CHƯƠNG 2: BÀI TOÁN ĐẾM

Môn học: Toán Rời rạc 1

Giảng viên: Nguyễn Kiều Linh
Email: linhnk@ptit.edu.vn
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

Hà Nội, năm 2022
http://www.ptit.edu.vn

Nội dung chính

Giới thiệu bài toán đếm

- Bài toán đếm
  - Là bài toán đếm xem có bao nhiêu cấu hình tổ hợp có thể được tạo ra với những quy tắc đã nêu?
  - Lời giải thường phụ thuộc vào một số tham số ban đầu và người ta cố gắng biểu diễn những phụ thuộc này bằng những công thức toán học
- Nguyên tắc chung giải bài toán đếm
  - Để đếm các cấu hình đã cho, người ta tìm cách đưa về các cấu hình quen thuộc bằng cách thiếp lập một quan hệ 1-1 giữa chúng
- Ứng dụng của bài toán đếm trong khoa học máy tính
  - Ước lượng số phép toán thực hiện trong một giải thuật, chương trình máy tính.
  - Ước lượng độ phức tạp thời gian và không gian của giải thuật.

Phương pháp giải bài toán đếm

- Sử dụng các nguyên lý đếm cơ bản: nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý bù trừ
- Qui về các bài toán con: Phân tích lời giải bài toán đếm phức tạp thành những bài toán con. Trong đó, mỗi bài toán con có thể giải được bằng các nguyên lý đếm cơ bản
- Sử dụng hệ thức truy hồi: Xây dựng công thức tính số nghiệm tổng quát bất kỳ dựa vào biểu diễn các số hạng biết trước
- Phương pháp hàm sinh: Sử dụng hàm sinh của một dãy số để đếm các cấu hình tổ hợp

Nội dung chính

Nguyên lý cộng

- Nếu A và B là hai tập rời nhau thì:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

- Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ là một phân hoạch của tập X thì:

$$|X| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

- Một công việc có k phương án thực hiện khác nhau:
  - Phương án 1 có n_1 cách thực hiện,
  - Phương án 2 có n_2 cách thực hiện,
  - ......
  - Phương án k có n_k cách thực.

  Khi đó có $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ cách thực hiện công việc trên.

Nguyên lý cộng

Ví dụ 1

Có bao nhiêu cách để sinh viên chọn ra một phương tiện đi từ nhà đến trường nhập học, biết rằng có hai loại phương tiện để lựa chọn: Phương tiện cá nhân và phương tiện công cộng.

- Phương tiện cá nhân: 3 loại (xe đạp, xe máy, xe hơi).
- Phương tiện công cộng: 7 loại (xe khách, xe buýt, tàu điện trên cao, tàu hoả, taxi, xe ôm, xích lô).

Nguyên lý cộng

Ví dụ 2

Giả sử N, M là hai số tự nhiên đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của S sau khi thực hiện đoạn chương trình sau:

S=0;
for $(i = 1; i <= N; i++)$
    $S++;$
for $(j = 1; j <= M; j++)$
    $S++;$

Nguyên lý nhân

- Một công việc chia thành k giai đoạn thực hiện khác nhau:
  - Giai đoạn 1 có n_1 cách thực hiện,
  - Giai đoạn 2 có n_2 cách thực hiện,
  - ......
  - Giai đoạn k có n_k cách thực.

  Khi đó có $n = n_1.n_2 \dots n_k$ cách thực hiện công việc trên.
- Nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là những tập hợp hữu hạn, khi đó tích đề các $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ được định nghĩa bởi

  $$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, k\}$$
- Khi đó số phần tử của tích đề các $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ các tập này bằng tích số các phần tử của mỗi tập thành phần. Hay

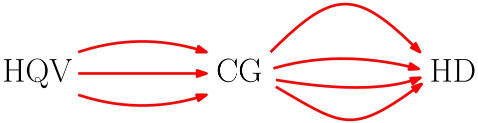
  $$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \, |A_2| \dots |A_k|$$

  Đặc biệt, $\left|A^k\right| = |A|^k$.

