CIENCIAS BÁSICAS
MÁTEMATICA TÉCNICA

GUIA N° 2: MATRICES Y DETERMINANTES

Indicadores:
Los estudiantes al resolver esta guía serán capaces de:

- ✓ Identificar los diferentes tipos de matrices.
- ✓ Resolver una ecuación matricial, aplicando el concepto de igualdad de matrices.
- ✓ Efectuar operaciones con matrices.
- ✓ Resolver determinantes de orden 2, de orden 3 (Regla de Sarrus) y orden mayor a 3.
- ✓ Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de Cramer.
- ✓ Resolver problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones, utilizando el método de Cramer.

I. Tipos de matrices

1. **Dadas las siguientes matrices, indique la dimensión de cada una de ellas, identifique de qué tipo son y obtenga la transpuesta de cada una de ellas:**

a) $\begin{bmatrix} -8 & 9 & 4 \\ -2 & 5 & 24 \\ -9 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -9 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -9 & -9 & -9 & -9 & 5 & 4 & 8 & 1 \\ -9 & 4 & 5 & 1 & -2 & -9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

II. Construcción y operaciones de matrices

1. **Construir las siguientes matrices.**

a) $[\mathbf{A}]_{1x2}$, siendo $\mathbf{a_{ij}} = 5i^2 + j^2 - 6$

b) $[\mathbf{A}]_{3x3}$, siendo $\mathbf{a_{ij}} = -(2i - 3j)^2 + 2$

c) $[\mathbf{A}]_{3x2}$, donde $\mathbf{a_{ij}} = \frac{1}{2}i + 3j^2$

d) $[\mathbf{B}]_{2\times2}$, donde $\mathbf{b_{ij}} = (-1)^{i+j}(i^2 - j^3)$

e) $[\mathbf{A}]_{3x2}$, donde $\mathbf{a_{ij}} = 1 + 2^i - (-1)^j$

f) $[\mathbf{B}]_{3\times3}$, que cumpla ser simétrica.

2. **Operaciones con matrices.**

a) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ calcular:

- $-2A + 3B$
- $\frac{1}{2}A \cdot B$
- $B \cdot (-A)$
- $A \cdot A - B \cdot B$
- $2A - 2B^t$

- $2(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{t}-A$

b) Dadas las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 6 & 1 & 0\end{bmatrix}$ calcular:

- $\boldsymbol{A}^{t}\cdot\boldsymbol{B}^{t}$
- $\boldsymbol{A}^{t}+4\boldsymbol{B}$
- $2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}$
- $(-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{t})^{t}$

c) Si $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 4 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}1 & -8 & 6\\ 5 & -5 & 5\\ 7 & 0 & -1\end{bmatrix}$ $\quad\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -6 & 7\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ encontrar las operaciones indicadas si es posible:

- $\boldsymbol{M}^{t}\cdot\boldsymbol{P}$
- $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N}^{t}$
- $\boldsymbol{M}^{t}\cdot\boldsymbol{N}^{2}$
- $\boldsymbol{P}^{t}\cdot\boldsymbol{N}^{t}$
- $\boldsymbol{M}+2\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N}$

3. Calcular el determinante de las matrices mostradas a continuación:

a) $\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ -1 & 1 & 4\\ -1 & 4 & 7\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}10 & 12\\ 14 & 46\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 5 & 5 & 0\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}5 & 4 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 9 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}-8 & 4 & 4 & 21\\ 0 & 4 & 3 & 1\\ -1 & 7 & 0 & -3\\ 8 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix}\frac{7}{8} & \frac{1}{2} & 7\\ \frac{8}{9} & -\frac{8}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{9}{4} & \frac{8}{8} & 0\end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 7 & -9\end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 6 & 0 & -5\\ 5 & -1 & 4\end{bmatrix}$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de Cramer

a) $\begin{cases}x+y+z & = & 11\\ x-y+3z & = & 13\\ 2x+2y-z & = & 7\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+y+z & = & 14\\ 3x+y-z & = & -2\\ x+3z & = & -4\end{cases}$

c) $\begin{cases}-3x+y & = & 2\\ -2y+x & = & -5\end{cases}$ d) $\begin{cases}2x+2y-z=0\\ 2x-y+z=3\\ 4x+y+z=3\end{cases}$

e) $\begin{cases}\frac{1}{5}x-3z-y=3\\ \frac{8}{9}z-3y+x=2\\ y+z+x=8\end{cases}$ f) $\begin{cases}-3y+x & = & 2\\ -2x+y & = & 5\end{cases}$

