Prácticas de Matemática Discreta: Introducción a la teoría de grafos

Sesión 7

Camino de peso mínimo

Definició

Si $C = v_0 e_1 v_1, \ldots e_n v_n$ es un camino de un grafo Γ, se define el *peso* de C, $w(C)$, como la suma de los pesos de todas sus aristas. Es decir:

$$w(C) = \sum_{i=1}^{n} w(e_i).$$

Problema

Dados dos vértices v_1 y v_2 de un grafo, encontrar un camino C de vértice inicial v_1 y vértice final v_2 tal que su peso $w(C)$ sea el menor posible (es decir, un *camino de peso mínimo*).

Algoritmo de Dijkstra (idea)

- Requisito: Existe, al menos, un camino que conecta los vértices v_1 y v_2.
- La idea del algoritmo de Dijkstra consiste en comenzar por el vértice inicial v_1 y moverse a través del grafo asignando una *etiqueta* $E(u)$ a cada vértice u que representa el peso del camino más corto descubierto hasta el momento entre v y u.
- Los valores $E(u)$ son considerados, inicialmente, como temporales, y pueden cambiar si descubrimos un camino de v_1 a u que tenga un peso menor que el valor actual de $E(u)$.
- El algoritmo construye un subgrafo, que es un árbol, y que contiene a los vértices v_1 y v_2.
- Uno de los caminos de peso mínimo entre v_1 y v_2 es el único camino simple del árbol obtenido que conecta v_1 con v_2.

Algoritmo de Dijkstra (descripción)

1) Si v_1 denota el vértice inicial, asignamos $E(v_1) = 0$ y diremos que v_1 ha sido *etiquetado* con el valor 0. Además, esta etiqueta es *permanente*, ya que no cambiaremos más el su valor. Como tenemos que construir una secuencia de árboles, empezamos con el árbol T consistente sólo en el vértice v_1 (sin ninguna arista).

2) Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

- **a)** Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).
- **b)** Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado *a*). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.

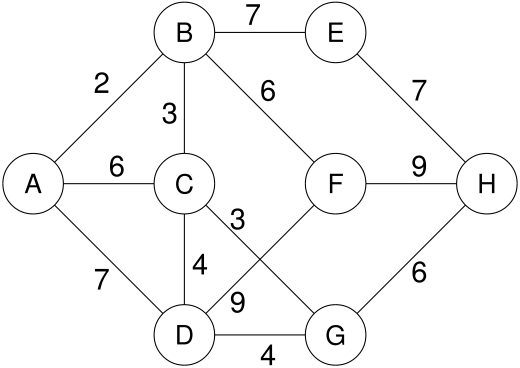
Algoritmo de Dijkstra (descripción)

3) Elegimos un vértice a con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.

4) Repetimos los pasos 2 y 3 hasta que el vértice final v_2 haya recibido una *etiqueta permanente*. Un *camino de peso mínimo* entre v_1 y v_2 es el único camino simple del árbol T que une v_1 y v_2; su peso (el *peso mínimo*) es $E(v_2)$.

Ejemplo

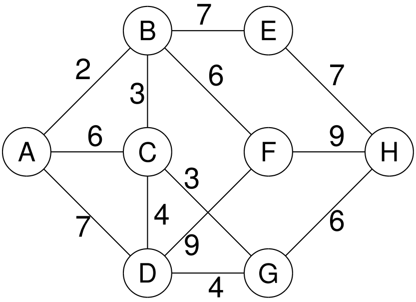
Queremos calcular un camino de peso mínimo entre los vértices A y H del siguiente grafo:



Paso 1)

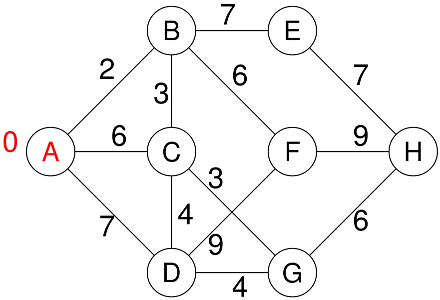
Si v_1 denota el vértice inicial, asignaremos $E(v_1) = 0$ (etiqueta permanente).

