随机变量的数字特征

一、数学期望

1、性质

① $E(C)=C$

② $E(CX)=CE(X)$

③ $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$

④ $E(\sum a_iX_i+b)=\sum a_iE(X_i)+b$

⑤ 若X Y相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$，$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$

2、一维随机变量

(1) 离散型

① 二项分布 $E(X)=np$

② 泊松分布 $E(X)=\lambda$

③ 几何分布 $E(X)=\frac{1}{p}$

(2) 连续型

① 均匀分布 $E(X)=\frac{a+b}{2}$

② 指数分布 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$

③ 正态分布 $E(X)=\mu$

3、二维随机变量

(1) 离散型 $E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$

(2) 连续型 $E(Z)=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\,dxdy$

二、方差

1、计算

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

2、性质

① $D(C)=0$

② $D(aX+b)=a^2D(X)$

③ $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ （要求X、Y相互独立）

六、常见类型

离散型：
- 二项分布：$D(X)=p(1-p)$
- 泊松分布：$D(X)=\lambda$
- 几何分布：$D(X)=\frac{q}{p^2}$

连续型：
- 均匀分布：$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
- 指数分布：$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
- 正态分布：$D(X)=\sigma^2$

三、协方差和相关系数

1、协方差

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

① $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$

② $\mathrm{cov}(X,X)=D(X)$

③ $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

④ X与Y相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\mathrm{cov}(X,Y)=0$

⑤ $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$

⑥ $D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

2、相关系数

① $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

② $Y=aX+b=\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}X+E(Y)-\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}E(X)$

③ 对于二维正态分布：

i. X与Y独立 $\Leftrightarrow$ X与Y不相关

ii. $Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$

④ 随机变量标准化

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

则 $E(X^*)=0$, $D(X^*)=1$, $\rho_{X,Y}=\rho_{X^*,Y^*}=E(X^*Y^*)$

2. 设两个随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从均值为 0，方差为 1/2 的正态分布，求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

6. 设 X 为只取非负整数值的离散随机变量，证明 $EX=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geqslant n)$.

7. 对于两个随机变量 X 和 Y，若 EX^2，EY^2 都存在，证明：

$$(E(XY))^2\leqslant EX^2EY^2.$$

（这一不等式称为柯西许瓦兹不等式.）

8. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots,n$，令 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 及 $Y_i=X_i-\bar{X}$，$i=1,2,\cdots,n$.

(1) 求 $E\bar{X}$，$D\bar{X}$；

(2) 证明 $S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$，并求 ES^2；

(3) 求 $\mathrm{Cov}(X_i,\bar{X})$，$i=1,2,\cdots,n$；

(4) 求 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$；

(5) 求 $\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)$，$i\neq j$；

(6) 求 $D(Y_i-Y_j)$，$i\neq j$.

6. 假设由自动线加工的某种零件的内径 X(mm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径小于 10 或大于 12 为不合格品，其余为合格品. 销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损，已知销售利润 T(元)与销售零件的内径 X 有如下关系

$$T=\begin{cases}-1, & X<10,\\ 20, & 10\leqslant X\leqslant 12,\\ -5, & X>12.\end{cases}$$

问：平均直径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

7. 某产品的次数率为 0.1，检验员每天检验 4 次，每次随机地取 10 件产品进行检验. 设各产品是否为次品是相互独立的，如发现其中的次品数多于 1，就去调整设备，以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 $E(X)$.

3. 设二维随机变量 (X,Y) 在以 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 和相关系数 $\rho_{X,Y}$.

4. 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 和相关系数 $\rho_{X,Y}$.

4. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}cx\mathrm{e}^{-k^2x^2}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

求(1) 常数数 c；(2) EX；(3) DX.