Coloration de graphes

ENAC

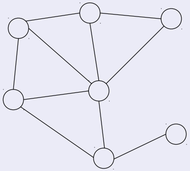
Alexandre Gondran
alexandre.gondran@recherche.enac.fr

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

graphe $G = (V, E)$



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

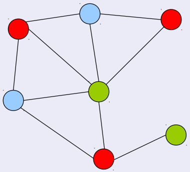
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

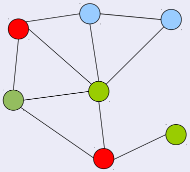
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, \dots, k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration non légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

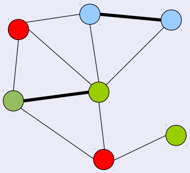
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, \ldots, k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

arêtes en conflit



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

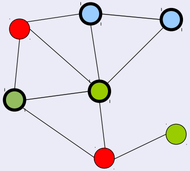
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

sommets en conflit



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

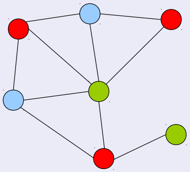
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, \ldots, k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

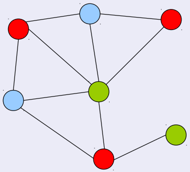
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

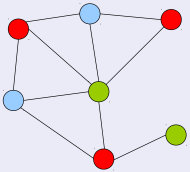
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \rightarrow & \{1, 2, \ldots, k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

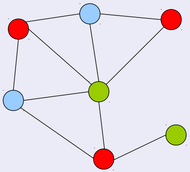
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, \ldots, k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Définitions

- k-coloration légale : respect des contraintes : $c(v_i) \neq c(v_j), \quad \forall (v_i, v_j) \in E$
- G est k-coloriable s'il admet une k-coloration légale
- Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable
- Une classe de couleur est un ensemble des sommets coloriés de la même couleur
- Un stable est un ensemble de sommets non adjacents

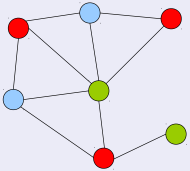
$\Rightarrow$ une k-coloration légale = un partitionnement du graphe en k stables

k-coloration de $G = (V, E)$

V : ensemble des sommets
E : ensemble des arêtes
k : nombre de couleurs

$$\begin{array}{rcl} c : V & \to & \{1, 2, ..., k\} \\ v & \mapsto & c(v) \end{array}$$

3-coloration légale



Problèmes

- Problème d'optimisation : problème de coloration de graphe : trouver $\chi(G)$

$\Rightarrow$ NP-difficile pour des graphes quelconques

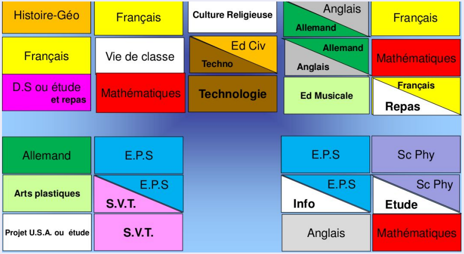
- Problème de décision : problème de k-coloration : pour k donné, G est-il k-coloriable ?

$\Rightarrow$ NP-complet en général pour $k \geqslant 3$

Applications : allocation de ressources *rares*

Emplois du temps

Allocation de créneaux horaires à des événements : cours, examens...



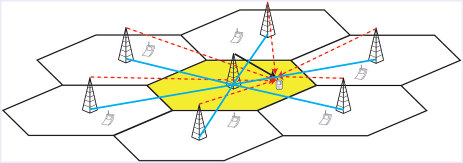
- Sommets : les événements
- Arêtes : les contraintes; deux événements ne peuvent se dérouler simultanément
- Couleurs : les créneaux horaires

⇒ Minimiser la durée totale des événements

Applications : allocation de ressources *rares*

Allocation de fréquences dans les réseaux GSM

Attribuer aux antennes relais des bandes de fréquences pour communiquer avec les usagers.



- Sommets : les antennes relais
- Arêtes : entre deux antennes trop proches géographiquement l'une de l'autre (niveau d'interférence trop important)
- Couleurs : les canaux de fréquences radio

$\Rightarrow$ Minimiser le nombre de fréquences utilisées ou pour un nombre de fréquences donné minimiser les interférences

Beaucoup de contraintes supplémentaires sur les interférences et la qualité de service

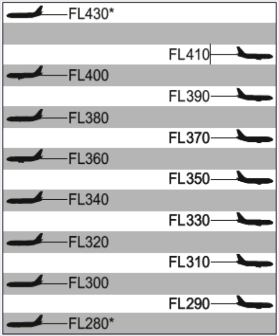
Applications : allocation de ressources *rares*

Allocation de niveaux de vol

Attribuer un niveau de vol aux avions pour éviter les conflits aériens.

