一、大数定律

1、切比雪夫不等式

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

2、大数定律

① 切比雪夫大数定律

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

说明：1) 当n很大时，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 接近于其数学期望 $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)$

2) 随着n增大，稳定性越来越好，随机性越来越小

② 伯努利大数定律

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0 \quad 或 \quad \lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

说明：1) 随着n增大，伯努利实验中事件A发生的频率越来越接近于其概率

2) 当n足够大时，频率可以替代概率

③ 辛钦大数定律

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \mu\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

说明：1) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 μ

2) $X_1, X_2, \cdots X_n$ 独立同分布，且其期望 $E(X_i) = \mu$.

二、中心极限定理

1、独立同分布的中心极限定理

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq x\right\} = \Phi(x)$$

说明：① $X_1, X_2, \cdots X_n$ 独立同分布

② $E(X_i) = \mu$，$D(X_i) = \sigma^2$

③ 当n较大时，随机变量 $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\sum X_i - n\mu)$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$

④ $\lim_{n\to+\infty} P\left\{a < \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a)$

2、棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

$$\lim \ P\left\{\frac{X-nP}{\quad}\right\} \ \frac{1}{\quad}\int^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \ \Phi(x)$$

二、棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(x)$$

说明：① X表示n重伯努利试验中A发生次数

② 正态分布是二项分布在n充分大时的极限形式

③ $P\{a<X\le b\} = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$