Nguyên lý nhân

Ví dụ 3

Cần đi xe buýt từ Hoàng Quốc Việt sang Hà Đông, giả sử cần bắt buộc phải đi qua Cầu Giấy. Có 3 tuyến xe buýt đi từ Hoàng Quốc Việt đến Cầu Giấy và 4 tuyến xe buýt từ Cầu Giấy đến Hà Đông. Hỏi có bao nhiêu cách đi xe buýt từ Hoàng Quốc Việt đến Hà Đông.



Nguyên lý nhân

Ví dụ 4

Giả sử n_1, n_2 là hai số nguyên dương đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của S sau khi thực hiện đoạn chươnng trình dưới đây?

int $S = 0$;
for (int $i = 1; i <= n_1; i++$)
    for (int $j = 1; j <= n_2; j++$)
        $S++$;

Nguyên lý nhân

Ví dụ 5

Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số không chứa chữ số 1 và không có 2 chữ số nào giống nhau?

Nguyên lý nhân

Ví dụ 5

Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số không chứa chữ số 1 và không có 2 chữ số nào giống nhau?

Ví dụ 6

có bao nhiêu tên biến trong ngôn ngữ lập trình C độ dài 8 chỉ chứa hai chữ cái a, b và bắt đầu bởi aaa hoặc kết thúc bởi bbb?

Chỉnh hợp

Định nghĩa

Chỉnh hợp chập k của n phần tử, ký hiệu A_n^k, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho $(0 \leq k \leq n)$.

Chỉnh hợp

Định nghĩa

Chỉnh hợp chập k của n phần tử, ký hiệu A_n^k, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho $(0 \leq k \leq n)$.

Chú ý

Chỉnh hợp chập k của n phần tử là cách chọn k phần tử từ n phần tử đã cho sao cho:

- Có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

Chỉnh hợp

Định nghĩa

Chỉnh hợp chập k của n phần tử, ký hiệu A_n^k, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho $(0 \leq k \leq n)$.

Chú ý

Chỉnh hợp chập k của n phần tử là cách chọn k phần tử từ n phần tử đã cho sao cho:

- Có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

Công thức tính

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Chỉnh hợp

Ví dụ 8

Lớp học có 50 sinh viên, có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư?

Chỉnh hợp

Ví dụ 8

Lớp học có 50 sinh viên, có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư?

Ví dụ 9

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

Chỉnh hợp

Ví dụ 8

Lớp học có 50 sinh viên, có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư?

Ví dụ 9

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu $\bar{A}_n^k$, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử không nhất thiết khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu $\bar{A}_n^k$, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử không nhất thiết khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Chú ý

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là cách chọn k phần tử từ n phần tử đã cho sao cho:

- Có thứ tự;
- Các phần tử không nhất thiết khác nhau.

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu $\bar{A}_n^k$, là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử không nhất thiết khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Chú ý

Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là cách chọn k phần tử từ n phần tử đã cho sao cho:

- Có thứ tự;
- Các phần tử không nhất thiết khác nhau.

Công thức tính

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 10

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?

Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 10

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?

Ví dụ 11

Có 4 cửa hàng cạnh nhau, 5 người khách đến, mỗi khách chọn ngẫu nhiên một cửa hàng. Tính số trường hợp chọn cửa hàng.

Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 10

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?

Ví dụ 11

Có 4 cửa hàng cạnh nhau, 5 người khách đến, mỗi khách chọn ngẫu nhiên một cửa hàng. Tính số trường hợp chọn cửa hàng.

Hoán vị

Định nghĩa

Hoán vị của n phần tử, ký hiệu P_n, là một nhóm có thứ tự có đủ mặt cả n phần tử đã cho.

Hoán vị

Định nghĩa

Hoán vị của n phần tử, ký hiệu P_n, là một nhóm có thứ tự có đủ mặt cả n phần tử đã cho.

Chú ý

Hoán vị là một chỉnh hợp chập n của n phần tử. Như vậy một hoán vị của n phần tử là một nhóm thoả mãn:

- Có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau;
- Có đủ mặt cả n phần tử.

