Otimização

PESQUISA DE EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO

Otimização Unidimensional

- Regra Aúrea

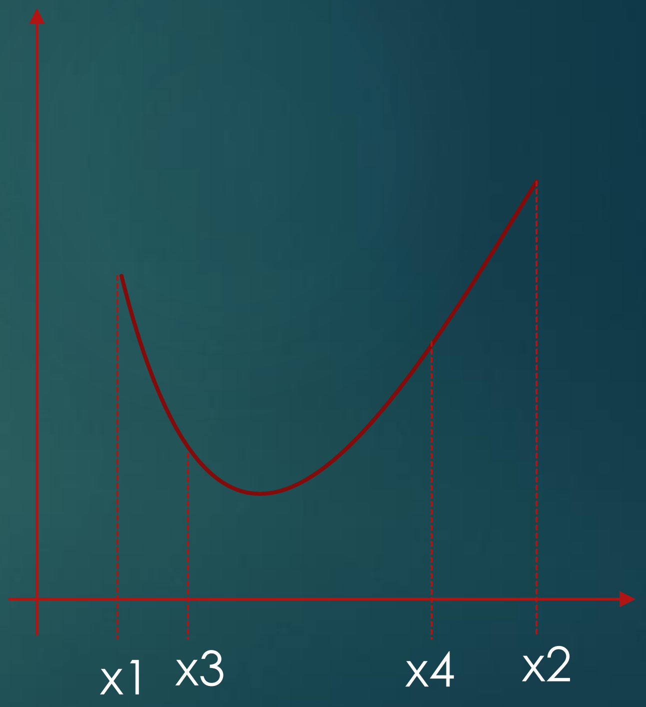
Aplicação da regra Aúrea

1. Definição do intervalo que contém o extremo – x_1 e x_2
2. Através da razão Aúrea geramos 2 novos pontos intermédios:

$$x3 = x1 + A \times (x2 - x1) \qquad B = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x4 = x1 + B \times (x2 - x1) \qquad A = B^2$$

3. Definir o novo intervalo que contém o extremo
   - ✓ Se f(x3)<f(x4) então x1=x1 e x2=x4
   - ✓ Se f(x3)>f(x4) então x1=x3 e x2=x2
4. Controlo do erro!



NOTA: No cálculo do máximo, podemos utilizar exatamente a mesma lógica anterior, mas fazemos a inversão do sinal da função f(x)=-f(x). Outra alternativa, será trocar os sinais nas condições definidas em 2.

Otimização Multidimensional

- ➢ Método do Gradiente
- ➢ Método da Quádrica
- ➢ Método de Levenberg & Marquardt

NOTA: Nos slides seguintes são demonstrados e aplicados os métodos gradiente, quádrica e Levemberg-Marquardt a equações com duas variáveis (x,y), mas podem também ser aplicados a mais variáveis!

Método do Gradiente

Formulário $X_i^{n+1} = X_n - h \times \nabla f(x_i^n)$

h – Passo dado pelo utilizador;

i – número de incógnita

k – nº total de incógnitas

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

Cálculo do máximo

$$x_i^{n+1} = X_n + h \times \nabla f(x_i^n)$$

Se $f_{n+1} > f_n,$ o h deve ser aumentado

Caso contrário o h deve ser reduzido

Ou podemos simplesmente trocar o sinal da função (obtendo a função inversa) e calcular o mínimo, que corresponderá ao máximo da função antes de ser invertida!

