CHƯƠNG 1: MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Môn học: Toán Rời rạc 1

Giảng viên: Nguyễn Kiều Linh
Email: linhnk@ptit.edu.vn
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

Hà Nội, năm 2022
http://www.ptit.edu.vn

Nội dung chính

Một số ký hiệu tập hợp

- Tập hợp: $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$
- Phần tử của tập hợp: $a, b, \ldots, x, y, \ldots$
- Phần tử x thuộc (không thuộc) $A : x \in A$ $(x \notin A)$
- Số phần tử của tập hợp $A : |A|$
- Tập hợp con: $A \subseteq B$

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

- Tập hợp bằng nhau: nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì $A = B$
- Tập rỗng: $\emptyset$
  - Không có phần tử nào
  - Là con của mọi tập hợp

Các phép toán trên tập hợp

- Phần bù của A trong X : $\bar{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$
- Hợp của hai tập hợp: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$
- Giao của hai tập hợp: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$
- Hiệu của hai tập hợp: $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$
- Luật kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Luật giao hoán: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- Luật phân bố:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Luật đối ngẫu: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- Tích Đề các: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Quan hệ

Quan hệ: một quan hệ hai ngôi R trên tập $X, R(X)$, là một tập con của tích Đề các $X \times X$.
Kí hiệu: Nếu $(a, b) \in X \times X$ và a, b có quan hệ hai ngôi R với nhau tên X thì được ký hiệu aRb.
Tính chất của quan hệ:

- R được gọi là có tính chất *phản xạ* nếu $\forall\ a \in X, aRa$.
- R được gọi là có tính chất *đối xứng* nếu aRb thì bRa.
- R được gọi là có tính chất *phản đối xứng* nếu aRb và bRa thì $a = b$.
- R được gọi là có tính chất *kéo theo* (hoặc *bắc cầu*) nếu aRb và bRc thì aRc.

Quan hệ

Ví dụ

Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$

$a, b \in X$, a có quan hệ R với b nếu a chia hết cho b.

$R(X) = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$.

Phản xạ, kéo theo, phản đối xứng nhưng không đối xứng.

Quan hệ tương đương và phân hoạch

- **Quan hệ tương đương**: là một quan hệ có đủ ba tính chất, phản xạ, đối xứng, và kéo theo
- **Lớp tương đương**: một quan hệ tương đương trên tập hợp sẽ chia tập hợp thành các lớp tương đương
  - Hai phần tử thuộc cùng một lớp có quan hệ với nhau
  - Hai phần tử khác lớp không có quan hệ với nhau
  - Các lớp tương đương phủ kín tập hợp ban đầu
- **Phân hoạch**: là một họ các lớp tương đương (các tập con khác rỗng) của một tập hợp

Một quan hệ tương đương trên tập hợp sẽ xác định một phân hoạch trên tập hợp, ngược lại một phân hoạch bất kỳ trên tập hợp sẽ tương ứng với một quan hệ tương đương trên nó.

Quan hệ tương đương và phân hoạch

Ví dụ

Xét $X = \{1, 2, \ldots, m\}$, m là số nguyên dương $(m > 2)$, k là số nguyên dương, $1 < k < m$.
Định nghĩa quan hệ R trên X như sau:

$$a, b \in X, aRb \Leftrightarrow a \equiv b (\bmod k),$$

tức là a có quan hệ R với b nếu a và b có cùng số dư khi chia cho k. Chứng minh: R là quan hệ tương đương. Xác định các lớp tương đương.

Quan hệ tương đương và phân hoạch

Ví dụ

Cho $X = \{$ Tập các sinh viên của một lớp $\}$. Gọi

$$R(X) = \{(a, b) \mid a \text{ và } b \text{ là các sinh viên cùng họ}\}.$$

Chứng minh: R là quan hệ tương đương.

Chú ý

Nếu cho quan hệ R trên X hay $R(X)$ **cho dưới dạng tập hợp** thì việc xét các tính chất dựa trên việc kiểm tra quan hệ aRb chính là kiểm tra (a, b) có thuộc $R(X)$ không.

