1	0	6
x_1	0	0	1/2	3
$c_B^t B^{-1}$				

Determina si esta solución **es o no solución óptima** para el problema (P) **y en caso de que no lo sea, realiza las iteraciones necesarias hasta alcanzar la solución óptima**. **[2,25 puntos]**

c) A partir de la información que proporciona la tabla óptima hallada en el apartado (b), contesta de forma razonada las siguientes cuestiones:

c.1) ¿Cuál será el nuevo valor óptimo de las variables decisión y de holgura si se quiere que $x_2$tome el valor 1/2? ¿La solución obtenida es solución básica? **[0,5 puntos]**

c.2) ¿Qué efecto tiene sobre la solución óptima y sobre el valor óptimo de la función objetivo un incremento de 2 unidades del coeficiente en la función objetivo asociado a x_2? **[0,25 puntos]**

c.3) ¿Qué efecto tiene sobre la solución óptima y sobre el valor óptimo de la función objetivo decrementar el segundo miembro de la restricción R2? **[0,5 puntos]**

Ejercicio 4 — 1 punto

Dado el siguiente modelo lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} & [R1]\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & [R2]\ 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & [R3]\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución óptima se incluye en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}			x_B
h_1	1	0	-1	8
h_2	0	1	-3	4
x_1	0	0	1	2
$c_B^t B^{-1}$	0	0	2	Z=4

A partir de la tabla de la solución óptima actual, y sabiendo que h_1, h_2 son las variables de holgura de las restricciones R1 y R2 respectivamente, **calcula la solución óptima y el valor de la función objetivo en caso de que el b_i de la restricción R2 decremente su valor en 5 unidades**.

SOLUCIÓN

SOLUCION EJERCICIO 1:

a) *¿Existe algún plan de producción donde se fabriquen m² de X4 y se obtenga el mismo beneficio? Justifica tu respuesta.*

Sí. Estamos en una situación de infinitas soluciones óptimas dado que el azulejo 4 toma valor 0 en la S.O. (VNB) y además su C.R. (Cj-Zj) es 0, luego existen soluciones óptimas alternativas (infinitas).

b) *Se está considerando la posibilidad de aumentar el máximo número de m² que la fábrica es capaz de producir de azulejo 1 o de azulejo 2. Suponiendo que el coste de la ampliación es el mismo en cada caso, ¿cuál de las dos alternativas resultaría más rentable? Justifica tu respuesta.*

Para las dos variables se ha definido cota superior. En la solución óptima se cumple estrictamente la cota superior de x2 y en ese caso le corresponde un coste de oportunidad igual a 0.75, es decir, el beneficio aumentaría a razón de 0.75 por cada m2 que se decidiera fabricar. En el caso del azulejo tipo 1, la cota que se verifica en la solución óptima es la cota inferior, por tanto no interesa aumentar su cota superior ya que no se alcanza en la solución óptima actual.

c) *Ante el excedente de personal que existe actualmente en la empresa, te han encargado realizar un expediente de regulación de empleo. Los turnos siempre deben tener el mismo número de trabajadores. Con todo esto, ¿de cuántos trabajadores se puede prescindir en cada turno?*

La parte derecha de la restricción de personal está expresada en minutos a la semana. Tenemos una holgura de 16.024 minutos y teniendo en cuenta que disponemos de 2 turnos de 7 horas cada uno y 6 días por semana, de los 5 trabajadores en cada uno de los turnos **sobrarían 3 trabajadores** dado que 3*2*7*6*60=15.120 y aún quedaría algo de holgura.

O también, de acuerdo al valor de la holgura de la restricción sobran 8.012 minutos en cada turno. Teniendo en cuenta que 1 trabajador supone 2.520 minutos de trabajo, **sobran 3 trabajadores** en cada turno (2.520*3=7560 minutos).

d) *Una empresa de ingenierías nos ofrece un filtro que es capaz de absorber antes de que salgan a la atmósfera un 1% de los metales pesados que se emiten cada semana. Además, este 1% de metales que se absorben incluye algunos muy valiosos (titanio, platino) y se podrían vender por un valor de 2.500 €. La empresa de ingenierías pide 12.000 € por la instalación y mantenimiento de este avanzado filtro cada mes. ¿Crees que interesa instalar este filtro?*

Hoy por hoy la empresa puede emitir 3 Kg. (3000 grs.) de metales pesados a la atmósfera. Si somos capaces de recuperar un 1% de estos metales lo que efectivamente está ocurriendo es que podremos emitir 3030 grs. de metales, dado que 30 se recuperan, por lo que estamos aumentando la parte derecha de la restricción de emisiones en 30 unidades, lo cual queda dentro del intervalo proporcionado por LINGO dentro del cual el C.O. y la base óptima permanecen constantes.

