实变函数

参考教材：
《实变函数（英文版）》 黄仿伦
《实变函数论》（第三版） 周民强
《实变函数简明教程》邓东皋 常心怡（推荐初学者看这本中文教材，此书介绍的要比英文版的内容多，阅读难度要比周民强那本小）
《Real Analysis》 Stein （这本书阅读难度更小，写的更好，英语水平尚可就可以阅读）

Catelog

1.sets 集合

2.lebesgue 测度

3.lebesgue 可测函数

4.lebesgue 积分

Chapter 0 引言

定义 1 partition

假设a,b属于R，并且a < b. 一个[a,b]上的partition被定义形式为 $x_0, x_1 ... x_n$的一列。

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Def 2 inf & sup

如果f是一个实函数并且A是一个f定义域的子集，则

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\}$$

$$\sup_A f = \sup\{f(x) : x \in A\}$$

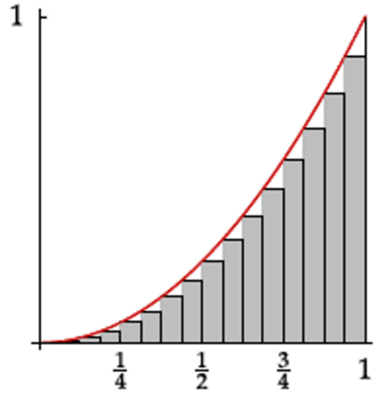
Def 3 lower and upper Riemann sums

假设f:[a,b]-> R是一个有界函数，P是一个[a,b]的一个剖分$x_0, x_1 ... x_n$

Riemann 下和：$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf f(x)$

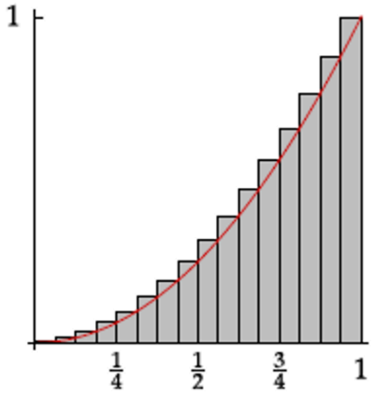
Example 1 lower and upper Riemann sums

Define $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ by $f(x) = x^2$. Let P_n denote the partition $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$ of $[0,1]$.



$L(x^2, P_{16}, [0,1])$ is the sum of the areas of these rectangles.

The two figures here show the graph of f in red. The infimum of this function f is attained at the left endpoint of each subinterval $[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$; the supremum is attained at the right endpoint.



$U(x^2, P_{16}, [0,1])$ is the sum of the areas of these rectangles.

$$LowerRiemannsums \leq UpperRiemannsums$$

Def 4 lower and upper Riemann integrals

$$L(f,[a,b]) = \sup_P L(f,P,[a,b])$$

$$U(f,[a,b]) = \inf_P U(f,P,[a,b])$$

$$lowerRiemannintegral \leq upperRiemannintegral$$

如果一个函数f的上积分和下积分相等，那么函数 f Riemann 可积

Def 5 Riemann integrable

若一个闭区间上的函数它的上积分和下积分相等，那么函数f在闭区间上Riemann可积。

并且其Riemann积分就是上积分或下积分的值。

如果闭合有界区间上的有界函数的下黎曼积分等于其上黎曼积分，则该函数称为黎曼可积函数。
如果 f：$[a，b] \to R$ 是黎曼可积的，则黎曼积分$\int_a^b f$（x）dx定义为

$$\int_a^b f(x)dx = L(f,[a,b]) = U(f,[a,b])$$

Example 2 Computing a Riemann integral $\int_0^1 x^2 dx$.

Define $f\colon [0,1] \to R$ by $f(x) = x^2$. Then

$$U(f,[a,b]) \leq \inf_{n \in Z^+} \frac{(2n^2+3n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} = \sup_{n \in Z^+} \frac{(2n^2+3n+1)}{6n^2} \leq L(f,[a,b])$$

So

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Th 1

闭区间上的连续函数一定Riemman可积。

Riemann积分的有界性

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f(x)$$

Riemann积分的缺点

黎曼积分有几个缺陷。

- 黎曼积分不处理具有无穷多不连续的函数;

但是对于“无穷多”也是有不同的强度的,如何度量不同集合所具有的“数量”，需要通过引入集合的势来针对无穷多进行区分。

- Riemann 积分不处理无界函数;

- Riemann 积分不适用于 limits。

取极限和求无穷级数和是两种运算，这两种运算的交换需要满足条件

例：Riemann积分不适用于处理无穷多不连续的函数

Example 3

A function that is not Riemann integrable.

Define $f: [0,1] \to R$ by

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

If $[a,b] \subseteq [0,1]$ with $a < b$, then $\inf\limits_{[a,b]} f = 0$ and $\sup\limits_{[a,b]} f = 1$.

Because $[a,b]$ contains an irrational number and contains a rational number.

Thus $L(f,P,[a,b]) = 0$ and $U(f,P,[a,b]) = 1$ for every partition P of $[0,1]$.

Hence $L(f,[a,b]) = 0$ and $U(f, [a,b]) = 1$.

Because $L(f,[a,b]) \neq U(f, [a,b])$, we conclude that f is not Riemann integrable.

但是如果换用一种方式，在值域上做剖分，那么所有有理数对应的函数值都为1，无理数对应的函数值都为0.

一分为二后，函数值1对应的是整个有理数集，在学习测度后，我们可知道有理数集是一个lebesgue可测集，并且m(N)=0.而无理数集合对应的函数值为0。

那么很容易就可以得到Example3的积分为0.

