Prácticas de Matemática Discreta: Introducción a la teoría de grafos

Sesiones 3 y 4: caminos, conexión y grafos eulerianos

Definición de camino

Un **camino** (de longitud n) en un grafo es una secuencia ordenada

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

de manera que:

a) $v_0, v_1, \dots, v_n$ son vértices del grafo,

b) $e_1, e_2, \dots, e_n$ son aristas del grafo,

c) v_{i-1} y v_i son los extremos de e_i para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

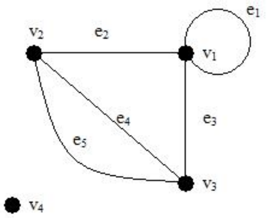
Diremos que v_0 es el *vértice inicial* y que v_n el *vértice final* del camino.

Nota: Si el grafo es simple, entonces cualquier camino en él está determinado por la secuencia de vértices y, por tanto, podemos omitir las aristas: $v_0 v_1 \dots v_n$.

Caminos especiales

- Un **camino** es **cerrado** si los vértices inicial y final coinciden.
- Un **camino** es **simple** si no contiene aristas repetidas.

Ejemplo:



(i) $v_1 e_1 v_1 e_3 v_3 e_4 v_2 e_5 v_3 e_3 v_1$ es un camino cerrado. No es un camino simple porque hay aristas repetidas (e_3 se repite).

(ii) $v_2 e_4 v_3 e_3 v_1$ es un camino simple con v_2 como vértice inicial y v_1 como vértice final.

Conexión

Vértices conectados

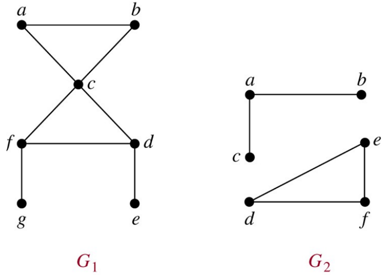
Dos **vértices** u y v de un grafo G se dice que están **conectados** si existe un camino en el grafo cuyos vértices inicial y final son u y v.

Grafos conexos y componentes conexas de un grafo

- Un **grafo** es **conexo** si dos vértices cualesquiera del grafo están conectados. Es decir, un grafo es conexo si dados dos vértices cualesquiera del grafo siempre existe un camino entre ellos.
- Si el grafo no es conexo, dado un vértice cualquiera v, el subgrafo determinado por todos los vértices que están conectados con v y las aristas que inciden en ellos es un subgrafo conexo.

  A cada uno de estos subgrafos conexos de un grafo los llamaremos **componentes conexas** del grafo.

Ejemplos



- G_1 es un grafo conexo (ya que cada vértice de G_1 está conectado con todos los demás).
- G_2 no es conexo. Tiene 2 componentes conexas: una de ellas es el subgrafo formado por los vértices a, b y c y las aristas que inciden en ellos y la otra es el subgrafo formado por los vértices d, e y f y las correspondientes aristas.

Caminos y grafos eulerianos

Definición

- Un camino en un grafo se dice que es un **camino euleriano** si es simple (es decir, no repite aristas) y contiene a todas las aristas del grafo.
- Un **grafo** es **euleriano** si contiene un camino euleriano cerrado.

OBSERVACIÓN: El problema de los "puentes de Königsberg", expresado en estos términos, consiste en decidir si el grafo asociado es euleriano.

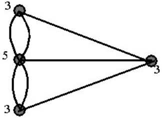
El siguiente teorema, debido a L. Euler, proporciona una caracterización de los grafos eulerianos y, por tanto, da respuesta, en particular, al problema de los "puentes de Königsberg".

Existencia de un camino euleriano cerrado

Teorema de Euler (parte 1)

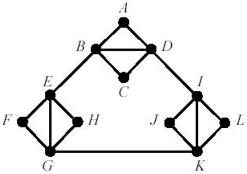
Sea G un grafo conexo. G es un grafo euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

Ejemplo:



El grafo del problema de los puentes de Königsberg **no** es euleriano (los grados de sus vértices aparecen en el dibujo). Luego no es posible recorrer todos los puentes sin pasar dos veces por el mismo puente y volviendo al punto de salida.

Ejemplo:



Aplicando el Teorema de Euler se deduce que este grafo es euleriano (ya que todos sus vértices tienen grado par).

Construcción de un camino euleriano cerrado

Algoritmo de Hierholzer

1. Comenzamos por cualquier vértice y vamos recorriendo un camino que no repita aristas hasta volver al vértice de salida (como el grafo tiene todos los vértices de grado par, llegará un momento en que necesariamente volvamos a ese vértice).
2. Si el camino anterior contiene a todas las aristas del grafo, entonces ya tenemos un camino euleriano cerrado. Si no, consideramos el subgrafo que se obtiene al eliminar las aristas ya recorridas y los vértices no incidentes con ninguna de las aristas que quedan.
3. El subgrafo obtenido tendrá al menos un vértice en común con el camino ya recorrido (como el grafo es euleriano, tiene todas las aristas en una única componente conexa). Empezando por ese vértice, volvemos a recorrer un camino simple hasta volver a él.
4. Repetimos el proceso hasta que ya no queden aristas.
5. Finalmente, concatenamos o insertamos (unos en otros) sucesivamente los caminos simples cerrados que hemos obtenido hasta obtener un camino euleriano cerrado.

Existencia de un camino euleriano no cerrado

Podemos hacernos una pregunta algo más general que la de decidir si un grafo es euleriano o no:

¿Existe un camino euleriano no necesariamente cerrado en el grafo?

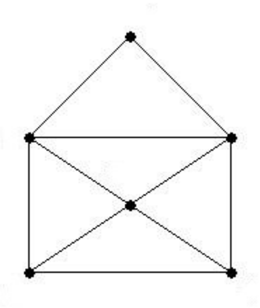
La segunda parte del Teorema de Euler da respuesta también a esta pregunta:

Teorema de Euler (parte 2)

Sea G un grafo conexo que no es euleriano. Entonces G contiene un camino euleriano no cerrado si y sólo si G tiene exactamente dos vértices de grado impar.
(En este caso, cualquier camino euleriano no cerrado tiene sus extremos en estos dos vértices).

Ejemplo

El siguiente grafo no es euleriano, aunque sí que contiene un camino euleriano no cerrado (por el Teorema de Euler, ya que posee exactamente dos vértices de grado impar).



Construcción de un camino euleriano no cerrado

Si un grafo conexo tiene exactamente 2 vértices de grado impar, ¿cómo se construye un camino euleriano abierto?

1. Añadimos una arista nueva que una esos 2 vértices de grado impar.
2. El nuevo grafo es euleriano (ya que todos sus vértices son de grado par), por tanto, podemos encontrar un camino euleriano cerrado en él aplicando el proceso visto anteriormente.
3. Cambiamos el vértice de salida de ese camino euleriano cerrado de forma que empecemos el camino por el extremo final de la arista que habíamos añadido (en el sentido del recorrido).
4. Suprimimos la arista que habíamos añadido, de manera que el camino resultante ya no es cerrado (será un camino euleriano no cerrado en el grafo original).

Nota: Otra opción para obtener un grafo euleriano sería añadir un vértice ficticio entre los dos vértices de grado impar y dos aristas ficticias que lo unan a los vértices de grado impar.