代数几何基础

陈嘉辰, 刘晓龙, 谭天健, 张佳龙
山东大学, 山东,250100

摘要

本文总结了科创以来的一些学习成果, 主要是两条线路, 一是 Grothendieck 发展的概型理论最为基础的内容, 算是为现代代数几何构建语法; 二是复代数几何的内容, 主要研究复流形及其上面向量丛的性质. 当然二者也有很多联系, 最为明显的就是 J.P.Serre 著名的 GAGA 原理. 代数几何是当今数学的基础, 值得学习.

目录

1 简介

代数几何是一门有着非常悠久历史的学科, 也是当今数学中很有活力的领域之一. 早在几千年前, 人们就开始用纯几何的方法构造了一些代数曲线, 尤其是对于圆锥曲线的研究已经比较成熟. 而对于高维情况那个时期的研究还比较少, 主要是对二次曲面的研究. 在十七, 十八世纪, 随着解析几何的诞生, 代数几何就有了新的发展, 人们可以用多项式方程组的零点来描述代数几何.

然后就是大数学家 Riemann, 他的工作彻底突破了欧氏几何的限制, 创立了流形的概念. 事实上流形的思想对整个数学都非常重要, 它也对后来抽象代数几何的发展提供了思想上的帮助. 说到 Riemann 对代数几何最直接的帮助, 最为耳熟能详的就是 Riemann 曲面的概念, 这个事实上对复几何 (紧 1 维 Kähler 流形) 和代数几何 (1 维正则概型) 都有很大帮助, 是现代数学的交汇之处.

在二十世纪初, 代数几何出现了众多的学派. 其中由 Kronecker, Dedekind 和 Weber 建立了代数学派. 这个学派当时已经意识到了 $\mathbb{C}$ 上的代数簇与多项式环中的理想的关系, 并且定义了除子, 证明了 Riemann-Roch 定理.

另一方面, 微分几何和复几何在这个阶段取得了很大的发展, 这对代数几何也有非常大的帮助. 在这个时期, Poincaré 和 Cartan 发展了外微分形式和活动标架法, 将微分几何带入了现代时期. 其中, 对代数几何影响最大的应该是对 Kähler 流形的研究和紧复流形上的 Hodge 理论的发展, 从而以复解析理论为主的复代数几何发展了起来, 这个研究代数几何的分支和复流形的研究紧密相关, 直到今天也是研究代数几何的重要方法.

在二十世纪五十年代, Serre 将层这个重要的工具引入了代数几何, 并且建立了凝聚层的上同调理论 (FAC). 然后 Grothendieck 创立了以概形为基础的代数几何理论, 彻底改变了代数几何没有一个统一的语言基础的局面.

概形理论的建立标志着现代代数几何的开端, 其使得代数几何在多个方面取得了突破 (例如费马大定理的证明). 首先, 概形理论终于使得研究代数几何更加内蕴, 概形是由仿射概形粘接而成的, 那么概形所起的作用就如同微分几何中微分流形的作用一样. 其次, 那就是仿射概形中的点是交换环中的所有素理想而不是极大理想. 在古典的代数几何中, 我们只考虑其中的闭点. 而在概形理论中, 人们考虑了比以前更多的点, 保存的信息更多.(事实上 k-簇和整 k 有限型概型有范畴等价, 其核心就是对拓扑空间的 Sobrification)

此外, 复几何在上个世纪都有巨大的发展, 例如著名几何学家 Kodaira 的一系列工作还有 S.S.Chern 对 Chern 示性类的奠基性工作, 还有 Hirzebruch 对 Riemann-Roch 的推广 (这个启发了 AS 指标定理), 这些工作对上面的代数几何和相交理论有很大的影响, 里面很多东西都是由此而来 (例如消灭定理, 嵌入定理, 代数几何里定义 Chern 类, 以及 Grothendieck 对 Riemann-Roch 的进一步推广). 以及 S.T.Yau 有关 Calabi 猜想等一系列理论, 以及 Kähler-Einstein 度量的工作, 还有 G.Tian 有关复结构形变和 K 稳定性等的贡献. 当然还有 Y.T.Siu 还有 J.P.Demailly 等人的工作让复几何 (乃至数学物理) 焕发出勃勃生机.