例：Riemann积分可能不能处理无界函数

如果把函数的有界性去除掉，考虑无界的函数，那么很有可能也无法进行Riemann积分。

Example 4

Riemann integration does not work with unbounded functions

Define $f: [0, 1] \to R$ by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

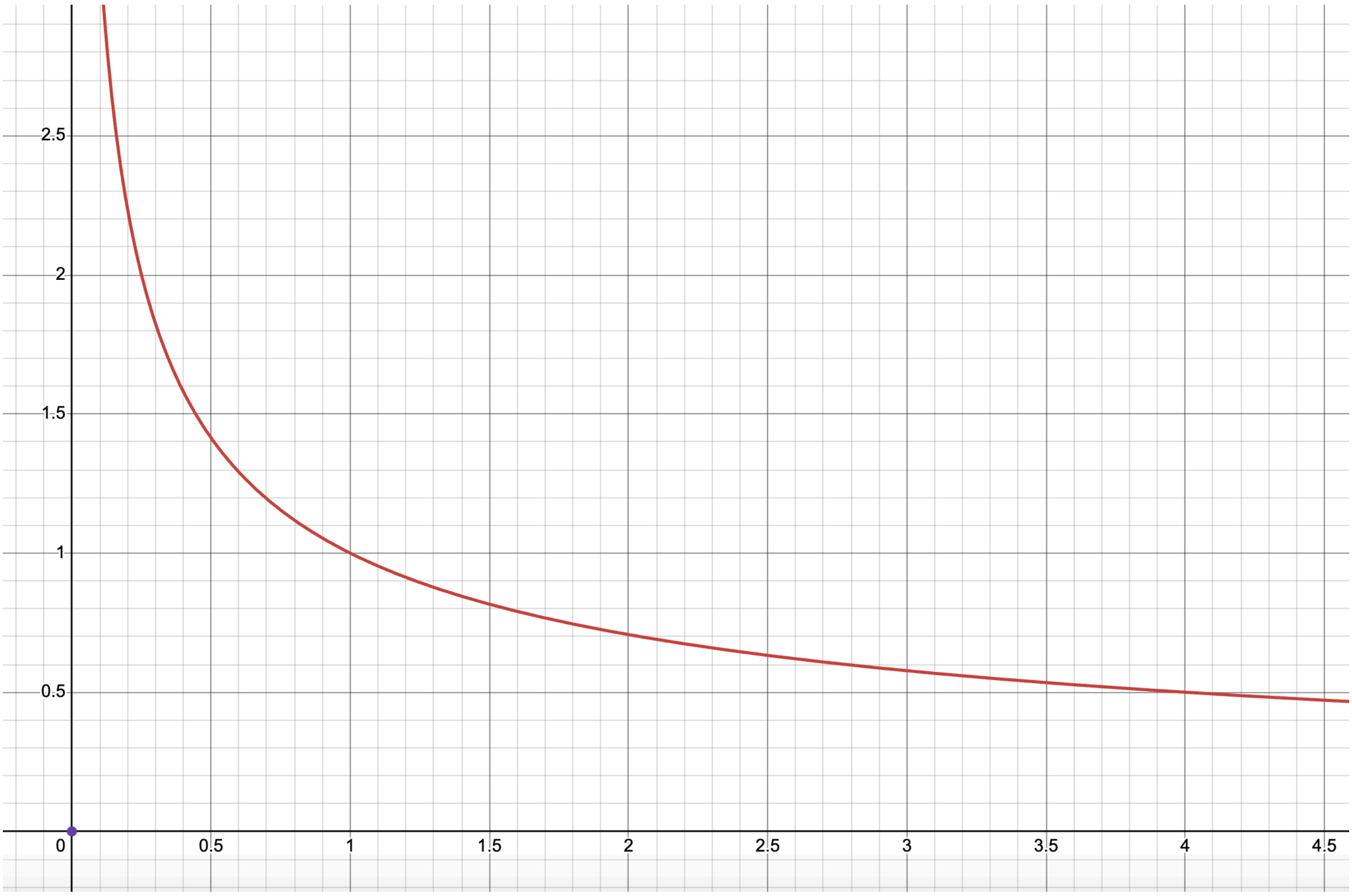
If $x_0, x_1, \ldots, x_n$ is a partition of $[0, 1]$, then $\sup_{[x_0, x_1]} f = \infty$.

If we apply the definition of the upper Riemann sum to f , we would have $U(f, P, [a, b]) = \infty$ for every partition P of $[0, 1]$.

However, the area under the graph of f to be 2, not ∞, because

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0+} 2\sqrt{x}|_a^1 = \lim_{a \to 0+} 2 - 2\sqrt{a} = 2$$

例子中函数的图像是这样的



但是其实这就是瑕积分，在数学分析中，学习无穷级数、函数项级数的相关知识后，对这些反常积分有对应的判别方法。瑕积分也有对应求Riemann积分的方式，详见数学分析。

总之，有些无界函数，用Riemann积分的定义去做束手无策！

例：Rimann积分不是任何时候都适用于极限和求和的互换

在子域上采用黎曼积分，然后采用极限的想法对于更复杂的函数可能会失败

Example 5

area seems to make sense, but Riemann integral is not defined.

Let $r_1, r_2, ...$ be a sequence that includes each rational number in $(0,1)$ exactly once and that includes no other numbers. For $k \in Z^+$, define $f_k: [0,1] \to R$ by

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x - r_k}}, & \text{if } x > r_k \\ 0, & \text{if} x \le r_k \end{cases}$$

Define $f: [0,1] \to [0,\infty]$ by

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{2^k}$$

由于 [0,1] 的每个非空开放子区间都包含一个有理数，因此函数 f 在每个此类子区间上都是无界的。因此，f 的黎曼积分在 [0,1] 的每个子区间上都有多个元素。

但是，每个$f_k(x)$ 的图形下的面积小于 2。然后定义 f 的公式表明，我们应该期望 f 图下的面积小于 2 而不是毫无意义。 (还是在广义积分上，它的积分为2)

下一个例子表明，以 1 为界的黎曼可积函数序列的逐点极限不一定是黎曼可积

Example 6

Riemann integration does not work well with pointwise limits.

Let $r_1, r_2, ...$ be a sequence that includes each rational number in $(0,1)$ exactly once and that includes no other numbers. For $k \in Z^+$, define $f_k: [0,1] \to R$ by

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, \text{if } x \in \{r_1, \ldots, r_k\} \\ 0, \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

Then each f_k is Riemann integrable and $\int_0^1 f_k(x)dx = 0$.

Define $f: [0,1] \to [0,\infty]$ by

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

其实还是和一致收敛相关的，可积函数列$\{f_k\}$有极限$f(x)$，如果一致收敛，那么$f(x)$也可积.

Riemann积分和极限的交换

有界收敛定理

（1）设$f_n(x)(n=1,2,...)$是定义在$[a,b]$上的可积函数

（2）$|f_n(x)| \le M \ (n=1,2,...), x \in [a,b]$

（3）$f(x)$是定义在$[a,b]$上的可积函数，且有

$$\lim_{n->\infty} f_n(x) = f(x), x \in [a,b]$$

Chapter 1 集合 (Sets)

1.1 集合与点集

元素与集合的关系只有两种情况：

$a \in A$ 和 $a \notin A$

自然数 $N = \{1,2,...\}$

整数：Z
有理数：Q
实数：R

空集：$\emptyset$

根据集合包含的元素个数，集合被分为：有限集(Finite Set) & 无限集(Infinite Set)

有两种表示集合的描述方式
(1) Enumerating:$\{1,2,3\}$
(2) Describe A={x:x is of property P},$\{a : a \in A, P(a)\}$

子集（subset）

if $A = B$, 则A属于B，且B属于A

真子集

集合运算

1.并（Union），$A \cup B =$ {$x \in A$ or $x \in B$}

2.交（Intersection），$A \cap B =$ {$x : x \in A$ and $x \in B$}

3.差（Difference）$A - B =$ {$x : x \in A$ and $x \notin B$}

4.对称差(Symmetric difference) $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

5.补集(complement) $B \subset A$, $A - B$被称为B关于A的补集，$\complement_A B$

对称差的性质

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

1. $A \Delta A = \emptyset$
2. $A \Delta \emptyset = A$
3. $A \Delta X = \complement_X A$ (这里X是一个全集)
4. $A \Delta \complement_X A = X$
5. $A \Delta B = B \Delta A$

三个集合的对称差

$$A \Delta B \Delta C = (A \cup B \cup C) - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

6. $(A \Delta B) \Delta C \neq A \Delta (B \Delta C)$
7. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

交和并

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

补集

1. $\complement A \Delta \complement B = A \Delta B$

集合运算的推广

$\cup_{i=1}^{n} A_i$ 有限并集
$\cap_{i=1}^{n} A_i$ 有限交集

$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ 无限并集
$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ 无限交集

$\alpha \in I, \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$，$I$为指标集

$$\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$$

$$\cap_{\alpha\in I}A_\alpha$$

广义分配律 (Distributive law of general form)

$$A\cup(\cap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\cap_{\alpha\in I}(A\cup A_\alpha)$$

$$A\cap(\cup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\cup_{\alpha\in I}(A\cap A_\alpha)$$

