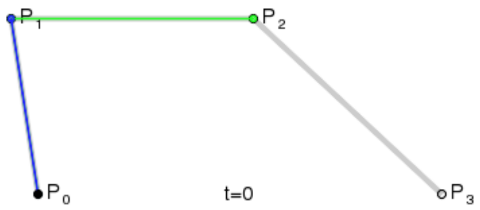
贝塞尔曲线详解

贝塞尔曲线介绍

贝塞尔曲线 (Bézier curve) 由法国数学家 Pierre Bézier 于 1962 年提出的一种矢量曲线，广泛应用于工程绘图、动画设计等领域。贝塞尔曲线是一种运动轨迹曲线，由 n 个点在 n 条线段上匀速运动（不同线段上的速度可能不同），同时开始，同时结束，生成的轨迹曲线。

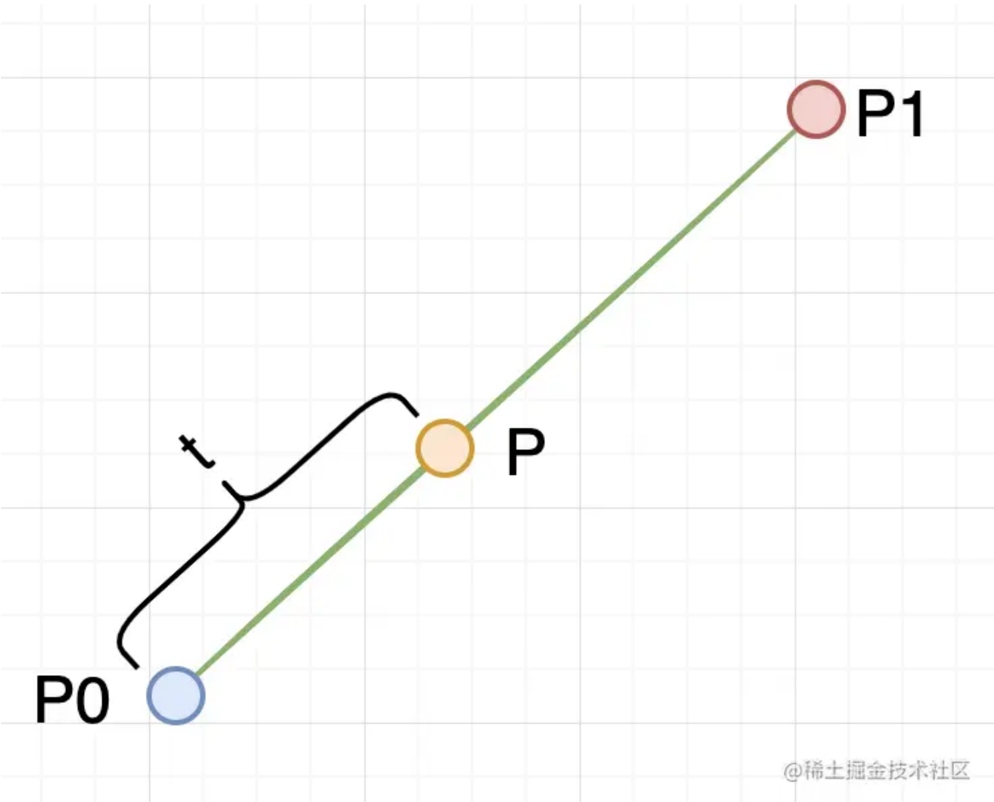
以下是3阶贝塞尔曲线的生成动画：



各阶贝塞尔曲线公式

一阶贝塞尔曲线

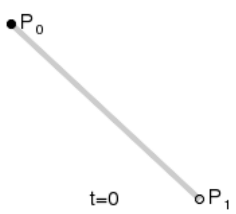
P 点随时间 t 在 P0到 P1两点之间的线段移动，t=0时刻，P 点和 P0重合，t=1时刻 P 点和 P1重合。最终推导得到 P 点的位置和 P0，P1及 t 的关系是一个线性插值函数



给定点$\mathbf{P}_0$、$\mathbf{P}_1$，线性贝塞尔曲线只是一条两点之间的直线。这条线由下式给出：

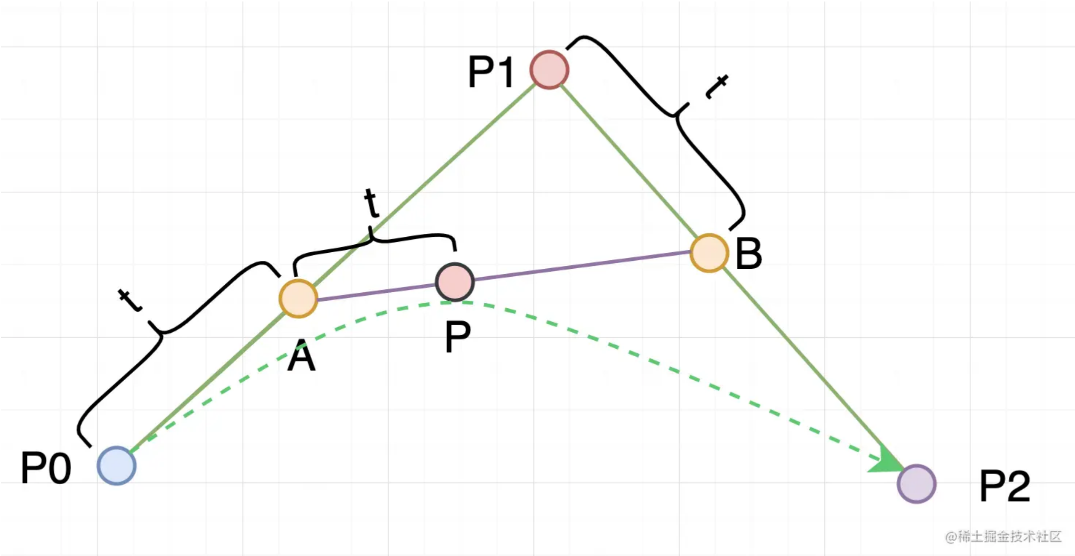
$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)t = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \text{ , } t \in [0,1]$$

且其等同于线性插值。



二次贝塞尔曲线

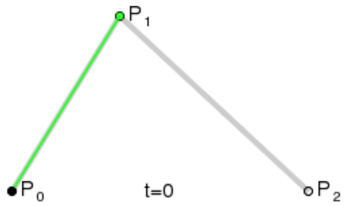
二次贝塞尔曲线控制点有3个，如下图所示。



一共有 P0、P1和 P2三个控制点，那P 点的位置怎么来的呢？其实P 点是 A 点到 B 点的一次贝塞尔曲线，而 A 点是 P0到 P1的一次贝塞尔曲线，B 点是 P1到 P2的一次贝塞尔曲线。随着时间 t 的变化，A 点和 B 点的位置会改变，从而使得 P 点会沿着 P0、P1到 P2的一段曲线运动，而更为神气的是这是一条平滑的曲线。下面是数学公式推导和实际的动图演示。

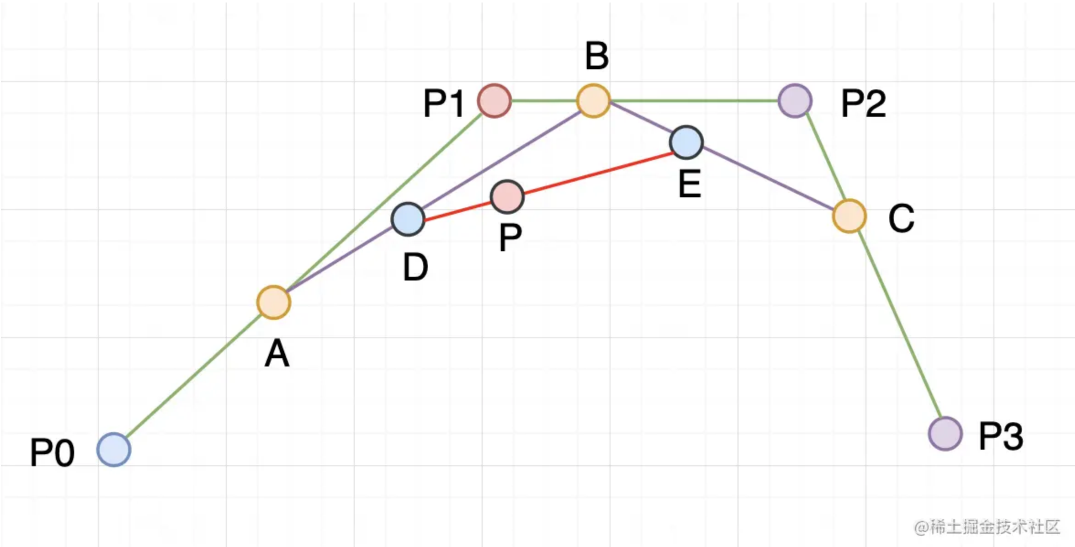
$$A = lerp(P0, P1, t) = (1-t)P0 + tP1$$
$$B = lerp(P1, P2, t) = (1-t)P1 + tP2$$
$$P = lerp(A, B, t) = (1-t)A + tB = (1-t)^2P0 + 2t(1-t)P1 + t^2P2$$

@稀土掘金技术社区



三次贝塞尔曲线

有了二次贝塞尔曲线的推导过程，实际上三次贝塞尔曲线的推导过程是一样的

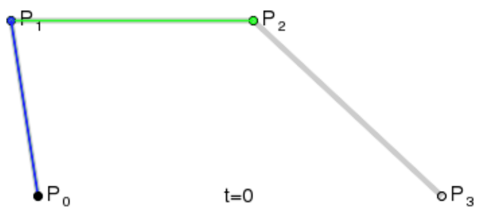


三次贝塞尔曲线有4个控制点，上图各个点的关系如下：

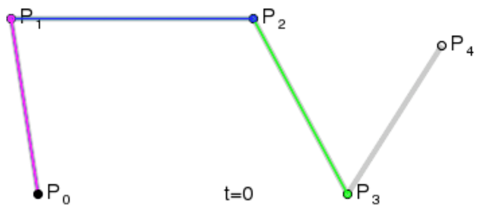
- A 点是 P0到 P1的一次贝塞尔曲线，B 点是 P1到 P2的一次贝塞尔曲线，C 点是 P2到 P3的一次贝塞尔曲线；
- D 点是 A 点到 B 点的一次贝塞尔曲线（也是 P0，P1和 P2的二次贝塞尔曲线），E 点是 B 点到 C 点的一次贝塞尔曲线（也是 P1，P2到 P3的二次贝塞尔曲线）；
- P 点是 D 点到 E 点的一次贝塞尔曲线，也是 A ,B 和 C 的二次贝塞尔曲线，进而就是 P0，P1，P2和 P3的三次贝塞尔曲线了。

数学公式推导过程如下：

$$
\begin{aligned}
&A = lerp(P0, P1, t) = (1-t)P0 + tP1 \\
&B = lerp(P1, P2, t) = (1-t)P1 + tP2 \\
&C = lerp(P2, P3, t) = (1-t)P2 + tP3 \\
&D = lerp(A, B, t) = (1-t)A + tB \\
&E = lerp(B, C, t) = (1-t)B + tC \\
&P = lerp(D, E, t) = (1-t)D + tE = (1-t)^2A + 2t(1-t)B + t^2C \\
&= (1-t)^3P0 + 3t(1-t)^2P1 + 3t^2(1-t)P2 + t^3P3
\end{aligned}
$$