2 概型理论

2.1 层论基础

概述：层的产生基于这样的思想：用几何空间上的“函数”来反应该点空间的性质，它是代数几何的重要对象，也是定义层的先置条件。层上携带大量信息，除此之外，能反映在整体-局部-单点上的性质。我们从三方面研究层：1. 开集，2. 茎芽，3. 拓扑基。

定义 2.1.1. *$\mathscr{F}$ 为拓扑空间 X 上预层，如果：*
(1). 对于 X 中的任意开集 U,$\mathscr{F}(U)$ 是一集合，记 $\mathscr{F}(\mathscr{U})=\Gamma(U,\mathscr{F})$;
(2). 若 $U\hookrightarrow V$ 为开集间的嵌入，则有限制映射

$$res_{V,U}:\mathscr{F}(V)\longrightarrow\mathscr{F}(U)$$

满足：

1. $res_{U,U}=id_{\mathscr{F}(U)}$;
2. 若 $U\hookrightarrow V\hookrightarrow W$, 则

等价地，$\mathscr{F}$ 是 **Top** 到 **Sets** 的反变函子。

定义 2.1.2. *1.* 茎芽*是余极限*

$$\varinjlim_{U\ni p}\mathscr{F}(U),$$

其中 $\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$ 为 $V\hookrightarrow U$ 诱导的映射；

2. f 在 p 点的芽 $(p\in U\subset X, f\in\mathscr{F}(U))$ 指 f 在 $\mathscr{F}_p$ 中的像。

定义 2.1.3. *层是满足唯一公理，粘合公理的预层。*
设 U 是拓扑空间 X 中的开集，$\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ 是 U 的一个开覆盖。

- *唯一公理：若 $f_i\in\mathscr{F}(U), i=1,2$ 并且 $res_{U,U_j}f_1=res_{U.U_j}f_2,\forall j\in\Lambda$, 则 $f_1=f_2$.*
- *粘合公理：若 $f_i\in\mathscr{F}(U_i)$ 满足 $res_{U_i,U_i\cap U_j}f_i=res_{U_j,U_i\cap U_j}f_j$，则存在 $f\in\mathscr{F}(U)$ 使得 $res_{U,U_i}f=f_i,\forall i\in\Lambda$.*

定义 2.1.4. *层上的茎条和芽是层看做预层的茎条和芽。*

定义 2.1.5. *$\mathscr{O}_X$ 为环上层（用环范畴代替之前集合范畴），则 $(X,\mathscr{O}_X)$ 称为赋环拓扑空间，记 $\mathscr{O}_X$ 上截面作函数。*

定义 2.1.6. *设 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 为同一拓扑空间 X 上的预层，称 $\Phi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 为集合上预层的映射，如果 ϕ 是 $\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 上自然变换。若 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 为层，则称上述 Φ 为层映射。*

注 2.1.7. 故形成了层，预层为拓扑空间 X 上的预层，层范畴。

定义 2.1.8. *称 $\prod_{P\in\mathscr{U}}S_p\in\prod_{p\in\mathscr{U}}\mathscr{F}_p$ 为相容芽，如果对于任意的 $p\in U$, 都存在一族 S_p 表示（开集 $U_p\subset U,\tilde{S}_p\in\mathscr{F}(U_p)$）使得 $\tilde{S}_p$ 在 q 的芽为 $S_q,\forall q\in U_p$.*

定理 2.1.9. *层 $\mathscr{F}$ 在开集 U 上的相容芽是某 U 上截面的像。*

定理 2.1.10. ϕ 是层中的同构当且仅当 ϕ 在所有的茎芽上诱导一个同构。

定义 2.1.11. $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上预层，称态射 $sh : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^{sh}$ 为 $\mathscr{F}$ 层化，如果 $\mathscr{F}^{sh}$ 为层，并且对于任意的层 $\mathscr{F}$ 以及 $g : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, 存在唯一的 $f \in Mor(sh_X)$ 使得:

$$f \circ sh = g.$$

定理 2.1.12 (对集合、群、环上预层层化存在)**.** 构造 $\mathscr{F}$ 是一个预层，它的层化是 $\mathscr{F}^{sh} : Top_X \to Sets, U \mapsto \{(f_p \in \mathscr{F}_{p\in U}) : (f_p)$为相容芽$\}$。