当$A\cap B=\emptyset$时，A和B被称为互不相交(disjoint) 或称为 互斥(distinct)

基本集

考虑集合X的所有子集,则X为基本集（basic set）。$X-A$被称为A关于X的补集$\complement_X A$

De Morgan 律 (De Morgan law)

1. $$\complement(\cup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\cap_{\alpha\in I}\complement(A_\alpha)$$
2. $$\complement(\cap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\cup_{\alpha\in I}\complement(A_\alpha)$$

proof:
(1) 任意$x\in LHS$ 则 任意$\alpha\in I, x\notin A_\alpha$,即对于任意$\alpha\in I$,$x\in\complement A_\alpha$.所以$x\in\cap_{\alpha\in I}\complement(A_\alpha)$. 由于$x$任取，结论成立

(2)同理利用存在$\alpha\in I$ 可证明结论（2）成立

1.2 映射与基数

1.2.1 定义：映射(Mapping)

设 A，B 是两个非空集。如果对于每个 $x\in A$，根据某个规则 f，B 中存在一个与 x 对应的元素 y，那么 f 称为从 A 到 B 的映射（Mapping），用 f：$A\to B$ 表示。

y 在映射 f 下称为 x 的象 （image），表示为 $y=f(x)$。A 称为 f 的定义域（domain），A 中元素的所有图像称为 f 的范围（range），用 $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ 表示

设 $A_0\subset A$，$B_0\subset B$，$f(A_0)=\{f(x)$：$x\in A_0\}$称为A_0的象集（image set），

$f^{-1}(B_0)=x$：$x\in A$，f（x） $\in B_0$ 在映射 f 下称为B_0的原象集（Original image set）。

1.2.2 满射、单射与双射

对于映射$f:A->B$,若$B=f(A)$，则f被叫做满射(surjection)

如果对于任意$x_1,x_2\in A$，我们有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则f被叫做一个由A到B单射(injection)

如果单射f也是一个满射，则f是由A到B的一个双射(bijection)，或者说它是一个由A到B的 “一一映射”（one-to-one mapping）

> 即使是在高等数学的背景下这似乎也是老生常谈的开篇了

1.2.3

对于A的任意子集集合$A_\alpha(\alpha\in I)$和B的任意子集集合$B_\lambda(\lambda\in)$, 有以下简单的性质：

$f(f^{-1}(B_0))\subset B_0$

$A_0\subset f^{-1}(f(A_0))$

$f^{-1}(\complement B_0)=\complement(f^{-1}(B_0))$

$f(\cup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\cup_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$

$f(\cap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\cap_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$

$f^{-1}(\cup_{\lambda\in I}B_\lambda)=\cup_{\lambda\in I}f^{-1}(B_\lambda)$

$f^{-1}(\cap_{\lambda\in I}B_\lambda)=\cap_{\lambda\in I}f^{-1}(B_\lambda)$

1.2.4 逆映射、复合函数

当且仅当f：$A->B$为双射的时候才有逆映射$f^{-1}:B->A$

1.2.5 特征函数

令X是一个基础集，$A \subset X$.则函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$

$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$

$\chi_{A \Delta B} = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$,$(1 - \chi_A(x)\chi_B(x))$?

$\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x))$

1.2.6 对等

设A 和 B 为两组，如果存在一一对应的 f，使得 $f(A) = B$，则说 A 和 B 是one-to-one correspondent（一一对应）或equivalent（对等)，用 A B 表示。

有以下性质：
（1）自反性 $A \sim A$
（2）对称性 若$A \sim B$,则B~A
（3）传递性 $A \sim B$,$B \sim C$,则$A \sim C$

1.7 可数集

当一个集合可以与自然数集N建立对等关系，那么该集合就被称为一个可数集(denumerbale set or countable set)

例:，$\{2n\}_{n=1}^{+\infty} \sim N$

这是因为 $2n$与$n \in N$可以构建可数关系

```
 2 ~ 1, 4 ~ 2, 6 ~ 3, ..., 2n~n, ...
```

例:，Z~N
这是因为可以让$(-1)^{n-1}[\frac{n}{2}]$，让Z和N构建对应关系

```
0～1， -1～2， 1～3， -2～4， 2～5， ...
```

例：任意$x \in (a, b), a < b$,构建映射$f(x) = \frac{x-a}{b-a}$使其一一对应于$(0, 1)$

例：$(0, 1) \sim R$
$(0, 1) \sim (-\frac{\pi}{2},) \sim$

定理 1.2.1

任意一个无穷集合，必然存在一个可数子集

proof:

设A是一个无穷集合
$a_1 \in A$
$A - \{a_1\}$
有$a_2 \in A - \{a_1\}$

同理，有$a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$
$\vdots$
这样就可以不断的拿出A中的元素，得到了一个集合$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset A$,很明显，这是一个A的可数子集

推论 1.2.1

一个无穷元素的集合一定和它的一些真子集对等

由上面的证明，很容易拿出来一个新的集合$\{a_{2n}\} \sim \{a_n\}$

$A = \{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \cup (A - B)$

特殊情况
$A = A_1 \cup A_2$ $B = B_1 \cup B_2$
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
若$A_1 \sim B_1$,$A_2 \sim B_2$，则$A \sim B$

推论 1.2.2

如果A是一个无穷集合，那么A与它的一些真子集对等

定理 1.2.4

如果$A_n(n \in N)$是可数集，则可数个可数集的$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$依然是可数集

例：全体有理数Q是一个可数集。
这是因为$Q = \{\frac{p}{q}\} \cup \{0\} \cup \{-\frac{p}{q}\}$

例：在整个实数轴上，把所有互不相交的开区间拿出来放在一起是可数的

这是因为有理数具有稠密性，你可以把每个开区间选取成每个有理数的领域，由于有理数集Q是可数的，所以这个集合也是可数的

定理 1.2.6

集合[0,1]是不可数集

证明：（$[0,1] \sim (0,1) \sim \mathbb{R}$）
(反证法)
假设$[0,1] \sim \{r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots\}$

我们取一个三等分的区间I_1且$r_1 \notin I_1$

再在I_1里面三等分得到区间I_2且$r_2 \notin I_2$

再继续对I_2三等分，得到区间I_3且$r_3 \notin I_3$

$$\cdots$$

这样一直三等分下去，会得到 $\cdots \subset I_n \subset \cdots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1$

这样取下去，整个$[0,1]$闭区间中，固定m使得$r_m \notin \cap_{n=1}^{+\infty} I_n = a, a \in \mathbb{R}$，$a \in [0,1]$

这是矛盾的，因此$[0,1]$与$\mathbb{N}$不对等，它是不可数集

定义 1.2.8 基数(cardinality)

我们对所有集合进行类化：等效集彼此属于同一个类，而非等效集合属于不同的类。对于类的每一组，我们给出一个符号来表示 “集合中有多少个元素”，这称为集合的基数 （cardinality） 或势(power)。对于一般的集合A，我们使用 $\bar{\bar{A}}$ 来表示它的基数。

空集 $\emptyset$ 的基数为 0

具有 n 个元素的非空集的基数为 n

可数的集合的基数被记为$\aleph_0$或C_0

等效于区间 [0,1] 的集合的基数用 $\aleph$（阿列夫） 或 C 表示，我们说它是连续基数 （continuum cardinality ）。

定义1.2.9

设 A 和 B 为两组。如果 A 等价于 B 的子集，则我们说 A 的基数小于或等于 B 的基数，用 $\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}$ 表示。如果A 不等同于 B，并且 A 等同于 B 的子集，则我们说 A 的基数小于 B 的基数，用 $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$ 表示。

我们有以下基数关系：

$$0 < n < \aleph_0 < \aleph$$

Let $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ be a finite set. Denoted $\mathcal{A}$ as the class composed by all subsets of A, then the elements of $\mathcal{A}$ are

$$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{n-1}, a_n\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

There are

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

elements together, and $2^n > n$.

We can see that

$$\bar{\bar{\mathcal{A}}} = 2^n$$

这上面是一个幂集(Powerset)，整个A中的子集组成的幂集，它的基数为2^n

自然数幂集的基数就是$2^{\aleph_0}$

可以得到对于任何集合$\mathcal{A}$

$$\bar{\bar{\mathcal{A}}} = 2^n$$

定理 1.2.7

任何集合的基数都要小于它的幂集，即$\bar{\bar{A}} \leq p(\bar{\bar{A}})$

因此我们无法找到一个集合说它有最大的基数。(但是基数最小的是$\emptyset$)

我们可以发现 $\mathbb{N}$和$\mathbb{R}$中间是不连续的，连续统假设中说：找不到任何一个集合的基数介于$\mathbb{N}$和$\mathbb{R}$这两个集合的基数之间。

定理 1.2.8 Bernstein 定理

设 λ，μ 为两组的基数。如果 $\lambda \leq \mu$ 和 $\lambda \geq \mu$ 都为真，则我们有 $\lambda = \mu$

Example 1.5

The cardinality of all real sequences $R^\infty = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots): x_k \in R, k \in N\}$ is $\aleph$.

Remark: The cardinality of the union of denumerable sets whose cardinality is $\aleph$ is still $\aleph$.

Example 1.6

Let M be the class of all bounded real functions on $[0,1]$, then $\bar{\bar{M}} = \aleph$.

任意一个n维度的空间，甚至∞维的实空间，它们都有相同的基，即

$$\bar{\bar{\mathbb{R}^\infty}} = \bar{\bar{\mathbb{R}^n}} = \bar{\bar{\mathbb{R}}} = \aleph$$

定义 1.2.10

设 $a \in R$，任何包含 a 的开放区间称为 a 的邻域。设 $\delta > 0$，则开放区间 $(a-\delta，a+\delta)$ 称为点 a 的δ邻域（δ neighborhood）.

用 $O(a, \delta)$ $E \subset R$，如果存在 a 的某个邻域 (α, β)，使得 $a \in (\alpha, \beta) \subset E$，$a$ 称为 E 的内点（interior point）。

集合 $O(a，\delta) - \{a\}$称为没有 a 的去心邻域(without center)

如果 E 中的每个点都是 E 的内点，则 E 称为开集 （open set）。

很容易注意到 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}$ 既是开集也是闭集

除了空集$\emptyset$以外的开集，都是无限集合

定理 1.2.9 开集的性质

开集具有以下性质：
（i） 任意开集族的并集仍然是开集。
（ii） 有限数量的开集的交集仍然是开集。

注：无限数量的开集的交集不一定是开集。

一个集合中所有内点的集合叫做一个集合的 内核

例如: $\cap_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})=\{0\}$

定义 1.2.11 极限点（聚点）与导集

设 $a\in R$ 和 $E\subset R$.如果 a 的每个邻域 $(\alpha,\ \beta)$ 都包含一个与a不同的点，
即 $((\alpha,\ \beta)-\{a\})\cap E\neq\emptyset$，则 a 称为 E 的极限点（limit point）或聚点（accumulative point）。

由 E 的所有极限点组成的集合称为 E 的导集（derived set ），用 E' 表示。

例如，$E=(a,\ b)$，其导集 $E'=[a,b]$。

注：一个集合E的极限点不一定属于E

例如：0是集合$(0,1)$的极限点，但是$0\notin(0,1)$

例：设 $E=\{1/k\}$，$k\in N$.原点 0 是 E 的唯一极限点，不属于 E。

从定义中可以看出有聚点的集合一定是一个无限集合，有限集合没有聚点。

定理 1.2.10

设$E\subset R$， a 是 E 的极限点，当且仅当 E 中存在收敛到 a 的序列 $\{a_k\}$ $(a_k\neq a)$。

为什么要求$\{a_k\}\neq a$?这是因为避免选取一组常点列$\{a\}$,常值a的极限就是a，这种选取没有意义，它可能是一个孤立点。

定义 1.2.12

设 $\complement E=R-E$ 是一个开集，那么 E 称为闭集（闭集）。

$E-E'$ 中的点称为 E 的孤立点（isolated point）。

集合 $E\cup E'$ 称为 E 的闭包（closure），用 $\bar{E}$ 表示，即 $\bar{E}=E\cup E'$。

当 $E=E'$ 时，集合E称为完备集（complete set or perfect）。

例如：$E=(a,b]$的闭包是$\bar{E}=[a,b]$

定理 1.2.11

当且仅当$E'\subset E$时，E为闭集

闭集的聚点不会在其自身的外侧，但不代表闭集一定是完备集，比如有限个点组成的集合全部是孤立点。另外，有孤立点的集合必然不是完备集。

推论

当且仅当 $E=\bar{E}$时，E为闭集

定理 1.2.12

(i) 如果$A\subset B$，则$A'\subset B'$
(ii)$(A\cup B)'=A'\cup B'$
(iii) $A\bar{\cup}B=\bar{A}\cup\bar{B}$

但是$A\bar{\cap}B\neq\bar{A}\cap\bar{B}$

例如$A=(0,1),B=(1,2)$,$A\cap B=\emptyset$，但是$\bar{A}\cap\bar{B}$=1

定理 1.2.13

闭集有以下两条性质：
（i） 任意封闭集族的交集集仍然是封闭集。
（ii）有限闭集的联合集仍然是闭集。

以上这样的性质只要使用De Morgan律就容易证明

注：无穷个闭集的并集未必还是闭集

例子：$\cup_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k},1]=(0,1]$

任意有限集合都是闭集，这是显然的。毕竟它们都没有聚点，它们的导集是空集

> 如果一个集合的导集为空集(没有聚点)，那一定是一个闭集

结论：除了$\mathbb{R}$和$\emptyset$之外不存在任何集合是既开又闭的集合。

proof：
假设集合E不为$\mathbb{R}$或$\emptyset$，显然$\complement E\neq\emptyset$

再取$x_0\in E$,$y_0\in\complement E$

那不妨假设$I_0=[x_0,y_0]$

接下来将I_0一分为二，那么其中点$\frac{x_0+y_0}{2}$总会属于E或$complement E$其中之一

如果 $\frac{x_0+y_0}{2}\in E$,就将其设定为x_1；如果$\frac{x_0+y_0}{2}\in\complement E$，那就设定为$y_1$