5. **Ejercicios de aplicación de matrices (Resolver por el método de Cramer los ejercicios que pidan resolver el problema)**

a) Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanterías: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$. En cada uno de los tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente $\mathbf{10}$ estanterías grandes y $\mathbf{80}$ pequeñas de tipo A, $\mathbf{80}$ grandes y $\mathbf{60}$ pequeñas de tipo B, y $\mathbf{40}$ grandes y $\mathbf{60}$ pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.
   a. Representar esta información en dos matrices.
   b. Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos−tamaño de estantería.

b) El precio, por unidad, de los productos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ es $\$\mathbf{4}, \$\mathbf{5}, \$\mathbf{7}\ \boldsymbol{y}\ \$\mathbf{12}$; y las cantidades que se requieren de cada producto son $\boldsymbol{A} = \mathbf{500}, \boldsymbol{B} = \mathbf{600}, \boldsymbol{C} = \mathbf{750}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{D} = \mathbf{850}$. Construir una matriz fila para los costos y una matriz columna para la requisición

c) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.
   a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.
   b) Resolver el problema.

d) Cierto estudiante obtuvo, en un control que constaba de 3 preguntas, una calificación de 8 puntos. En la segunda pregunta sacó dos puntos más que en la primera y un punto menos que en la tercera.
   a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la puntuación obtenida en cada una de las preguntas.
   b) Resolver el sistema.

e) Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de $100, $120 y $150, respectivamente. El importe total de la compra fue $1,160. El peso total de la misma, 9 kg. Además, compró 1 kg. más de naranjas que de manzanas.
   a) Plantear un sistema para determinar la cantidad comprada de cada producto.
   b) Resolver el problema.

f) Una autoescuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.
   a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.
   b) Resolverlo.

g) Si A le da $1 a C, ambos tienen lo mismo; si B tuviera $1 menos tendría lo mismo que C; y si A tuviera $5 más tendría el doble de C. ¿Cuánto tiene cada uno?

h) Una mezcla de 200 litros está compuesta por las sustancias a, b, c. Si la cantidad de litros de A y B es el triple de la cantidad de C, y la sustancia B conforma el 35% de la m mezcla; ¿cuántos litros hay de cada sustancia?

i) Pedro y Juan son socios. Juan tiene 5 acciones tipo “A” y 10 acciones tipo “B”.- Pedro tiene 15 acciones tipo “A” y 20 acciones tipo “B”.- Un día vendieron sus acciones en $ 5500 y $ 12000 respectivamente. Calcular el precio de venta de cada tipo de acción. R/ A = $200, B = $450

j) Un cliente de supermercado ha pagado un total de $156 por 24 litros de leche, 6kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo sabiendo que un litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

k) La edad de A excede en 13 años a la edad de B, y el duplo de la edad de B excede en 29 años a la de A. Hallar ambas edades. R/ 55 y 42

l) Cinco libras de café y tres libras de queso cuestan $30, mientras que tres libras de café y siete de queso cuestan $44. ¿Cuál es el precio de una libra de café y el de una libra de queso?

m) En una granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se usaron?

n) En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase?

o) Una persona invierte en un producto una cantidad de dinero obteniendo un 3.5% de beneficio. Por otra inversión en un segundo producto obtiene un beneficio del 4.5%. Sabiendo que en total invirtió $10,000 y que los beneficios de la primera inversión superan en $330 a los de la segunda ¿Cuánto dinero invirtió en cada producto?