Hoán vị

Định nghĩa

Hoán vị của n phần tử, ký hiệu P_n, là một nhóm có thứ tự có đủ mặt cả n phần tử đã cho.

Chú ý

Hoán vị là một chỉnh hợp chập n của n phần tử. Như vậy một hoán vị của n phần tử là một nhóm thoả mãn:

- Có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau;
- Có đủ mặt cả n phần tử.

Công thức tính

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Hoán vị

Ví dụ 12

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác?

Hoán vị

Ví dụ 12

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác?

Ví dụ 13

Một bàn dài có 10 ghế và có 10 sinh viên. Tính số cách sắp xếp tuỳ ý 10 sinh bàn dài này?

Hoán vị

Ví dụ 12

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác?

Ví dụ 13

Một bàn dài có 10 ghế và có 10 sinh viên. Tính số cách sắp xếp tuỳ ý 10 sinh bàn dài này?

Tổ hợp

Định nghĩa

Tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu C_n^k, là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho ($k \leq n$).

Tổ hợp

Định nghĩa

Tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu C_n^k, là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho $(k \leq n)$.

Chú ý

Tổ hợp chập k của n phần tử là một nhóm

- Không có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

Tổ hợp

Định nghĩa

Tổ hợp chập k của n phần tử, ký hiệu C_n^k, là một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho ($k \leq n$).

Chú ý

Tổ hợp chập k của n phần tử là một nhóm

- Không có thứ tự;
- Các phần tử khác nhau.

Công thức tính

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Tổ hợp

Tính chất

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Tổ hợp

Tính chất

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Ví dụ 14

Ngân hàng đề thi có 100 câu hỏi cho trước. Mỗi đề thi có 5 câu hỏi được lấy ngẫu nhiên trong ngân hàng đề thi. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi có nội dung khác nhau?

Tổ hợp

Tính chất

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Ví dụ 14

Ngân hàng đề thi có 100 câu hỏi cho trước. Mỗi đề thi có 5 câu hỏi được lấy ngẫu nhiên trong ngân hàng đề thi. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi có nội dung khác nhau?

Tổ hợp

Ví dụ 15

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Tổ hợp

Ví dụ 15

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Ví dụ 16

Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Tổ hợp

Ví dụ 17

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$.

Tổ hợp

Ví dụ 17

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$.

Ví dụ 18

Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq m_1, \ldots, x_n \geq m_n$?

Tổ hợp

Ví dụ 17

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$.

Ví dụ 18

Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq m_1, \ldots, x_n \geq m_n$?

Ví dụ 19

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $1 \leq x_1 \leq 5, 3 \leq x_2 \leq 7$?

Ví dụ 19

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $1 \leq x_1 \leq 5, 3 \leq x_2 \leq 7$?

Bài tập 1

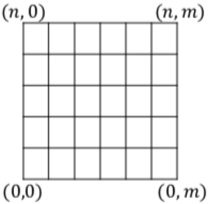
Một đợt phát hành xổ số mỗi tấm vé số gồm 2 phần. Phần chữ gồm 2 chữ cái nhận giá trị từ A đến Z, phần số gồm 4 chữ số nhận giá trị từ 0 đến 9. Mỗi đợt phát hành như vậy có 1 giải đặc biệt, 2 giải nhất, 5 giải nhì, và 10 giải ba. Tính xác suất 1 tấm vé số trúng giải từ giải ba trở lên trong 2 trường hợp sau

a. Phần chữ đứng trước phần số trong mỗi tấm vé số.

b. Phần chữ đứng tùy ý trong mỗi tấm vé số.

Bài tập 2

Cho lưới như hình vẽ. Ta đánh số các cột từ 0 tới m (theo chiều từ trái sang phải) và các hàng từ 0 tới n (theo chiều từ dưới lên trên). Hỏi có bao nhiêu cách di chuyển từ vị trí $(0, 0)$ tới vị trí (n, m) nếu ta chỉ di chuyển dọc theo cạnh các ô theo chiều từ trái sang phải và theo chiều từ dưới lên trên.