- Sommets : les avions
- Arêtes : entre deux avions en conflits (ne respectant pas les distances de sécurité)
- Couleurs : les niveaux de vol

⇒ Minimiser le nombre de niveaux de vol utilisés

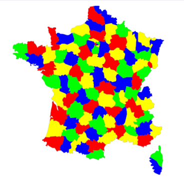


Applications : allocation de ressources *rares*

Coloration de carte géographique

- Sommets : les départements
- Arêtes : entre deux départements frontaliers

⇒ colorier en 4 couleurs



Sudoku, carré latin...

Compléter une grille de sudoku

- Sommets : les cases de la grille
- Arêtes : entre deux cases de la même ligne, même colonne et même carré
- Couleurs : les numéros

⇒ Existence d'une solution à partir d'une solution partielle

9		8		7			4	2
			9				6	
		6	8		4		9	
5	8	3						4
				6	3			7
3	5				2	8		
	6			3	7			9
2		7			5			6

Problème de coloration de graphe

Théorème de Brooks

Un graphe connexe G de degré maximum d possède une coloration avec d couleurs, à l'exception du graphe complet et du graphe cycle de longueur impaire qui nécessitent $d + 1$ couleurs.

- Minorant : trouver une clique maximale de taille m ($\chi(G) \geqslant m$).
- Majorant : colorer les sommets un à un en choisissant une couleur différente de toutes celles déjà utilisées par ses voisins ($\chi(G) \leqslant d + 1 \leqslant n$).

Théorème de Hall

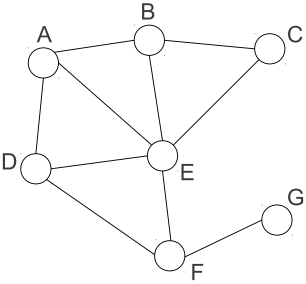
Théorème

Un graphe biparti $G = (S_1 \cup S_2, A)$ admet un couplage parfait si et seulement si pour tout sous-ensemble X de S_1 (de S_2, respectivement), le nombre de sommets de S_2 (de S_1, respectivement) adjacents à un sommet de X est supérieur ou égal à la cardinalité de X.

Stratégies gloutones
Orientation totale des sommets - [Davis 91]

Couleurs numérotées

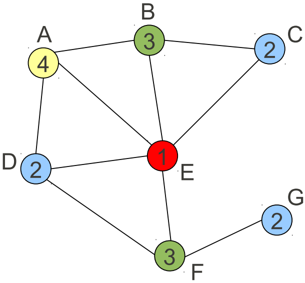
Ordre de coloration des sommets
Règle : colorier les sommets avec la plus petite couleur disponible



Stratégies gloutones
Orientation totale des sommets - [Davis 91]

Couleurs numérotées

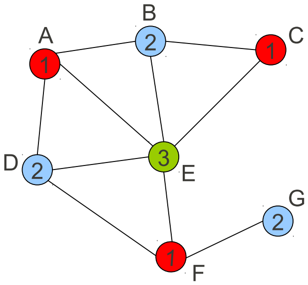
Règle : colorier les sommets avec la plus petite couleur disponible
Ordre de coloration des sommets :
$E \to D \to C \to B \to A \to F \to G$
$\Rightarrow$ coloration en 4 couleurs



Stratégies gloutones
Orientation totale des sommets - [Davis 91]

Couleurs numérotées

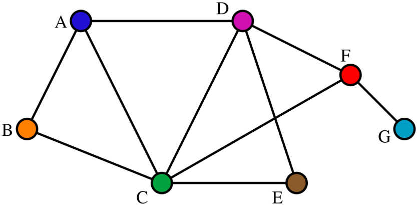
Règle : colorier les sommets avec la plus petite couleur disponible
Ordre de coloration des sommets :
$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$
$\Rightarrow$ coloration en 3 couleurs

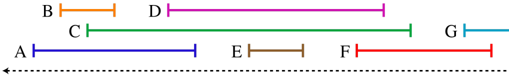


Stratégies gloutones
Orientation totale des sommets - [Davis 91]

Couleurs numérotées

Règle : colorier les sommets avec la plus petite couleur disponible
Quel ordre ?
Ordre inverse des dates au plus tard pour les graphes d'intervalles.
$\Longrightarrow$ Algorithme optimale en $O(|V|log(|V|))$!





