Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

17 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление

1.1. Билет 1: NAME

1.2. Билет 2: NAME

1.3. Билет 3: NAME

1.4. Билет 4: NAME

1.5. Билет 5: NAME

1.6. Билет 6: NAME

1.7. Билет 7: NAME

1.8. Билет 8: NAME

1.9. Билет 9: NAME

1.10. Билет 10: NAME

1.11. Билет 11: NAME

2. Метрические и нормированные пространства

2.1. Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

***Определение* 2.1.**

Метрическое пространства - пара $\langle X, \rho \rangle$, где X - множество, $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ - метрика, ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника, $\triangle$)

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}$: $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$.

Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}^2$ - длина отрезка: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга межту точками.

Пример.

Манхэттанская метрика на $\mathbb{R}^2$: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример.

Французкая железнодорожная метрка: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если A и B на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если на разных: $\rho(A, B) = AP + PB$, где P - центральный объект.

Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если A и B находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть A, B - на разных лучах $\implies A \neq B,\ A, B \neq P$.

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \impliedby AP, PB > 0.$$
$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть C лежит на одной ветке с A:

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = AC + (CP + PB) = (AC + CP) + PB \geqslant AP + PB = \rho(A, B).$$

Пусть C лежит на собственной ветке:

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = (AP + PC) + (CP + PB) \geqslant AP + PB = \rho(A, B).$$ □

***Определение* 2.2.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$.

Замкнутым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leqslant r\}$.

Свойства.

$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$

Если $a \neq b$, то $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap B_r(b) = \varnothing$.

Доказательство.

Возьмём $r = \frac{\rho(a,b)}{2}$.

Пусть $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$.

Тогда $\rho(a, x) < \frac{\rho(a,b)}{2}$ и $\rho(x, b) < \frac{\rho(a,b)}{2}$.

Но тогда $\rho(a, x) + \rho(x, b) < \rho(a, b)$, противоречие с $\triangle$. □

Аналогичная пара свойств есть и у $\overline{B}$.

2.2. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

***Определение* 2.3.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

***Определение* 2.4.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

1. $\varnothing$, X - откткрыте множества.

2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

   Доказательство.

   Пусть $\forall \alpha \in I \quad A_\alpha$ - открытое множество. $A := \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмём точку a, $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$.

   Так-как A_β открытое, $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$. □

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

   Доказательство.
   Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.

   Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.

   Пусть $r = \min\limits_k r_k > 0$.

   Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. □

4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.

   Доказательство.
   Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.

   Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned} y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\ &\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\ &\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\ &\overset{\triangle}{\implies} \rho(y, a) < r \\ &\implies y \in B_r(a) \end{aligned}$$

□

2.3. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множе- ства. Свойства.

Определение* 2.5** (повтор).***
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

Свойства.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\operatorname{Int} A \subset A$

2. $\operatorname{Int} A$ - объеденение всех открытых множеств содержащихся в A.

   Доказательство.
   Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое.

   $\operatorname{Int} A \subset G$:

$$\begin{aligned} x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\ &\implies x \in \operatorname{Int} A \end{aligned}$$

   $G \subset \operatorname{Int} A$: $x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. □

3. $\operatorname{Int} A$ - откртое множество

   Доказательство.
   A - объединение открытых множеств, значит открыто. $\square$

4. $\operatorname{Int} A = A \iff A$ - открыто

   Доказательство.
   Необходимость ($\implies$): $\operatorname{Int} A$ открыто.

   Достаточность ($\impliedby$): A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies$ $A = \operatorname{Int} A$. $\square$

5. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$

6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

   Доказательство.
   В сторону $\subset$:

$$\begin{aligned} A \cap B \subset A &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \\ A \cap B \subset B &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B \\ &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \end{aligned}$$

   В сторону $\supset$:

$$\begin{aligned} &x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \\ &x \in \operatorname{Int} A \\ &x \in \operatorname{Int} B \\ &\exists r_1 \quad B_{r_1}(x) \subset A \\ &\exists r_2 \quad B_{r_2}(x) \subset B \\ &B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \\ &x \in \operatorname{Int}(A \cap B) \end{aligned}$$

   $\square$

7. $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

   Доказательство.
   Заметим, что $\operatorname{Int} A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. $\square$

2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

***Определение* 2.6.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. $\varnothing, X$ - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство.

   $$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

   □

   Так-как $\forall \alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ - откртоые, значит $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство.

   $$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

   □

   $X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ - замкнуто.

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.

   Доказательство.
   Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) > r\}$ - открыто.
   Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x, a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing$:
   Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x, y) < \tilde{r}$, $\rho(y, a) < r$.

   $$\rho(x, a) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a).$$

   Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

2.5. Билет 16: NAME

2.6. Билет 17: NAME

2.7. Билет 18: NAME

2.8. Билет 19: NAME

2.9. Билет 20: NAME

2.10. Билет 21: NAME

2.11. Билет 22: NAME

2.12. Билет 23: NAME

2.13. Билет 24: NAME

2.14. Билет 25: NAME

2.15. Билет 26: NAME

2.16. Билет 27: NAME

2.17. Билет 28: NAME

2.18. Билет 29: NAME

2.19. Билет 30: NAME

2.20. Билет 31: NAME

2.21. Билет 32: NAME

2.22. Билет 33: NAME

2.23. Билет 34: NAME

2.24. Билет 35: NAME

2.25. Билет 36: NAME

2.26. Билет 37: NAME

2.27. Билет 38: NAME

2.28. Билет 39: NAME

3. Числовые и функциональные ряды

3.1. Билет 40: NAME

3.2. Билет 41: NAME

3.3. Билет 42: NAME

3.4. Билет 43: NAME

3.5. Билет 44: NAME

3.6. Билет 45: NAME

3.7. Билет 46: NAME

3.8. Билет 47: NAME

3.9. Билет 48: NAME

3.10. Билет 49: NAME

3.11. Билет 50: NAME

3.12. Билет 51: NAME

3.13. Билет 52: NAME

3.14. Билет 53: NAME

3.15. Билет 54: NAME

3.16. Билет 55: NAME

3.17. Билет 56: NAME

3.18. Билет 57: NAME

3.19. Билет 58: NAME

3.20. Билет 59: NAME

3.21. Билет 60: NAME

3.22. Билет 61: NAME

3.23. Билет 62: NAME

3.24. Билет 63: NAME

3.25. Билет 64: NAME

3.26. Билет 65: NAME

3.27. Билет 66: NAME

4. Функции нескольких переменных

4.1. Билет 73: NAME

4.2. Билет 74: NAME

4.3. Билет 75: NAME

4.4. Билет 76: NAME

4.5. Билет 77: NAME

4.6. Билет 78: NAME

4.7. Билет 79: NAME

4.8. Билет 80: NAME

4.9. Билет 81: NAME

4.10. Билет 82: NAME

4.11. Билет 83: NAME

4.12. Билет 84: NAME

4.13. Билет 85: NAME

4.14. Билет 86: NAME

4.15. Билет 87: NAME

4.16. Билет 88: NAME

4.17. Билет 89: NAME

4.18. Билет 90: NAME

4.19. Билет 91: NAME

4.20. Билет 92: NAME

4.21. Билет 93: NAME

4.22. Билет 94: NAME

4.23. Билет 95: NAME

4.24. Билет 96: NAME

4.25. Билет 97: NAME

4.26. Билет 98: NAME

5. Теория меры

5.1. Билет 99: NAME

5.2. Билет 100: NAME

5.3. Билет 101: NAME

5.4. Билет 102: NAME