

(Justifique las respuestas)

### Cuestión 1

(2 puntos)

Determine si el lenguaje  $L = \{axyax : x, y \in \{a, b\}^*\}$  es regular o no.

#### Solución:

Demostraremos que no lo es por reducción al absurdo. Supongamos que  $L$  es regular, por lo tanto, existirá un AFD  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  tal que  $L(A) = L$ .

Consideremos el conjunto infinito de palabras  $C = \{ab^i : i \geq 1\}$ , y tomemos dos palabras cualesquiera de este conjunto,  $u = ab^n$  y  $v = ab^m$  con  $n \neq m$ . Consideremos sin pérdida de generalidad que  $n > m$ .

Considerando la palabra  $w = ab^n$ , comprobamos que  $uw = ab^n ab^n \in L$  (puede verse que, en este caso, la palabra puede factorizarse de acuerdo con la descripción del lenguaje tomando  $x = a^n$  y considerando  $y = \lambda$ ), pero donde  $vw = ab^m ab^n \notin L$  (al ser  $m < n$ , en este caso la división de  $vw$  en factores no permite considerar una palabra  $x$  que cumple la definición del lenguaje).

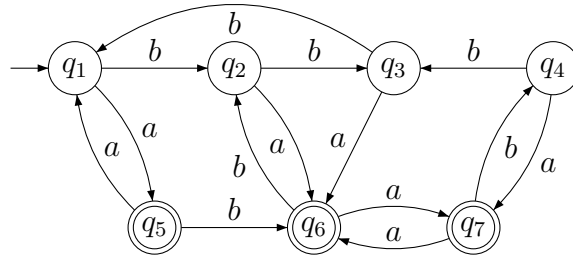
Esto implica que el estado que se alcanza al procesar en  $A$  la palabra  $u$  es distinto del estado que se alcanza al procesar  $v$  ( $\delta(q_0, u) \neq \delta(q_0, v)$ ), por lo que, ya que  $C$  contiene infinitas palabras y la elección de  $u$  y  $v$  se hace sin condición de ningún tipo, el AFD  $A$  debería tener infinitos estados, lo que supone una contradicción, e implica que el lenguaje no es regular.

De forma análoga, puede verse que, independientemente de las palabras  $u$  y  $v$  escogidas los cocientes del lenguaje respecto a estas palabras son distintos, por lo que la relación  $\equiv_L$  es de índice infinito y por lo tanto  $L$  no es regular.

### Cuestión 2

(2 puntos)

Obtener el AFD mínimo equivalente al siguiente autómata:



#### Solución:

A partir de la partición inicial del conjunto de estados considerando la pertenencia de estos al conjunto de estados finales:

$$\pi_0 = \{\{q_1, q_3, q_5, q_7\}, \{q_2, q_4, q_6, q_8\}\},$$

Una traza del algoritmo de minimización de Moore para el autómata del ejercicio es la siguiente:

$\pi_0$		a	b
$[1]_{\pi_0}$	$q_1$	$[5]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	$q_2$	$[5]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	$q_3$	$[5]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	$q_4$	$[5]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
$[5]_{\pi_0}$	$q_5$	$[1]_{\pi_0}$	$[5]_{\pi_0}$
	$q_6$	$[5]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	$q_7$	$[5]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$

$$\pi_1 = \{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_5\}, \{q_6, q_7\}\}$$

$\pi_1$		a	b
$[1]_{\pi_1}$	$q_1$	$[5]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
	$q_2$	$[6]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
	$q_3$	$[6]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
	$q_4$	$[6]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
$[5]_{\pi_1}$	$q_5$	$[1]_{\pi_1}$	$[6]_{\pi_1}$
$[6]_{\pi_1}$	$q_6$	$[6]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
	$q_7$	$[6]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$

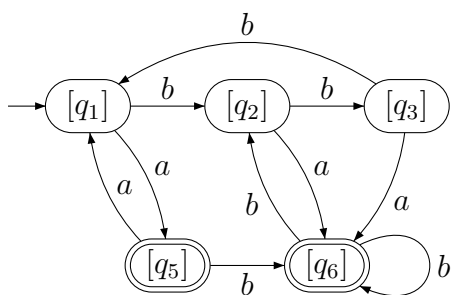
$$\pi_2 = \{\{q_1\}, \{q_2, q_3, q_4\}, \{q_5\}, \{q_6, q_7\}\}$$

$\pi_2$		a	b
$[1]_{\pi_2}$	$q_1$	$[5]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
$[2]_{\pi_2}$	$q_2$	$[6]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
	$q_3$	$[6]_{\pi_2}$	$[1]_{\pi_2}$
	$q_4$	$[6]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
	$q_5$	$[1]_{\pi_2}$	$[6]_{\pi_2}$
$[6]_{\pi_2}$	$q_6$	$[6]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
	$q_7$	$[6]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$

$$\pi_3 = \{\{q_1\}, \{q_2, q_4\}, \{q_3\}, \{q_5\}, \{q_6, q_7\}\}$$

$\pi_3$		a	b
$[1]_{\pi_3}$	$q_1$	$[5]_{\pi_3}$	$[2]_{\pi_3}$
$[2]_{\pi_3}$	$q_2$	$[6]_{\pi_3}$	$[3]_{\pi_3}$
	$q_4$	$[6]_{\pi_3}$	$[3]_{\pi_3}$
$[3]_{\pi_3}$	$q_3$	$[6]_{\pi_3}$	$[1]_{\pi_3}$
$[5]_{\pi_3}$	$q_5$	$[1]_{\pi_3}$	$[6]_{\pi_3}$
$[6]_{\pi_3}$	$q_6$	$[6]_{\pi_3}$	$[2]_{\pi_3}$
	$q_7$	$[6]_{\pi_3}$	$[2]_{\pi_3}$

con lo que el autómata mínimo equivalente es el siguiente:



**Cuestión 3****(2 puntos)**

Dados los autómatas siguientes:

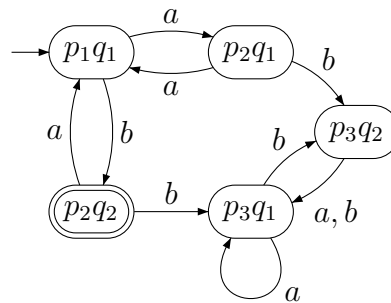


Obtenga un AFD para el lenguaje obtenido por la operación  $L(A_1) \ominus L(A_2)$ , donde  $\ominus$  denota la diferencia simétrica.

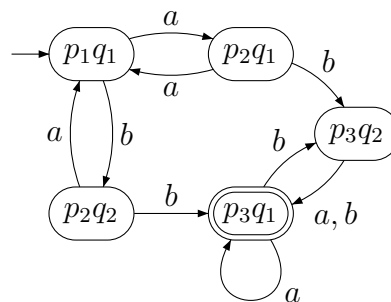
**Solución:**

Comprobamos que  $A_1$  no es completo. Pese a que no es necesario para construir algunos resultados parciales, consideraremos el autómata equivalente completo.

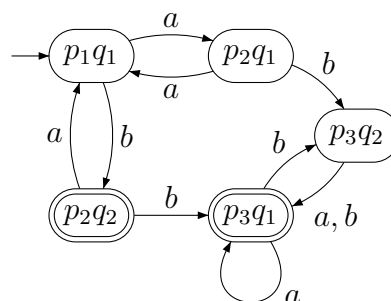
Teniendo en cuenta que  $L(A_1) \ominus L(A_2) = L(A_1) - L(A_2) \cup L(A_2) - L(A_1)$ , obtenemos un autómata para  $L(A_1) - L(A_2) = L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}$ .



Obtenemos un autómata para  $L(A_2) - L(A_1) = \overline{L(A_1)} \cap L(A_2)$ .



Finalmente consideramos estos autómatas y obtenemos uno que acepte la unión de estos.

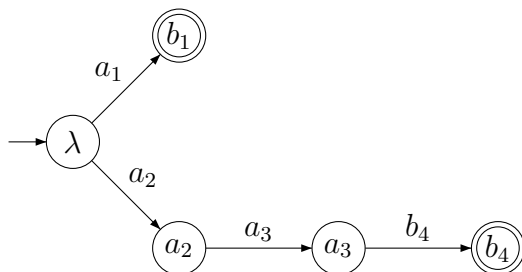


**Cuestión 4****(2 puntos)**

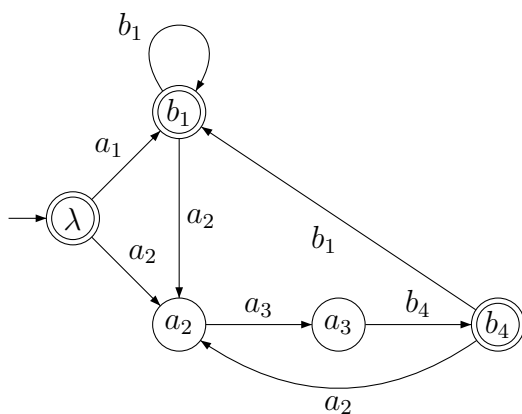
Obtener los autómatas de posición y *follow* de la expresión  $\alpha = (b + aab)^*(\lambda + aa)$ .

**Solución:**

Considerando la expresión linearizada  $\bar{\alpha} = (b_1 + a_2a_3b_4)^*(\lambda + a_5a_6)$ , el autómata local estandar para la subexpresión  $b_1 + a_2a_3b_4$  es el siguiente:



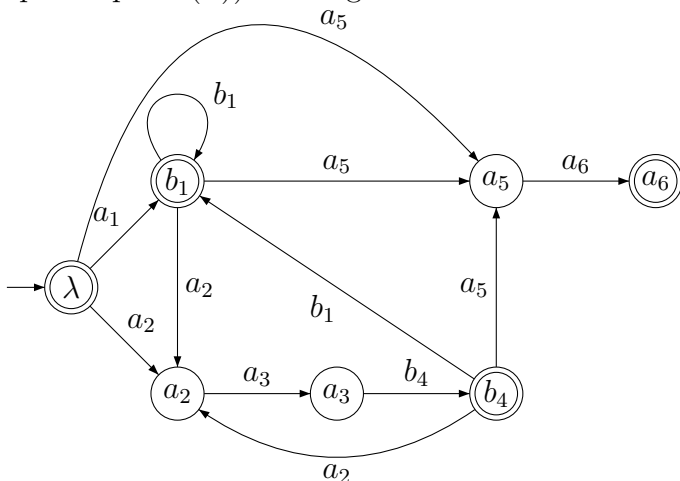
y considerando este último, el autómata local estandar para la subexpresión  $(b_1 + a_2a_3b_4)^*$  es:



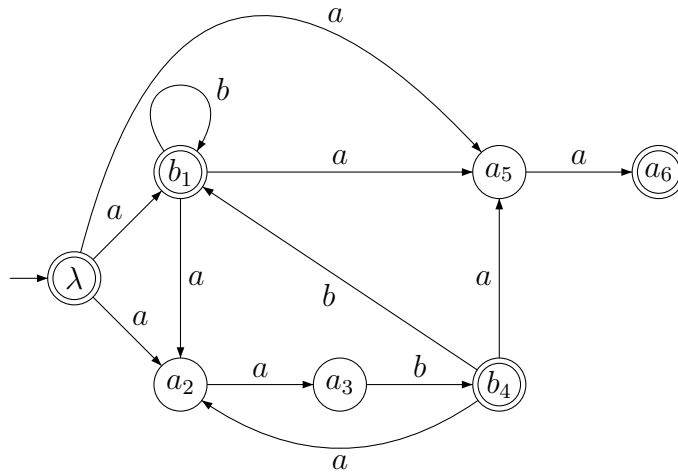
por otra parte, el autómata local estandar para  $\lambda + a_5a_6$  es el siguiente:



con lo que el autómata local estandar para  $(b_1 + a_2a_3b_4)^*(\lambda + a_5a_6)$  (el autómata local estandar de que acepta  $L(\bar{\alpha})$ ) es el siguiente:



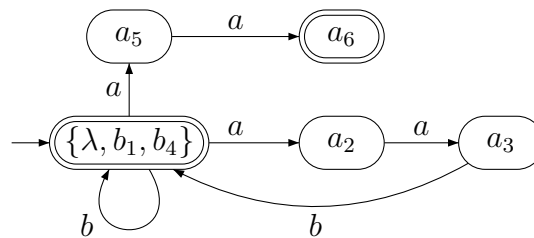
y el autómata de posición para  $\alpha$  el siguiente:



La relación *follow* para este autómata se resume en la siguiente tabla:

	$\in F$	<i>sucesores</i>
$\lambda$	T	$\{b_1, a_2, a_5\}$
$b_1$	T	$\{b_1, a_2, a_5\}$
$a_2$	F	$\{a_3\}$
$a_3$	F	$\{b_4\}$
$b_4$	T	$\{b_1, a_2, a_5\}$
$a_5$	F	$\{a_6\}$
$a_6$	F	$\emptyset$

con lo que el autómata follow es el siguiente:



### Cuestión 5

(2 puntos)

Dado un alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ , se define la operación  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  como:

$$\begin{cases} f(\lambda) = \lambda \\ f(ax) = xa \end{cases}$$

para cualquier símbolo  $a$  de  $\Sigma$  y cualquier palabra  $x$  de  $\Sigma^*$ . Esta operación se extiende a lenguajes como:

$$f(L) = \{f(x) : x \in L\}.$$

¿Es la operación  $f$  cerrada en la clase de los lenguajes regulares?

**Ejemplo:** Dado  $L = \{\lambda, a, ba, abbab\}$ , se obtiene  $P(L) = \{\lambda, a, ab, bbaba\}$

**Solución:**

Nótese que la operación puede describirse como:

$$f(L) = (L \cap \{\lambda\}) \cup (a^{-1}L)\{a\} \cup (b^{-1}L)\{b\}$$

por lo que, teniendo que cuenta que, para la descripción de la operación, únicamente se consideran lenguajes regulares y operaciones cerradas en la clase de los lenguajes regulares, podemos concluir que la operación  $f$  es de cierre.