

Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

17 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление	1
1.1 Билет 1: NAME	1
1.2 Билет 2: NAME	1
1.3 Билет 3: NAME	1
1.4 Билет 4: NAME	1
1.5 Билет 5: NAME	1
1.6 Билет 6: NAME	1
1.7 Билет 7: NAME	1
1.8 Билет 8: NAME	1
1.9 Билет 9: NAME	1
1.10 Билет 10: NAME	1
1.11 Билет 11: NAME	1
2. Метрические и нормированные пространства	2
2.1 Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.	2
2.2 Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.	3
2.3 Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.	4
2.4 Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.	5
2.5 Билет 16: NAME	7
2.6 Билет 17: NAME	7
2.7 Билет 18: NAME	7
2.8 Билет 19: NAME	7
2.9 Билет 20: NAME	7
2.10 Билет 21: NAME	7
2.11 Билет 22: NAME	7
2.12 Билет 23: NAME	7
2.13 Билет 24: NAME	7

2.14 Билет 25: NAME	7
2.15 Билет 26: NAME	7
2.16 Билет 27: NAME	7
2.17 Билет 28: NAME	7
2.18 Билет 29: NAME	7
2.19 Билет 30: NAME	7
2.20 Билет 31: NAME	7
2.21 Билет 32: NAME	7
2.22 Билет 33: NAME	7
2.23 Билет 34: NAME	7
2.24 Билет 35: NAME	7
2.25 Билет 36: NAME	7
2.26 Билет 37: NAME	7
2.27 Билет 38: NAME	7
2.28 Билет 39: NAME	7

3. Числовые и функциональные ряды **8**

3.1 Билет 40: NAME	10
3.2 Билет 41: NAME	10
3.3 Билет 42: NAME	10
3.4 Билет 43: NAME	10
3.5 Билет 44: NAME	10
3.6 Билет 45: NAME	10
3.7 Билет 46: NAME	10
3.8 Билет 47: NAME	10
3.9 Билет 48: NAME	10
3.10 Билет 49: NAME	10
3.11 Билет 50: NAME	10
3.12 Билет 51: NAME	10
3.13 Билет 52: NAME	10
3.14 Билет 53: NAME	10
3.15 Билет 54: NAME	10
3.16 Билет 55: NAME	10
3.17 Билет 56: NAME	10
3.18 Билет 57: NAME	10
3.19 Билет 58: NAME	10
3.20 Билет 59: NAME	10
3.21 Билет 60: NAME	10
3.22 Билет 61: NAME	10

3.23 Билет 62: NAME	10
3.24 Билет 63: NAME	10
3.25 Билет 64: NAME	10
3.26 Билет 65: NAME	10
3.27 Билет 66: NAME	10
3.28 Билет 67: NAME	10
3.29 Билет 68: NAME	10
3.30 Билет 69: NAME	10
3.31 Билет 70: NAME	10
3.32 Билет 71: NAME	10
3.33 Билет 72: NAME	10
4. Функции нескольких переменных	11
4.1 Билет 73: NAME	13
4.2 Билет 74: NAME	13
4.3 Билет 75: NAME	13
4.4 Билет 76: NAME	13
4.5 Билет 77: NAME	13
4.6 Билет 78: NAME	13
4.7 Билет 79: NAME	13
4.8 Билет 80: NAME	13
4.9 Билет 81: NAME	13
4.10 Билет 82: NAME	13
4.11 Билет 83: NAME	13
4.12 Билет 84: NAME	13
4.13 Билет 85: NAME	13
4.14 Билет 86: NAME	13
4.15 Билет 87: NAME	13
4.16 Билет 88: NAME	13
4.17 Билет 89: NAME	13
4.18 Билет 90: NAME	13
4.19 Билет 91: NAME	13
4.20 Билет 92: NAME	13
4.21 Билет 93: NAME	13
4.22 Билет 94: NAME	13
4.23 Билет 95: NAME	13
4.24 Билет 96: NAME	13
4.25 Билет 97: NAME	13
4.26 Билет 98: NAME	13

5. Теория меры	14
5.1 Билет 99: NAME	14
5.2 Билет 100: NAME	14
5.3 Билет 101: NAME	14
5.4 Билет 102: NAME	14

1. Интегральное исчисление

1.1. Билет 1: NAME

1.2. Билет 2: NAME

1.3. Билет 3: NAME

1.4. Билет 4: NAME

1.5. Билет 5: NAME

1.6. Билет 6: NAME

1.7. Билет 7: NAME

1.8. Билет 8: NAME

1.9. Билет 9: NAME

1.10. Билет 10: NAME

1.11. Билет 11: NAME

2. Метрические и нормированные пространства

2.1. Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

Определение 2.1.

Метрическое пространства - пара $\langle X, \rho \rangle$, где X - множество, $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ - метрика, ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника, \triangle)

Пример.

Обычная метрика на \mathbb{R} : $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$.

Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример.

Обычная метрика на \mathbb{R}^2 - длина отрезка: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга между точками.

Пример.

Манхэттанская метрика на \mathbb{R}^2 : $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример.

Французкая железнодорожная метрика: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если A и B на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если на разных: $\rho(A, B) = AP + PB$, где P - центральный объект.

Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если A и B находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть A, B - на разных лучах $\implies A \neq B, A, B \neq P$.

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \iff AP, PB > 0.$$

$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть C лежит на одной ветке с A :

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = AC + (CP + PB) = (AC + CP) + PB \geq AP + PB = \rho(A, B).$$

Пусть C лежит на собственной ветке:

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = (AP + PC) + (CP + PB) \geq AP + PB = \rho(A, B). \quad \square$$

Определение 2.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$.

Замкнутым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$.

Свойства.

$$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$$

Если $a \neq b$, то $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$.

Доказательство.

Возьмём $r = \frac{\rho(a, b)}{2}$.

Пусть $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$.

Тогда $\rho(a, x) < \frac{\rho(a, b)}{2}$ и $\rho(x, b) < \frac{\rho(a, b)}{2}$.

Но тогда $\rho(a, x) + \rho(x, b) < \rho(a, b)$, противоречие с Δ . □

Аналогичная пара свойств есть и у \overline{B} .

2.2. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

Определение 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\text{Int } A$.

Определение 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

1. \emptyset, X - открытые множества.

2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

Доказательство.

Пусть $\forall \alpha \in I \quad A_\alpha$ - открытое множество. $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмём точку a , $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$.

Так-как A_β открытое, $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$. □

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

*Доказательство.*Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.Пусть $r = \min_k r_k > 0$.Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$. □4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.*Доказательство.*Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned}
y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\
&\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\
&\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\
&\stackrel{\Delta}{\implies} \rho(y, a) < r \\
&\implies y \in B_r(a)
\end{aligned}$$
□

2.3. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.*Определение 2.5* (повтор).Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\text{Int } A$.*Свойства.*Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\text{Int } A \subset A$
2. $\text{Int } A$ - объединение всех открытых множеств содержащихся в A .

*Доказательство.*Пусть $G = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое. $\text{Int } A \subset G$:

$$\begin{aligned}
x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\
&\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\
&\implies x \in \text{Int } A
\end{aligned}$$

$G \subset \text{Int } A$: $x \in \text{Int } A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. □

3. $\text{Int } A$ - открытое множество

Доказательство.

A - объединение открытых множеств, значит открыто. □

4. $\text{Int } A = A \iff A$ - открыто

Доказательство.

Необходимость (\implies): $\text{Int } A$ открыто.

Достаточность (\impliedby): A открыто \implies все точки внутренние $\implies A = \text{Int } A$. □

5. $A \subset B \implies \text{Int } A \subset \text{Int } B$

6. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

Доказательство.

В сторону \subset :

$$\begin{aligned} A \cap B \subset A &\implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \\ A \cap B \subset B &\implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B \\ &\implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \cap \text{Int } B \end{aligned}$$

В сторону \supset :

$$\begin{aligned} x &\in \text{Int } A \cap \text{Int } B \\ x &\in \text{Int } A \\ x &\in \text{Int } B \\ \exists r_1 \quad B_{r_1}(x) &\subset A \\ \exists r_2 \quad B_{r_2}(x) &\subset B \\ B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) &\subset A \cap B \\ x &\in \text{Int}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

7. $\text{Int } \text{Int } A = \text{Int } A$

Доказательство.

Заметим, что $\text{Int } A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. □

2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

Определение 2.6.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. \emptyset, X - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

□

Так-как $\forall \alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытое, значит $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$$

□

$X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^n A_k$ - замкнуто.

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.*Доказательство.*

Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) > r\}$ - открыто.

Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x, a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \emptyset$:

Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x, y) < \tilde{r}$, $\rho(y, a) \leq r$.

$$\rho(x, a) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a).$$

Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \emptyset \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

2.5. Билет 16: NAME

2.6. Билет 17: NAME

2.7. Билет 18: NAME

2.8. Билет 19: NAME

2.9. Билет 20: NAME

2.10. Билет 21: NAME

2.11. Билет 22: NAME

2.12. Билет 23: NAME

2.13. Билет 24: NAME

2.14. Билет 25: NAME

2.15. Билет 26: NAME

2.16. Билет 27: NAME

2.17. Билет 28: NAME

2.18. Билет 29: NAME

2.19. Билет 30: NAME

2.20. Билет 31: NAME

2.21. Билет 32: NAME

2.22. Билет 33: NAME

2.23. Билет 34: NAME

2.24. Билет 35: NAME

2.25. Билет 36: NAME

2.26. Билет 37: NAME

2.27. Билет 38: NAME

2.28. Билет 39: NAME

3. Числовые и функциональные ряды

3.1. Билет 40: NAME

3.2. Билет 41: NAME

3.3. Билет 42: NAME

3.4. Билет 43: NAME

3.5. Билет 44: NAME

3.6. Билет 45: NAME

3.7. Билет 46: NAME

3.8. Билет 47: NAME

3.9. Билет 48: NAME

3.10. Билет 49: NAME

3.11. Билет 50: NAME

3.12. Билет 51: NAME

3.13. Билет 52: NAME

3.14. Билет 53: NAME

3.15. Билет 54: NAME

3.16. Билет 55: NAME

3.17. Билет 56: NAME

3.18. Билет 57: NAME

3.19. Билет 58: NAME

3.20. Билет 59: NAME

3.21. Билет 60: NAME

3.22. Билет 61: NAME

3.23. Билет 62: NAME

3.24. Билет 63: NAME

3.25. Билет 64: NAME

3.26. Билет 65: NAME

3.27. Билет 66: NAME

4. Функции нескольких переменных

- 4.1. Билет 73: NAME
- 4.2. Билет 74: NAME
- 4.3. Билет 75: NAME
- 4.4. Билет 76: NAME
- 4.5. Билет 77: NAME
- 4.6. Билет 78: NAME
- 4.7. Билет 79: NAME
- 4.8. Билет 80: NAME
- 4.9. Билет 81: NAME
- 4.10. Билет 82: NAME
- 4.11. Билет 83: NAME
- 4.12. Билет 84: NAME
- 4.13. Билет 85: NAME
- 4.14. Билет 86: NAME
- 4.15. Билет 87: NAME
- 4.16. Билет 88: NAME
- 4.17. Билет 89: NAME
- 4.18. Билет 90: NAME
- 4.19. Билет 91: NAME
- 4.20. Билет 92: NAME
- 4.21. Билет 93: NAME
- 4.22. Билет 94: NAME
- 4.23. Билет 95: NAME
- 4.24. Билет 96: NAME
- 4.25. Билет 97: NAME
- 4.26. Билет 98: NAME

5. Теория меры

5.1. Билет 99: NAME

5.2. Билет 100: NAME

5.3. Билет 101: NAME

5.4. Билет 102: NAME