Calcular o mínimo de f(x,y) - exemplo

$$f(x,y) = y^2 - 2xy - 6y + 2x^2 + 12$$

1º - Calculamos as derivadas parciais para cálculo do gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2y + 4x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x - 6$$

2º - Iniciamos o calculo iterativo

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - h \times \begin{bmatrix} -2y + 4x \\ 2y - 2x - 6 \end{bmatrix}$$

3º - Alteramos o valor de h de acordo com a proximidade ao mínimo

Se $f_{n+1} < f_n,$ h deve ser aumentado (p.ex. h*2);

Caso contrário, h deve ser reduzido (p.ex. h/2) >> **não efetivar o passo!**

4º - Método iterativo e controlo do erro

$$x_{n+1} = x_n - h \times (-2y_n + 4x_n)$$

$$y_{n+1} = y_n - h \times (2y_n - 2x_n - 6)$$

Método da Quádrica

Formulário

$$X_{n+1} = X_n - H^{-1} \times \nabla f(X_n)$$

Exemplo a duas variáveis f(x,y)

$$X_{n+1} = X_n - H^{-1} \times \nabla f(X_n)$$

$$Y_{n+1} = Y_n - H^{-1} \times \nabla f(Y_n)$$

Matriz Hessiana

$$H\left[f(x,y)\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Calcular o mínimo de $f(x,y) = y^2 - 2xy - 6y + 2x^2 + 12$

1º - Calculamos as derivadas parciais para cálculo do gradiente

$$\nabla f(X_n) = -2\mathrm{y} + 4\mathrm{x} \qquad \nabla f(Y_n) = 2\mathrm{y} - 2\mathrm{x} - 6$$

2º - Calculamos as derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

3º - Calculamos o inverso determinante da matriz Hessiana

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

4º - Calculo iterativo e controlo do erro!

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Neste caso, já atingimos o mínimo logo na primeira iteração, isto acontece porque H é constante (não depende de x e y), logo dá imediatamente a direção do extremo!

Método Levemberg and Marquardt

Formulário

$$X_{n+1} = X_n - h_{LM}$$

$$h_{LM} = \lambda \times \nabla f + H^{-1} \times \nabla f$$

λ – escolhido pelo utilizador e varia ao longo do método:

se a função decresce, λ também decresce, caso contrário λ cresce;

Calcular o mínimo de $f(x, y) = y^2 - 2xy - 6y + 2x^2 + 12$

1º - Calculamos as derivadas parciais para cálculo do gradiente

$\nabla f(X_n) = -2y + 4x$ $\nabla f(Y_n) = 2y - 2x - 6$

2º - Calculamos as derivadas parciais de segunda ordem

3º - Calculamos o inverso determinante da matriz Hessiana

4º - Iniciamos o calculo iterativo

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \times \begin{bmatrix} -2y + 4x \\ 2y - 2x - 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2y + 4x \\ 2y - 2x - 6 \end{bmatrix}$$

5º - Decidimos o que fazer com λ

Se $f_{n+1} > f_n$, $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ (não efetivamos o passo!)

Caso contrário $\lambda = \lambda - \Delta\lambda$

6º - Atualizamos o λ e continuamos o calculo iterativo até satisfazer a condição de paragem

Exercício 1

1.a) - Calcular o mínimo de

$$f(x,y) = y^2 - 2xy - 6y + 2x^2 + 12$$

$$x_0 = 1$$
$$y_0 = 1$$

Tolerância admitida = 0.001
Critério – erro absoluto

Solução

n	h	x	y	dz/dx	dz/dy	f(x,y)	erro x	erro y
0	1	1	1	2	-6	7		
1	0.5	-1	7	-18	10	35	2	6
28	0.25	3.00061	5.999512	0.003418	-0.0022	-6	0.001099	0.00061
29	0.5	2.999756	6.000061	-0.0011	0.00061	-6	0.000854	0.000549

1.b) - Calcular o máximo de

$$f(x,y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2$$

$$x_0 = -1$$
$$y_0 = 1$$

Tolerância admitida = 0.001
Critério – erro absoluto

Solução

n	h	x	y	dz/dx	dz/dy	f(x,y)	erro x	erro y
0	1	-1	1	6	-6	-7		
1	0.5	5	-5	-18	30	-115	6	6
29	0.5	2.000183	0.999634	-0.0011	0.001831	2	0.000916	0.001465
30	**0.25**	**1.999634**	**1.000549**	**0.001831**	**-0.00293**	**1.999999**	**0.000549**	**0.000916**

