Algoritmos em Grafos

Revisão de conceitos e definições

Conceito de grafo

Grafo G = (V, E)

- V - conjunto de vértices (ou nós)
- E - conjunto de arestas (ou arcos)
- cada aresta é um par de vértices (v, w), com v, w pertencentes a V
- se o par for ordenado, o grafo é dirigido, ou digrafo
- um vértice w é adjacente a um vértice v se e só se (v, w) pertencer a E
- num grafo não dirigido com aresta (v, w) e, logo, (w, v), w é adjacente a v e v é adjacente a w

Caminhos

- Caminho - sequência de vértices v1, ..., vn tais que (vi, vi+1) pertence a E, 1 <= i < n
- Comprimento do caminho é o número de arestas, n - 1
- Se n = 1, caminho reduz-se a 1 vértice, comprimento 0
- Caminho simples: todos os vértices distintos, excepto possivelmente o primeiro e o último

Ciclos

- Ciclo (ou circuito): caminho de comprimento >= 1, com v1 = vn
- Num grafo não dirigido, requer-se que as arestas sejam diferentes
- Anel: caminho v, v => (v, v) pertencente a E, comprimento 1; raro

Grafo acíclico dirigido

Grafo dirigido sem ciclos. Para qualquer vértice v, não há nenhuma ligação dirigida começando e acabando em v.

Grafo simples

Grafo sem arestas paralelas (várias adjacências, para o mesmo par de vértices), nem anéis.

Grafo pesado

As aretas são etiquetadas com um peso (pode representar uma distância, um custo, etc)

Grafo bipartido

- Conjunto de vértices é partido em dois subconjuntos disjuntos v1 e v2
- Arestas ligam vértices de diferentes partições

Conectividade

- Grafo não dirigido é conexo sse houver um caminho a ligar qualquer par de vértices
- Digrafo com a mesma propriedade: fortemente conexo se para todo o v, w pertencentes a V existir em G um caminho de v para w, assim como de w para v.
- Fracamente conexo: se o grafo não dirigido subjacente é conexo

Representação de grafos

Matriz de adjacências

- Matriz A de adjacências
- aij = 1 se (i, v) pertencer a E, 0 no caso contrário
- Elementos da matriz podem ser os pesos
- Apropriada para grafos densos

Lista de adjacências

- para cada vértice, mantém-se a lista dos vértices adjacentes
- vetor de cabeças de lista, indexado pelos vértices
- pesquisa de adjacentes em tempo proporcional ao número destes

Representação de grafos não dirigidos

- Implicação para as matrizes de adjacência
    - Matriz simétrica
- Implicação para as listas de adjacência
    - Lista com dobro do espaço

Pesquisa em profundidade

- Arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda tenha arestas a sair dele
- Quando todas as arestas de v foram exploradas, retorna para explorar arestas que saíram do vértice a partir do qual v foi descoberto
- Se se mantiverem vértices por descobrir, um deles é selecionado como a nova fonte e o processo de pesquisa continua a partir daí
- Todo o processo é repetido até todos os vértices serem descobertos

Pesquisa em largura

- Dado um vértice fonte s, explora-se sistematicamente o grafo descobrindo

todos os vértices a que se pode chegar a partir de s (vértices adjacentes)
- Só depois é que se passa para outro vértice

Notas:

- Para qualquer vértice v atingível a partir de s, o caminho na árvore BFS é o caminho mais curto no grafo (com menor número de arestas)
- BFS é um dos métodos mais simples e é o arquétipo para muitos algoritmos importantes de grafo
- Se me vez de uma fila for usada uma pilha, obtém-se um algoritmo iterativo de visita em profundidade

Ordenação topológica

Ordenar os vértices de um DAG tal que, se existe uma aresta (v, w) no grafo, então v aparece antes de w

- Intuitivamente, dispor as setas todas no mesmo sentido
- Impossível se o grafo for cíclico
- Pode existir mais do que uma ordenação