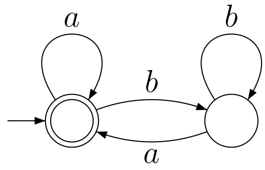
Ejercicios

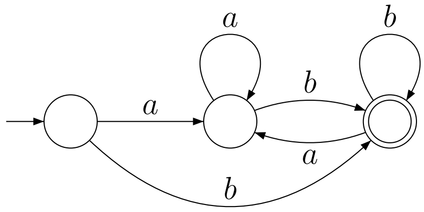
Ejercicio 1

Dados los autómatas de la figura:

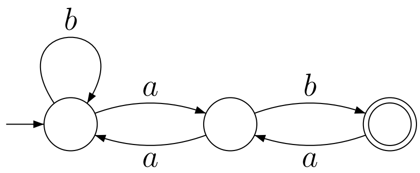
A_1



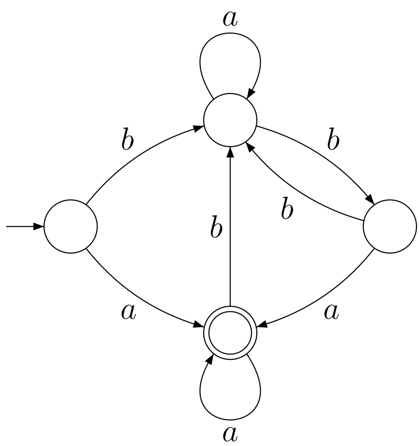
A_2



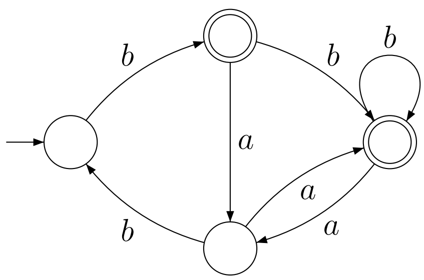
A_3



A_4

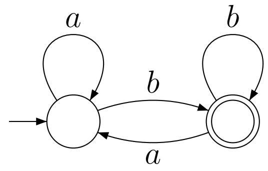


A_5



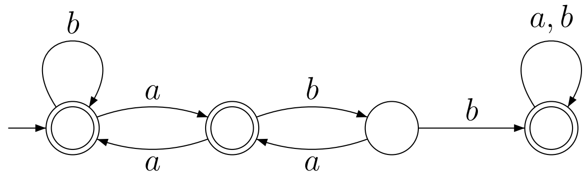
(a) Obtener un AFD para el lenguaje $\overline{L(A_1)}$

Solución:



(b) Obtener un AFD para el lenguaje $\overline{L(A_3)}$

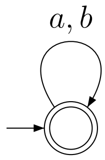
Solución:



(c) Obtener un AFD para el lenguaje $L(A_1) \cup L(A_2)$

Solución:

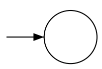
La construcción para la operación da como resultado un AFD completo con todos los estados finales, por lo tanto equivalente al siguiente autómata:



(d) Obtener un AFD para el lenguaje $L(A_1) \cap L(A_2)$

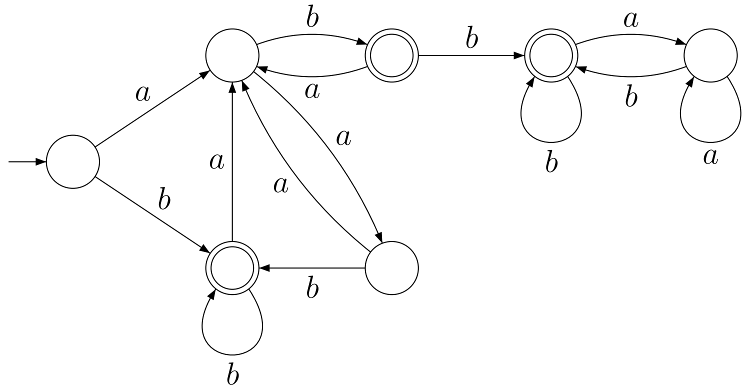
Solución:

La construcción resulta en un AFD completo con ningún estado final, por lo tanto equivalente al siguiente autómata:



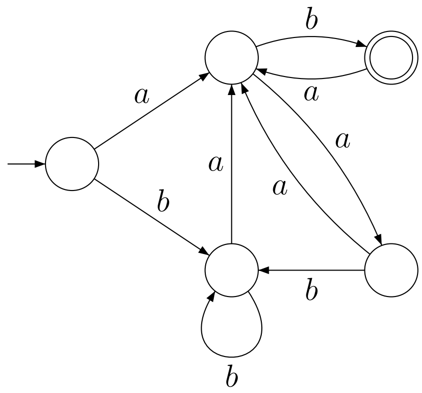
(e) Obtener un AFD para el lenguaje $L(A_2) \cup L(A_3)$

Solución:



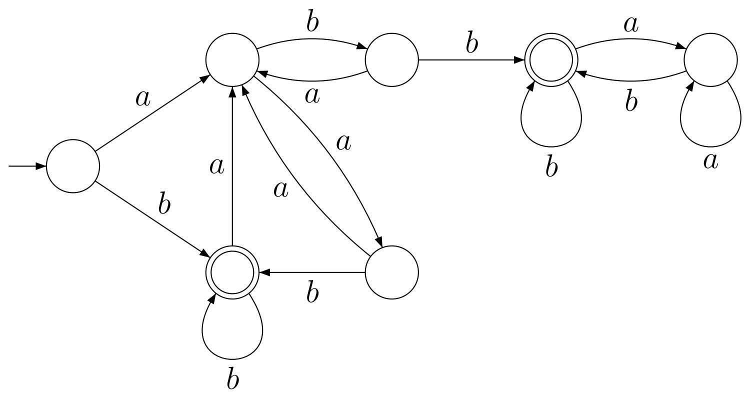
(f) Obtener un AFD para el lenguaje $L(A_2) \cap L(A_3)$

Solución:



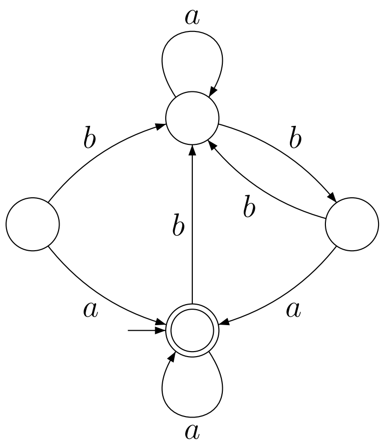
(g) Obtener un AFD para el lenguaje $L(A_2) - L(A_3)$

Solución:



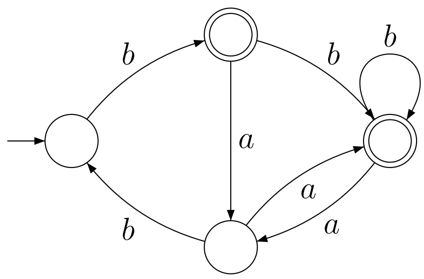
(h) Obtener un autómata para el lenguaje $(abba)^{-1}L(A_4)$

Solución:



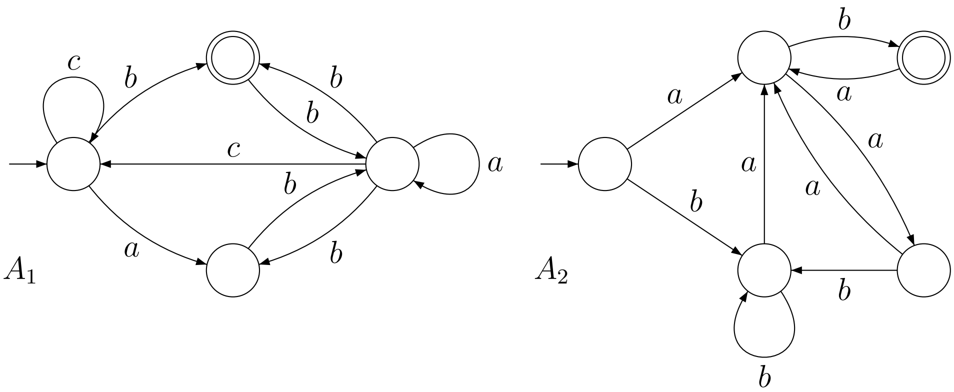
(i) Obtener un autómata para el lenguaje $(bbbab)^{-1}L(A_5)$

Solución:



Ejercicio 2

Dados los siguientes autómatas:



y los homomorfismos:

$$h: \{a,b,c\} \to \{0,1,2\}^* \quad \begin{cases} h(a) = 00 \\ h(b) = 1 \\ h(c) = \lambda \end{cases}$$

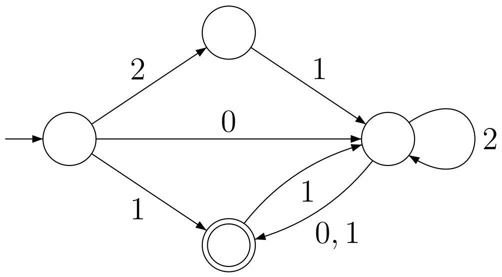
$$g: \{0,1,2\} \to \{a,b,c\}^* \quad \begin{cases} g(0) = ab \\ g(1) = bbb \\ g(2) = a \end{cases}$$

$$f: \{0,1,2\} \to \{a,b\}^* \quad \begin{cases} f(0) = ab \\ f(1) = bab \\ f(2) = \lambda \end{cases}$$

(a) Obtener un autómata para el lenguaje $g^{-1}(L(A_1))$

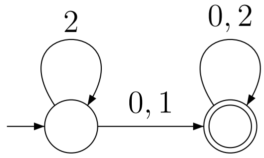
Solución:

Notese que el autómata A_1 es no determinista y que la construcción vista en teoría considera un DFA.



(b) Obtener un autómata para el lenguaje $f^{-1}(L(A_2))$

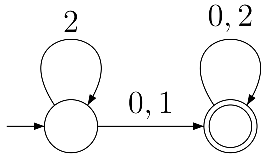
Solución:



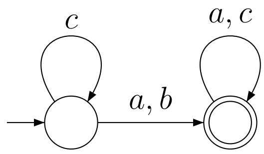
(c) Obtener un autómata para el lenguaje $h^{-1}(f^{-1}(L(A_2)))$

Solución:

Partimos del autómata que reconoce $f^{-1}(L(A_2))$ (apartado b de este ejercicio)



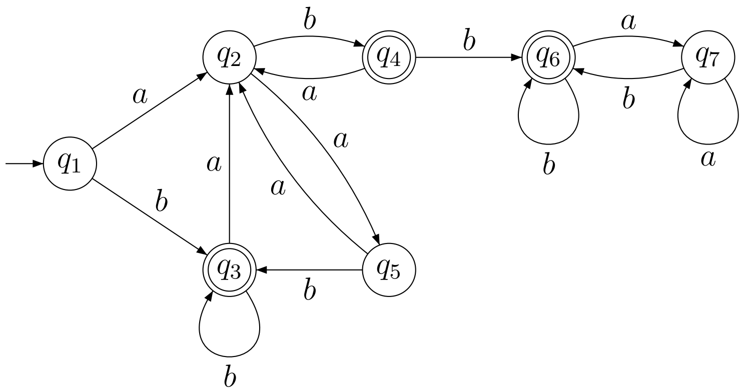
el siguiente autómata acepta $h^{-1}(f^{-1}(L(A_2)))$:



Ejercicio 3

Obtenga un AFD mínimo equivalente a cada uno de los siguientes autómatas:

(a)



Solución:

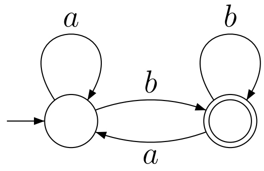
La primera partición de estados distingue entre estados finales y no finales:

$$\pi_0 = \{\{q_1, q_2, q_5, q_7\}, \{q_3, q_4, q_6\}\}$$

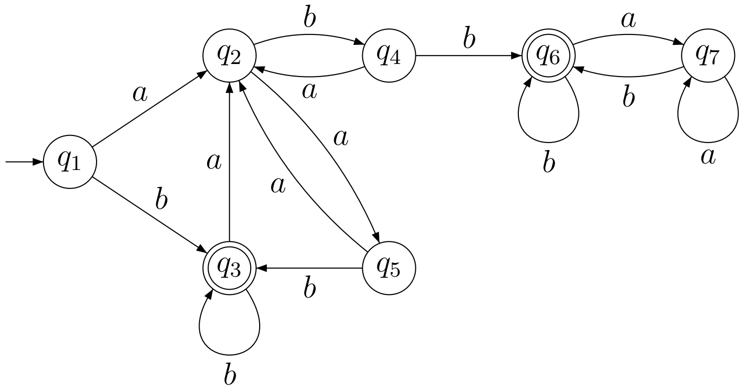
Teniendo en cuenta esta primera partición:

		a	b
B_1	q_1	$q_2 \in B_1$	$q_3 \in B_3$
	q_2	$q_5 \in B_1$	$q_4 \in B_3$
	q_5	B_1	B_3
	q_7	B_1	B_3
B_3	q_3	B_1	B_3
	q_4	B_1	B_3
	q_6	B_1	B_3

