(Justifique las respuestas)

Cuestión 1 **(1½ puntos)**

Determine si el lenguaje $L = \{a^i b^j c^k \;:\; i = j \;\vee\; i \neq k\}$ es regular o no.

Solución:

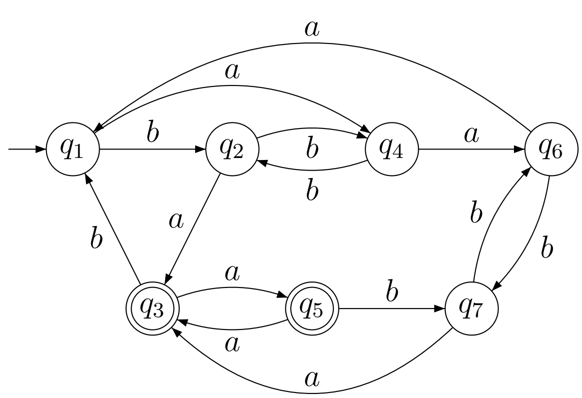
Sea el lenguaje infinito $C = \{a^n \;:\; n \geq 1\}$, y considerese un par cualesquiera de palabras de C distintas, $u = a^i$ y $v = a^j$ $(i \neq j)$.

Independientemente de las palabras escogidas, existe una palabra $w = c^i$, tal que $uw = a^i c^i$ no pertenece al lenguaje L y $vw = a^j c^i$ pertenece a L. Por lo tanto, en cualquier posible autómata finito determinista que aceptara L, el análisis de las palabras u y v alcanzarían estados distintos. Dado que la elección de las palabras es indistinta y el tamaño de C es infinito, no es posible que exista un autómata finito para el lenguaje, por lo que el lenguaje no es regular.

Alternativamente, por el mismo argumento se prueba que cada una de las palabras en C es representante de una clase distinta de la relación de Nerode para el lenguaje R_L, con lo que esta relación tiene un número infinito de clases y el lenguaje no es regular.

Cuestión 2 **(1½ puntos)**

Obtener el AFD mínimo equivalente al siguiente autómata:



Solución:

Una traza del algoritmo de minimización de Moore para el autómata del ejercicio es la siguiente:

$$\pi_0 = \{\{q_1, q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_3, q_5\}\}$$

	π_0	a	b
$[1]_{\pi_0}$	q_1	$[1]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_2	$[3]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_4	$[1]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_6	$[1]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_7	$[3]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
$[3]_{\pi_0}$	q_3	$[3]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_5	$[3]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$

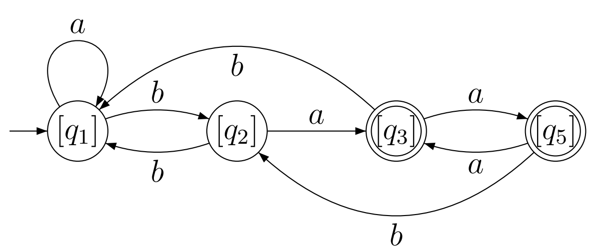
$$\pi_1 = \{\{q_1, q_4, q_6\}, \{q_2, q_7\}, \{q_3, q_5\}\}$$

	π_1	a	b
$[1]_{\pi_1}$	q_1	$[1]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
	q_4	$[1]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
	q_6	$[1]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
$[2]_{\pi_1}$	q_2	$[3]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
	q_7	$[3]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
$[3]_{\pi_1}$	q_3	$[3]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
	q_5	$[3]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$

$$\pi_2 = \{\{q_1, q_4, q_6\}, \{q_2, q_7\}, \{q_3\}, \{q_5\}\}$$

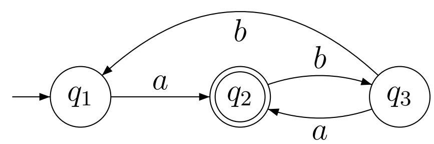
	π_2	a	b
$[1]_{\pi_2}$	q_1	$[1]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
	q_4	$[1]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
	q_6	$[1]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
$[2]_{\pi_2}$	q_2	$[3]_{\pi_2}$	$[1]_{\pi_2}$
	q_7	$[3]_{\pi_2}$	$[1]_{\pi_2}$
$[3]_{\pi_2}$	q_3	$[5]_{\pi_2}$	$[1]_{\pi_2}$
$[3]_{\pi_2}$	q_5	$[3]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$

con lo que el autómata mínimo equivalente es el siguiente:



Cuestión 3 **(1½ puntos)**

Dado el autómata:



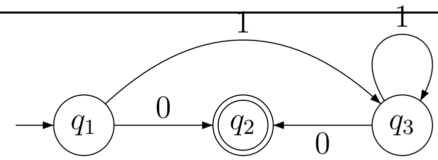
y el homomorfismo definido como:

$$\begin{cases} h(0) = a \\ h(1) = ab \end{cases}$$

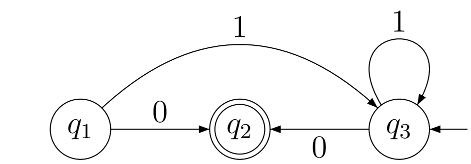
Obtener un AFD para el lenguaje obtenido por la operación $\overline{(11)^{-1}(h^{-1}L(A))}$.

Solución:

Aplicamos primero la construcción para el homomorfismo inverso y obtenemos:

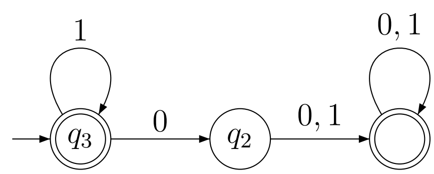


Posteriormente consideramos la construcción para el cociente y obtenemos el autómata que acepta $(11)^{-1}(h^{-1}L(A))$:



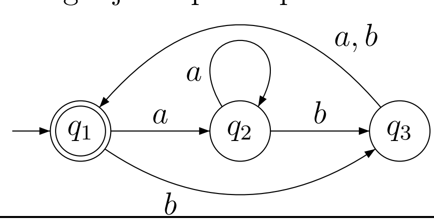
(el estado q_1 no es accesible y puede ser eliminado).

Finalmente, aplicando la construcción para el autómata complementario (nótese que es necesario completar el autómata) el AFD para el lenguaje $\overline{(11)^{-1}(h^{-1}L(A))}$.



Cuestión 4 **(1½ puntos)**

Utilice el método visto en clase para analizar el siguiente autómata y obtener una expresión regular que describa el lenguaje aceptado por él.



Solución:

El sistema de ecuaciones en expresiones regulares asociado al autómata es:

$$\begin{cases} X_1 = aX_2 + bX_3 + \lambda \\ X_2 = aX_2 + bX_3 \\ X_3 = (a+b)X_1 \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Arden en la segunda ecuación puede obtenerse que:

$$X_2 = a^*bX_3,$$

teniendo en cuenta que $X_1 = X_2 + \lambda$ y sustituyendo se obtiene:

$$\begin{cases} X_1 = X_2 + \lambda = a^*bX_3 + \lambda \\ X_3 = (a+b)X_1 \end{cases}$$

y sustituyendo de nuevo obtenemos que $X_1 = a^*b(a+b)X_1 + \lambda$ y aplicando por última vez el lema de Arden se obtiene:

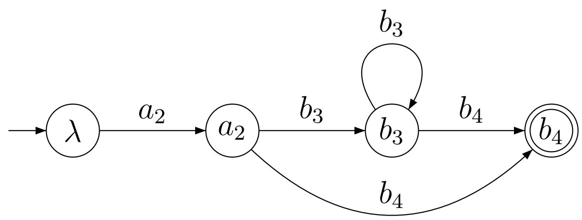
$$X_1 = (a^*b(a+b))^*$$

Cuestión 5 **(2 puntos)**

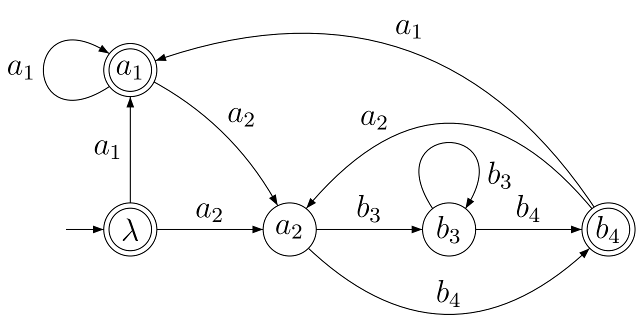
Obtener el autómata de posición y *follow* de la expresión $\alpha = (a^* + ab^*b)^*b + ab$.