Nguyên lý bù trừ

- Nhiều bài toán đếm phức tạp hơn có thể giải bằng nguyên lý bù trừ
- Về bản chất, nguyên lý bù trừ là trường hợp tổng quát của nguyên lý cộng
- **Nguyên lý bù trừ**: Nếu A và B là hai tập hợp, khi đó:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- Tổng quát, nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập hợp hữu hạn, khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Ví dụ 20

Trong tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 10000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số $3, 4, 7$?

Ví dụ 20

Trong tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 10000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số $3, 4, 7$?

Ví dụ 21

Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, 879 sinh viên học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiêng Nga, 103 sinh viên học cả tiêng Tây Ban Nha và tiêng Pháp, 23 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha và tiếng Nga, 14 sinh viên học cả tiếng Pháp và tiếng Nga. Nếu tất cả có 2092 sinh viên theo học ít nhất một ngoại ngữ thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng.

Bài tập 3

Bài toán bỏ thư: Có n lá thư bỏ vào n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Tính xác suất để không một lá thư nào bỏ đúng địa chỉ?

Gợi ý

Gọi A_i là tập các cách bỏ thư thỏa mãn lá thư thứ i đúng địa chỉ. Số cách bỏ thư thỏa mãn yêu cầu

$$N - |A_1 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n| = N - N_1 + N_2 \ldots + (-1)^n N_n$$

Trong đó $N = n\,!$ là số cách bỏ thư, N_k là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có k lá thư bỏ đúng địa chỉ. Có C_n^k cách chọn ra k lá thư đúng địa chỉ, với mỗi cách chọn ra k lá thư đúng địa chỉ có $(n-k)\,!$ cách bỏ các lá thư còn lại. Do vậy $N_k = C_n^k(n-k)! = \frac{n!}{k!}$

- Xác suất: $\frac{N - N_1 + N_2 \ldots + (-1)^n N_n}{N}$

Bài tập 4

Có bao nhiêu cách xếp 5 người, A, B, C, D, E, đứng thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B?

Bài tập 4

Có bao nhiêu cách xếp 5 người, A, B, C, D, E, đứng thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B?

Bài tập 5

Tính số lượng số có 5 chữ số sao cho có ít nhất hai chữ số giống nhau?

Nội dung chính

Quy về bài toán con

- Một phương pháp khác để giải bài toán đếm là quy về các bài toán con đơn giản hơn
- Tuy nhiên, điều này không phải lúc nào cũng dễ dàng vì ta cần phải phân tích sâu sắc các cấu hình cần đếm

Ví dụ 22

Trong các số tự nhiên có 7 chữ số hãy đếm số các số thuận nghịch (số đối xứng) có tổng các chữ số là 18?

Nội dung chính

Hệ thức truy hồi

Định nghĩa

- Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng trước của dãy, cụ thể là $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, với n nguyên và $n \geq n_0$, trong đó n_0 là nguyên không âm.
- Dãy số được gọi là lời giải hay nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thoả mãn hệ thức truy hồi này.

Hệ thức truy hồi

Ví dụ 23

Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n \geq 2$, và giả sử $a_0 = 3, a_1 = 5$. Tìm a_2 và a_3?

Mô hình hoá hệ thức truy hồi

Sử dụng hệ thức truy hồi, ta có thể mô hình hóa được lớp rất rộng trong thực tế. Mỗi bài toán cụ thể ta có một phương pháp mô hình hóa khác nhau. Dưới đây là một số ví dụ điển hình.

Ví dụ 24 (Bài toán dân số)

Giả sử năm 1995, dân số thế giới là 7 tỉ người. Mỗi năm, dân số thê giới tăng 3%. Đến năm 2020, dân sỗ thê giới là bao nhiêu người?

Mô hình hoá hệ thức truy hồi

Sử dụng hệ thức truy hồi, ta có thể mô hình hóa được lớp rất rộng trong thực tế. Mỗi bài toán cụ thể ta có một phương pháp mô hình hóa khác nhau. Dưới đây là một số ví dụ điển hình.