Para cada uno de los bloques de la partición, se observa que el comportamiento de todos los estados es el mismo y por lo tanto la partición no se refina. El autómata mínimo equivalente es el siguiente:



(b)



Solución:

La primera partición de estados distingue entre estados finales y no finales:

$$\pi_0 = \{\{q_1, q_2, q_4, q_5, q_7\}, \{q_3, q_6\}\}$$

Teniendo en cuenta esta primera partición:

		a	b
	q_1	$q_2 \in B_1$	$q_3 \in B_3$
	q_2	$q_5 \in B_1$	$q_4 \in B_1$
B_1	q_4	B_1	B_3
	q_5	B_1	B_3
	q_7	B_1	B_3
B_3	q_3	B_1	B_3
	q_6	B_1	B_3

Puede verse que el estado q_2 se comporta de forma diferente al resto de estados en su bloque, por lo tanto la partición se refina quedando:

$$\pi_1 = \{\{q_1, q_4, q_5, q_7\}, \{q_2\}, \{q_3, q_6\}\}$$

		a	b
B_1	q_1	$q_2 \in B_2$	$q_3 \in B_3$
	q_4	$q_2 \in B_2$	$q_6 \in B_3$
	q_5	B_2	B_3
	q_7	B_1	B_3
B_2	q_2	$--$	$--$
B_3	q_3	B_2	B_3
	q_6	B_1	B_3

Las entradas correspondientes al bloque B_2 de la partición no son necesarias porque este bloque contiene un único estado, y por lo tanto no va a refinarse. En esta iteración, el estado q_7 se comporta de forma diferente al resto de estados en su bloque, y lo mismo sucede con el estado q_3. El refinamiento de la partición queda:

$$\pi_2 = \{\{q_1, q_4, q_5\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_6\}, \{q_7\}\}$$

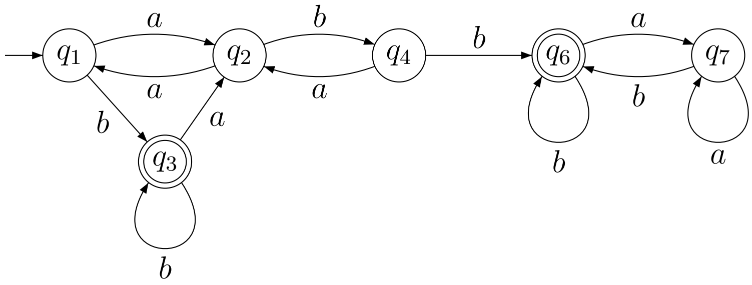
		a	b
B_1	q_1	B_2	B_3
	q_4	B_2	B_6
	q_5	B_2	B_3
B_2	q_2	$--$	$--$
B_3	q_3	$--$	$--$
B_6	q_6	$--$	$--$
B_7	q_7	$--$	$--$

En esta iteración es el estado q_4 el que se distingue. El refinamiento de la partición queda:

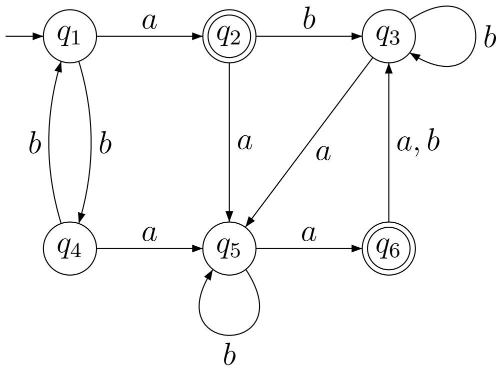
$$\pi_3 = \{\{q_1, q_5\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_4\}, \{q_6\}, \{q_7\}\}$$

		a	b
B_1	q_1	B_2	B_3
	q_5	B_2	B_3
B_2	q_2	$--$	$--$
B_3	q_3	$--$	$--$
B_4	q_4	$--$	$--$
B_6	q_6	$--$	$--$
B_7	q_7	$--$	$--$