T: árbol consistente sólo en el vértice v_1 (sin ninguna arista).



Paso 1)

Si v_1 denota el vértice inicial, asignaremos $E(v_1) = 0$ (etiqueta permanente).
T: árbol consistente sólo en el vértice v_1 (sin ninguna arista).

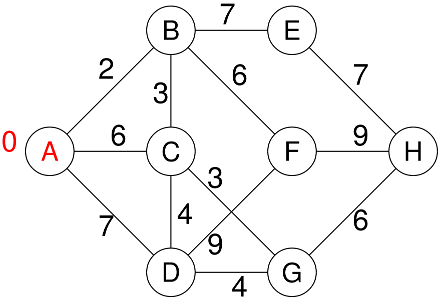


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado a). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.

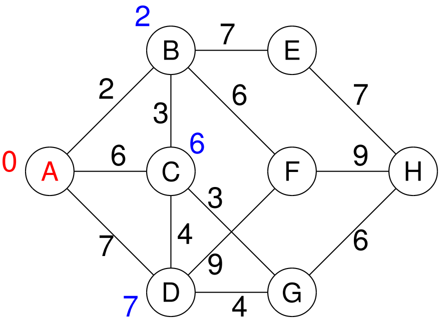


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

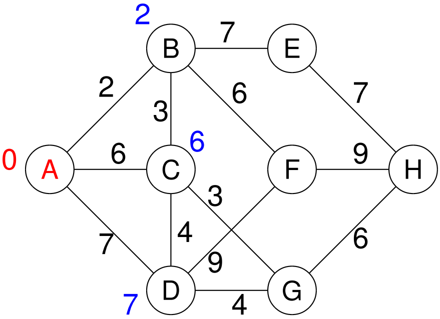
a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado *a*). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.



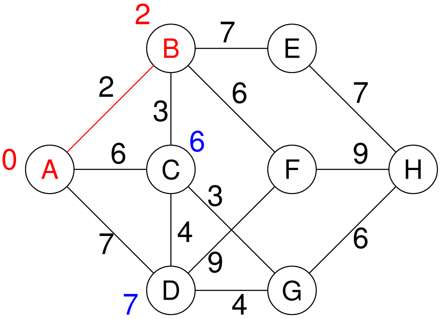
Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.



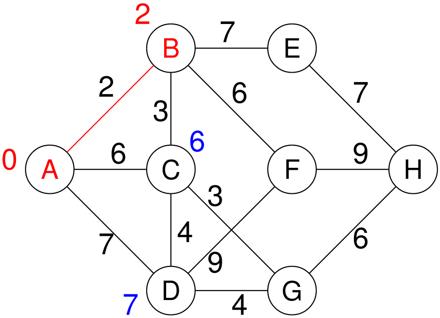
Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.



Paso 4)

Repetimos los pasos 2 y 3 hasta que el vértice final v_2 haya recibido una *etiqueta permanente*.

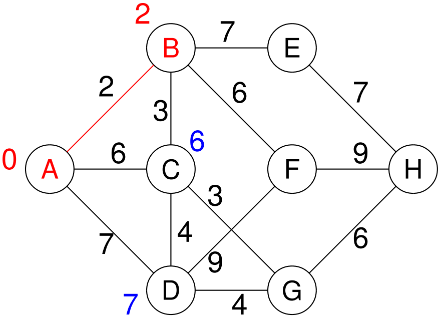


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado *a*). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.

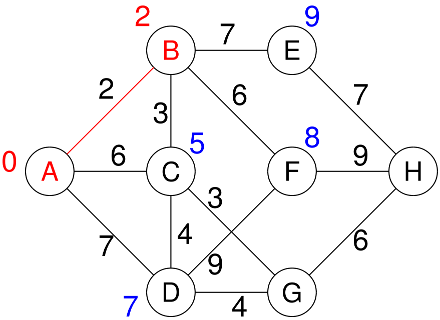


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

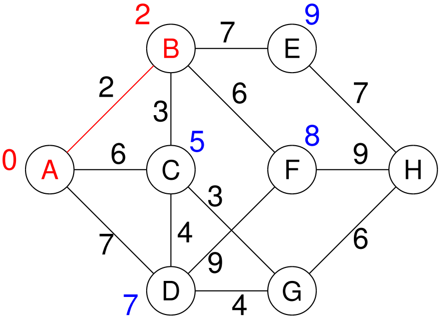
a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado *a*). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.



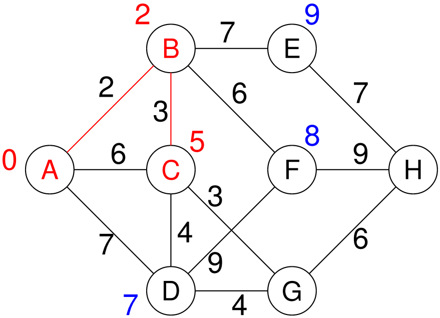
Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol *T* la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.



Paso 3)

Elegimos un vértice a con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.

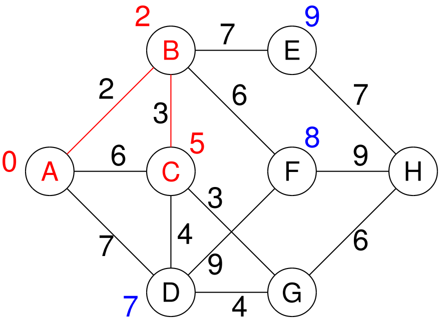


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

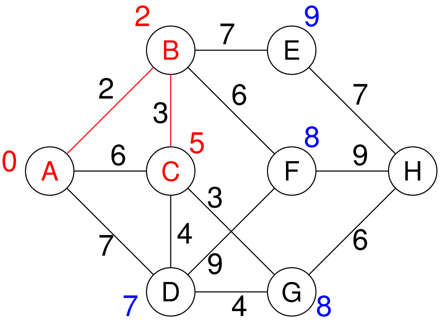
b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado a). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.



Paso 2)

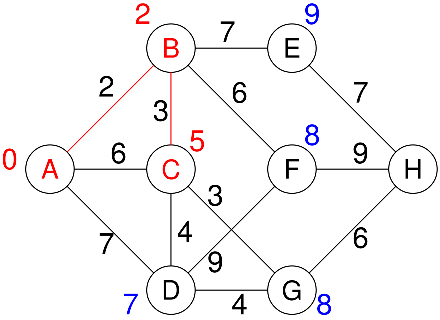
Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

- **a)** Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).
- **b)** Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado *a*). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.



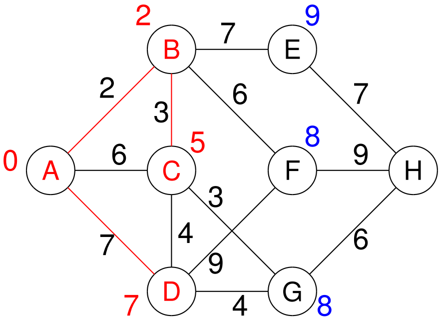
Paso 3)

Elegimos un vértice a con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.



Paso 3)

Elegimos un vértice a con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.

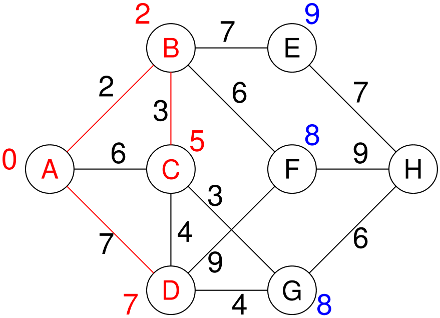


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

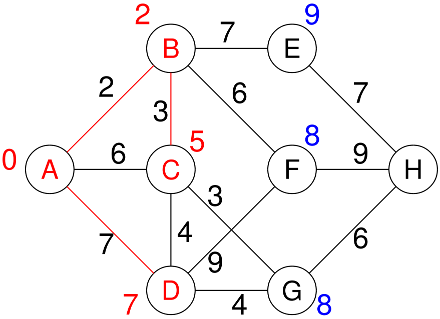
a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado a). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.



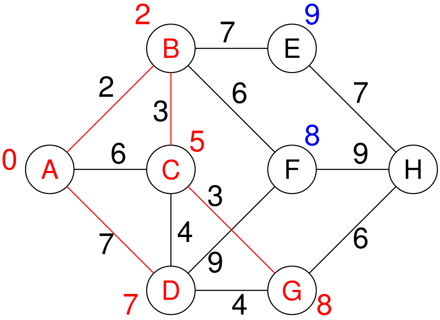
Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.



Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.

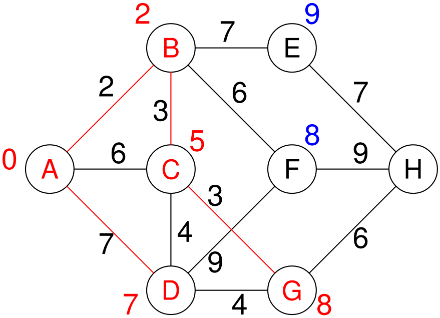


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado a). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.

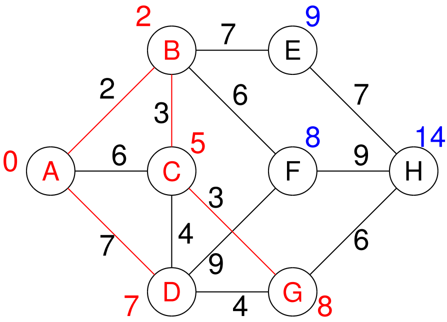


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

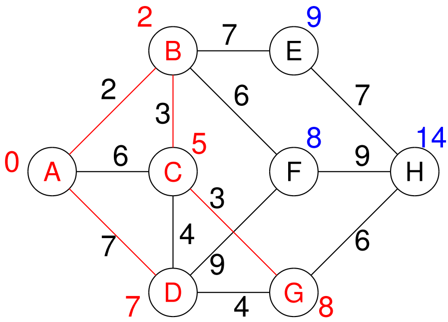
a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado a). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.



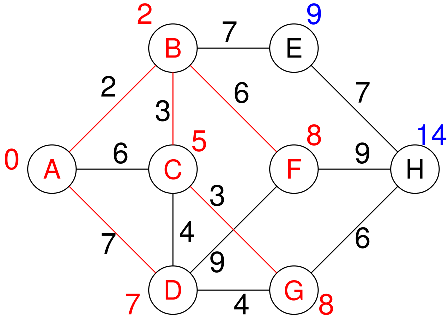
Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.



Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.

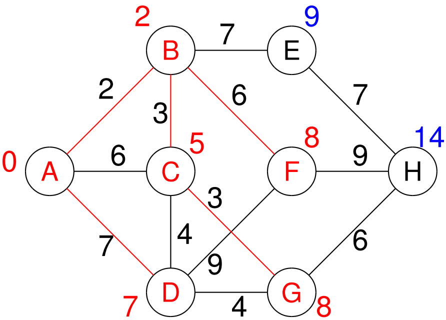


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

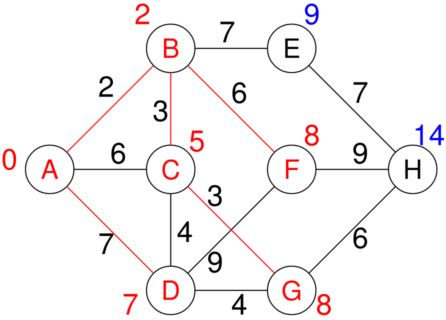
a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado *a*). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.