定义 2.1.13. 设 $\pi : X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射，$\mathscr{F}$ 是 X 上层，则 π_* 定义了 Y 上层，具体地，$\pi_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(\pi^{-1}(V))$，其中 V 是 Y 中开集，称 $\pi^*\mathscr{F}$ 为顺像。

定义 2.1.14. 设 $\pi : X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射，$\mathscr{G}$ 是 Y 上的层，则其逆像 $\pi^{-1}\mathscr{G}$ 是 X 上层，具体地，对于 X 中的开集 U,$\pi^{-1}(\mathscr{G}(U)) = \varinjlim_{\pi(U)\subset V}$.

命题 2.1.15. π_* 是 $Top_X \to Top_Y$ 的函子，π^{-1} 是 $Top_Y \to Top_X$ 的函子。

命题 2.1.16. (π^{-1}, π_*) 是一对伴随函子，因此，对于拓扑空间中的连续映射 $\pi : X \to Y$, 以及 X, Y 上的层 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$, 存在双射

$$Mor_X(\pi^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \longleftrightarrow Mor_Y(\mathscr{G}, \pi_*(\mathscr{F})).$$

命题 2.1.17. 存在自然同构，$\mathscr{G}_q \simeq (\pi^{-1}\mathscr{G})_p$, 其中 $\pi(p) = q$.

定义 2.1.18. 设 $\{B_i\}$ 是拓扑基，对 B_i 定义集合 $F(B_i)$ 使得，如果 $B_i \subseteq B_j$，则有 $res_{B_j,B_i} : F(B_j) \to F(B_i)$ 满足 $res_{B_i,B_i} = id; res - B_k, B_i = res_{B_j,B_i} \circ res_{B_k,B_j}$ 对于所有的满足 $B_i \subseteq B_j \subseteq B_k$ 都成立。
类似地，对 $B = \bigcup_i B_i$, 要求满足唯一公理以及粘合公理。

定理 2.1.19. 存在唯一的 X 上的层是拓扑基上的层 f 的延拓。

定理 2.1.20. 设 $X = \bigcup_i U_i$ 是一个开覆盖，$\mathscr{F}_i$ 是 U_i 上的层，$\mathscr{F}_i|_{U_i \cap U_j} = \mathscr{F}_j|_{U_i \cap U_j}$，并且在三重交集上相兼容，则 $\mathscr{F}_i$ 可被粘成 X 上的层。

2.2 概形基础

像层一样。概型通过几何空间上函数层来认识空间，概型由三部分组成：集合，拓扑以及结构层。赋环拓扑空间和环谱上的拓扑结构及性质是重要的工具。微分流形和上面的可微函数是概型的一个典型例子。

引理 2.2.1. 在 *SpecA* 赋予 *Zariski* 拓扑，则 $\{D(f) = SpecA\ V(f) : f \in A\}$ 是一个拓扑基。

定义 2.2.2 (仿射概型)**.** 集合是 *SpecA*, 其上的拓扑是 *Zariski* 拓扑，层结构是环上层，$\mathscr{O}_{SpecA}(P(f)) = A_f$. 称 $P(f)$ 为主理想开集。

命题 2.2.3. 令 $X = SpecA, \mathscr{P} \in X$, 则 $\mathscr{O}_{X,\mathscr{P}} \simeq A_f$ 是自然同构。

定义 2.2.4. $(X, \mathscr{O}_X)$ 和 $(Y, \mathscr{O}_Y)$ 之间的赋环拓扑空间的同构是 X, Y 之间的同胚且是 $\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_Y$ 之间的同构。

定义 2.2.5 (概型)**.** 把同构与 $(SpecA, \mathscr{O}_{SpecA})$ 的赋环拓扑空间统称为仿射概型，则概型 $(X, \mathscr{O}_X)$ 是赋环拓扑空间使得对于任意的 $p \in X$, 存在 $\mathcal{U}, \mathscr{O}_X|_{\mathcal{U}}$ 是仿射概型，记作 $(X, \mathscr{O}_X)$，简写为 X, 称 $(\mathcal{U}, \mathscr{O}_X|_{\mathcal{U}})$ 为开子概型。

2.3 概形的基础性质

2.3.1 拓扑性质

连通性 设 $A = \prod_{i=1}^{N} A_i$，则 $SpecA$ 同胚于 $\amalg SpecA_i$。另一方面，若 A 不连通，则存在 A 中的幂等元 a_1, a_2 使得 $a_1 + a_2 = 1, a_1a_2 = 0$，则 $A = \prod A_i$.。

不可约性

命题 2.3.1. $X = \overline{U} \cup U^c$，所以不可约拓扑空间的开集是稠密的。此外，若 Z 是 X 中的不可约集，则 $\overline{Z}$ 也是不可约的。

拟紧

命题 2.3.2. $SpecA$ 是拟紧的。

拟可分

定义 2.3.3. 设 X 是一个拓扑空间，称 X 是拟可分的，如果对于 X 中拟紧的开集 $U, V, U \cap V$ 也是拟紧的。

Noetherian

定理 2.3.4. X 是 *Noetherian* 拓扑空间。故任意 X 中的闭集 Z, 存在唯一的有限的分解 $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$，其中 Z_i 都是不可约闭集。

定义 2.3.5. 设 X 是一个概型，称其为局部 *Noetherian*，如果存在仿射开覆盖 $\{SpecA_\lambda\}$ 使得 A_λ 是 *Noetherian*。如果 X 还是拟紧的，则称其为 *Noetherian* 概型。

命题 2.3.6. 局部 *Noetherian* 概型是拟紧的。

2.3.2 代数性质

既约性

定义 2.3.7. 概型 X 称为既约的，如果对于任意开集 $U, \mathscr{O}_X(U)$ 是既约环。

命题 2.3.8. 既约性是 *stalk-local* 的。

整性

定义 2.3.9. 如果对于 X 中的任意开集 $U, \mathscr{O}_X(U)$ 都是整环，则称 X 为整概型。

命题 2.3.10. X 是整概型等价于 X 是不可约的且是既约的。

2.3.3 “仿射-局部”性质

概型局部地看是放射的，处理概型上性质时，我们通过仿射开覆盖刻画一般的开集上或某个的性质。如果概型有两个仿射开覆盖，分别在它们上考察概型的性质或做计算，那么在多大程度上两者的结果相同或可以相互转换呢？

命题 2.3.11. 若 $SpecA, SpecB$ 是概型 X 的仿射开子概型，则 $SpecA \cap SpecB$ 可以表为一族“可同时化为主理想开子概型”的开集的并。

2.4 Chevalley 定理

Chevalley 定理回答了这样的问题：给一组多元多项式方程，在怎样的要求下能使得方程组有解. 若 $\pi : X \to Y$ 是概型间态射，注意 $\pi(X)$ 既有可能开，又可能闭，为此定义：

定义 2.4.1. *称诺特拓扑空间的子集可构造，若它在最小的满足如下要求的集族里：*

1. *开集都在集族.*
2. *任有限交仍在集族.*
3. *任一元素补集仍在集族.*

由定义，诺特拓扑空间子集是可构造的当且仅当它是有限个局部闭子集的无交并.

定理 2.4.2. *Chevalley 定理 $\pi : X \to Y$ 是诺特概型间有限型态射，则 π 将 X 中可构造集映成 Y 中可构造集. 特别地，$\pi(X)$ 可构造.*

为证明 Chevalley 定理，我们需要如下引理：

引理 2.4.3. *Generic Freeness 引理 设 B 是诺特整环. 则所有有限生成 B-代数 A 满足条件 $\diamondsuit$: 对每个有限生成 A 模 M，有 $f \in B$ 使得 M_f 是自由 B_f 模.*

证明. 易见 B 本身满足 $\diamondsuit$. 因 A 有限生成，对生成元个数归纳，只需证明如果 A 作为有限生成 B-代数满足 $\diamondsuit$，则 $A[T]$ 也满足 $\diamondsuit$. 事实上，设 M 是由有限集 S 生成的 $A[T]$ 模. $M_0 = 0, M_1 = \{\sum m_i s_i, m \in M, s \in S\}$. 对 $n > 1$，$M_{n+1} = M_n + TM_n$ 是 M 的子 A 模. 则 $\Psi : M_n/M_{n-1} \to M_{n+1}/M_n$ 满. 由诺特性，升链有限，故 n 足够大时 Ψ 是同构. M_{i+1}/M_i 在 i 变化时只能取到有限等价类，故存在 $f \in B$ 使得 ${M_{i+1}/M_i}_f$ 是自由 B_f 模. 由同调代数，对 B 模 M，$M = \cup M_i$，$\{M_i\}$ 是递增子模且 $M_0 = 0$，且满足 M_{i+1}/M_i 是自由模，则 M 是自由模. 从而原命题得证. □

为证 Chevalley 定理，不妨设 $\pi : X \to Y$ 是有限型的且 X，Y 都是仿射概型，其中 $Y = SpecB$. 考虑 Y 的不可约分支，故不妨 B 是整环. 考虑 $\pi : SepcA \to SpecB$ 有限诺特且 $SpecB$ 不可约，由 Generic Freeness 引理，有 $f \in B$ 使得 A_f 是自由 B_f 模. 必有一非负的秩，从而有 Y 的稠密开集 U 使得 $\pi(X)$ 包含 U 或者根本与 U 不交. 如果 U=Y 则证毕. 否则对 U 的补进行上述讨论得证. Chevalley 定理完全可以回答一开始的问题. 在射影空间，我们有更强于 Chevalley 定理的结果.

定理 2.4.4. *The Fundamental Theorem of Elimination Theory 态射 $\pi : \mathbb{P}^n_A \to SpecA$ 是闭映射.*

一些初等结果被消解基本定理涵盖. 比如令 $A = k[a, b, c, \cdots, i]$，考虑 $\mathbb{P}^2_A$ 的由 $ax + by + cz = 0, dx + ey + fz = 0, gx + hy + iz = 0$ 决定的代数集（闭），在 Spec A 中上方程组有非平凡解即 det T=0，其中 T 是线性方程组系数矩阵. 所以 Cramer 法则是消解基本定理的一特殊情况.

2.5 Separated morphisms

命题 2.5.1. 若 $\pi : X \to Y$ 是概型之间的态射。则 *diagonal morhism* $\delta : X \to X \times_Y Y$ 是局部闭嵌入。

定义 2.5.2. 如果 *digonal morphism*$\delta_\pi : X \to X \times_Y Y$ 是闭嵌入，则称 $\pi : X \to Y$ 是 ***separated*** 的。一个 $A-$ 概型 X 是 ***separated over*** A, 如果态射 $X \to Spec(A)$ 是 *separated*。

命题 2.5.3. 态射 $\mathbb{P}^n_A \to SpecA$ 是 ***separated.***

命题 2.5.4. 若 U 和 V 是 $A-$ 概型 X 的开集，则 $\Delta \cap (U \times_A V) \cong U \cap V$.

定义 2.5.5. 域上的簇，或 $k-$ 簇，是一个可约的，可分的有限性、型的概型。一个簇 X 的子簇是一个可约的局部闭的 X 的子概型。

命题 2.5.6. 设 $X \to SpecA$ 是一个到仿射概型中的可分的态射，并且 U 和 V 是 X 的仿射开子集。则 $U \cap V$ 是 X 的仿射开子集。

定义 2.5.7. 如果 $\delta_\pi : X \to X \times_Y X$ 是拟紧的，则称 $\pi : X \to Y$ 是**拟可分**的。

命题 2.5.8. 可分性和拟可分性在 *base change* 下保持不变。

命题 2.5.9. 态射 $\pi : X \to Y$ 是可分的当且仅当对于任何 Y 开覆盖 $\{U_i\}$,$\pi^{-1}(U_i) \to U_i$ 是可分的。

命题 2.5.10. *affine morphism* 是可分的，特别的，*finite morphism* 是可分的。

命题 2.5.11. *(a)* 可分性在复合下封闭，具体地，如果 $\pi : X \to Y$ 和 $\rho : Y \to Z$ 是可分的，则 $\rho \circ \pi : X \to Z$ 是可分的。
(b) 拟可分在复合下封闭。

