- 概率论基本概念
  - 随机事件及运算
  - 概率定义和基本性质
  - 等可能概型
    - 古典概型
      - 特点
        - 每个样本点等可能出现
        - 样本空间中样本点个数有限
      - 计算
        - 事件A的概率等于A中样本点数除以样本点总数
      - 4种模型
        - 摸球问题
        - 分房问题
        - 抽签问题
        - 分组问题
    - 几何概型
      - 特点
        - 每个样本点等可能出现
        - 样本空间中样本点个数无限
      - 模型
        - 会面问题
  - 条件概率
    - 定义
      - 定义
        - P(A|B)=P(AB)/P(B)表示在已知事件B发生的条件下，事件A发生的概率
      - 性质
        - 非负性
        - 归一性
        - 可列可加性
    - 乘法公式
    - 全概率公式和贝叶斯公式
  - 独立性与伯努利试验
    - 独立性
      - 定义
        - 若P(AB)=P(A)P(B),则事件A,B相互独立
      - 性质
        - A,B相互独立，则AB不等于空集
        - A与A相互独立，则P(A)=0或1
        - (A,B),(A补,B),(A,B补),(A补,B补)若有一对独立，则其余三组均独立

随机事件及运算

一、随机试验与随机事件

1. 定义

1.1 随机试验和随机事件

随机试验	随机事件
具有以下特征的现象E: ① 可重复：该试验可在相同条件下重复进行 ② 可观察：所有可能出现的结果是已知的 ③ 随机性：试验之前不可预知哪个结果会出现	随机试验E对应的样本空间Ω的子集
E	A, B, C

③ 随机性：试验之前不可预知哪个结果会出现	
E	$A,B,C\ldots\ldots$

1.2 样本空间和样本点

样本空间：随机试验E的所有可能结果组成的集合，即$\Omega=\{w\}$

样本点：Ω的元素，就是可能结果，即w

1.3 必然事件和不可能事件

事件发生：在试验中，属于某个事件A的样本点出现了，就称该事件发生

必然事件：样本空间Ω

不可能事件：空集$\emptyset$

注意：A是必然事件$\Rightarrow P(A)=1$；A是不可能事件$\Rightarrow P(A)=0$。然而反之不成立。

二、事件间的关系与运算

1. 关系

和事件	A,B至少有一个发生	$A\cup B$或$A+B$
积事件	A,B同时发生	AB
差事件	A发生而B不发生	$A-B$
补事件	——	$\bar{A}=\Omega-A$
互斥事件	A和B不会同时发生	$AB=0$
包含	事件 A 的每一个样本点都包含在事件 B 中	$A\subset B$
相等	$A\subset B$且$B\subset A$	$A=B$

2. 运算

交换律	$A\cup B=B\cup A,\ \ A\cap B=B\cap A$
结合律	$A\cup(B\cup C)=\ (A\cup B)\cup$ $A\cap(B\cap C)=\ (A\cap B)\cap$

分配律	$A\cup(B\cap C)=\ (A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=\ (A\cap B)\cup(A\cap C)$
德	

	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
德摩根率	$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ $\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}=\bigcap_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha},\ \overline{\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha}=\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$

定义和基本性质

一、概率的公理化定义

设Ω为随机试验E的样本空间,如果对于任意事件$A\subset\Omega$,有一个实数$P(A)$与之对应,且满足:

(1) 非负性:$P(A)>0$;

(2) 归一性:$P(\Omega)=1$;

(3) 可加性:设$A_1,A_2\ldots\cdots$是一列两两互不相容的事件,则有$P\left(\cup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，则称$P(A)$为事件$A$的概率

概率P是一个映射,它将Ω的任何一个子集(事件)A映成一个实数$P(A)$,但要遵循一定的规则.

二、基本性质

$P(\emptyset)=0$
有限可加性：$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$
如果$A\subset B$,则$P(A)\le P(B)$
$P(A)+P(\bar{A})=1$
减法公式：$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$
加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

1. 设 $P(A)=x,P(B)=y,P(AB)=z$,用 x,y,z 表示下列事件的概率:$P(\bar{A}\cup\bar{B})$, $P(\bar{A}B)$,$P(\bar{A}\cup B)$,$P(A\bar{B})$.