En esta iteración la partición no se refina. El autómata mínimo equivalente es el siguiente:



(c)



Solución:

La primera partición de estados distingue entre estados finales y no finales:

$$\pi_0 = \{\{q_1, q_3, q_4, q_5\}, \{q_2, q_6\}\}$$

Teniendo en cuenta esta primera partición:

		a	b
B_1	q_1	B_2	B_1
	q_3	B_1	B_1
	q_4	B_1	B_1
	q_5	B_2	B_1
B_2	q_2	B_1	B_1
	q_6	B_1	B_1

Puede verse que, dentro del mismo bloque, los estados q_1 y q_5 se comportan de forma diferente a los estados q_3 y q_4, por lo que la partición queda:

$$\pi_1 = \{\{q_1, q_5\}, \{q_3, q_4\}, \{q_2, q_6\}\}$$

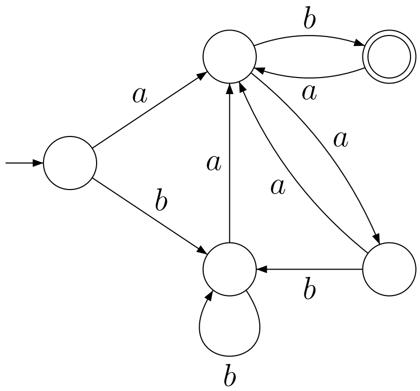
		a	b
B_1	q_1	B_2	B_3
	q_5	B_2	B_1
B_2	q_2	B_1	B_3
	q_6	B_3	B_3
B_3	q_3	B_1	B_3
	q_4	B_1	B_1

Todos los bloques se refinan, resultando en la partición:

$$\pi_1 = \{\{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_4\}, \{q_5\}, \{q_6\}\}$$

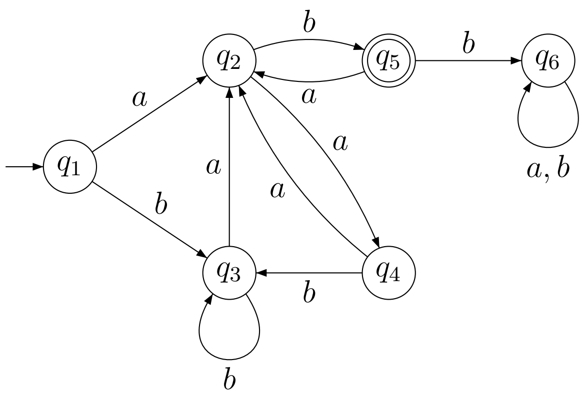
que no puede refinarse más. Por lo tanto el autómata ya era mínimo.

(d)



Solución:

El autómata no es completo, después de completarlo queda:



La primera partición de estados distingue entre estados finales y no finales:

$$\pi_0 = \{\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6\}, \{q_5\}\}$$

Teniendo en cuenta esta primera partición:

		a	b
B_1	q_1	B_1	B_1
	q_2	B_1	B_5
	q_3	B_1	B_1
	q_4	B_1	B_1
	q_6	B_1	B_1
B_5	q_5	$--$	$--$

Creamos un bloque con el estado q_2 con lo que la partición queda:

$$\pi_1 = \{\{q_1, q_3, q_4, q_6\}, \{q_2\}, \{q_5\}\}$$

		a	b
B_1	q_1	B_2	B_1
	q_3	B_2	B_1
	q_4	B_2	B_1
	q_6	B_1	B_1
B_2	q_2	$--$	$--$
B_5	q_5	$--$	$--$

El estado q_6 y la partición queda:

$$\pi_2 = \{\{q_1, q_3, q_4\}, \{q_2\}, \{q_5\}, \{q_6\}\}$$

		a	b
B_1	q_1	B_2	B_1
	q_3	B_2	B_1
	q_4	B_2	B_1
B_2	q_2	$--$	$--$
B_5	q_5	$--$	$--$
B_6	q_6	$--$	$--$

En esta iteración la partición no se refina. El autómata mínimo equivalente es el siguiente: