Examen de Matemàtica Discreta
11 de novembre de 2016
Part única (2 hores)

Qüestió 1 (1,5 pt.) (a) Indiqueu quines de les expressions següents són fórmules lògiques i reescriviu les que ho siguen fent servir el nombre mínim de parèntesis:

(1) $((p \vee q) \wedge r) \rightarrow r \vee s$

Aquesta expressió és correcta, perquè el connector condicional és de rang superior al connector disjunció.

S'hi pot suprimir un parell de parèntesis: $\boxed{(p \vee q) \wedge r \rightarrow r \vee s}$

(2) $(p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow s$

Aquesta expressió no és correcta, perquè les fórmules lògiques $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ i $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ no són equivalents.

(3) $((p \vee q) \vee r) \rightarrow r \vee s$

Aquesta expressió és correcta, perquè el connector condicional és de rang superior al connector disjunció.

S'hi pot suprimir tots els parèntesis: $\boxed{p \vee q \vee r \rightarrow r \vee s}$

(4) $p \vee \neg(q \rightarrow r) \wedge s$

Aquesta expressió no és correcta, perquè les fórmules lògiques $\big(p \vee Q\big) \wedge s$ i $p \vee \big(Q \wedge s\big)$ no són equivalents (els connectors disjunció i conjunció tene el mateix rang).

(5) $p \vee q \leftrightarrow (t \rightarrow s)$

Aquesta expressió és correcta, perquè el connector bicondicional és de rang superior al connector disjunció.

S'hi pot suprimir els parèntesis: $\boxed{p \vee q \leftrightarrow t \rightarrow s}$, perquè el connector bicondicional és de rang superior al condicional.

(b) Simplifiqueu la forma proposicional següent, indicant en cada pas la tautologia que feu servir:

$$(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge (\neg R \vee \neg P)$$

$$\begin{aligned}
(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge (\neg R \vee \neg P) &\equiv (\neg P \vee R) \wedge (\neg\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg R \vee \neg P) && \text{Condicional-disjunció} \\
&\equiv (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R) && \text{Involutiva i commutativa} \\
&\equiv \neg P \vee (R \wedge Q \wedge \neg R) && \text{Distributiva} \\
&\equiv \neg P \vee \big((R \wedge \neg R) \wedge Q\big) && \text{Commutativa i associativa} \\
&\equiv \neg P \vee (\Phi \wedge Q) && \text{Complementarietat} \\
&\equiv \neg P \vee \Phi && \Phi \text{ és absorbent per al connector conjunció} \\
&\equiv \neg P && \Phi \text{ és el neutre del connector disjunció}
\end{aligned}$$

Qüestió 2 (1 pt.) En l'univers de les persones, formalitzeu lògicament les proposicions següents:

(a) No tots els jugadors de futbol són profesionals

(b) Els jugadors de futbol profesionals estan en plena forma física

(c) Hi ha jugadors de bàsquet que són profesionals però fan menys de 190 cm

(d) No hi ha cap jugador de bàsquet que jugue a l'NBA i faça menys de 190 cm

Farem servir els predicats següents:

$\mathtt{P}(x)$: x és jugador de futbol
$\mathtt{Q}(x)$: x és professional
$\mathtt{R}(x)$: x està en plena forma
$\mathtt{S}(x)$: x és jugador de bàsquet
$\mathtt{T}(x)$: x fa menys de 190 cm
$\mathtt{U}(x)$: x juga a l'NBA

Llavors, les proposicions donades es formules d'aquesta manera:

(a) No tots els jugadors de futbol són profesionals:

$$\neg\forall x \quad \big(\mathtt{P}(x) \to \mathtt{Q}(x)\big)$$

(b) Els jugadors de futbol profesionals estan en plena forma física

$$\forall x \quad \big(\mathtt{P}(x) \wedge \mathtt{Q}(x) \to \mathtt{R}(x)\big)$$

(c) Hi ha jugadors de bàsquet que són profesionals però fan menys de 190 cm

$$\exists x \quad \big(\mathtt{S}(x) \wedge \mathtt{Q}(x) \wedge \mathtt{T}(x)\big)$$

(d) No hi ha cap jugador de bàsquet que jugue a l'NBA i faça menys de 190 cm

$$\neg\exists x \quad \big(\mathtt{S}(x) \wedge \mathtt{U}(x) \wedge \mathtt{T}(x)\big)$$

Qüestió 3 (1,5 pt.) Es pot deduir la conclusió, de las premisses? Justifiqueu les vostres respostes.

(a)
$$\begin{array}{ll} \mathbf{P1}: & P \lor Q \\ \mathbf{P2}: & \neg Q \\ \hline \mathbf{C}: & P \lor R \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \mathbf{P1}: & \forall x \ \big(A(x) \to \neg B(x)\big) \\ \mathbf{P2}: & \neg \forall x \ \neg B(x) \\ \hline \mathbf{C}: & \exists x \ \neg A(x) \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} \mathbf{P1}: & \exists x \ P(x) \\ \mathbf{P2}: & \exists x \ Q(x) \\ \hline \mathbf{C}: & \exists x \ \big(P(x) \land Q(x)\big) \end{array}$$

(a): Sí

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P1}: & P \lor Q & \\ \mathbf{P2}: & \neg Q & \\ \hline \mathbf{P3}: & P & \textit{Modus tollendo ponens } (1,2) \\ \mathbf{C}: & P \lor R & \text{Addició } (3) \end{array}$$

(b): Sí

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P1}: & \forall x \ \big(A(x) \to \neg B(x)\big) & \\ \mathbf{P2}: & \neg \forall x \ \neg B(x) & \\ \hline \mathbf{P3}: & \exists x \ \neg\neg B(x) & \text{Negació del quantificador } (2) \\ \mathbf{P4}: & \exists x \ B(x) & \text{Involutiva } (3) \\ \mathbf{P5}: & B(a) & \text{Especificació existencial } (4), a \text{ és no arbitrari} \\ \mathbf{P6}: & A(a) \to \neg B(a) & \text{Especificació universal } (1) \\ \mathbf{P7}: & \neg A(a) & \textit{Modus tollendo tollens } (6,5) \\ \mathbf{C}: & \exists x \ \neg A(x) & \text{Generalització existencial } (7) \end{array}$$

(c): No. Per exemple, en l'univers dels nombres enters, hi ha un nombre que és parell i també n'hi ha un de senar, així que si $P(x)$ és «x és parell» i $Q(x)$ és «x és senar», llavors les premisses són certes, però la conclusió és falsa.

Això és així perquè si apliquem la regla d'especificació existencial a les dues premisses obtindrem

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P1}: & \exists x \ P(x) & \\ \mathbf{P2}: & \exists x \ Q(x) & \\ \hline \mathbf{P3}: & P(a) & \text{Especificació existencial } (1), a \text{ és no arbitrari} \\ \mathbf{P4}: & P(b) & \text{Especificació existencial } (1), b \text{ és no arbitrari} \end{array}$$

No podem fer servir la variable a en la premissa 4, perquè aquesta variable no és arbitrària. Llavors, l'única cosa que podríem generalitzar seria

$$\exists x \exists y \quad \big(P(x) \land Q(y)\big)$$

Qüestió 4 (1 pt.) Proveu que la conclusió es dedueix de les premisses:

$$\begin{array}{ll} \textbf{P1}: & \neg P \rightarrow \neg Q \vee R \\ \textbf{P2}: & S \rightarrow \neg Q \\ \textbf{P3}: & \neg(P \wedge \neg S) \\ \textbf{P4}: & \neg R \vee \neg Q \\ \hline \textbf{C}: & \neg Q \end{array}$$