推论 2.5.12. 每个拟投射 $A-$ 概型是可分的。特别的，每个可约的拟投射 $k-$ 概型是 $k-$ 簇。

命题 2.5.13. 设 $\pi : X \to Y$ 和 $\pi' : X' \to Y'$ 是可分的 *(*或拟可分的*)*$S-$ 概型间的态射。则 $\pi \times \pi' : X \times_S X' \to Y \times_S Y's$ 是可分的 *(*或拟可分的*)*。

定义 2.5.14. 设 $\pi : X \to Y$ 是 $Z-$ 概型间的态射。定义 $\Gamma : X \to X \times_Z Y$,$\Gamma_\pi = (id, \pi)$, 称 Γ_π 为 ***graph morphism.***

命题 2.5.15. Γ 是局部闭的嵌入。如果 Y 是一个可分的 $Z-$ 概型，则 Γ 是闭嵌入。如果 Y 是一个拟可分的 $Z-$ 概型，则 Γ 是拟紧的。

定理 2.5.16. 设 P 是一类在基变换和复合下不变的态射。设 $\rho \circ \pi = \tau$. 设 $\delta_\rho : Y \times Y \times_Z Y$ 属于 P 且 $\tau : X \to Z$ 属于 P。则 $\pi : X \to Y$ 属于 P. 特别的：
(i) 设局部闭嵌入属于 P. 如果 τ 属于 P，则 π 属于 P.
(ii) 设闭嵌入属于 P。如果 τ 属于 P 且 ρ 是可分的，则 π 属于 P.
(iii) 设拟紧态射属于 P。如果 τ 属于 P 且 ρ 是拟可分的，则 π 属于 P.

2.6 Rational maps to separated schemes

定理 2.6.1. 若两个从可约概型到可分 $S-$ 概型 $S-$ 态射 $\pi : U \to Z, \pi' : U \to Z$ 在 U 的一个稠密子开集上相同，则它们完全相同。

定义 2.6.2. 如果 X 是可约的且 Y 是可分的，以如下方式定义有理函数 $\pi : X \to Y$ 的图像 Γ_π. 令 Γ_π 是 $\Gamma_{\pi'} \hookrightarrow U \times Y \hookrightarrow X \times Y$ 在概型理论下的闭包。

2.7 Proper morphisms

定义 2.7.1. $\pi : X \to Y$ 是 ***proper*** 的，如果它是可分的，有限型的且是 *universally closed*。如果 A 是一个换，则称一个 $A-$ 概型是 ***proper over*** A，如果它是 *proper over Spec* A.

命题 2.7.2. 有限态射是 *proper* 的。

命题 2.7.3. *(a) "proper morphism"* 在基变换下稳定
(b) $\pi : X \to Y$ 是 *proper* 的当且仅当对于任何仿射开覆盖 $U_i \to Y, \pi^{-1}(U_i) \to U_i$ 是 *proper* 的。
(c)"proper morphism" 在复合下封闭。
(d) 两个 *proper morphism* 的乘积也是 *proper* 的：如果 $\pi : X \to Y$ 和 $\pi' : X \to Y$ 是 *proper* 的，这里所有的态射都是 $Z-$ 概型的态射，则 $\pi \times \pi' : X \times_Z X' \to Y \times_Z Y'$ 是 *proper* 的。
(e) 若 $\rho \circ \pi = \tau$，且 τ 是 *proper* 的,ρ 是可分的，则 π 是 *proper* 的。

定理 2.7.4. 投射 $A-$ 概型在 A 上是 *proper* 的。

定义 2.7.5. 一个域 k 上的**阿贝尔簇**是一个 k 上投射的且是 *geometrically integral* 的代数群。

引理 2.7.6. 设 X, Y, Z 是簇，其中 X 是 *proper* 的且是 *geometrically integral*，有一个有理点 p，Y 是不可约的。令 $pr : X \times Y \to Y$ 是投射，令 $\alpha : X \times Y \to Z$ 是任何态射。设 $q \in Y$ 满足 α 在 $X \times \{q\}$ 上像相同，即 $\alpha(X \times \{q\}) = r \in Z$。
(a) 有一个态射 $\psi : Y \to Z$ 满足 $\alpha = \psi \circ pr$.
(b) 如果 α 在 $\{p\} \times Y$ 上像相同，则 α 把 $X \times Y$ 映到 Z 中的同一个元素。

