一、总体、样本、统计量

1、统计量的定义

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是总体 X 的一个样本，若 $T = T(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是样本的函数，且不含任何未知参数，则称 T 为一个统计量

2、常见统计量

① 样本均值：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow$ 近似估计总体均值 $\mu = E(X)$

② 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \longrightarrow$ 近似估计总体方差 $\sigma^2 = D(X)$

③ 样本标准差 $S = \sqrt{S^2}$

④ 样本k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \longrightarrow$ 近似估计总体k阶矩 $E(X^k)$

⑤ 极大次序统计量 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$

⑥ 极小次序统计量 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$

二、常用统计量的分布

1、χ^2 分布

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立，且均服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布。

① 密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

其中 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$，$\left\{\begin{array}{l} \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \\ \Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$

② 性质

1) 可加性：$X \sim \chi^2(n)$，$Y \sim \chi^2(m)$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y \sim \chi^2(n+m)$

2) $E(\chi^2(n)) = n$，$D(\chi^2(n)) = 2n$

2、t分布

$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 独立，则 $t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布。

① 密度函数：

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

② 性质

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

即当 $n \geq 45$ 时，可将 t 分布作为标准正态分布

3、F分布

即当 $n\geq 45$ 时，可将 t 分布作为标准正态分布

3、F 分布

$X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 独立，则 $F=\dfrac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$ 服从自由度为 n, m 的 F 分布。

① 密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}(m+nx)^{-\frac{m+n}{2}}, & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

② 性质

1) $X\sim F(n,m)\Rightarrow\frac{1}{X}\sim F(m,n)$

2) $t\sim t(n)\Rightarrow t^2\sim F(1,n)$

三、正态总体的抽样分布

1、单正态总体的抽样分布定理

① $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

② $\dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$，且 $\bar{X}$ 与 S^2 独立

③ $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

2、双正态总体的抽样分布定理

① $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$

② $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n-1,m-1)$

③ 若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，则 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$，其中

$$S_w=\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}$$

四、抽样分布上 α 分位点

1、通式

Y 为一连续型随机变量，若对 $\alpha\in(0,1)$，Y_α 满足 $P\{Y>Y_\alpha\}=\alpha$，则 Y_α 为 Y 的上 α 分位点。

$$\left.\begin{aligned}&① \ P\{Y>Y_\alpha\}=\alpha\\&② \ P\{Y<Y_{1-\alpha}\}=\alpha\\&③ \ P\{Y<Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ 或 } Y>Y_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha\end{aligned}\right\}\text{处理假设检验问题}$$

④ $P\{Y < Y_\alpha\} = 1-\alpha$

⑤ $P\{Y > Y_{1-\alpha}\} = 1-\alpha$

⑥ $P\{Y_{1-\frac{\alpha}{2}} < Y < Y_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$

$\Big\}$ 处理区间估计问题

2、特殊分布

① $Z \sim N(0,1)$

有 $P\{Z > Z_\alpha\} = \alpha$ ， $Z_{1-\alpha} = -Z_\alpha$

② $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

有 $P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$， $P\{\chi^2(n) \leq \chi^2_{1-\alpha}(n)\} = \alpha$

③ $t \sim t(n)$,

有 $P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$， $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

④ $F \sim F(n, m)$，有

$P\{F > F_\alpha(n, m)\} = \alpha$， $F_{1-\alpha}(n, m) = \dfrac{1}{F_\alpha(m, n)}$