Solución:

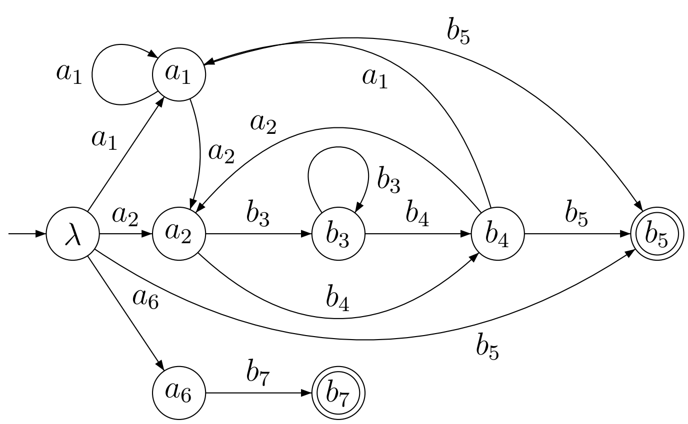
Considerando la expresión linearizada $\overline{\alpha} = (a_1^* + a_2b_3^*b_4)^*b_5 + a_6b_7$, el autómata local estandar para la subexpresión $a_2b_3^*b_4$ es el siguiente:



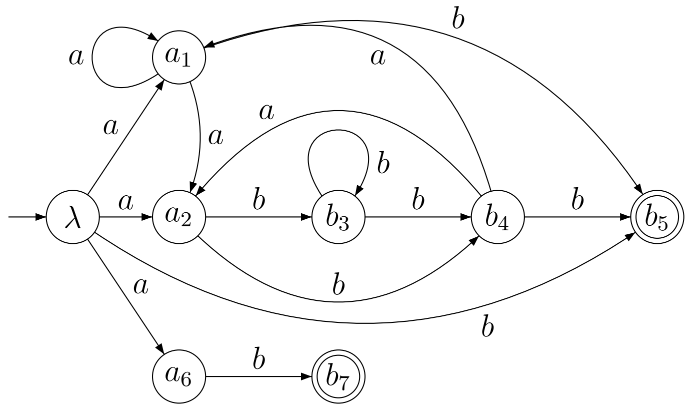
el autómata local estandar para la subexpresión $(a_1^* + a_2b_3^* + b_4)^*$ es el siguiente:



el autómata local estandar de que acepta $L(\overline{\alpha})$ es:



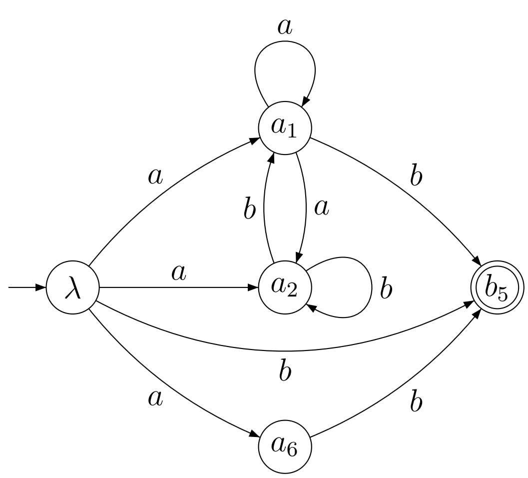
y el autómata de posición para α:



La relación $follow$ para este autómata se resume en la siguiente tabla:

	$\in F$	*sucesores*
λ	F	$\{a_1, a_2, b_5, a_6\}$
a_1	F	$\{a_1, a_2, b_5\}$
a_2	F	$\{b_3, b_4\}$
b_3	F	$\{b_3, b_4\}$
b_4	F	$\{a_1, a_2, b_5\}$
b_5	T	$\emptyset$
a_6	F	$\{b_7\}$
b_7	T	$\emptyset$

con lo que el autómata follow es el siguiente:



Cuestión 6 **(1 punto)**

Enumere las 5 primeras palabras en orden canónico del lenguaje $(ba)^{-1}(a^*b(ab)^*)$.

Solución:

$b, bab, babab, bababab, babababab$

Cuestión 7 **(1 punto)**

Pruebe la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

> Dados dos lenguajes L_1 y L_2 sobre el mismo alfabeto Σ y tales que $L_1 \in \mathcal{L}_3$ y $L_2 \notin \mathcal{L}_3$, siempre se cumple que si $L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{L}_3$ entonces $(L_1 \cup L_2)^* \notin \mathcal{L}_3$.

Solución:

La afirmación es falsa. Para demostrarlo considérese el siguiente contraejemplo.

Consideremos $L_1 = \{a, b\}$, que obviamente es regular, y $L_2 = \{a^n b^n \ : \ n \geq 0\}$ que, como se ha visto en clase, es un lenguaje no regular. El lenguaje $L_1 \cup L_2$ no es regular y puede demostrarse idénticamente a cómo se demuestra que L_2 no es regular. Sin embargo, $(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^*$ es un lenguaje regular, lo que demuestra la falsedad de la afirmación.