Con esto tenemos que los beneficios aumentarán en 30*50= 1.500 € por semana, a lo que le podemos sumar los 2.500 € que obtenemos por la venta de estos metales pesados. En total cada semana aumentamos los beneficios en 4000 €, o lo que es lo mismo, 16.000 € al mes, lo cual supera ampliamente el coste de instalación y mantenimiento del filtro. Por tanto, **SI INTERESA instalar el filtro**.

SOLUCION EJERCICIO 2:

Variables

El modelo debe permitir conocer qué cantidad de cada producto hay que fabricar:

$x_i =$ Cantidad de producto i a fabricar (litros/mes).

$i = 1, \ldots, 3.$

Función objetivo

Se desea conocer el plan de producción que minimizaría la cantidad total de gases nocivos emitidos:

[Gases nocivos] $\quad \text{Min } z = 0{,}30x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}10x_3$ (litros de gas/mes)

Restricciones

Limitaciones de recursos. Materia prima:

[Mat. prima A] $\quad 1{,}6x_1 + 1{,}0x_2 + 0{,}4x_3 \leq 200$

[Mat. prima B] $\quad 0{,}8x_1 + 1{,}4x_2 + 2{,}0x_3 \leq 500$

Limitaciones de recursos. Tiempo de proceso en cada fase (expresado en horas):

[Fase 1] $\quad 0{,}5x_1 + 2{,}0x_2 + 0{,}5x_3 = 600 - e$

[Fase 2] $\quad 1{,}5x_1 + 1{,}0x_2 + 2{,}5x_3 \leq 600 + 0{,}75e$

[Tiempo extra] $\quad e \leq 100$

Requisito medioambiental:

[Residuo] $\quad 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \leq 35(x_1 + x_2 + x_3)$

Ganancias:

[Beneficio] $\quad 50x_1 + 60x_2 + 80x_3 \geq 20.000$

Naturaleza de las variables:

$$x_i \geq 0, \qquad \text{para } i = 1, \ldots, 3.$$

SOLUCION EJERCICIO 3:

a) Dado el modelo:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \text{s.a:} & [\text{R1}]\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ & [\text{R2}]\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & [\text{R3}]\ 2x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Para obtener la tabla de la **solución básica factible inicial** a partir de la cual se aplicaría el algoritmo simplex es necesario expresar el modelo en forma estándar y a continuación añadir las variables artificiales de modo que obtendremos el modelo ampliado. En este caso:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \text{s.a:} & [\text{R1}]\ x_1 + x_2 + x_3 - h_1 + a_1 = 4 \\ & [\text{R2}]\ x_1 + 2x_2 + x_3 + h_2 = 10 \\ & [\text{R3}]\ 2x_1 + x_2 + a_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, a_1, a_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Es necesario aplicar el método simplex de 2 fases y la **fase 1** supone la siguiente función objetivo:

Min $\boldsymbol{z = a_1 + a_3}$

De modo que la SB_0 a partir de la cual comenzaría la aplicación del simplex de 2 fases es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
a_1	1	0	0	4
h_2	0	1	0	10
a_3	0	0	1	6
$c_B^t\ B^{-1}$	1	0	1	10

b) A partir de la tabla de la solución básica dada:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x_3	1	0	-1/2	1
h_2	-1	1	0	6
x_1	0	0	1/2	3
$c_B^t\ B^{-1}$				

En primer lugar necesitamos completar la tabla Simplex. Dado que la SBF dada no incluye variables artificiales, se trata de una **solución de la Fase 2 del algoritmo** de modo que la función objetivo a considerar es la del problema original, es decir:

$$\text{Max } z = 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

Que usaremos para completar la tabla:

$$c_B^t\, B^{-1} = (½, 0, 3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (½, 0, 5/4);$$

$$Z = c_B^t\, X_B = (½, 0, 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{19/2}$$

Para determinar si esta solución es óptima es necesario calcular cj-zj para las variables no básicas:

$$c_{x2} - z_{x2} = 1 - (½, 0, 5/4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (1/2 + 5/4) = -3/4$$

$$c_{h1} - z_{h1} = 0 - (½, 0, 5/4)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + ½ = ½$$

Por tanto, la solución actual no cumple el criterio de optimalidad para un problema de maximización ya que todavía es posible mejorar más el valor de la función objetivo. La **variable que entra en la base** es $\boldsymbol{h_1}$ y su vector Y_{h1} es:

$$Y_{h1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v.básicas	B^{-1}			x_B	Y_{h1}
x_3	1	0	-1/2	1	-1
h_2	-1	1	0	6	1
x_1	0	0	1/2	3	0
$c_B^t\, B^{-1}$	1/2	0	5/4	19/2	

Y la **variable que sale de la base** es $\boldsymbol{h_2}$ (es la única que alcanza el valor 0 cuando entra en la solución h_1).

