3

3.1 插值+多项式估计

1 插值问题

1.插值问题的描述

给定

$$(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

称 $\varphi(x)$ 为 插值函数 (interpolant)

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

2 多项式逼近的理论基础

1.n 次代数多项式：

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

2.定理（Weierstrass Approximation Theorem）

若 f 在 $[a, b]$ 上连续，则
对任意 $\varepsilon > 0$，存在多项式 $P(x)$，使

$$\boxed{|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]}$$

3 插值多项式的存在性与唯一性

1.Vandermonde 方程组
设插值多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

由条件 $p_n(x_i) = y_i$ 得线性系统：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

2.唯一性结论
Vandermonde 行列式：

$$D = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

由于 x_i 两两不同，

$$\boxed{D \neq 0 \implies \text{插值多项式存在且唯一}}$$

4 Lagrange 插值多项式

- **线性插值（$n = 1$）**

给定两点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$，

定义基函数：

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

线性插值多项式：

$$\boxed{P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)}$$

- **一般 Lagrange 基函数**

对 $n + 1$ 个节点 $x_0, \dots, x_n$，定义

$$\boxed{L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}}$$

性质：

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

- **定理（Lagrange 插值公式）**

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)}$$

5 插值误差理论

- **插值余项公式**
  若 $f \in C^{n+1}[a, b]$，则

$$\boxed{f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

  其中 $\xi(x) \in (a, b)$，一般未知。
- **误差上界估计**
  若

$$\max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$$

  则

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!} \left| \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \right|}$$

- 误差与 **节点分布** 强相关
- 当 $x \in [x_0, x_n]$ 内时误差较小
- 若 f 本身是 $\leq n$ 次多项式：

$$\boxed{P_n(x) \equiv f(x)}$$

3.2数据逼近与 Neville 方法（Data Approximation）

1 插值计算的实际问题

Lagrange 插值的不足：

- 误差项不便于直接计算
- 已算出的低阶插值结果 **不能复用**
- 计算 $P_{n+1}(x)$ 需要全部重来
  👉 目标：
  构造一种递推方法，使高阶插值能复用低阶结果

2 定理（Neville 递推公式，Theorem 3.5）

let x_j and x_i be two distinct numbers

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{x_i - x_j}$$

3 Neville 递推表结构

构造如下三角表：

x_0	P_0				
x_1	P_1	$P_{0,1}$			
x_2	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$		
x_3	P_3	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$	
x_4	P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$

4 Neville 方法的优点

- 不需要写出插值多项式
- 计算过程稳定、清晰
- 易于逐步提高插值阶数
- 特别适合 **只关心某一点 x 的函数值**

3.3 差商+Newton 插值法

1 差商的定义（Divided Differences）

- 零阶差商，给定节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- 一阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- 高阶差商（递推定义）对 $k \geq 1$，

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

2 差商表（Divided Difference Table）

差商可用三角表形式生成：

- 第 0 列：$f[x_i]$
- 第 1 列：$f[x_i, x_{i+1}]$
- 第 2 列：$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
- ...
  📌 计算特点：
- 每一阶差商只依赖前一阶
- 可逐步加入新节点

3 Newton 插值多项式（核心公式）

利用差商，可将插值多项式写成 **Newton 形式**：

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \cdots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_n] \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k) \end{aligned}}$$

- 插值多项式 **逐项累加**
- 增加新节点只需添加一项
- 差商表可重复利用
- 比 Lagrange 形式更适合数值计算

4 定理（差商和函数导数之间关系，Theorem 3.6）

Suppose that $f \in C^n[a, b]$ and $x_0, x_1, ..., x_n$ are distinct numbers in $[a, b]$. Then a number ξ exists in (a, b) with

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

5 等距节点情形与差分

若节点等距：$h = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, ..., n - 1$ and let $x = x_0 + sh$. Then the difference $x - x_i$ is $(s - i)h$.

$$P_n(x) = P(x_0 + sh)$$

$$= f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s - 1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots$$

$$+s(s - 1) \cdots (s - n + 1)h^n f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

$$= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, ..., x_k].$$

使用二项系数符号

$$\boxed{P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, ..., x_k]}$$

5.1 Newton 前向差分插值公式（Forward Differences）

定义前向差分算子：$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$
高阶前向差分：$\Delta^k f(x_i) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x_i))$
令$s = \frac{x-x_0}{h}$
则

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) \\ + \cdots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0) \end{aligned}}$$

适用场景：x 靠近 x_0；等距节点数据表

5.2 Newton 后向差分插值公式（Backward Differences）

定义后向差分：$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$
令$s = \frac{x-x_n}{h}$
则

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = f(x_n) + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f(x_n) \\ + \cdots + \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n) \end{aligned}}$$

适用场景：x 靠近区间右端点 x_n

5.3 Newton 中心差分插值公式（Centered Differences）

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = P_{2m+1}(x) = f[x_0] + \frac{sn}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2 h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \\ + \frac{s(s^2-1)h^3}{2}(f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]) + \cdots \\ + s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, \ldots, x_m] \\ + \frac{s\left(s^2-1\right)\cdots\left(s^2-m^2\right)h^{2m+1}}{2}(f[x_{-m-1}, ..., x_m] + f[x_{-m}, ..., x_{m+1}]), \end{aligned}}$$

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences	Fourth divided differences
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$\underline{f[x_{-1}, x_0]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]}$	
x_0	$\underline{f[x_0]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$
		$\underline{f[x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

如果 n=2m+1 是奇数。如果n=2m为偶数，我们使用相同公式但删除最后一行。该公式所用的条目在表3.13中有划线。

- 差商是 Newton 插值的核心工具
- Newton 形式比 Lagrange 形式更适合计算
- 等距节点下可进一步简化为差分公式
- 前向 / 后向公式取决于插值点位置