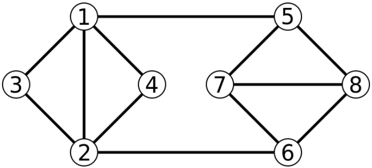
Stratégies gloutones
Orientation dynamique des sommets - DSATUR

Définition : degré de saturation

$DSAT(v)$: nombre de couleurs différentes utilisées par ses voisins

Heuristique *dynamique* DSATUR [Daniel Brélaz, 1979]

1. Ordonner les sommets par ordre décroissant de degrés
2. Colorer un sommet de degré maximum avec la couleur 1
3. Choisir $v^{best} = DSAT(v)$ (à égalité, degré max.)
4. Colorer v^{best} par la plus petite couleur possible
5. Si tous les sommets sont colorés alors stop, sinon aller en 3



Stratégies gloutones
Extractions successives de stabes - RLF

Coloration = Partition en stables

$k \leftarrow 0$

tant que *il exsite de sommets non coloriés* **faire**

  $k \leftarrow k + 1$

  tant que *il exsite de sommets non coloriés et non marqués* **faire**

    Choisir le sommet v non colorié et non marqué ayant le plus de voisins marqués (à égalité, celui de degré max.)

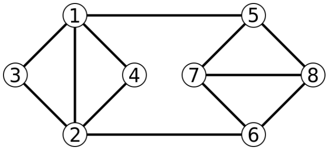
    Colorier v avec la couleur k

    Marquer tous les sommets adjacents à v non coloriés

  Enlever toutes les marques

retourner k

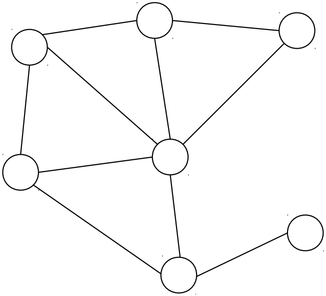
Algorithme 1 : RLF (Recursive-Large-First) [Leighton, 1979]



Théorème de Vitaver, 1962

La longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.

Graphe simple

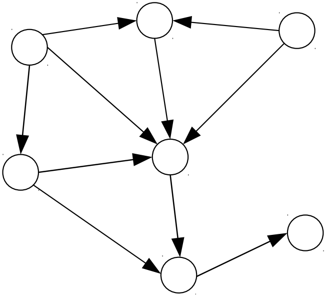


Théorème de Vitaver, 1962

La longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.

Graphe avec une orientation sans cycle

Couleurs numérotées



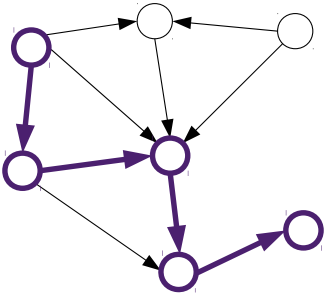
Stratégies gloutones
Orientation relative des sommets
Graphe orienté sans cycle [Gendron et al.07]

Théorème de Vitaver, 1962

La longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.

Plus long chemin : 5 sommets $\Rightarrow$ coloration en 5 couleurs

Couleurs numérotées

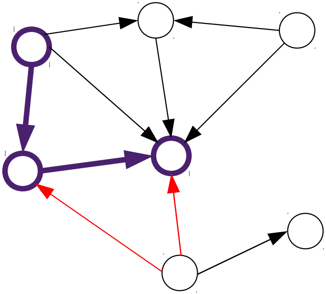


Théorème de Vitaver, 1962

La longueur du plus long chemin dans une orientation d'un graphe est supérieure ou égale à son nombre chromatique.

Plus long chemin : 3 sommets $\Rightarrow$ coloration en 3 couleurs

Couleurs numérotées



Méthodes exactes

Données : $G = (V, E)$ un graphe.
C, la coloration vide ($\forall v \in V : C[v] \leftarrow None$)
$\chi \leftarrow |V|$
$DSATUR(C, 0)$
retourner χ
$DSATUR(C, k)$ *(k est nombre de couleurs utilisées par C)* **si** *tous les sommets de C sont coloriés* **alors**
    si $k < \chi$ **alors**
        $\chi \leftarrow k$
sinon
    Sélectionner un sommet non colorié v de C (selon DSAT max)
    for *chaque couleur* $i \in [1; k+1]$ *possible pour* v **do**
        $C' \leftarrow C$, $C'[v] \leftarrow i$
        $k' \leftarrow max(k, i)$: nombre de couleur utilisée dans C'.
        si $k' < \chi$ **alors**
            $DSATUR(C', k')$

Algorithme 2 : DSATUR Branch&Bound qui renvoie $\chi(G)$.

Logiciels, lectures

Outils de résolution du problème de coloration de graphe

DSATUR branch&bound et Exactcolors (exactes pour $n < 200$)
`https://github.com/heldstephan/exactcolors`
HEAD (approchée pour $n < 10000$)
`https://github.com/graphcoloring/HEAD`
NetworkX
`https://networkx.github.io`

Article

Emmanuel Hébrard, George Katsirelos. *A Hybrid Approach for Exact Coloring of Massive Graphs.* CPAIOR'2019, Thessaloniki, Greece.