Bài tập

Bài tập 1

Sử dụng định nghĩa chứng minh một số phép toán trên tập hợp. Chẳng hạn chứng minh luật đối ngẫu hay luật De Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Bài tập

Bài tập 2

Cho biết trong các hệ thức dưới đây hệ thức nào là đúng, hệ thức nào là sai?

1) $A \subseteq A \cap B$
2) $C \subseteq (A \cap B) \cup C$
3) $A \cup B \subseteq A \cap B$
4) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$
5) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = A \backslash B$.

Bài tập

Bài tập 3

Ký hiệu Z là tập hợp các số nguyên. Xét hai tập con của Z:
$A = \{x \in Z : x = 4p - 1$ với một $p \in Z$ nào đó $\}$
$B = \{y \in Z : y = 4q + 3$ với một $q \in Z$ nào đó $\}$.
Chứng minh rằng $A = B$.

Bài tập

Bài tập 4

Cho $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và xác định quan hệ R trên A bởi:
$R = \{(0, 0), (2, 1), (0, 3), (1, 1), (3, 0), (1, 4), (4, 1), (2, 2), (2, 4),$
$(3, 3), (4, 4), (1, 2), (4, 2)\}$
1) R có phải là một quan hệ tương đương hay không?
2) Nếu câu 1) là đúng thì chỉ ra phân hoạch của A thành các lớp tương đương theo quan hệ R.

Nội dung chính

Một số khái niệm

Định nghĩa

Mệnh đề là một câu khẳng định, có thể xác định được giá trị hoặc đúng hoặc sai.

Ví dụ

- "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam"là một mệnh đề đúng.
- "(5<3)"là một mệnh đề sai,
- "$(5 > 3)$"là một mệnh đề đúng.
- "$(a < 7)$"không phải là mệnh đề vì nó không biết khi nào đúng khi nào sai.

Một số khái niệm

Giá trị chân lý của mệnh

Mỗi mệnh đề chỉ có một trong 2 giá trị "đúng", ký hiệu là "T", giá trị "sai", ký hiệu là "F". Tập $\{T, F\}$ được gọi lá *giá trị chân lý* của mệnh đề.

Ký hiệu

- Mỗi mệnh đề được ký hiệu bằng các chữ cái in thường (a, b, p, q, r, s, t).
- Mỗi mệnh đề còn được gọi là một công thức.
- Từ khái niệm về mệnh đề, giá trị chân lý của mỗi mệnh đề, ta xây dựng nên các mệnh đề phức hợp (được gọi là công thức) thông qua các phép toán trên mệnh đề.

Các phép toán của mệnh đề logic

Cho p và q là hai mệnh đề

Phép phủ định

- Ký hiệu: $\neg p$, đọc là "Không phải p "
- Mệnh đề cho giá trị đúng nếu p sai và cho giá trị sai nếu p đúng.

Phép hội

- Ký hiệu: $p \wedge q$, đọc là "p và q''.
- Mệnh đề có giá trị đúng khi cả p và q có giá trị đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

Phép tuyển

- Ký hiệu: $p \vee q$, đọc là "p hoặc q''.
- Mệnh đề có giá trị sai khi cả p và q có giá trị sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Các phép toán của mệnh đề logic

Phép tuyển loại

- Ký hiệu: $p \oplus q$, đọc là "hoặc p hoặc q''.
- Mệnh đề có giá trị đúng khi hoặc p hoặc q có giá trị đúng và sai trong các trường hợp khác còn lại.

Phép kéo theo

- Ký hiệu: $p \Rightarrow q$, đọc là "p kéo theo q''
- Mệnh đề có giá trị sai khi p đúng và q sai và đúng trong các trường hợp khác còn lại.

Phép tương đương

- Ký hiệu: $p \Leftrightarrow q$, đọc là "p tương đương q''
- Mệnh đề có giá trị đúng khi p và q có cùng giá trị chân lý và sai trong các trường hợp khác còn lại.

Bảng giá trị chân lý

Bảng giá trị chân lý các phép toán mệnh đề							
p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

Bảng các thao tác bit tương ứng				
Giá trị của A	Giá trị của B	A and B	A or B	A xor B
$A = 13 = 1101$	$B = 8 = 1000$	1000	1101	0101

Một số phép toán

Thỏa được

Một mệnh đề là thỏa được nếu nó **đúng với một bộ giá trị chân lý** nào đó của các mệnh đề thành phần.

