2024年9月29日 22:35

知识体系

- 随机变量
  - 离散型
    - 二项分布
    - 泊松分布
    - 几何分布
  - 连续型
    - 均匀分布
    - 指数分布
    - 正态分布

1、随机变量及分布函数

① $F(x) = P(X \le x)$

② $\lim\limits_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$；$F(x)$为$x$单调不减函数；$F(-\infty) = 0$，$F(+\infty) = 1$

③ $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-0)$

$P(a < X < b) = F(b-0) - F(a)$

$P(a \le X < b) = F(b-0) - F(a-0)$

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

例 2.1.7 在曲线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围区域中等可能地投点，以 X 表示该点到 y 轴的距离，求 X 的分布函数.

2、离散型随机变量

① 分布列满足
- 非负性
- 归一性

例 2.2.4 设某射手向一目标独立地进行连续射击，每次命中的概率都是 p，以 X 表示第三次命中时的射击次数，求 X 的分布列.

② 举例

1)

二项分布：$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

$X\sim B(n,p)$

泊松分布：$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$X\sim P(\lambda)$

几何分布：$P(X=k)=pq^{k-1}$

$X\sim G(p)$

2) 泊松逼近定理：$\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

即当 n 很大时，二项分布 $B(n,p)$ 与泊松分布 $P(\lambda)$ $(\lambda=np)$ 近似

3) 几何分布无记忆性

$$P(X>n+m \mid X>m)=P(X>n)$$

5. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，问 k 为何值时，概率 $P(X=k)$ 最大？最大值为多少？

11. 同时掷两枚骰子，直到一枚骰子出现 6 点为止，求抛掷次数 X 的分布列.

12. 设有 80 台相同的机器，每台机器的工作是相互独立的，发射故障的概率都是 0.01，且一台机器的故障只能由一人维修. 下面有两种配备维修工人的方法，第一种是由 4 人维护，每人 20 台；第二种是由 3 人共同维护 80 台机器. 问哪种方法更好？

1. 已知 X 的分布列为 $P(X=k)=2^{-k}, k=1,2,\cdots$. 求 $Y=\sin\frac{\pi}{2}X$ 的分布列.

例 2.5.1 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，试求 X 取偶数的概率.

例 2.5.3 假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

(1) 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率密度；

(2) 求在设备已经无故障工作 8 h 的情形下，再无故障运行 8 h 的概率 Q.

三、连续型随机变量

① $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

非负、归一

☆ 不区分开区间还是闭区间

$P(X=c)=0$，但 $\{X=c\}$ 不一定是不可能事件

$P(X=c)=0$，但 $\{X=c\}$ 不一定是不可能事件

例 2.3.2 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

求：(1) 常数 A,B 的值；(2) 密度函数 $f(x)$ 的表达式.

例 2.3.3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x<2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$；(2) 求概率 $P(-1<X<1.5)$.

4. 设随机变量 X 在区间$[0,2]$内取值，且对于每个 $a\in[0,2]$，X 落入$[0,a]$内的概率与 a^2 成正比. 试求：(1) X 的分布函数；(2) X 的密度函数；(3) X 落在$[0,1]$内的概率.

例 2.5.2 设随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P(X=-1)=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=\frac{1}{4}$. 而在$\{-1<X<1\}$出现的条件下，X 在$(-1,1)$内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，试求 X 的分布函数 $F(x)$.

例 2.5.4 设 $F(x)$为连续型随机变量 X 的密度函数，且严格单调增加，求 $Y=F(X)$的密度函数.

② 举例

1) 均匀分布（ $X\sim U(a,b)$ ）

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \end{cases}$　$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

2) 指数分布 $(X\sim E(\lambda))$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

具有无记忆性：$P(X>t+s\mid X>s)=P(X>t)$

3) 正态分布 $(X\sim N(\mu,\sigma^2))$

i $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

ii $P(a<X\le b)=P(\frac{a-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{b-\mu}{\sigma})$

$=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

iii 标准正态分布：$\mu=0$, $\sigma=1$

iv. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=aX+b$, 则
$Y\sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$

例 2.5.5 设随机变量 X 服从区间[0,1]上的均匀分布，试求一个严格单调增加的函数 $g(x)$，使得 $Y=g(X)$ 服从参数为 2 的指数分布.

5. 设随机变量 $Y\sim U(a,5)$，且方程 $x^2+Yx+\frac{3Y}{4}+1=0$ 没有实根的概率为 0.25，试求常数 a.

③ 分布

定理 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$，$y=g(x)$ 是一严格单调函数，且具有一阶连续导数，$x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数，则 $Y=g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|.$$

3. 设 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求以下随机变量的密度函数：(1) $2X$；(2) $-X+1$；(3) X^2.

4. 设随机变量 X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布.

(1) 求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的密度函数；

(2) 求随机变量 $Y=-\ln X$ 的密度函数.

5. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，

(1) 求随机变量 $Y=e^X$ 的密度函数；

(2) 求随机变量 $Y=X^2+1$ 的密度函数；

(3) 求随机变量 $Y=|X|$ 的密度函数.