Aplicant el mètode d'inferència directa:

$$\begin{array}{lll} \textbf{P1}: & \neg P \rightarrow \neg Q \vee R & \\ \textbf{P2}: & S \rightarrow \neg Q & \\ \textbf{P3}: & \neg(P \wedge \neg S) & \\ \textbf{P4}: & \neg R \vee \neg Q & \\ \hline \textbf{P5}: & \neg P \vee S & \text{Llei de De Morgan (3) i involutiva} \\ \textbf{P6}: & \neg Q \vee R \vee \neg Q & \text{Dilema (1,2,5) (o sil·logisme disjuntiu)} \\ \textbf{P7}: & \neg Q \vee R & \text{Commutativa(6), associativa i idempotència} \\ \textbf{P8}: & (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg Q) & \text{Llei de la unió (7,4)} \\ \textbf{P9}: & \neg Q \vee (R \wedge \neg R) & \text{Commutativa (8) i distributiva} \\ \textbf{P10}: & \neg Q \vee \Phi & \text{Complementarietat (9)} \\ \textbf{C}: & \neg Q & \Phi \text{ és el neutre de la disjunció (10)} \end{array}$$

Alternativament, podem fer servir el mètode de reducció a l'absurd:

$$\begin{array}{lll} \textbf{P1}: & \neg P \rightarrow \neg Q \vee R & \\ \textbf{P2}: & S \rightarrow \neg Q & \\ \textbf{P3}: & \neg(P \wedge \neg S) & \\ \textbf{P4}: & \neg R \vee \neg Q & \\ \hline \textbf{P5}: & Q & \text{Premissa auxiliar (reducció a l'absurd)} \\ \textbf{P6}: & \neg S & \textit{Modus tollendo ponens} \text{ (2,5)} \\ \textbf{P7}: & \neg P \vee S & \text{Llei de De Morgan (3) i involutiva} \\ \textbf{P8}: & \neg P & \textit{Modus tollendo ponens} \text{ (7,6)} \\ \textbf{P9}: & \neg Q \vee R & \textit{Modus (ponendo) ponens} \text{ (1,8)} \\ \textbf{P10}: & R & \textit{Modus tollendo ponens} \text{ (9,5)} \\ \textbf{P11}: & \neg Q & \textit{Modus tollendo ponens} \text{ (4,10)} \\ \textbf{P12}: & Q \wedge \neg Q & \text{Llei de la unió (5,11)} \\ \textbf{C}: & \Phi & \text{Complementarietat (12)} \end{array}$$

Qüestió 5 (1 pt.) Proveu, pel mètode d'inducció, que, $\forall n \in \mathbb{N}$, es compleix que

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \cdots + 9 \cdot 10^n = 10^{n+1} - 10$$

Primer pas (cas base): Si $n = 1$, $9 \cdot 10 = 90$ i $10^2 - 10 = 100 - 10 = 90$, així que

$$9 \cdot 10 = 10^2 - 10$$

així que la propietat és certa per a $n = 1$.

Segon pas: Si la propietat és certa per a $n = k$, és a dir, si

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \cdots + 9 \cdot 10^k = 10^{k+1} - 10$$

hem de provar que també ho és per a $n = k + 1$, és a dir, que

$$9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \cdots + 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 10^{k+1} = 10^{k+2} - 10$$

Vegem-ho:

$$\begin{aligned}
\underbrace{9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \cdots + 9 \cdot 10^k}_{10^{k+1}-10} + 9 \cdot 10^{k+1} &= 10^{k+1} - 10 + 9 \cdot 10^{k+1} \\
&= 10^{k+1} + 9 \cdot 10^{k+1} - 10 \\
&= (1 + 9)10^{k+1} - 10 \\
&= 10 \cdot 10^{k+1} - 10 \\
&= 10^{k+2} - 10
\end{aligned}$$