Không thỏa được

Một mệnh đề là không thỏa được nếu nó **sai với mọi bộ giá trị chân lý** của các mệnh đề thành phần.

Vững chắc

Một mệnh đề là vững chắc nếu nó **đúng với mọi bộ giá trị chân lý** của các mệnh đề thành phần.

Mệnh đề logic tương đương

Hai mệnh đề logic tương đương

Hai mệnh đề a và b được gọi là tương đương nếu chúng có **cùng giá trị chân lý** với mọi bộ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần.

Ký hiệu: $a \equiv b$

Mệnh đề logic tương đương

Một số mệnh đề tương đương cơ bản

$$a \vee F \equiv a$$
$$a \wedge F \equiv F$$
$$a \vee T \equiv T$$
$$a \wedge T \equiv a$$
$$a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$$
$$a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$$
$$\neg(\neg a) \equiv a$$

Mệnh đề logic tương đương

Luật giao hoán

$$a \vee b \equiv b \vee a$$
$$a \wedge b \equiv b \wedge a$$

Luật kết hợp

$$(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$$
$$(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$$

Mệnh đề logic tương đương

Luật phân phối

$$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Luật De Morgan

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$$
$$\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$$

Dạng chuẩn tắc hội

Mệnh đề (câu) tuyển

- Một mệnh đề (câu) tuyển là tuyển của các mệnh đề nguyên thủy. Tức là mệnh đề tuyển có dạng $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ trong đó p_i là các mệnh đề nguyên thủy.

Dạng chuẩn tắc hội

Một công thức ở dạng chuẩn tắc hội nếu nó là hội của các câu tuyển

$$(a \vee e \vee f \vee g) \wedge (b \vee c \vee d)$$

Dạng chuẩn tắc hội

Có thể biến đổi một công thức bất kỳ về dạng chuẩn tắc hội bằng cách biến đổi theo nguyên tắc sau:

- Khử các phép tương đương: $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$.
- Khử các phép kéo theo: $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$.
- Chuyển các phép phủ định vào sát các ký hiệu mệnh đề bằng cách áp dụng luật De Morgan.
- Khử phủ định kép: $\neg(\neg a) \equiv a$.
- Áp dụng luật phân phối: $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Bài tập

Bài tập 5

Sử dụng các mệnh đề tương đương cơ bản và các luật (giao hoán, kết hợp, phân phối, De Morgan) chứng minh sự tương đương logic giữa các mệnh đề

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$$
$$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$
$$\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \vee r)$$

Bài tập

Bài tập 6

Chứng minh các mệnh đề sau là vững chắc.

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
g) $\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$
b) $p \Rightarrow (p \vee q)$
h) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
c) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
i) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
e) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
j) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow r$
f) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$.

Bài tập

Bài tập 7

Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương.

1) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
2) $\neg p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \neg q$
3) $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg p \Leftrightarrow q$.

Bài tập

Bài tập 8

Chuẩn hóa về dạng chuẩn tắc hội

$$(p \Rightarrow q) \vee \neg(r \vee \neg S)$$

Nội dung chính

Hàm mệnh đề

- Các phát biểu liên quan đến các biến, chẳng hạn như "x> 3", "x = y + 3", "x là một số nguyên tố"chưa xác định được giá trị chân lý => Không phải là mệnh đề mà được gọi là **hàm mệnh đề** (propositional function).
- P(x) = "x là một số nguyên tố"
  P(2) = "2 là một số nguyên tố"$\Rightarrow$ Đúng
  P(4) = "4 là một số nguyên tố"$\Rightarrow$ Sai.

Vị từ

- Trong hàm mệnh đề P(x): "x là một số nguyên tố"
  - "x" là chủ từ- đối tượng của phát biểu.
  - "là một số nguyên tố" là **vị từ** - đề cập đến thuộc tính mà chủ từ của phát biểu có thể có.
- Trong toán rời rạc, vị từ logic được sử dụng để diễn đạt ý nghĩa của các câu lệnh trong toán học và khoa học máy tính theo cách cho phép chúng ta suy luận và khám phá mối quan hệ giữa các đối tượng.

