Inferencia en Lógica de proposiciones

Inferencia

Llamamos **inferencia** o **demostración** o **prueba** al proceso que permite, partiendo de unas proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que se suponen ciertas (llamadas **premisas o hipótesis)**, obtener una proposición C, llamada **conclusión**.

Es decir, lo que se hace es justificar que $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \longrightarrow C$ es una implicación lógica (tautología) mediante una secuencia finita de pasos consistentes en utilizar las llamadas leyes de inferencia (que estudiaremos a continuación).

Técnicas más habituales en los procesos de inferencia

1. Inferencia directa
2. Inferencia condicional
3. Inferencia bicondicional
4. Inferencia por reducción al absurdo

Nota

Una alternativa al proceso de inferencia es utilizar la tabla de verdad de $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \longrightarrow C$ para justificar que es una tautología

Inferencia directa en Lógica de proposiciones

1. Inferencia directa

La inferencia directa consiste en deducir la conclusión directamente a partir de las premisas, usando una serie de reglas denominadas leyes de inferencia.

Leyes generales de inferencia

1. Ley de las premisas
   Cualquier premisa puede ser utilizada en cualquier paso del proceso de inferencia
2. Ley de inserción de tautologías
   En cualquier paso puede introducirse una tautología como premisa
3. Ley de uso de equivalencias lógicas
   Cualquier forma proposicional puede ser sustituida por otra equivalente

Inferencia directa en Lógica de proposiciones

Reglas de inferencia

1. Modus ponendo ponens (o modus ponens) (i.e., *modo de afirmar afirmando*)

$\{P \rightarrow Q, P\} \vdash Q$

Ejemplo

P1. Si venís antes de las 5 os llevo en coche
P2. Venís antes de las 5

Conclusión Os llevo en coche

P=venís antes de las 5

Q=os llevo en coche

2. Modus tollendo tollens (o modus tollens) (i.e., *modo de negar negando)*

$\{ P \rightarrow Q, \urcorner Q\} \vdash \urcorner P$

Ejemplo

P1. Si venís antes de las 5 os llevo en coche
P2. No os llevo en coche

Conclusión No venís antes de las 5

Inferencia directa en Lógica de proposiciones

3. Transitividad (o silogismo hipotético)

$\{P \to Q, Q \to R\} \vdash (P \to R)$

Ejemplo

P=venís antes de las 5
Q=os llevo en coche
R=llegáis a tiempo

P1. Si venís antes de las 5 os llevo en coche
P2. Si os llevo en coche llegaréis a tiempo al concierto
Conclusión Si venís antes de las 5 llegaréis a tiempo al concierto

4. Silogismo disyuntivo

$\{\neg P, P \vee Q\} \vdash Q$

Ejemplo

P= estudiamos MAD
Q= estudiamos Física

P1. Esta tarde vamos a estudiar MAD o Fisica
P2. Esta tarde no estudiamos Física
Conclusión Esta tarde estudiamos MAD

Inferencia directa en Lógica de proposiciones

5. Regla de la conjunción.

$\{P,Q\} \vdash P \wedge Q$

Si en cualquier paso tenemos la forma proposicional P
y tenemos también la forma proposicional Q,
entonces podemos introducir la forma proposicional $P \wedge Q$

6. Regla de la simplificación

$\{P \wedge Q\} \vdash P$, $\{P \wedge Q\} \vdash Q$

Si tenemos la conjunción de dos formas proposicionales podemos eliminar una de ellas

7. Regla de la unión

$\{P\} \vdash P \vee Q$

Si tenemos una forma proposicional P podemos añadir (con "o") cualquier otra forma proposicional Q

Inferencia directa en Lógica de proposiciones

8. Las siguientes reglas permiten obtener una conclusión a partir de dos condicionales
   - $\{(P \longrightarrow R),\ (Q \longrightarrow S)\} \vdash ((P \wedge Q) \longrightarrow (R \wedge S))$
   - $\{(P \longrightarrow R),\ (Q \longrightarrow S)\} \vdash ((P \vee Q) \longrightarrow (R \vee S))$

9.

$\{(P \vee Q), (P \vee \urcorner\, Q)\} \vdash P$

REGLAS DE INFERENCIA

1. Modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

2. Modus tollens

$$\frac{\begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ \neg Q \end{array}}{\neg P}$$

3. Transitividad

$$\frac{\begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ Q \longrightarrow R \end{array}}{P \longrightarrow R}$$

4. Silogismo disyuntivo

$$\frac{\begin{array}{l} \neg P \\ P \vee Q \end{array}}{Q}$$

5. Regla de la simplificación

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

6. Regla de la conjunción

$$\frac{\begin{array}{l} P \\ Q \end{array}}{P \wedge Q}$$

7. Regla de la unión

$$\frac{P}{P \vee Q}$$

Inferencia condicional en Lógica de proposiciones

¿Y en la práctica?

Considerando ciertas las premisas P_1, P_2, …, P_n, queremos probar P

- Las n premisas se disponen en n filas, numeradas P_1, P_2,… , P_n
- Se aplican reglas y equivalencias a cualquiera de las líneas anteriores y se rellena una nuevas fila:
  - se escribe en columna con las anteriores P_1, P_2, …, P_n
  - se numera correlativamente con las anteriores
  - **se indica en una nueva columna a la derecha la regla aplicada y a que filas se ha aplicado**
- Se repite el procedimiento, pudiendo utilizarse todas las proposiciones escritas en la misma columna

Nota

- Este método puede mezclarse con otros, como la inferencia condicional y la reducción al absurdo que se estudian más adelante

Inferencia condicional en Lógica de proposiciones

Inferencia condicional

La **inferencia condicional** consiste en probar una implicación $P \longrightarrow Q$ a partir de varias hipótesis (premisas) $P_1, P_2, \ldots, P_n$, basándonos en la equivalencia

$$(P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)) \equiv ((P \wedge Q) \longrightarrow R) \qquad (*)$$

¿Cómo proceder?