Qüestió 6 (1 pt.) Siguen A, B i C tres conjunts tals que $B \subsetneq A$ i $C \subsetneq A$. Simplifiqueu l'expressió següent, indicant les propietats que utilitzeu:

$$\big(A \cup (B \cap C)\big) \cap \big(A^c \cup (B \cup C)\big)$$

Com que $B \subset A$ i $C \subset A$ llavors, $B \cap C \subset A$ i $B \cup C \subset A$
Per tant,

$$A \cup (B \cap C) = A \tag{1}$$
$$A \cap (B \cup C) = B \cup C \tag{2}$$

Així que

$$\begin{aligned}
\big(A \cup (B \cap C)\big) \cap \big(A^c \cup (B \cup C)\big) &= A \cap \big(A^c \cup (B \cup C)\big) && (1) \\
&= (A \cap A^c) \cup \big(A \cap (B \cup C)\big) && \text{Propietat distributiva} \\
&= \varnothing \cup (B \cup C) && \text{Complementari i (2)} \\
&= B \cup C && \varnothing \text{ és el neutre de la unió}
\end{aligned}$$

Qüestió 7 (1 pt.) Donats els conjunts $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, determineu

(a) Totes les aplicacions bijectives de B en B.

N'hi ha dues:

$$\begin{array}{rcl} f_1 : B & \longrightarrow & B \\ a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} f_2 : B & \longrightarrow & B \\ a & \mapsto & b \\ b & \mapsto & a \end{array}$$

(b) Totes les aplicacions injectives de A en B.

No n'hi ha, perquè $\text{card}(A) > \text{card}(B)$.

(c) Dues aplicacions injectives de B en A.

$$\begin{array}{rcl} g_1 : B & \longrightarrow & A \\ a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g_2 : B & \longrightarrow & A \\ a & \mapsto & 2 \\ b & \mapsto & 3 \end{array}$$

(en total, n'hi ha sis).

(d) Totes les aplicacions suprajectives de B en A.

No n'hi ha, perquè $\text{card}(A) > \text{card}(B)$.

Qüestió 8 (1 pt.) Siguen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les correspondències definides com:

$$f(x) = 19 - x^2 \qquad\qquad g(x) = x + 3$$

(a) Determineu, per extensió, el graf de la correspondència $g \circ f$.

$f(x)$ només es definit pels valors de x els quadrats dels quals no passen de 19:

$$\text{dom}\, f = \{1, 2, 3, 4\}$$

(perquè si $x > 4$, llavors $19 - x^2$ no és natural).

Llavors, les imatges de la composició són aquestes:

$$\begin{aligned} g \circ f(1) &= g(f(1)) = g(18) = 21 \\ g \circ f(2) &= g(f(2)) = g(15) = 18 \\ g \circ f(3) &= g(f(3)) = g(10) = 13 \\ g \circ f(4) &= g(f(4)) = g(3) = 6 \end{aligned}$$

En conseqüència, el graf és

$$G_{g \circ f} = \{(1, 21), (2, 18), (3, 13), (4, 6)\}$$

(b) Calculeu la correspondència g^{-1} i determineu si g^{-1} és una aplicació.

Si $g^{-1}(x) = y$ llavors, $g(y) = x$, és a dir, $y + 3 = x$, o bé, $y = x - 3$. Per tant, $g^{-1}(x) = x - 3$. Llavors, g^{-1} no és una aplicació, perquè no tots els nombres naturals tenen imatge; per exemple, no existeix $g^{-1}(1)$. També es pot justificar que no ho és observant que g no és bijectiva.

Qüestió 9 (1 pt.) Considerem el conjunt $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Determineu si les famílies de conjunts següents són particions i/o recobriments de A.

(1) $\{\{a, b, c\}, \{d, f\}, \{e, g\}\}$

(2) $\{\{a, c\}, \{b, d\}, \{f, e\}\}$

(3) $\{\{a, c, d\}, \{b, e\}\}$

(4) $\{\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{e, f\}\}$

(5) $\{\{a, b, c, d, e, f\}\}$

Per respondre aquesta qüestió, copieu el quadre adjunt i omple'l amb SÍ o NO, segons corresponga, tenient en compte que dues respostes incorrectes n'anul·laran una de correcta.

	Partició de A	Recobriment de A
(1)	No	Sí
(2)	Sí	Sí
(3)	No	No
(4)	No	Sí
(5)	Sí	Sí