总之我们一直做下去，保证这个区间的两个端点总是左侧端点$x_n\in E$并且$y_n\in\complement E$

接下来这个区间I_n就会不断减小，我们得到了一系列的闭区间，而这些闭区间无一例外的，左端点属于E，右端点属于$\complement E$

$$\cdots\subset I_n\subset\cdots\subset I_2\subset I_1\subset I_0$$

随着n趋于无穷，区间的距离 $\lim\limits_{n->\infty}d=0$

于是我们就得到结论 $\lim\limits_{n->\infty}x_n=a=\lim\limits_{n->\infty}y_n$

但是这就出现了矛盾，E本身是闭集，包含所有的聚点，那么现在a一定属于E

但是我们假设$\complement E$也是既是开集又是闭集，所以a也要属于$\complement E$

但是这是不可能的，因为集合E和$\complement E$的交集只能是空集

因此除了$\mathbb{R}$和$\emptyset$之外不存在任何集合是既开又闭的集合。

定义 1.2.13 上下确界

令$E\subset\mathbb{R}$是一个边界集。如果一个常数α满足：
（1）对于所有$x\in E$，$\alpha\leq x$
（2）对于任意$\epsilon>0$，存在$x_\epsilon\in E$，有$x_\epsilon<\alpha+\epsilon$

则α被称为下确界(infimum)，用 $\alpha=infE$ 表示，即下确界是 E 的最大下限。

如果某个数字β满足：
（1）对于任何 $x\in E$，$x\leq\beta$;
（2）对于任意 $\varepsilon>0$，存在$x_\beta\in E$，使得 $\beta-\varepsilon<x_\beta$。

那么 β 称为 E 的上确界(supermum)，用 $\beta=supE$ 表示，即上确界是E 的最小上界。

无论是上确界还是下确界，它都一定在集合E的闭包当中。

定理 1.2.14

设 $E\subset R$ 为有界集，$\alpha=\inf E$ 且 $\beta=\sup E$。然后是$\alpha\in\bar{E}$ 和 $\beta\in\bar{E}$。

推论

有界闭合集 F 必须达到其无穷大和最高值，即存在 α，$\beta \in F$ 使得 $\alpha = \inf F$ 和 $\beta = \sup F$。
备注：R 和 $\emptyset$ 都是开集和闭集。在 R 的所有子集中，只有 R 和 $\emptyset$ 具有此属性。

定义1.2.14 构成区间

设 G⊂R 为有界开集。如果 （a，b） $\subset G$ 和 a，$b \notin G$，则 （a，b） 称为 G 的构成区间（component interval）

定理1.2.15

有界非空开集 G 可以表示为有限或可数的不同分量区间的并集，即

$$G = \cup_k (a_k, b_k)$$

其中 (a_k, b_k) 是 G 的构成区间。

备注：对于无界集合，(−∞，+∞)、(−∞，b） 和 （a，+∞） 可以看作是 G 的构成区间。

康托尔三分集(Cantor ternary set)

将 $[0, 1]$ 分成三个相等的部分，取中间的开区间 （$1/3, 2/3$） $= G_1$。
将剩下的两个闭合区间 $[0$，$1/3]$ 和 $[2/3, 1]$ 分别分成三个相等的部分，
然后取两个中间的开放区间 （$1/3^2$，$2/3^2$） $= G_2$，（$7/3^2$，$8/3^2$） $= G_3$。
再次将剩余的四个闭合区间分别分成三个相等的部分，然后取四个中间的开放区间G_4、G_5、G_6 G_7。
我们继续这个过程，并获得一个开放区间序列 G_n，$n \in N$。
表示 $G^0 = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$，$P_0 = [0, 1] - G^0$
称为康特三元集（康特三分集），它是一个封闭集，不包含任何区间。

康托尔三分集的性质：

（1） P_0 是一个封闭的集合。
（2） P_0不包含任何区间（没有内点,即内核为空集）。
（3） P_0 是一个完备集。
（4） P_0 是不可数集合，并且 $(\bar{\bar{P_0}}) = \aleph$（和实数$\mathbb{R}$一样）
（5） P_0 是 R 中的稀疏集。

定义 1.12.15 稠密集，疏朗基

让 E⊂R.如果$E' = R$，则 E 在 R 中称为稠密集。
如果 $\complement \bar{E}$ 是稠密集，则 E 称为稀疏集 （疏朗集）。
如果集合的闭包不包含任何内点，那么它是一个疏朗集。

自然数集 N 和整数集 Z 是 R 中的稀疏集。
有理集 Q 和无理集 R–Q 是 R 中的稠密集。

欧氏空间距离

（1）非负性：ρ（x，y） ≥ 0，ρ（x，y） $= 0 \Leftrightarrow x = y$。
（2）对称性：ρ（x，y） $= \rho$（y，x）。
（3） 三角不等式：对于任何 x，$y，$z \in R^n$，我们有
$\rho(x$，$z) \leq \rho(x$，$y) + \rho$（y，z）。

距离(distance)

Let $A \subset \mathbb{R}^n$ 定义元素a到A到距离为

$$\rho(a, A) = \inf_{x \in A} \rho(a, x)$$

$0 \leq \rho(a, A)$, if $a \in A$, $\rho(a, A) = 0$
$\rho(a, A) = 0$不能得到$a \in A$ 例如: $a = 0$,$A = (0, 1)$

让$A, B \subset \mathbb{R}^n$ 定义从A到B到距离为

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

if $A \cap B \neq \emptyset, \rho(A, B) = 0$

定理1.2.17

R^2 中的非空开集 G 可以表示为最多可数的不同半闭合平方的并集，
其中半闭合平方表示

$$\{(x，y) : a \leq x < a + h, c \leq y < c + h, h > 0\}$$

的形式。

定理1.2.18

设 $A，B \subset R^n$ 是两个非空的封闭集，其中至少有一个是有界的。然后存在 $a \in A$和$b \in B$，使得
$\rho(a，b) = \rho(A，B)$
备注：如果 A 和 B 都是无界的，则定理 1.2.18 不必为真。

例如，设 $A = n，n \in N$ 和 $B = n + 1/2n，n \in N$，那么 $A\prime = B\prime = \emptyset$，因此 A 和 B 是闭集。显然，ρ（A，B）=0。由于 A∩B=∅，因此没有任何 a∈ A 和 b∈ B，因此 ρ（a，b）=ρ（A，B）=0。

备注：如果 A 和 B 中只有一个是闭合的，则定理 1.18 不必为真。

例如，设$A = [0, 2)$ 和 $B = [3, 5]$，ρ（A，B）$= 1$。

定理1.2.19

令A是一个非空集合，$d > 0$, 集合 $B=\{\boldsymbol{x}:\rho(\boldsymbol{x},A)<d\}$.
Then $A \subset B$ and B is an open set

Chapter 2 勒贝格测度（Lebsgue measure）

我们希望对一般$\mathbb{R}^n$中的点集E给予一种度量，它是长度、面积，体积的概念的推广。

Outline

有界开集闭集的测度及其性质
Measure of bounded open and closed set and their properties

可测集及其性质
Measurable set and its properties

$\mathbb{R}$ 上无界集合的测度
Themeasure of unbounded set on $\mathbb{R}$

2.1 开集合和闭集合的测度

定义 2.1.1 开集测度

让G是一个R中的非空有界开集合。则G能够被表示为有限个或者可数个互不相交的构成区间的并集

$$G = \cup_k (a_k, b_k)$$

定义G的测度是所有这些构成区间长度的和，这被表示为mG，即

$$mG = \sum_k (a_k - b_k)$$

定义 2.1.2 闭集测度

让F是一个R中的非空有界闭集合，选择一个开区间(a, b)包含F。设$G = (a, b) - F$，则G是一个开集。

定义F的测度为：

$$mF = (b - a) - mG$$

注：你不用在意这个开区间(a, b)的大小，因为a和b的选取只会影响G的测度，并不会影响F的定义，因此，只要(a, b)包含F即可。

本质上，我们可以取到一个最大的a和最小的b，因为F是一个有界闭区间，我们能取到它的上下确界。

即F的测度独立于包含F的开区间(a,b)

定理 2.1.1 单调性（monotonicity）

令G_1,G_2是两个有界开集，且$G_1 \subset G_2$，则$mG_1 \leq mG_2$

定理 2.1.2 全可加性（complete additivity）

让有界开集G是有限个或者可数个互不相交的开集的并，即，$G = \cup_k G_k$,G_k是开的并且互不相交的。则

$$mG = \sum_k mG_k$$

推论 2.1 有限覆盖定理（Borel covering theorem）

让G_α,$\alpha \in I$,(G_α 是开的)作为$[a,b]$的一个开覆盖，即

$$[a,b] \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

则这存在有限个$G_k \in \{G_\alpha, \alpha \in I\}$,$k = 1,2,\ldots,n,\ldots$，使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_k$$

推论 2.2

让一个开区间$(a,b) = \bigcup_k G_k$,G_k是开集，则

$$(b-a) \leq \sum_k mG_k$$

定理 2.3 半可加性

让有界开区间G作为一个有限个或者可数个开区间的并集，即$G = \cup_k G_k$,G_k是开集，则

$$mG \leq \sum_k mG_k$$

推论 2.4

让$F_1, F_2, ..., F_n$是闭集,$F_k \subset (\alpha_k, \beta_k)$,$k = 1,2,\ldots,n$，并且 (α_k, β_k) 是互不相交的。则

$$m(\bigcup_{k=1}^{n} F_k) = \sum_{k=1}^{n} mF_k$$

定理 2.4

F是闭集，G是开集，并且$F \subset G$.则

$$m(G-F) = mG - mF$$

推论 2.5

让$F_1, F_2, \ldots, F_n$是闭集合，则

$$m(\bigcup_{k=1}^{n} F_k) = \sum_{k=1}^{n} mF_k$$

更一般集合的测度

前面我们讨论了开集合和闭集合的测度，开集闭集很特殊，它们都可测。

现在我们来讨论更一般的集合的测度

定义 2.3 外测度&内测度

E 是一个有界集合，m^*E 被称为E的外侧度(outer measure)，它被定义为所有能包含E的开集合G的测度的下确界，即

$$m^*E = \inf\{mG : E \subset G, G\text{是开集}\}$$

m_*E被表示为E的内测度，它被定义为所有包含集合E的闭集的测度的上确界，即

$$m_*E = \{mF : F \subset E, F\text{是闭的}\}$$

由内测度、外测度的定义，注意到：

(1)当E是一个开集合，$m^*E = mE$

(2)当E是一个闭集合，$m_*E = mE$

当E为开集合时，其外测度就是它本身的测度；当E为闭集合时，其内测度就是它本身的测度

(3) 对于任意的集合E，$m_*E \le m^*E$

(4) 如果$E_1 \subset E_2$，则$m^*E_1 \le m^*E_2$ 并且 $m_*E_1 \le m_*E_2$

定义 2.4 有界集合E的可测性

E是一个有界集合，如果$m^*E = m_*E$，那么E就被称为勒贝格可测(Lebesgue measurable)，简称可测(measurable)。此时E的外侧度和内测度被称为E的测度(measure)，被表示为mE，即

$$mE = m^*E = m_*E$$

定理2.5 可测的充要条件

有界集合E可测的充要条件为对于任意$\epsilon > 0$,存在一个开区间G使得$E \subset G$，并且有一个闭集$F \subset E$,于是

$$m(G - F) < \epsilon$$

可测集合的性质

定理2.6

一个基础集合 $X = (a, b)$，若E是可测的，则$\complement E$也可测

定理2.7

如果E_1,E_2是可测的，则$E_1 \cup E_2$,$E_1 \cap E_2$并且$E_1 - E_2$也是可测的。另外，如果E_1，E_2是不相交的，$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$

定理 2.9

（1）$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ 和 $E_k(k \in \mathbb{N})$ 是可测的，则E也是可测的。另外，如果$E_k(k \in \mathbb{N})$是互不相交的，则

$$mE = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k$$

这被称为完全可加性

（2）$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ 并且 $E_k(k \in N)$是可测的。则E也是可测的。

引理 2.1

$E \subset (a, b)$，并且$\complement E$是关于(a, b)的集合E的补集，则
$m_*E + m^*\complement E = b - a$ 且 $m_*\complement E + m^*E = b - a$

除了利用外侧度等于内测度的定义来判断集合是否可测以外，还有下面的方法来判断集合是否可测

定理 2.10 Caratheodory condition

当且仅当对于任意A,以下等式成立，则一个有界集合E是可测的

$$m * A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \complement E)$$

这很容易想到，$A = (A \cap E) \cup (A \cap \complement E)$
利用半可加性就知道 $m^*A \le m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \complement E)$
如果集合E的性质够好，A的两部分交集互不相交，半可加性的等号是成立的

定理 2.11

（1）$\{E_k, k \in N\}$是一个递增的可测集合列在基础集(a, b)。即，$E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, 则$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$是可测的,并且

$$mE = \lim_{k \to \infty} mE_k$$

(2)$\{E_k, k \in N\}$是一个递减可测集合列在基础集(a,b),即，$\cdots \subset E_2 \subset E_1$,则$E = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$是可测的，并且

$$mE = \lim_{k\to\infty} mE_k$$

定义2.5 博雷尔集(Borel Set)

如果集 E 可以通过使用有限或可数的并集和交集运算从闭集和开集获得，那么该集 E 称为 Borel 集 （Borel Set）。显然，所有 Borel 集合都是可测量的

单纯拿出所有的可测集合组成的集合，它的基数和全体实数$\mathbb{R}$是相等的。

所有的不可测集，其外侧度一定严格大于0.

定义2.6

如果一个集合可以表示为可数开集的交集，则该集合称为G_δ 类型的集合（Type of G_δ）。
如果一个集合可以表示为可数闭集的并集，则该集合称为 F_σ 类型的集合(Type of F_σ)。

以上两类集合都属于Borel set，所以它们都可测。

定理 2.12

设 E 为可测集，则存在一个 G_δ 类型的集合 G，以及一个满足 $G \supset E \supset F$ 的 F_σ 类型的集合 F，并且 $mG = mE = mF$。

$$m(G-E) = m(E-F) = 0$$

可测量集 E 是这样一个集合，它与 G_δ 类型（或 F_σ）的某个集合的差是零测度集

当E不可测时，这也存在一个G_δ 类型的集合G和一个 F_σ 类型的集合F满足
$F \subset E \subset G$，从而

$$mG = m^*E, mF = m_*E$$

σ-代数

定义：S是一个给定的集合，如果Γ是以S的一些子集为元素的一个集合，称为S的子集簇，如果它满足
(1)$\emptyset \in \Gamma$
(2)当$A \in \Gamma$时，$A^c \in \Gamma$
(3)当$A_n \in \Gamma$,$n = 1, 2, \ldots$, $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \Gamma$

定义 2.7

E是一个R上的无界集合，如果对于任何$n \in N$,$E \cap [-n, n]$是一个可测集，E就被叫做一个R上的可测集合，并且定义E为

$$mE = \lim_{n\to\infty} m(E \cap [-n, n])$$

定理 2.14

$\mathbb{R}$中存在一个不可测集

Chapter 3 勒贝格可测函数（Lebsgue Measurable Function）

勒贝格可测函数及其性质

定义 3.1

函数 f 被定义在一个可测集合 $E \subset R^n$ 上的广义实值函数，如果每个 α，集合

$$E(f > \alpha) = \{x : x \in E, f(x) > \alpha\}$$

都可测，那么称函数f是$lebesgue$可测函数（或称f在E上可测）

该定义与以下等价：
$E(\alpha \le f) = \{x : x \in E, \alpha \le f(x)\}$
$E(f < \alpha) = \{x : x \in E, f(x) < \alpha\}$
$E(f \le \alpha) = \{x : x \in E, f(x) \le \alpha\}$
$E(f = +\infty), E(f = -\infty), E(\alpha < f < \beta)$

定理 3.1

函数f是$\mathbb{R}$上可测函数，当且仅当每一个开区间$G \subset R$，$f^{-1}(G)$是可测的。

定理 3.2

E，F是可测的，f是一个E上的可测函数，而且$m(F-E)=0$，则f是一个F上的可测函数

推论 3.2

f是一个定义在E上的可测函数，g是一个定义在E上的实函数。如果$mE(f \neq g)=0$,则g是一个E上的可测函数

$E=(E-E_0)\cup E_0$
$E(g>\alpha)=(E-E_0)(g>\alpha)\cup E_0(g>\alpha)=(E-E_0)(f>\alpha)\cup E_0(g>\alpha)$

由于E_0是零测度，所以$E(g>\alpha)$可测

Exaple 3.1

Dirichlet 函数是可测的

Example 3.1

The Dirichlet function is measurable.

Define D: $[0,1] \to R$ by

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

For any $\alpha \in R$,

$$E(D>\alpha)=\begin{cases} [0,1], & \alpha<0 \\ Q\cap[0,1], & 0\leq\alpha<1 \\ \emptyset, & \alpha\geq 1 \end{cases}$$

Since the three sets on the right side are measurable, the function $D(x)$ is measurable on $[0,1]$.

定义 3.2 简单函数

E是可测集。如果函数f在E上为有限个常数$c_1,c_2,...,c_n$在E和$E_1=E(f=c_1),E_2=(f=c_2),...,E_n=(f=c_n)$都是可测的，则函数$f$被称为一个E上的简单函数(simple function)

Exaple 3.2

可测集E上的简单函数是可测的

使用非零的特征函数，f可以被表示为:
特征函数:

$$x_{E_1}=\begin{cases}1, x\in E_1\\ 0, x\notin E_1\end{cases}$$

表示为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{X}_{E_k}(x)$$

定义 3.3

让f是E上一个点，$x_0\in E$。如果对于任意$x_n\in E$并且$x_n\to x_0(n\to\infty)$，我们有$f(x_n)\to f(x_0)$,我们说f在x_0连续。如果f在E上每一个点都连续，我们就说f在E上连续。

定义 3.4 几乎处处（almost where）

设 S 为某个命题或某个属性。如果 S 在集合 E 上为真，除了 E 的零测度子集之外，我们说 S 在几乎所有地方（几乎处处）都是真的，用 S 表示，即在 E 上。
f 和 g 在 E 上几乎在所有位置都相等，这意味着$m(E(f \neq g)) = 0$，用 f~ g表示。
几乎到处都是有限的，几乎到处都是积极的，
几乎到处都会汇聚，$f_n \to f$，$ae.$ 在E 上，
存在一个零测度集 $E_0 \subset E$，使得$\forall x \in E - E_0$，
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

定理 3.3

$\{f_n(x)\}$,$n \in N$是定义在可测集E上的可测函数列，则$\sup\limits_n f_n(x)$和$\inf\limits_n f_n(x)$是可测的

定义 3.5

一个函数f的正定部分被记作f_+，被定义为
$f_+(x) = \begin{cases} f(x), 0 \leq f(x) \\ 0, f(x) < 0 \end{cases}$
同理一个函数f也有其负定部分f_-
$f_-(x) = \begin{cases} -f(x), f(x) \leq 0 \\ 0, f(x) > 0 \end{cases}$

它们都是可测的，其和函数也可测

推论3,3

f是一个可测集合E上的可测函数，则f_+, f_-和$|f|$是可测的

$f_+(x) = \sup\{f, 0\}$，$f_-(x) = \sup\{-f, 0\}$

其中 $|f(x)| = \sup\{f_+, f_-\}$

定义 3.6

给定一个数列$\{x_n\}$，$n \in N$，由$\{x_n\}$的所有收敛子序列的极限组成的集合的上限，称为上极限，被表示为$\overline{\lim\limits_n} x_n$

当$\{x_n\}$是无界的递增数列，我们指定$\overline{\lim\limits_n} x_n = +\infty$

由$\{x_n\}$的所有收敛子列的极限组成的集合的无穷大称为下极限，用$\underline{\lim\limits_n} x_n$

当$\{x_n\}$是无界递减数列，我们指定$\underline{\lim\limits_n} x_n = -\infty$

当$\overline{\lim\limits_n} x_n = \underline{\lim\limits_n} x_n$时，我们说$\lim\limits_n x_n$存在

引理 3.1

$$\underline{\lim_n} x_n = \sup_k \inf_{n \geq k} x_n$$

$$\overline{\lim_n} x_n = \inf_k \sup_{n \geq k} x_n$$

推论 3.4

$\{f_n(x)\}$,$n \in N$是一个被定义在可测集合E上的可测函数列，则$\overline{\lim\limits_n} f_n(x)$和$\underline{\lim\limits_n} f_n(x)$都是可测的

当$\overline{\lim\limits_n} f_n(x) = \underline{\lim\limits_n} f_n(x)$，我们说$\lim\limits_n f_n(x)$存在

定理 3.4

$\{f(x)_n\}$,$n \in N$是被定义在可测集E上的可测函数列，并且$\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$，a.e.。则$f$被称为$E$上的可测函数

定理 3.5

f是一个集合E上的非负可测函数列。则这里存在一个非负递增简单函数列ϕ_n

$$0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots \leq \phi_n \leq \cdots$$

从而$\lim\limits_{n\to+\infty}\phi_n(x)=f(x)$在$E$的每个位置都成立

定义 3.7

f是一个在可测集合E上的可测函数当且仅当f能被表示为简单函数列的极限

引理 3.2

f_1和f_2是可测集合E上的简单函数，则求和，差，乘和除（分母不为零）仍然是简单函数。

定理 3.6

两个可测函数的求和，差，乘和除（分母不为零）仍然是可测函数

可测函数收敛性

定义 3.8

给定一个集合列$\{A_n\}$,$n\in N$，它的上极限集和下极限集被分别定义为

$$\overline{\lim} A_n=\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{n=k}^{\infty}A_n$$

$$\underline{\lim} A_n=\cup_{k=1}^{\infty}\cap_{k=1}^{\infty}A_n$$

定理 3.7

(i)$\overline{\lim} A_n=\{x:x\text{属于无限集合}A_n\}$
(ii)$\underline{\lim} A_n=\{x:\text{存在}n_0\text{，使得当}n\geq n_0,x\in A_n\}$

注：当A_n是可测的，则$\overline{\lim} A_n$和$\underline{\lim} A_n$都是可测的.另外，如果$\{A_n\}$是递增(或递减)的集合列，那么$\lim\limits_n A_n$是可测的，并且$m(\lim\limits_n A_n)=\lim\limits_n mA_n$

定义3.9 近一致收敛 (nearly uniformly converge)

设函数列$\{f_n(x),n\in N\}$,$f(x)$是在可测集E上几乎处处有限的可测函数.若任意$\delta>0$,则存在一个E的可测子集E_δ使得$m(E-E_\delta)<\delta$，并且$f_n(x)$在E_δ上一致收敛于$f(x)$,我们就称函数列$f_n(x)$近一致收敛 (nearly uniformly converge) 于$f(x)$

定理 3.8 叶戈罗夫定理（Egorov Theorem）

(i) 设E是一个可测集合，且$mE<\infty$
(ii) $f_n(x),n\in N$,f 是E上几乎处处有限的可测函数（列）
(iii) 在E上 $f_n(x)\overset{a.e.}{\to}f(x)$（$n\to\infty$）

则函数列$f_n(x)$在E上近一致收敛于$f(x)$

注：条件$mE<\infty$是Egorov定理中不可缺少的
例如 在 $E=R$ 上 $f_n(x)=\mathcal{X}_{(n-1,n]}(x),n\in N$
在E上 $f_n(x)\overset{a.e.}{\to}0(n\to\infty)$
但是$f_n(x)$在E上并不近一致收敛于$f(x)$

关于Egorov定理的证明，我推荐去看周民强《实变函数论》（第三版）上的证明，由于周的教材与本课程参考教材对定理和定义的介绍顺序不同，周民强书上的egorov定理证明使用了上极限集的定义和几乎处处连续与依测度连续的关系，使得证明过程更加简单易懂，也更方便你记下来用在考试中证明。

Eogrov定理的逆定理也是对的

定理 3.9

假设可测函数列$f_n(x)$在可测集E上近一致收敛于f(x)，则$f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$

定义 3.10 依测度收敛（in measure converage）

设$\{f_n(x),n\in N\}$,$f(x)$是可测集E上的可测函数。若任意的$\epsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\geq\epsilon)=0$$

我们就称$f_n(x)$依测度收敛于$f(x)$，这被表示为$f_n(x)\overset{m}{\to}f$

定理 3.10

若$mE < \infty$,并且$f_n(x) \overset{a.e.}{\to} f(x)$，则$f_n \overset{m}{\to} f$

注：无法通过函数列$f_n(x)$依测度收敛于$f(x)$得到函数列$f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$

原因是显然的，依测度收敛要比几乎处处收敛的条件弱，你可以理解为依测度收敛是允许函数在零测度之外的非零测度集上有一部分不收敛于f，也就是说几乎处处收敛其实是依测度收敛的一种特殊情况。但是几乎处处收敛得到依测度收敛的结论一定要在可测集E测度有限的条件下得出。

定理 3.11 Riesz 定理（有的书翻译为 里斯定理）

设$mE < \infty$，则一个可测函数列$f_n \overset{m}{\to} f$当且仅当对于任意的f_n的子列f_{n_k}，存在一个子列的子列(subsubsequence)$f_{n_{k_j}}(x) \overset{a.e.}{\to} f(x)$

定理 3.12

设E是一个可测集，$f_n \overset{m}{\to} f$且$g_n \overset{m}{\to} g$

则

(i)$af_n \pm bg_n \overset{m}{\to} af \pm bg$
(ii)$|f_n| \overset{m}{\to} |f|$
(iii)$sup(f_n, f_n) \overset{m}{\to} sup(f, g)$，$inf(f_n, g_n) \overset{m}{\to} inf(f, g)$

定理 3.13

设E是一个可测集，$f_n \overset{m}{\to} f$ 并且 $f_n \overset{m}{\to} g$,则f g

可测函数的构造（The construction of measurable function）

定理 3.14 Luzin 定理

设E是一个可测集合，f是一个E上几乎处处有限的可测函数.则对于任意的$\epsilon > 0$，存在一个闭集$F \subset E$ 使得$m(F - E) < \epsilon$，并且f在F上连续

定理 3.15 Luzin定理的逆定理

假设f是一个可测集E上的函数。若任意$\epsilon > 0$，存在一个闭集$F \subset E$，使得$m(E - F) < \epsilon$,并且f在F上连续。则f在E上可测

注：Luzin定理和其逆定理给出了一个函数可测的充分必要条件，这可以被看作可测函数的定义。
即一个在可测集E上的函数f当且仅当对于任意的$\epsilon > 0$，存在一个闭集$F \subset E$，使得$m(F - E) < \epsilon$，并且f 在 F上连续

引理 3.4

设F是一个R上的闭集，且f在F上连续。则f能被延拓为一个R上的连续函数g

我想到在数学分析当中我们也总是利用延拓的方法将一个开集上的连续函数延拓成闭集上的连续函数（主要是因为很多性质都要求函数是闭区间上的连续函数），不过和此处可能关系不大

定理 3.16

设E是一个可测集，f是一个E上几乎处处有限的可测函数。则对于任意的$\epsilon > 0$，R上存在一个连续函数g，使得

$$mE(g \neq f) < \epsilon$$

推论 3.5

设E是一个可测集，而且f是一个在E上几乎处处有限的可测函数。如果$|f| \leq M$在E上几乎处处成立，M在这里是一个常数，那么对于任意的$\epsilon > 0$，这里存在一个R上的连续函数g，并且$|g| \leq M$,使得

$$mE(g \neq f) < \epsilon$$

Chapter 4 勒贝格积分 （Lebesgue Integration）

Introduction of Lebesgue integration

定义4.1

让一个简单函数ϕ在一个有界可测集合E被表示为

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mathcal{X}_{E_k}(x)$$

在这里$E_k = E(\phi = y_k)$是独特且可测的，和$\sum_{k+1}^{n} y_k m E_k$被叫做简单函数$\phi(x)$在E上的勒贝格积分(Lebesgue integration),被表示为

$$\int_E \phi(x) dm = \sum_{k=1}^{n} y_k m E_k$$

本章大部分的定理都是Lebesgue积分的性质，没有什么值得着重记录的，直接看课程PPT就好。

比较重要的定理是以下四条：

定理 4.16 Levi 定理

假设可测函数列f_n在可测集E上满足

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dm = \int_E f(x) dm$$

定理 4.17 piececewise定理

如果$\{f_k(x), k \in N\}$是一个可测集E上的非负可测函数列，则

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)$$

定理 4.18 Fatou 引理

如果$\{f_k(x), k \in N\}$是一个可测集E上的非负可测函数列，则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x) dm \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x) dm$$

定理 4.19 Lebesgue 控制收敛定理

假设一个可测集E上的可测函数列f_n满足条件：$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,并且存在一个可积函数g(x)满足
$|f_n(x)| \le g(x), \forall x \in E, n \in N$
则f在E上可测，并且

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dm$$

定理 4.20 Lebesgue 有界控制收敛定理

假设$mE < \infty$，可测集E上的可测函数列f_n满足条件：$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，则存在一个常数$M$使得

$$|f_n(x)| \le M, \forall x \in E, n \in N$$

则f是E上是可积的

$$\int_E f(x) dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dm$$

定理 4.22 Lebesgue 定理

一个$[a，b]$上的有界函数f可积，当且仅当f在$[a, b]$上几乎处处连续。

定理 4.23

如果一个函数f在$[a, b]$是黎曼可积的，则f是一个Lebesgue可积的，并且它们有相同的积分值