2. 设 $P(A)=0.8,P(B)=0.5$,问:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$取最大值,最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$取最小值,最小值是多少?

等可能概型

一、古典概型：有限个样本点，每个样本点出现的可

能性相同

例 1.3.1 设有 6 个白球和 4 个红球混合后装入袋中，从这 10 个球中任取 5 个，

(1) 在有放回的情形下，求这 5 个球中恰有 3 个白球的概率；

(2) 在不放回的情形下，求这 5 个球中恰有 3 个白球的概率；

(3) 在不放回取球下，求第 3 个球为白球的概率.

例 1.3.2(分房问题) 将 n 个人随机分到 N 个房间中去($n\leqslant N$)，每个人分到哪个房间是等可能的，且假设每个房间可容纳的人数没有限制，求：

(1) 某个指定的房间(比如第一个房间)恰有 m 个人的概率($m\leqslant n$)；

(2) 每两个人都不在同一个房间的概率.

例 1.3.3 求 m 个人中至少有两人生日相同的概率($m\leqslant 365$).

例 1.3.4(抽签问题) 设 15 个人要去看电影，但只有 7 张电影票，于是进行抽签决定谁去看电影. 求第 5 个人抽到电影票的概率.

例 1.3.5(分组法) 将 n 个不同的球分成 k 个不同的组，使得这 k 个组各有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 个球，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 问：共有多少种分法？

例 1.3.6 求在桥牌比赛(无大小王)中 4 张“A”落入同一个人手中的概率.

4. 设 6 位同学每位都等可能地进入 10 间教室的任何一间自习. 求下列事件的概率：

(1) 某指定教室有两位同学；

(2) 6 位同学所在的教室都不相同；

(3) 至少有 2 位同学在同一个教室.

5. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求：(1) 这 4 只鞋子至少有一双的概率；(2) 都不成双的概率.

二、几何概型

与古典概型区别在于：有无限多个样本点

与古典概型区别在于：有无限多个样本点

6. 两人相约在早晨 7 点到 8 点之间在某处见面，先到者等候 10 min，过时不候. 求两人能见面的概率.

7. 在区间$(-1,1)$内随机地取两个实数 r,s，求这两个实数使方程 $x^2-2rx+s=0$ 有实根的概率.

8. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，试求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率.

条件概率与乘法公式

1、**定义 1.4.1** 设 A 与 B 为两个事件，且 $P(B)>0$. 那么在已知“事件 B 发生”的条件下，事件 A 的条件概率 $P(A|B)$ 定义为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.4.1}$$

不难验证，条件概率满足下列性质：

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $P(A|B)\geqslant 0$；

(2) 归一性：$P(\Omega|B)=1$；

(3) 可列可加性：对任意的一列两两互不相容的事件 A_n，$n=1,2,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\,|B\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\,|B).$$

2、乘法公式

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\,|A_1)P(A_3\,|A_1A_2)\cdots P(A_n\,|A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A),P(AB)=P(B)P(A|B).$$

3、全概率公式

定理 1.4.1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个划分，则对任意的事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i). \tag{1.4.3}$$

如果划分为 $A_1, A_2, \cdots$，则全概率公式为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B \mid A_i).$$

综上所述，使用全概率公式的题型大致具有下述特征：

(1) 随机试验可以分为两个相互影响的阶段；

(2) 第一阶段的所有可能结果已知；

(3) 所求概率为第二阶段结果之概率.

例 1.4.6 设有甲、乙两个盒子，甲中有 7 个红球 3 个白球，乙中有 5 个红球 6 个白球. 先从甲盒中任取两球放入乙中，再从乙盒中任取一球，试求从乙盒中取出的是红球的概率.

例 1.4.7 设有 3 旧 6 新 9 个乒乓球，第一次比赛任取 3 只，用后放回，第二次比赛任取 3 只.

(1) 求这 3 个球全是新球的概率.

(2) 若已知第二次比赛的 3 个乒乓球全新，求第一次比赛的 3 个乒乓球为二新一旧的概率.

5. 设第一个盒子中装有 5 只白球 4 只红球，第二个盒子中装有 4 只白球 6 只红球. 先从第一个盒子中任取 2 只球放入第二个盒子，再从第二个盒子中任取一球. 求此球为红球的概率.