Ví dụ 24 (Bài toán dân số)

Giả sử năm 1995, dân số thế giới là 7 tỉ người. Mỗi năm, dân số thê giới tăng 3%. Đến năm 2020, dân sỗ thê giới là bao nhiêu người?

Ví dụ 25 (Bài toán dân số)

Một người gửi X đô la vào tài khoản của mình tại ngân hàng với lãi suất kép 11% một năm. Hỏi sau 30 năm người đó có bao nhiêu tiên trong tài khoản?

Mô hình hoá hệ thức truy hồi

Ví dụ 26 (Tính số cặp thỏ sau n tháng)

Một cặp thỏ (một con đực và một con cái) được nhốt trên một hòn đảo. Giả sử một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy hai tháng tuổi. Từ khi chúng đầy hai tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một cặp thỏ. Hãy tìm công thức truy hổ tính số cặp thỏ sau n tháng?

Ví dụ 27 (Bài toán tháp Hà Nội)

Có ba cọc (a), (b), (c). Trên cọc (a) có $n(n = 64)$ chiếc đĩa có đường kính giảm dần từ dưới lên. Cần phải dịch chuyển chồng đĩa từ cọc (a) sang cọc (c) tuân thủ theo qui tắc: mối lân chỉ được phép di chuyển một đĩa và chỉ được xếp các đĩa có đường kính nhỏ hơn lển đĩa có đường kính hơn. Trong quá trình dịch chuyển được phép sử dụng cọc (b) làm cọc trung gian. Bài toán đặt ra là số lần dịch chuyển ít nhất cho bài toán tháp Hà Nội?

Mô hình hoá hệ thức truy hồi

Ví dụ 27(Tính số từ mã)

Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nêu nó chứa một số chẵn chữ số 0 . Ví dụ từ 168304073 là hợp lệ, từ 103203044 là không hợp lệ. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho các từ mã hợp lệ có độ dài n?

Mô hình hoá hệ thức truy hồi

Ví dụ 27(Tính số từ mã)

Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nêu nó chứa một số chẵn chữ số 0 . Ví dụ từ 168304073 là hợp lệ, từ 103203044 là không hợp lệ. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho các từ mã hợp lệ có độ dài n?

Ví dụ 27(Tính số xâu nhị phân)

Gọi a_n là số xâu nhị phân độ dài n không có 2 số 0 liên tiểp. Xây dựng công thức truy hồi cho a_n và tính a_6.

Bài tập 6

a) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy hai số 0 liên tiếp?
b) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy ba số 1 liên tiếp?
c) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy bốn số 1 liên tiếp?
d) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy ba số 1 liên tiếp?
e) Hãy tìm hê thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy bốn số 1 liên tiếp?
f) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy k sổ 1 liên tiếp?
g) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy k số 1 liên tiếp?

Phương pháp lặp giải hệ thức truy hồi

Phương pháp: Lặp đến khi gặp điều kiện đầu trong các công thức truy hồi.

Ví dụ 31

Hãy tìm nghiệm của công thức truy hồi với điều kiện đầu dưới đây:

$a)a_n = a_{n-1} + 2$ với $a_0 = 3.$

$b)a_n = a_{n-1} + n$ vơi $a_0 = 1$

$c)a_n = a_{n-1} + 2n + 3$ vơi $a_0 = 4$

$d)a_n = a_{n-1} + 2^n$ với $a_0 = 1.$

$e)a_n = a_{n-1} - 2n - 3$ với $a_0 = 4.$

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa

Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \qquad (1)$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số và $c_k \neq 0$

- Ta cần tìm công thức trực tiếp tính số hạng a_n thõa mãn điều kiện (1).
- Dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện (1) sẽ được xác định duy nhất nếu nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu như sau: $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}$, trong đó $C_0, \ldots, C_{k-1}$ là các hằng số.