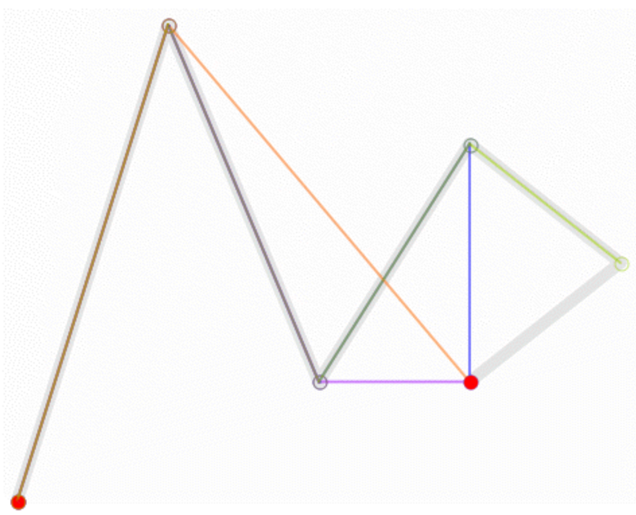


四次贝塞尔曲线



$$
\begin{aligned}
A &= lerp(P0, P1, t) = (1-t)P0 + tP1 \\
B &= lerp(P1, P2, t) = (1-t)P1 + tP2 \\
C &= lerp(P2, P3, t) = (1-t)P2 + tP3 \\
D &= lerp(P3, P4, t) = (1-t)P3 + tP4 \\
E &= lerp(A, B, t) = (1-t)A + tB \\
&= (1-t)[(1-t)P0 + tP1] + t[(1-t)P1 + tP2] \\
&= (1-t)^2P0 + 2(1-t)tP1 + t^2P2 \\
F &= lerp(B, C, t) = (1-t)B + tC \\
&= (1-t)[(1-t)P1 + tP2] + t[(1-t)P2 + tP3] \\
&= (1-t)^2P1 + 2(1-t)tP2 + t^2P3 \\
G &= lerp(C, D, t) = (1-t)C + tD \\
&= (1-t)[(1-t)P2 + tP3] + t[(1-t)P3 + tP4] \\
&= (1-t)^2P2 + 2(1-t)tP3 + t^2P4 \\
H &= lerp(E, F, t) = (1-t)E + tF \\
&= (1-t)[(1-t)^2P0 + 2(1-t)tP1 + t^2P2] + t[(1-t)^2P1 + 2(1-t)tP2 + t^2P3] \\
&= (1-t)^3P0 + 3(1-t)^2tP1 + 3(1-t)t^2P2 + t^3P3 \\
I &= lerp(F, G, t) = (1-t)F + tG \\
&= (1-t)[(1-t)^2P1 + 2(1-t)tP2 + t^2P3] + t[(1-t)^2P2 + 2(1-t)tP3 + t^2P4] \\
&= (1-t)^3P1 + 3(1-t)^2tP2 + 3(1-t)t^2P3 + t^3P4 \\
P &= lerp(H, I, t) = (1-t)H + tI \\
&= (1-t)[(1-t)^3P0 + 3(1-t)^2tP1 + 3(1-t)t^2P2 + t^3P3] + t[(1-t)^3P1 + 3(1-t)^2tP2 + 3(1-t)t^2P3 + t^3P4] \\
&= (1-t)^4P0 + 4(1-t)^3tP1 + 6(1-t)^2t^2P2 + 4(1-t)t^3P1 + t^4P4
\end{aligned}
$$

五次贝塞尔曲线



$$
\begin{aligned}
A &= lerp(P0,P1,t) = (1-t)P0 + tP1 \\
B &= lerp(P1,P2,t) = (1-t)P1 + tP2 \\
C &= lerp(P2,P3,t) = (1-t)P2 + tP3 \\
D &= lerp(P3,P4,t) = (1-t)P3 + tP4 \\
E &= lerp(P4,P5,t) = (1-t)P4 + tP5 \\
F &= lerp(A,B,t) = (1-t)A + tB \\
&= (1-t)[(1-t)P0 + tP1] + t[(1-t)P1 + tP2] \\
&= (1-t)^2P0 + 2(1-t)tP1 + t^2P2 \\
G &= lerp(B,C,t) = (1-t)B + tC \\
&= (1-t)[(1-t)P1 + tP2] + t[(1-t)P2 + tP3] \\
&= (1-t)^2P1 + 2(1-t)tP2 + t^2P3 \\
H &= lerp(C,D,t) = (1-t)C + tD \\
&= (1-t)[(1-t)P2 + tP3] + t[(1-t)P3 + tP4] \\
&= (1-t)^2P2 + 2(1-t)tP3 + t^2P4 \\
I &= lerp(D,E,t) = (1-t)D + tE \\
&= (1-t)[(1-t)P3 + tP4] + t[(1-t)P4 + tP5] \\
&= (1-t)^2P3 + 2(1-t)tP4 + t^2P5 \\
J &= lerp(F,G,t) = (1-t)F + tG \\
&= (1-t)[(1-t)^2P0 + 2(1-t)tP1 + t^2P2] + t[(1-t)^2P1 + 2(1-t)tP2 + t^2P3] \\
&= (1-t)^3P0 + 3(1-t)^2tP1 + 3(1-t)t^2P2 + t^3P3 \\
K &= lerp(G,H,t) = (1-t)G + tH \\
&= (1-t)[(1-t)^2P1 + 2(1-t)tP2 + t^2P3] + t[(1-t)^2P2 + 2(1-t)tP3 + t^2P4] \\
&= (1-t)^3P1 + 3(1-t)^2tP2 + 3(1-t)t^2P3 + t^3P4 \\
L &= lerp(H,I,t) = (1-t)F + tG \\
&= (1-t)[(1-t)^2P2 + 2(1-t)tP3 + t^2P4] + t[(1-t)^2P3 + 2(1-t)tP4 + t^2P5] \\
&= (1-t)^3P2 + 3(1-t)^2tP3 + 3(1-t)t^2P4 + t^3P5 \\
M &= lerp(J,K,t) = (1-t)J + tK \\
&= (1-t)[(1-t)^3P0 + 3(1-t)^2tP1 + 3(1-t)t^2P2 + t^3P3] + t[(1-t)^3P1 + 3(1-t)^2tP2 + 3(1-t)t^2P3 + t^3P4] \\
&= (1-t)^4P0 + 4(1-t)^3tP1 + 6(1-t)^2t^2P2 + 4(1-t)t^3P1 + t^4P4 \\
N &= lerp(K,L,t) = (1-t)K + tL \\
&= (1-t)[(1-t)^3P0 + 3(1-t)^2tP1 + 3(1-t)t^2P2 + t^3P3] + t[(1-t)^3P1 + 3(1-t)^2tP2 + 3(1-t)t^2P3 + t^3P4] \\
&= (1-t)^4P1 + 4(1-t)^3tP2 + 6(1-t)^2t^2P3 + 4(1-t)t^3P4 + t^4P5 \\
P &= lerp(M,N,t) = (1-t)M + tN \\
&= (1-t)[(1-t)^4P0 + 4(1-t)^3tP1 + 6(1-t)^2t^2P2 + 4(1-t)t^3P1 + t^4P4] + t[(1-t)^4P1 + 4(1-t)^3tP2 + 6(1-t)^2t^2P3 + 4(1-t)t^3 \\
&= (1-t)^5P0 + 5(1-t)^4tP1 + 10(1-t)^3t^2P2 + 10(1-t)^2t^3P3 + 5(1-t)t^4P4 + t^5P5
\end{aligned}
$$

贝塞尔曲线统一公式

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t), t \in [0,1]$$

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \text{【} i = 0, 1, \cdots, n \text{】}$$

仔细看可以发现, 贝塞尔的参数B是二项式(t+(1-t))^n = (1)^n的展开公式.

划重点了: 系数是二项式的展开

贝塞尔曲线特性

1 各项系数之和为1.
这个很好理解,因为是系数是二项式的展开(t+(1-t))^n = (1)^n非负性. 好理解, 二项式的展开啊

2 对称性
第i项系数和倒数第i项系数相同, 从二项式的展开来思考,这个也好理解

3 递归性
递归性指其系数满足下式:

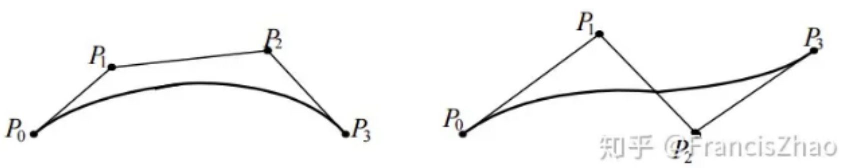
$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \quad 【i = 0, 1, \cdots, n】$$

这个好理解, 因为我们就是从递归来理解贝塞尔曲线的

4 凸包性质
贝塞尔曲线始终会在**包含了所有控制点的最小凸多边形**中, 不是按照控制点的顺序围成的最小多边形. 这点大家一定注意. 这一点的是很关键的，也就是说可以通过控制点的凸包来限制规划曲线的范围，在路径规划是很需要的一个性质.

5 端点性质
第一个控制点和最后一个控制点，恰好是曲线的起始点和终点. 这一点可以套用二项式展开来理解，t = 1 或者 0 的时候，相乘二项式的系数，出了初始点或者末尾点，其余的都是 0 .

6 一阶导数性质



假设上图中贝塞尔的 t 是由左到右从 0 到 1 增加的，那么贝塞尔曲线在 t = 0 时的导数是和 P 0 P 1 的斜率（导数）是相同，t = 1 时的导数是和 P 3 P 4 的斜率（导数）是相同

贝塞尔曲线导数

导数一般形式

贝塞尔曲线的 k 阶导数可有如下的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(k)}(t) &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\sum_{i=0}^{n-k} B_{i,n-k}\boldsymbol{p}_i^{(k)} \\ \boldsymbol{p}_i^{(k)} &= \boldsymbol{p}_{i+1}^{(k-1)} - \boldsymbol{p}_i^{(k-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

为了证明上式，先证明下面的结论 ***Theorem 1*** 和 ***Theorem 2***:

Theorem 1. n 阶贝塞尔曲线的系数项 $B_{i,n}(t)$ 满足以下公式:

$$B'_{i,n}(t) = n\left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right) \tag{7}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{n!}{(n-i)!i!}(1-t)^{n-i}t^i\right) &= -(n-i)\frac{n!}{(n-i)!i!}(1-t)^{n-i-1}t^i + i\frac{n!}{(n-i)!i!}(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= -n\frac{(n-1)!}{(n-1-i)!i!}(1-t)^{n-1-i}t^i + n\frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!}(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= -nB_{i,n-1}(t) + nB_{i-1,n-1}(t)\end{aligned} \tag{8}$$

Theorem 2. 贝塞尔曲线在 t 处的一阶导数满足

$$\begin{aligned}\mathbf{C}'(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i^{(1)} B_{i,n-1}(t) \\ \boldsymbol{p}_i^{(1)} &= n(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i)\end{aligned} \tag{9}$$

证明如下：

由于 $B'_{i,n}(t) = n\left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right)$，并且设$B_{-1,n-1}(t) = B_{n,n-1}(t) = 0$，那么：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{(1)}(t) &= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i B_{i,n}^{(1)}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i n\left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} n\boldsymbol{p}_i B_{i-1,n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} n\boldsymbol{p}_i B_{i,n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n\boldsymbol{p}_{i+1} B_{i,n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} n\boldsymbol{p}_i B_{i,n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n\left(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i\right) B_{i,n-1}(t)\end{aligned} \tag{10}$$

为了得到更高阶次的导数公式，只需要重复 (9) 式即可得到二阶导数：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{(2)}(t) &= \sum_{i=0}^{n-2} \boldsymbol{p}_i^{(2)} B_{i,n-2}(t) \\ \boldsymbol{p}_i^{(2)} &= (n-1)\left(\boldsymbol{p}_{i+1}^{(1)} - \boldsymbol{p}_i^{(1)}\right) = (n-1)n\left(\boldsymbol{p}_{i+2} - 2\boldsymbol{p}_{i+1} + \boldsymbol{p}_i\right)\end{aligned} \tag{11}$$

不断重复这一过程，最终可以获得 (6) 式。

2次贝塞尔的多阶导数

2次贝塞尔曲线公式

$$P(t) = (1-t)^2 P0 + 2t(1-t)P1 + t^2 P2$$

一阶导数

$$\dot{P}(t) = 2[(1-t)(P1-P0) + t(P2-P1)]$$

二阶导数

$$\ddot{P}(t) = 2*1[P2 - 2P1 + P0]$$

3次贝塞尔曲线的多阶导数

3次贝塞尔曲线公式

$$P(t) = (1-t)^3P0 + 2(1-t)^2tP1 + 2(1-t)t^2P2 + t^3P3$$

一阶导数

$$\dot{P}(t) = 3[(1-t)^2(P1-P0) + 2t(1-t)(P2-P1) + t^2(P3-P2)]$$

二阶导数

$$\begin{aligned}\ddot{P}(t) &= 3[(1-t)(\dot{P}1-\dot{P}0) + t(\dot{P}2-\dot{P}1)] \\ &= 3*2[(1-t)((P2-P1)-(P1-P0)) + t((P3-P2)-(P2-P1))] \\ &= 3*2[(1-t)(P2-2P1+P0) + t(P3-2P2+P1)]\end{aligned}$$

三阶导数

$$\begin{aligned}\dddot{P}(t) &= 3*2[(\ddot{P}1-\ddot{P}0)] \\ &= 3*2*1[(P3-2P2+P1)+(P2-2P1+P0)] \\ &= 3*2*1[P3-P2-P1+P0]\end{aligned}$$

4次贝塞尔曲线的多阶导数

4次贝塞尔曲线公式

$$P(t) = (1-t)^4P0 + 4(1-t)^3tP1 + 6(1-t)^2t^2P2 + 4(1-t)t^3P1 + t^4P4$$

一阶导数

$$\dot{P}(t) = 4[(1-t)^3(P1-P0) + 2(1-t)^2t(P2-P1) + 2(1-t)t^2(P3-P2) + t^3(P4-P3)]$$

二阶导数

$$\begin{aligned}\ddot{P}(t) &= 4[(1-t)^2(\dot{P}1-\dot{P}0) + 2t(1-t)(\dot{P}2-\dot{P}1) + t^2(\dot{P}3-\dot{P}2)] \\ &= 4*3[(1-t)^2(P2-2P1+P0) + 2t(1-t)(P3-2P2+P1) + t^2(P4-2P3+P2)]\end{aligned}$$

三阶导数

$$\begin{aligned}\dddot{P}(t) &= 4*3[(1-t)(\ddot{P}1-\ddot{P}0) + t(\ddot{P}2-\ddot{P}1)] \\ &= 4*3*2[(1-t)(P3-3P2+3P1-P0) + t(P4-3P3+3P2-P1)]\end{aligned}$$

5次贝塞尔曲线的多阶导数

5次贝塞尔曲线公式

$$P(t) = (1-t)^5P0 + 5(1-t)^4tP1 + 10(1-t)^3t^2P2 + 10(1-t)^2t^3P3 + 5(1-t)t^4P4 + t^5P5$$

一阶导数

$$\dot{P}(t) = 5*[(1-t)^4(P1-P0) + 4(1-t)^3t(P2-P1) + 6(1-t)^2t^2(P3-P2) + 4(1-t)t^3(P4-P3) + t^4(P5-P4)]$$

二阶导数

$$\begin{aligned}\ddot{P}(t) &= 5*[(1-t)^3(\dot{P}1-\dot{P}0) + 2(1-t)^2t(\dot{P}2-\dot{P}1) + 2(1-t)t^2(\dot{P}3-\dot{P}2) + t^3(\dot{P}4-\dot{P}3)] \\ &= 5*4[(1-t)^3(P2-2P1+P0) + 2(1-t)^2t(P3-2P2+P1) + 2(1-t)t^2(P4-2P3+P2) + t^3(P5-2P4+P3)]\end{aligned}$$

三阶导数

$$\begin{aligned}\dddot{P}(t) &= 5*4*[(1-t)^2(\ddot{P}1-\ddot{P}0) + 2t(1-t)(\ddot{P}2-\ddot{P}1) + t^2(\ddot{P}3-\ddot{P}2)] \\ &= 5*4*3[(1-t)^2(P3-3P2+3P1-P0) + 2t(1-t)(P4-3P3+3P2-P1) + t^2(P5-3P4+3P3-P2)]\end{aligned}$$