A partir de las n premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, queremos probar $P \longrightarrow Q$

- Esto es equivalente por definición a demostrar que
  $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$ es una tautología
- Por la equivalencia comentada (*), esto es equivalente a probar que
  $((P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge P) \longrightarrow Q)$ es tautología
- Quitando paréntesis, esto es equivalente a probar que
  $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge P) \longrightarrow Q$ es tautología

Nuestro problema es equivalente a probar que
de las n+1 premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n, P$ se obtiene la conclusión Q

Inferencia condicional en Lógica de proposiciones

¿Y en la práctica?

Considerando ciertas las premisas P_1, P_2, …, P_n, queremos probar $P \longrightarrow Q$

- Se disponen en n filas, numeradas P_1, P_2,… , P_n las n premisas
- Se escribe P (antecedente del condicional que se quiere probar) en una fila n+1 (o posterior si se ha rellenado ya alguna fila más aplicando reglas y equivalencias a alguna/s de las premisas), **en una columna situada a la derecha de la última columna escrita**. Se etiqueta más a su derecha como premisa auxiliar
- Se aplican reglas y equivalencias a cualquiera de las líneas anteriores, incluyendo la que acabamos de añadir, y se rellenan nuevas filas. Se escribe en columna, pero ahora **debajo de la premisa auxiliar** introducida (es decir, en una columna desplazada a la derecha). Se explicita a su derecha la regla utilizada
- Se continua el proceso aplicando reglas a todas las premisas situadas en la columna en la que nos encontramos o cualquiera más hacia la izquierda. Se sigue escribiendo debajo de la premisa auxiliar.
- Cuando se obtiene Q (consecuente del condicional a demostrar), se escribe $P \longrightarrow Q$ en una nueva fila, esta vez bajo la columna de las premisas originales y se etiqueta con "ley de la exportación"

Inferencia condicional en Lógica de proposiciones

Notas

1.-

- Pueden introducirse tantas premisas auxiliares (y por tanto tantos desplazamientos de columna hacia la derecha) como se considere necesario
- Se vuelve a la columna inmediatamente anterior utilizando la ley de exportación que nos permitirá escribir
- "premisa auxiliar $\longrightarrow$ cualquiera de las proposiciones de las líneas debajo de ella"

2.-

- Este método puede mezclarse con otros, como la reducción al absurdo que se estudia más adelante

Inferencia por contradicción en Lógica de proposiciones

Inferencia por contradicción o reducción al absurdo

Este método consiste en probar mediante inferencia condicional que de la **negación de la conclusión** se obtiene una contradicción.

Por lo tanto nuestra premisa auxiliar (negación de la conclusión) será falsa, y por la regla de la doble negación la conclusión será cierta.
Se basa en la equivalencia (ley de absurdo)

$$(S \longrightarrow \phi) \equiv \neg S \qquad (1)$$

¿Cómo proceder?

En general, si queremos obtener una forma proposicional S,

- Supondremos $\neg S$ como premisa auxiliar (inferencia condicional)
- Aplicando inferencia condicional llegaremos a $\neg S \longrightarrow \phi$
- Por la ley de reducción al absurdo (1) y la doble negación obtenemos S

Inferencia bicondicional en L. de proposiciones

Inferencia bicondicional

Se utiliza cuando la conclusión a deducir es una expresión del tipo $P \leftrightarrow Q$.

Se basa en la equivalencia entre condicional y bicondicional:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \quad (*)$$

¿Cómo proceder?

A partir de las n premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, queremos probar $P \leftrightarrow Q$

- Considerando la equivalencia (*) esto es equivalente a probar

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Nuestro problema es equivalente a probar que de las n+1 premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n, P$ se obtiene

a) $P \rightarrow Q$
b) $Q \rightarrow P$

Ejercicios

(nº 13 del fichero "Ejercicios de Lógica de enunciados")

Traduce a lógica proposicional las siguientes expresiones y demuestra que la conclusión obtenida es correcta

Los viernes elijo entre estudiar e ir al cine. Si quiero aprobar el examen del lunes tendré que quedarme a estudiar. Hoy es viernes y decididamente quiero aprobar el examen del lunes., así que mejor esta tarde no voy al cine

Terminología matemática habitual

Lemas, Teoremas, proposiciones y corolarios

La palabra **teorema** se usa para los resultados que se consideran principales, y la palabra **proposición** para los menos importantes.
Un **corolario** es una consecuencia directa (o casi directa) de un cierto teorema y un **lema** es un resultado previo auxiliar (con frecuencia de carácter técnico) que se usa en la demostración de un cierto teorema.

Más sobre teoremas

Sea el teorema $P \longrightarrow Q$

- El teorema $\neg Q \longrightarrow \neg P$ se denomina **contrarrecíproco** de $P \longrightarrow Q$, y es equivalente al teorema directo $P \longrightarrow Q$.
- El condicional $\neg P \longrightarrow \neg Q$ no tiene por qué ser un teorema
- El condicional $Q \longrightarrow P$ se denomina **recíproco** y no tiene por qué ser un teorema