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- Hệ thức truy hồi $P_n = 3P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 1
- Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-5}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 5
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$ là không tuyến tính
- Hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ là không thuần nhất
- Hệ thức $B_n = nB_{n-1}$ không có hệ số hằng số

Phương pháp giải

- Phương pháp chung để giải các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số.
- Chú ý rằng, $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0 \qquad (2)$$

(2) được gọi là phương trình đặc trưng.

Trường hợp nghiệm phân biệt

Định lý

Định lý: Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử phương trình đặc trưng

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2. Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$.
Trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.
Để tìm α_1 và α_2 ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

Trường hợp nghiệm phân biệt

Ví dụ 32

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

với $a_0 = 2, a_1 = 7$.

Trường hợp nghiệm phân biệt

Bài tập 7

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$, với điều kiện ban đầu $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Bài tập 8

Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi với điều kiện đầu dưới đây
1) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = 6$.
2) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 2, a_1 = 1$.
3) $a_n = 13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = 15$.
4) $a_n = -13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = 15$.

Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm kép

Định lý

Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử phương trình đặc trưng

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

có nghiệm kép $r_0 = r_1 = r_2$. Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n.$$

Trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.
Để tìm α_1 và α_2 ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm kép

Ví dụ 33

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

với $a_0 = 1, a_1 = 6$.

Bài tập 9

Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi thỏa mãn các điều kiện ban đầu sau đây

1) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 4, a_1 = 1$.
2) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 6, a_1 = 8$.
3) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 0, a_1 = 1$.
4) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = -3$.
5) $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = 35$.
6) $a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = 35$.

Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm phức

Định lý

Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử phương trình đặc trưng

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

có hai nghiệm phức liên hợp: $\begin{cases} r_1 = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \\ r_2 = r(\cos(\theta) - i \cdot \sin(\theta)). \end{cases}$

Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi
$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ khi và chỉ khi

$$a_n = r^n \left(\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta)\right).$$

Trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.
Để tìm α_1 và α_2 ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm phức

Ví dụ 33

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

với $a_1 = 4, a_2 = 4$.

Trường hợp tổng quát

Định lý

Cho $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực. Giả sử phương trình đặc trưng

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

Có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

Trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ là các hằng số.
Để tìm $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

Bài tập 10

Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau:
1) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$ và $a_0 = 2, a_1 = 5$, $a_2 = 15$.
2) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, với $n \geq 3$ và $a_0 = 3, a_1 = 6$, $a_2 = 0$.
3) $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$ và $a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$.
4) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$ và $a_0 = 7, a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

Nội dung chính

Phương pháp hàm sinh

Định nghĩa

Hàm sinh $g(x)$ của dãy số $\{h_n\}_{n=0,1,2,...}$ là chuỗi vô hạn

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i x^i$$

Hàm $g(x)$ sinh ra dãy số đã cho như là các hệ số của nó

Chú ý

Trong trường hợp dãy số là hữu hạn thì ta sẽ biến nó thành dãy vô hạn bằng cách đưa vào các phần tử 0.

Phương pháp hàm sinh

Ví dụ 35

Hàm $g(x) = (1 + x)^n$ sinh ra dãy các hệ số tổ hợp

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Một số khai triển thường gặp

$$\frac{x^k}{1-x} = x^k\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots$$

$$\frac{1-x^{k+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k.$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

$$\frac{x}{1-x^2} = x\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\right) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots$$

Một số khai triển thường gặp

Ví dụ 36

Xây dựng hàm sinh giải quyết bài toán sau: Có bao nhiêu cách chọn ra n quả từ 4 loại quả táo, chuối, cam, đào, trong đó có một số chẵn quả táo, một số lẻ quá chuối, không quá 4 quả cam, và ít nhất 2 quả đào?

Một số khai triển thường gặp

Bài tập 10

Tìm hàm sinh cho số cách đổi n (nghìn đồng) sử dụng các loại giấy bạc mệnh giá 1 nghìn đồng, 5 nghìn đồng, 10 nghìn đồng, 50 nghìn đồng (giả thiết là ta có một số lượng không hạn chế mỗi loại giấy bạc).