Lượng từ

- **Lượng từ** là một cách tạo ra mệnh đề từ hàm mệnh đề.
- Ví dụ: "Với mọi x, x là một số nguyên tố là một mệnh đề, "Với mọi x" là **lượng từ**.
- Các lượng từ phổ biến:
  - Trong ngôn ngữ tự nhiên có các lượng từ: tất cả, một số, nhiều, không có, ít, ...
  - Lượng từ phổ dụng ($\forall$) của $P(x)$ được phát biểu là "$P(x)$ với mọi x thuộc miền xác định", ký hiệu $\forall x P(x)$.
  - Lượng từ tồn tại ($\exists$) của $P(x)$ được phát biểu là "tồn tại phần tử x trong miền xác định sao cho $P(x)$", ký hiệu $\exists x P(x)$.

Lượng từ

Phát biểu	Khi nào đúng (T)?	Khi nào sai (F)?
$\forall x P(x)$	$P(x)$ đúng với mọi x	Tồn tại một giá trị x sao cho $P(x)$ sai
$\exists x P(x)$	Tồn tại một giá trị x sao cho $P(x)$ đúng	$P(x)$ sai với mọi giá trị x

Ví dụ

- Cho $P(x)$:"$x + 1 > x$". Xác định giá trị chân lý của $\forall x P(x)$ với $x \in \mathbb{R}$?
- Cho $Q(x)$:"$x > 2$". Xác định giá trị chân lý của $\forall x Q(x)$ với $x \in \mathbb{R}$?
- Cho $R(x)$:"$x < 3$". Xác định giá trị chân lý của $\exists x R(x)$ với $x \in \mathbb{R}$?

Hàm mệnh đề phức

Ví dụ

- $Q(x, y)$: "$x = y + 3$ Hàm mệnh đề 2 biến
  - $Q(1, 2)$: "1=2+3 Sai
  - $Q(5, 2)$: "5=2+3 Đúng
- $R(x, y, z)$="$x^2 = y^2 + z^2$ Hàm mệnh đề 3 biến
  - $R(2, 3, 5)$: "$2^2 = 3^2 + 5^2$ Sai
  - $R(10, 8, 6)$: "$10^2 = 8^2 + 6^2$ Đúng
- Để đưa các hàm mệnh đề phức này trở thành các mệnh đề ta cần sử dụng tổ hợp lượng từ.

Tổ hợp lượng từ

Ví dụ

- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$: "$x + y = y + x$ với mọi số thực x và y"
- $\forall x \exists y(x + y = 0)$: "với mọi số thực x tồn tại số thực y sao cho $x + y = 0$."

Tổ hợp lượng từ

Statement	*When True?*	*When False?*
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ is true for every pair x, y.	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is false.
$\forall x \exists y P(x, y)$	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is true.	There is an x such that $P(x, y)$ is false for every y.
$\exists x \forall y P(x, y)$	There is an x for which $P(x, y)$ is true for every y.	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is false.
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is true.	$P(x, y)$ is false for every pair x, y.

Nội dung chính

1. Lý thuyết tập hợp
2. Mệnh đề logic
3. Vị từ, lượng từ (đọc thêm)
4. Thuật toán và độ phức tạp tính toán

Khái niệm thuật toán

Thuật toán hoặc giải thuật (algorithm)

- Là một thủ tục giải quyết một vấn đề nào đó trong một số hữu hạn bước
- Là một tập hữu hạn các chỉ thị được định nghĩa rõ ràng để giải quyết một vẫn đề nào đó
- Là một tập các quy tắc định nghĩa chính xác một dãy các hành động

Mô tả thuật toán

- Sử dụng ngôn ngữ tự nhiên
- Sử dụng dạng giả mã (Pseudo-code)
- Sử dụng ngôn ngữ lập trình

Ví dụ thuật toán

Tìm số nguyên lớn nhất trong danh sách *n* số nguyên (chưa sắp xếp)

Mô tả thuật toán sử dụng ngôn ngữ tự nhiên

- Nếu không có số nào trong danh sách thì không có số lớn nhất. Giả sử danh sách có nhiều hơn một phần tử và gán số lớn nhất là số đầu tiên trong danh sách
- Duyệt lần lượt các số còn lại trong danh sách, nếu số nào lớn hơn số lớn nhất hiện tại thì gán số này là số lớn nhất trong danh sách
- Khi tất cả các số trong danh sách đều đã được xem xét, số lớn nhất hiện tại là số lớn nhất trong danh sách.

$\Longrightarrow$ **Dài dòng và ít được sử dụng**

Ví dụ thuật toán

Tìm số nguyên lớn nhất trong danh sách n số nguyên (chưa sắp xếp)

Mô tả thuật toán sử dụng dạng giả mã

procedure $max(a_1, a_2, \ldots, a_n : integers)$
$max := a_1$
for $i = 2$ to n
    if $max < a_i$ **then** $max := a_i$
return max (max là phần tử lớn nhất)

$\Longrightarrow$ **Ngắn gọn, dễ hiểu, hay được sử dụng, không phụ thuộc vào ngôn ngữ lập trình**

Độ phức tạp tính toán của thuật toán

- Hầu hết các thuật toán được thiết kế làm việc với kích thước dữ liệu đầu vào tùy ý
- Độ phức tạp thời gian (time complexity): Được xác định là **số phép toán cơ bản** thực hiện giải thuật (quyết định lượng thời gian thực hiện giải thuật)
- Độ phức tạp không gian (space complexity): Lượng bộ nhớ lớn nhất cần thiết để lưu các đối tượng của thuật toán tại một thời điểm thực hiện thuật toán

$\Longrightarrow$ **Độ phức tạp của thuật toán thường được biểu diễn như một hàm của kích thước dữ liệu đầu vào.**

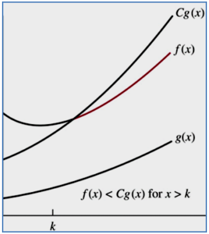
Khái niệm O-lớn

$f(n) = O(g(n))$, với n đủ lớn, $f(n)$ không vượt quá một hằng số cố định nhân với $g(n)$. Tức là

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c, k, \forall n \geq k, f(n) \leq c * g(n)$$

Định lý

Nếu $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ tồn tại và hữu hạn, thì $f(n) = O(g(n))$



Khái niệm O-lớn

Ví dụ

Chứng minh rằng $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$.

Khái niệm O-lớn

Ví dụ

Chứng minh rằng $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$.

Chứng minh.

Xét $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$.

Khái niệm O-lớn

Ví dụ

Chứng minh rằng $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$.

Chứng minh.

Xét $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$.

Khi đó $f(x) = x^2 + 2x + 1 < x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$.

Khái niệm O-lớn

Ví dụ

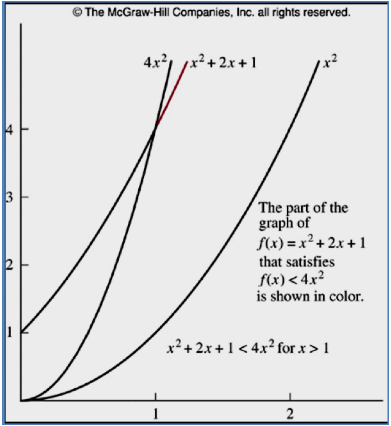
Chứng minh rằng $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$.
Chứng minh.
Xét $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$.
Khi đó $f(x) = x^2 + 2x + 1 < x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$. Với $C = 4, k = 1$ và $g(x) = x^2$. Ta có $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

Khái niệm O-lớn

Ví dụ

Chứng minh rằng $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$.
Chứng minh.
Xét $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$.
Khi đó $f(x) = x^2 + 2x + 1 < x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$. Với $C = 4, k = 1$ và $g(x) = x^2$. Ta có $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Do đó, $f(x)$ là $O(x^2)$.

Khái niệm O-lớn



Ví dụ về độ phức tạp thuật toán

ALGORITHM 1 Finding the Maximum Element in a Finite Sequence.

procedure $max(a_1, a_2, \ldots, a_n$: integers)
$max := a_1$
for $i := 2$ **to** n
  if $max < a_i$ **then** $max := a_i$
return max {max is the largest element}

i	Number of comparisons
2	2
3	2
…	2
n	2
n+1	1, max< a_i is omitted

$$\text{Độ phức tạp tính toán} = 2(n-1) + 1 = 2n - 1 = O(n)$$

ALGORITHM 2 The Linear Search Algorithm.

