Le problème du Sudoku

• Rappel des règles : on dispose d'une grille $n \times n$ qu'on veut remplir avec des entiers de $[\![1 \ ; \ n]\!]$ de telle sorte que chaque ligne / colonne / bloc de taille $l \times l$, où $n = l^2$ contienne chaque entier exactement une fois.

Une grille peut être partiellement pré-remplie afin qu'il n'existe qu'une seule solution.

• Réduction à SAT : on introduit n^3 variables propositionnelles $(x_{i,j}^k)_{i,j,k \in [\![1 \ ; \ n]\!]}$.

Idée : $x_{i,j}^k$ signifie "la case (i, j) contient l'entier k".

On peut représenter les règles à l'aide de formules :

– Chaque case contient un unique chiffre :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{n} \left(x_{i,j}^k \wedge \bigwedge_{k' \neq k} \neg x_{i,j}^{k'} \right)$$

– Chaque ligne contient au moins une fois chaque chiffre :

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} x_{i,j}^k$$

– Chaque ligne contient au plus une fois chaque chiffre :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{k=1}^{n} \left(x_{i,j}^k \rightarrow \bigwedge_{j' \neq j} \neg x_{i,j'}^k \right)$$

– Ect.

($\bigwedge$ est la version finie de $\forall$, et $\bigvee$ est la version finie de $\exists$)

On peut représenter les cases pré-remplies par des clauses unitaires $x_{i,j}^k$ (si la case (i, j) est pré-remplie avec k)

La conjonction de toutes ces formules donne une instance de SAT telle que tout modèle de cette conjonction représente une solution.