4、贝叶斯公式

定理 1.4.2(贝叶斯公式) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 Ω 的一个划分，如果 $P(A_k)>0, k=1,2,\cdots,n$，则对任意事件 B，只要 $P(B)>0$，就有

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k) P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)}. \tag{1.4.4}$$

例 1.4.8 设有甲、乙两个盒子，甲中有 7 个红球 3 个白球，乙中有 5 个红球 6 个白球. 先从甲盒中任取两球放入乙中，再从乙盒中任取一球. 若已知从乙盒中取出的是红球，试求从甲盒中取出的是一个红球一个白球的概率.

8. 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表. 其中女生的报名表依次为 3 份、7 份和 15 份. 现任取一个地区的报名表，从中先后抽出 2 份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率；

(2) 已知后抽到的是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率.

9. 一枚深水炸弹击沉一艘潜水艇的概率为 0.3，击伤的概率为 0.5，击不中的概率为 0.2. 假设击伤两次也会导致潜水艇下沉. 求施放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率.

10. 用"胎甲蛋白法"普查癌症，已知确有癌症者，查出为阳性的概率为 0.95；未患癌症者，查出为阴性的概率为 0.95. 一人生活在低发病区，该地区癌症发病率为 0.000 5；另一人生活在高发病区，该地区癌症发病率为 0.01. 若两人均查出为阳性，问他们真正患有癌症的概率各为多少？

独立性与伯努利实验

一、独立性

1. $P(AB)=P(A)P(B) \Longleftrightarrow A,B$ 相互独立

2. $\begin{cases} P(A)>0,\ P(B)>0,\ A,B \text{ 相互独立} \Rightarrow AB \neq \varnothing \\ P(A)>0,\ P(B)>0,\ AB=\varnothing \Rightarrow A,B \text{ 不独立} \end{cases}$

3. A 与 A 独立 $\Rightarrow P(A)=0$ 或 1

4. (A,B) $(\bar{A},B)$ $(A,\bar{B})$ $(\bar{A},\bar{B})$ 任一独立，其余皆独立

二、n重伯努利实验

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

7. 甲、乙、丙三人独立地向同一飞机射击，设击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7. 如果只有一人击中，则飞机被击落的概率为 0.2；如果有两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；如果三人都击中，则飞机一定被击落. 求飞机被击落的概率.

9. 某厂生产的仪器中一次检验合格的占 60%，其余的需要重新调试. 经调试的产品中有 80%经检验合格，而 20%会被判定为不合格而不能出厂. 现该厂生产了 200 台仪器，求下列事件的概率：

(1) 全部仪器都能出厂；

(2) 恰有 10 台不合格；

(3) 至少有 2 台不合格.

提高题

例 1.6.3(Buffon 投针问题) 在平面上画满间距为 a 的平行直线，向该平面随机投掷一枚长度为 $l\,(l<a)$ 的针，试求针与直线相交的概率.

例 1.6.4(Polyá 罐子模型) 设罐中有 a 个红球 b 个黑球，随机取出一个，把原球放回，并加进与抽出球同色的球 c 个；再摸第二次，这样下去共摸了 n 次. 试证明第 n 次取球时取出红球的概率为 $\frac{a}{a+b}$.

例 1.6.5 甲乙二人比赛下棋，每局胜者得一分，甲在每局比赛中胜的概率为 α，乙在每局比赛中胜的概率为 $\beta(\alpha+\beta=1)$. 独立地进行比赛，直到有一人超过对方 2 分就停止，多得 2 分者胜. 求甲最终获胜的概率.

9. 某人给 5 位同学各写了一封信，并写好信封，然后随机地在每一信封里装入一封信，求下列事件的概率：

(1) 只有一封信装对；

(2) 没有一封信装对.

10. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)=p_i>0$，求事件 A_i 比 A_j 先发生的概率.

11. 设有 4 名战士每人在晚上睡觉之前都把枪放在门口，早晨紧急集合，每人随意拿一把枪参加集合，求至少有一个人拿到自己的枪的概率. 如果是 n 名战士，概率又是多少？

12. 设某种微生物恰好繁殖 n 个幼虫的概率为 $\frac{6^n}{n!}e^{-6}$，每个幼虫能够成长为成虫的概率为 0.5，且每个幼虫能否成长为成虫是相互独立的，求恰有 m 个幼虫能成长为成虫的概率.