La nueva solución es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x_3	0	1	-1/2	7
h_1	-1	1	0	6
x_1	0	0	1/2	3
$c_B^t\, B^{-1}$	0	1/2	5/4	25/2

Para comprobar la optimalidad de esta solución calculamos los cj-zj de las variables no básicas:

$$c_{x2} - z_{x2} = 1 - (0, ½, 5/4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (1 + 5/4) = -5/4$$

$$c_{h2} - z_{h2} = 0 - (0, ½, 5/4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - ½ = -½$$

Por tanto, la solución actual cumple el criterio de optimalidad ya que los cj-zj de las variables no básicas son no positivos y estamos en un problema de maximización.

Sol. óptima: $(x_1^* = 3\ ,\ x_2^* = 0\ ,\ x_3^* = 7\ ,\ h_1^* = 6,\ h_2^* = 0\ )$.

Valor óptimo de la función objetivo: $z^* = 25/2$

c) A partir de la información que proporciona la tabla óptima hallada en el apartado (b), contesta de forma razonada las siguientes cuestiones:

c.1) ¿Cuál será el nuevo valor óptimo de las variables decisión y de holgura si se quiere que x_2 tome el valor 1/2? ¿La solución obtenida es solución básica?

Para calcular el nuevo valor óptimo de las variables decisión y de holgura necesitamos saber cómo afectará a las variables básicas actual el cambio de valor de x_2. Para eso es necesario el vector Y_{x2}

$$Y_{x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el nuevo valor de las variables decisión y de holgura será:

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = 7 - (\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{25}{4}$$

$$h_1 = 6 - (\frac{1}{2} \cdot 1) = \frac{11}{2}$$

$$x_1 = 3 - (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$$

$$h_2 = 0$$

El valor de la función objetivo: $Z = 3 \cdot \frac{11}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} = \frac{95}{8}$

Esta nueva solución NO es solución básica ya que tiene 4 variables básicas y solo 1 variable igual a 0.

c.2) ¿Qué efecto tiene sobre la solución óptima y sobre el valor óptimo de la función objetivo un *incremento* de 2 unidades del coeficiente en la función objetivo asociado a x_2?

A partir de la solución óptima calculada en b) sabemos que el coste reducido de x_2 es $5/4$ de modo que ése es el incremento mínimo para que x_2 entre a formar parte de la solución óptima. Dado que el incremento a evaluar es mayor al coste reducido, sabemos que la solución óptima habrá cambiado y también el valor óptimo de la función objetivo dado que x_2 es variable no básica en la solución óptima y pasará a ser básica.

c.3) ¿Qué efecto tiene sobre la solución óptima y sobre el valor óptimo de la función objetivo *decrementar* el segundo miembro de la restricción R2?

Dado que la restricción R2 es limitativa en la solución óptima ($h_2 = 0$), si se decrementa el segundo miembro de R2 habrá cambio la solución óptima. El coste de oportunidad asociado a la restricción R2 es de ½ y por tanto, si se decrementa el valor del segundo miembro de la restricción R2, el valor óptimo de la función objetivo **empeorará** (disminuirá porque estamos maximizando) en 1/2 por cada unidad que se decremente el valor del segundo miembro de la restricción R2.

SOLUCION EJERCICIO 4:

Cuando b2=5, el nuevo valor de las VB es el siguiente:

$$x_B{}^{*\prime} = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dado que la solución ha dejado de ser factible, es necesario aplicar el **algoritmo dual del simplex** para calcular la nueva solución óptima.

Las VNB en la solución óptima son X2 y X5, calculamos sus vectores **y**:

$$y_{x2} = B^{-1}a_{x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_{x5} = B^{-1}a_{x5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dado que la variable con valor negativo es X4, son candidatas a entrar las variables con $\forall$ij<0 en el segundo elemento del vector y. Dado que tanto x2, como x5 al entrar en la solución aumentarían el valor de x4, para elegir cuál lo consigue de la forma más eficiente, calcularemos el cociente:

$$\min \left\{ \left| \frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}} \right| \;\middle|\; y_{xk} < 0 \right.$$

$$z_{x2} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x1} = (0,0,2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow c_{x2} - z_{x2} = 1-2=-1$$

$$z_{x5} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x5} = (0,0,2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow c_{x5} - z_{x5} = 0-2=-2$$

entonces, min{1/2, 2/3}=1/2 →**JE:x2**

- La nueva **solución óptima** es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	1/2	-5/2	**15/2**
X2	0	-1/2	3/2	**1/2**
X1	0	1/2	-1/2	**3/2**
$c_B{}^t\, B^{-1}$				**Z=7/2**