Examen de Computabilidad y Complejidad

(CMC)

17 de junio de 1997

(I) Cuestiones (justifique formalmente las respuestas)

1. Sea la operación P que trabaja sobre cadenas de la forma $P(x) = x^2$. Se extiende la operación P a lenguajes de la forma habitual. ¿ Es la familia de los lenguajes incontextuales cerrada respecto de P ?

   (1 pto)

   Solución

   La familia de los lenguajes incontextuales no es cerrada bajo P. Tomemos el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ que es incontextual dado que puede ser generado por la gramática $S \rightarrow aSb \mid \lambda$. Si aplicamos la operación P sobre L obtenemos $P(L) = \{a^n b^n a^n b^n : n \geq 0\}$ que no es incontextual tal y como se ha visto en clase mediante el lema de bombeo. Por lo tanto, al aplicar la operación P sobre un lenguaje incontextual, hemos obtenido un lenguaje no incontextual y, en consecuencia, la operación P no es de cierre para la clase de los lenguajes incontextuales.

2. Sean L_1 y L_2 dos lenguajes definidos sobre un mismo alfabeto. Sabemos que L_1 es un lenguaje recursivo, que $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje recursivamente enumerable y que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Demuéstrese que L_2 es un lenguaje recursivamente enumerable.

   (1.5 ptos)

   Solución

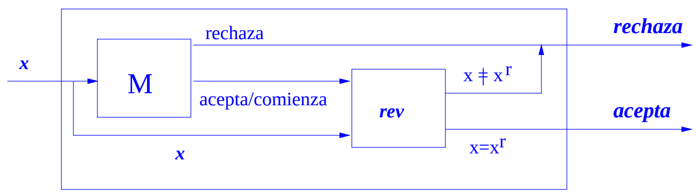
   Podemos expresar $L_2 = ((L_1 \cup L_2) - L_1) \cup (L_1 \cap L_2)$ que equivale a la expresión $L_2 = ((L_1 \cup L_2) \cap \overline{L_1}) \cup (L_1 \cap L_2)$. Sabemos que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y, por lo tanto, $L_2 = ((L_1 \cup L_2) \cap \overline{L_1})$. Por otra parte, L_1 es recursivo y, al ser la complementación una operación de cierre para la clase de los lenguajes recursivos, entonces $\overline{L_1}$ también es recursivo y, en consecuencia, recursivamente enumerable. Hemos reducido L_2 a la intersección de dos lenguajes recursivamente enumerables: $(L_1 \cup L_2)$ (ya que así se afirma en el enunciado) y $\overline{L_1}$. Dado que la clase de los lenguajes recursivamente enumerables es cerrada bajo la operación de intersección (tal y como se ha establecido en clase), podemos afirmar que L_2 es recursivamente enumerable.

3. Sea L un lenguaje recursivo. Definimos $L' = \{x \in L \mid x = x^r\}$. ¿ Es L' un lenguaje recursivo ?

   (1.5 ptos)

   Solución

   L' es recursivo. Propondremos una máquina de Turing que acepte a L' y que garantice la parada sea cual sea la cadena de entrada. Para ello contaremos con una máquina de Turing M que acepta a L y para ante cualquier entrada. Podemos asumir la existencia de la máquina M ya que se nos asegura en el enunciado que L es recursivo. De igual forma, contaremos con un módulo *rev* que comprueba si una cadena de entrada x es un palíndromo, es decir si $x = x^r$. El módulo *rev* se fundamenta en una máquina de Turing con dos cintas que copia la cadena de entrada a la segunda cinta y comprueba si la cadena es un palíndromo símbolo a símbolo invirtiendo las direcciones de las dos cabezas de cintas (la de entrada irá de izquierda a derecha y la de la segunda cinta de derecha a izquierda). A partir de los anteriores módulos proponemos la siguiente máquina de Turing cuyo esquema se muestra a continuación



El esquema anterior funciona tal y como se explica a continuación. Dada una cadena de entrada x se comprueba en primer lugar si $x \in L$ o no mediante la máquina M. Si $x \in L$ entonces se comprueba si $x = x^r$ mediante el módulo *rev*. En caso afirmativo se acepta la cadena de entrada (ya que pertenece a L'). En el caso de que $x \notin L$ o que $x \neq x^r$ se rechaza la cadena de entrada (ya que no pertenece a L'). Puesto que el esquema anterior garantiza la parada y acepta L' podemos concluir que L' es recursivo.

4. ¿ Son incontextuales los siguientes lenguajes ?

   (a) $L_1 = \{x_1 x_2 x_2^r x_1^r \mid x_1, x_2 \in (0+1)^*\}$

   (b) $L_2 = \{0^i 1^j 0^{min(i,j)} \mid i, j \geq 1\}$

(2 ptos)

Solución

Nos pronunciaremos sobre la incontextualidad o no de cada lenguaje por separado.

(a) L_1 sí es incontextual. Obsérvese que $L_1 = \{ww^r \mid w \in (0+1)^*\}$. Podemos definir una gramática incontextual que genere L_1 mediante las producciones $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \lambda$.