Exercício 2

Calcular o mínimo de f(x,y) recorrendo ao método da Quádrica

$f(x,y) = \sin\frac{x}{2} + x^2 - \cos y$

Tolerância admitida = 0.001
Critério – erro absoluto

$x_0 = -3$
$y_0 = -1$

Solução

Iteração		Xn	H		H^{-1}		Gradiente	X	f(x,y)	errox	erroy
1	x	-3	2.249374	0	0.444568	0	-5.964631	-0.34831	-0.90058	2.651685	
	y	-1	0	0.540302	0	1.850816	-0.841471	0.557408			1.557408
2	x	-0.35	2.04332	0	0.4894	0	-0.204193	-0.24838	-1.06001	0.099932	
	y	0.557	0	0.848629	0	1.178371	0.5289881	-0.06594			0.623344
3	x	-0.25	2.030968	0	0.492376	0	-0.000616	-0.24808	-1.06218	0.000303	
	y	-0.07	0	0.997827	0	1.002178	-0.065889	9.57E-05			0.066032
4	x	-0.25	2.03093	0	0.492385	0	-5.71E-09	-0.24808	-1.06218	2.81E-09	
	y	1E-04	0	1	0	1	9.572E-05	-2.9E-13			9.57E-05

Exercício 3

Calcular o mínimo e máximo de f(x) recorrendo à regra de Aúrea

$f(x) = (2x+1)^2 - 5\cos(10x)$ | Tolerância admitida = 0.001
Critério – erro absoluto | $x_1 = -1$
$x_2 = 0$

Solução
xmin=-0,62644 >> f(x)=-4,9352
xmin=-0,3114 >> f(x)=5,1404

Exercício 4

Calcular o mínimo de f(x,y) recorrendo ao método d LM

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{2} + x^2 - \cos x$$

Tolerância admitida = 0.001
Critério – erro absoluto

$$x_0 = -10$$
$$y_0 = -1$$

Solução

	Xn	H		H^{-1}		Gradiente	lambda	lambda *grad	X	f(x,y)	Erro
x	-10	1.760269	0	0.568095	0	-19.85817	0.01	-0.19858	1.479908	2.020235	11.47991
y	-1	0	0.540302	0	1.850816	-0.841471	0.01	-0.00841	0.565822		1.565822
x	1.479908	1.831436	0	0.546019	0	3.3290665	0.02	0.066581	-0.40441	-1.03409	1.884317
y	0.565822	0	0.844148	0	1.184626	0.5361103	0.02	0.010722	-0.07999		0.645813
x	-0.40441	2.050207	0	0.487756	0	-0.319003	0.04	-0.01276	-0.23605	-1.06203	0.168356
y	-0.07999	0	0.996802	0	1.003208	-0.079905	0.04	-0.0032	0.003367		0.083357
x	-0.23605	2.029438	0	0.492747	0	0.0244166	0.08	0.001953	-0.25004	-1.06217	0.013985
y	0.003367	0	0.999994	0	1.000006	0.0033672	0.08	0.000269	-0.00027		0.003637
x	-0.25004	2.031173	0	0.492326	0	-0.003976	0.16	-0.00064	-0.24744	-1.06218	0.002594
y	-0.00027	0	1	0	1	-0.000269	0.16	-4.3E-05	4.31E-05		0.000312
x	-0.24744	2.030852	0	0.492404	0	0.0012918	0.32	0.000413	-0.24849	-1.06218	0.001049
y	4.31E-05	0	1	0	1	4.31E-05	0.32	1.38E-05	-1.4E-05		5.69E-05
x	-0.24849	2.030982	0	0.492373	0	-0.00084	0.64	-0.00054	-0.24754	-1.06218	0.000951
y	-1.4E-05	0	1	0	1	-1.38E-05	0.64	-8.8E-06	8.83E-06		2.26E-05