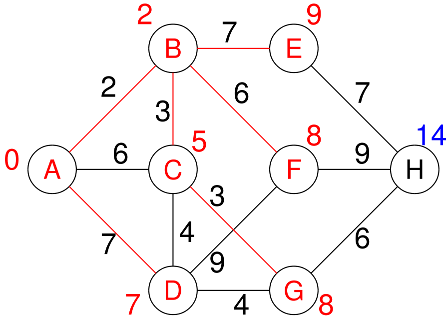
Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.



Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.

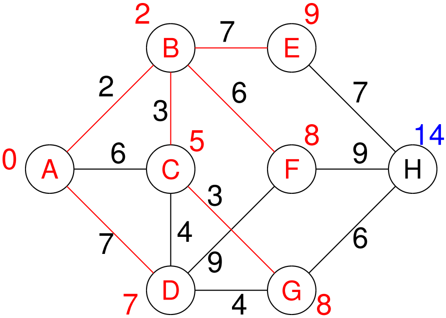


Paso 2)

Sea u el vértice que más recientemente ha sido etiquetado de forma *permanente*. Consideramos cada vértice u' adyacente a u (y sin etiqueta permanente) y le asignamos una *etiqueta temporal* de la siguiente manera:

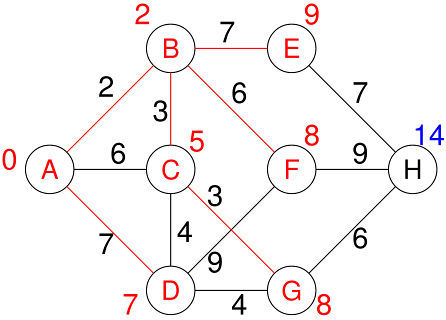
a) Si u' no tiene etiqueta, entonces definimos $E(u') = E(u) + w(e)$, donde e es la arista que une u y u'. (Si hay más de una arista uniendo u y u', elegimos aquella que tenga el menor peso).

b) Si u' ya tiene etiqueta, entonces calculamos $E(u) + w(e)$ como en el apartado a). Si este número es menor que $E(u')$, entonces cambiamos el valor de $E(u')$ por $E(u) + w(e)$; de lo contrario, $E(u')$ no cambia.



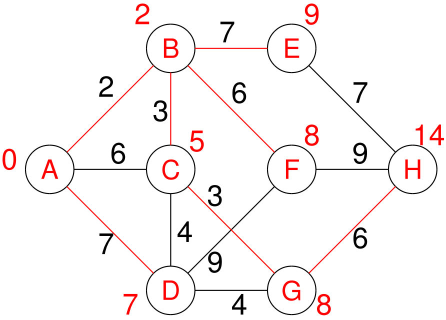
Paso 3)

Elegimos un vértice a con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.

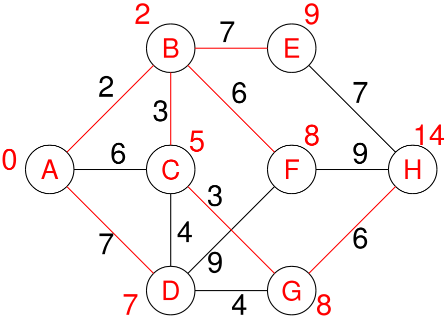


Paso 3)

Elegimos un vértice *a* con *etiqueta temporal mínima* (no necesariamente adyacente al vértice etiquetado más recientemente) y convertimos en *permanente* su etiqueta. Añadimos al árbol T la arista que ha dado lugar al valor $E(a)$.



Un *camino de peso mínimo* entre v_1 y v_2 es el único camino simple del árbol T que une $v_1 = A$ y $v_2 = H$; su peso (el *peso mínimo*) es $E(v_2)$.



Un *camino de peso mínimo* entre v_1 y v_2 es el único camino simple del árbol T que une $v_1 = A$ y $v_2 = H$; su peso (el *peso mínimo*) es $E(v_2)$.