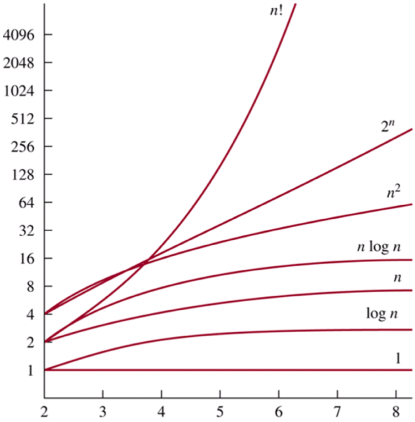
procedure *linear search*(x: integer, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: distinct integers)
$i := 1$
while ($i \leq n$ and $x \neq a_i$)
    $i := i + 1$
if $i \leq n$ **then** *location* $:= i$
else *location* $:= 0$
return *location*{*location* is the subscript of the term that equals x, or is 0 if x is not found}

i	Number of comparisons done
1	2
2	4
…	
n	2n
n+1	1, $x \neq a_i$ is omitted

$$\text{Độ phức tạp TB} = \frac{2+4+6+\ldots+2n}{n} + 1 + 1$$
$$= \frac{2(1+2+3+\ldots+n)}{n} + 2$$
$$= \frac{2n(n+1)}{2n} + 2 = \frac{n(n+1)}{n} + 2$$
$$= n + 1 + 2 = n + 3 = O(n)$$

TABLE 1 **Commonly Used Terminology for the Complexity of Algorithms.**

Complexity	*Terminology*
$\Theta(1)$	Constant complexity
$\Theta(\log n)$	Logarithmic complexity
$\Theta(n)$	Linear complexity
$\Theta(n \log n)$	Linearithmic complexity
$\Theta(n^b)$	Polynomial complexity
$\Theta(b^n)$, where $b > 1$	Exponential complexity
$\Theta(n!)$	Factorial complexity



n!
4096
2048
1024
512
256
128
64
32
16
8
4
2
1
2^n
n^2
$n \log n$
n
$\log n$
1
2
3
4
5
6
7
8

Bài tập

Bài tập 9

Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, với $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ là các số thực. Chứng minh $f(x)$ là $\mathrm{O}(x^n)$.

Bài tập

Bài tập 10

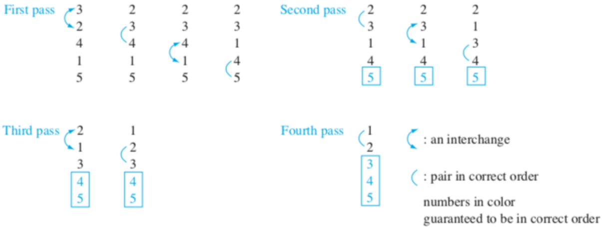
Tìm độ phức tạp tính toán của thuật toán tìm kiếm nhị phân

ALGORITHM 3 The Binary Search Algorithm.

procedure *binary search* (x: integer, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: increasing integers)
$i := 1$ {i is left endpoint of search interval}
$j := n$ {j is right endpoint of search interval}
while $i < j$
    $m := \lfloor (i + j)/2 \rfloor$
    if $x > a_m$ **then** $i := m + 1$
    else $j := m$
if $x = a_i$ **then** *location* $:= i$
else *location* $:= 0$
return *location*{*location* is the subscript i of the term a_i equal to x, or 0 if x is not found}

Bài tập 11

Tìm độ phức tạp tính toán của thuật toán sắp xếp nổi bọt



ALGORITHM 4 The Bubble Sort.

procedure *bubblesort*($a_1, \ldots, a_n$: real numbers with $n \geq 2$)
for $i := 1$ **to** $n - 1$
    for $j := 1$ **to** $n - i$
        if $a_j > a_{j+1}$ **then** interchange a_j and a_{j+1}
$\{a_1, \ldots, a_n$ is in increasing order$\}$

Bài tập

Bài tập 12

Tìm độ phức tạp tính toán của thuật toán sắp xếp nổi bọt