(b) L_2 no es incontextual. Comprobemos que L_2 no cumple el lema de bombeo para lenguajes incontextuales. Supongamos que n es la constante del lema y tomemos $z = 0^n 1^n 0^n \in L_2$ de forma que $|z| = 3n > n$. Dado que $z = uvwxy$ analizaremos por separado cada caso de localización de las subcadenas v y x:

   i. Supongamos que v y x se encuentran en el primer bloque de ceros de la cadena z y $|vx| = j \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 0$ y formemos la cadena $uwy = 0^{n-j} 1^n 0^n$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos.

   ii. Supongamos que v y x se encuentran en el bloque de unos de la cadena z y $|vx| = j \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 0$ y formemos la cadena $uwy = 0^n 1^{n-j} 0^n$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos.

iii. Supongamos que v y x se encuentran en el segundo bloque de ceros de la cadena z y $|vx| = j \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 2$ y formemos la cadena $uvvwxxy = 0^n1^n0^{n+j}$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos.

iv. Supongamos que v y x están formadas por ceros del primer bloque y unos de forma que $|vx|_0 = j \geq 1$ y $|vx|_1 = k \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 0$ y formemos la cadena $uwy = 0^{n-j}1^{n-k}0^n$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos.

v. Supongamos que v y x están formadas por ceros del segundo bloque y unos de forma que $|vx|_0 = j \geq 1$ y $|vx|_1 = k \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 2$ y formemos la cadena $uvvwxxy$. Si v está formada sólo por unos y x está formada sólos por ceros del segundo bloque, entonces $uvvwxxy = 0^n1^{n+k}0^{n+j}$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos. Por otra parte, si v o x contienen unos y ceros del segundo bloque, entonces $uvvwxxy$ contendrá dos bloques de unos separados por ceros y, de nuevo, se forma una cadena que no pertenece al lenguaje ya que, en las cadenas de L_2, sólo puede haber un bloque de unos.

Dado que en todos los casos posibles de localización de las subcadenas v y x hemos podido demostrar que L_1 no cumple el lema de bombeo, podemos concluir que L_2 no es incontextual.

(II) PROBLEMAS:

5. Sean dos gramáticas incontextuales G y G'. Sea la sustitución incontextual σ definida como $\sigma(a) = L(G')$ y $\sigma(b) = \{a\}$. Sea el homomorfismo h tal que $h(a) = aa$ y $h(b) = \lambda$. Se pide construir una gramática G'' tal que:

$$L(G'') = [\sigma(L(G))]^* \cup h(L(G')).$$

$G : S \to aAS \mid a; \qquad A \to SbA \mid SS \mid ba$

$G' : S \to bA \mid aB; \qquad A \to bAA \mid aS \mid a; \qquad B \to aBB \mid bS \mid b$

(2 ptos)

Solución

En primer lugar renombramos los auxiliares para la gramática de sustitución $\sigma(a)$:

$S_a \to bA_a \mid aB_a$

$A_a \to bA_aA_a \mid aS_a \mid a$

$B_a \to aB_aB_a \mid bS_a \mid b$

A continuación, proporcionamos una gramática para el lenguaje $\sigma(L(G))$. Obsérvese que, para aplicar la sustitución $\sigma(b) = \{a\}$ basta con cambiar el símbolo b por el símbolo a

$S \to S_aAS \mid S_a$

$A \to SaA \mid SS \mid aS_a$

$S_a \to bA_a \mid aB_a$

$A_a \to bA_aA_a \mid aS_a \mid a$

$B_a \to aB_aB_a \mid bS_a \mid b$

Obtenemos ahora una gramática para el lenguaje $[\sigma(L(G))]^*$

$S_1 \to SS_1 \mid \lambda$

$S \to S_aAS \mid S_a$

$A \to SaA \mid SS \mid aS_a$

$S_a \to bA_a \mid aB_a$

$A_a \to bA_aA_a \mid aS_a \mid a$

$B_a \to aB_aB_a \mid bS_a \mid b$

Para el lenguaje $h(L(G'))$ proponemos la siguiente gramática

$S_h \to A_h \mid aaB_h$

$A_h \to A_hA_h \mid aaS_h \mid aa$

$B_h \to aaB_hB_h \mid S_h \mid \lambda$

Por último, proponemos la siguiente gramática para el lenguaje $L(G'') = [\sigma(L(G))]^* \cup h(L(G'))$ donde S_2 actúa como axioma

$S_2 \to S_1 \mid S_h$

$S_1 \to SS_1 \mid \lambda$

$S \to S_aAS \mid S_a$

$A \to SaA \mid SS \mid aS_a$

$S_a \to bA_a \mid aB_a$

$A_a \to bA_aA_a \mid aS_a \mid a$

$B_a \to aB_aB_a \mid bS_a \mid b$

$S_h \to A_h \mid aaB_h$

$A_h \to A_hA_h \mid aaS_h \mid aa$

$B_h \to aaB_hB_h \mid S_h \mid \lambda$