推论 2.7.7. 设 A 是一个阿贝尔簇，G 是一个群簇，$\phi : A \to G$ 是簇之间的态射。那么 ϕ 是平移和同态的复合。

3 线丛和 Weil 除子

此节讨论的概型 X 均是诺特, 既约, 不可约, 在余维数 1 处正则.Weil 除子给我们一种很好的方式理解和分类线丛 (诺特正规概型上).

定义 3.0.1. 线丛为局部自由秩 1 层.

定义 3.0.2. Weil 除子定义为余维数为 1 的不可约闭集的形式 $\mathbb{Z}-$ 线性求和:

$$\sum_{Y \subset X codim=1} n_Y[Y].$$

显然 Weil 除子构成一个群记为 Weil$X$. 其中所有 n_Y 都是整数且只有有限多个不为 0.

定义 3.0.3. Y 是一个余维数为 1 的不可约闭集,s 是有理截面里面的一个元素且不在 Y 消失 *(vanish)*. 定义 $val_Y(s)$ 为 s 在 Y 对应的素理想的赋值下的赋值.

引理 3.0.4. A 是一个诺特整环, 则 $f \in A$,f 仅属于有限个高度为 1 的素理想.

定义 3.0.5. s 是 X 的一个有理截面里的元素且不在任何一个 X 的不可约分支消失 *(vanish)*. 定义 s 决定的 *Weil* 除子为

$$div(s) =: \sum_{Y \subset X codim=1} val_Y(s)[Y].$$

由引理 *3.0.4* 求和是有限的.

定义 3.0.6. 对于 Weil 除子 D_1, D_2, 定义 $D1 \geq D_2$ 为 D_1 每项系数都比 D_2 大.

定义 3.0.7. 对于 X 的 Weil 除子 D, 定义除子线丛 $\mathcal{O}_X(D)$,$\mathcal{O}_X(D)(U) := t \in K(X)^{\{}\times : div|_U t + D|_U \geq 0\} \cup \{0\}$.

命题 3.0.8. 对于任意线丛 $\mathcal{L}$,$s \in \mathcal{L}(U)$,

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(div(s)).$$

命题 3.0.9. 对于 Weil 除子 D,$\mathcal{O}_X(D)$ 是线丛.

定义 3.0.10. 称一个 Weil 除子 D 为主除子，当且仅当存在有理函数 f,$D = div(f)$. 称一个除子 D 局部主, 当存在 X 的一个开覆盖, 使得 $D|U$ 是主的.

定义 3.0.11. 定义 $\mathrm{Weil}X/\mathrm{Prin}X = \mathrm{Cl}X$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{LocPirn}X \arrow[r, hook] \arrow[d, "/PrinX"] & \mathrm{Weil}X \arrow[d, "/PrinX"] \\
PicX \arrow[r, Rightarrow] & \{\mathcal{L}\}/iso \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{LocPrin}X/\mathrm{Prin}X \arrow[r] & \mathrm{Cl}X
\end{tikzcd}$$

命题 3.0.12. 如果 A 是一个唯一分解整环, 那么 $\mathrm{ClSpec}A = \mathrm{PicSpec}A = 0$

命题 3.0.13. 如果概型 X 是分解的, 那么所有 $\mathrm{Weil}X = \mathrm{LocPirn}X$

命题 3.0.14. Z 是一个余一维的不可约闭集, 有

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Weil}X \to \mathrm{Weil}(X - Z) \to 0.$$

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}X \to \mathrm{Cl}(X - Z) \to 0.$$

命题 3.0.15. 应用上面的命题, 对于 $X = \mathbb{P}^n_k$, 取 $Z = V(x_0)$, 我们得到

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}\mathbb{P}^n_k \to 0.$$

而 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(n)$ 非平凡, 所以上映射也是单射. 故

$$\mathrm{Cl}\mathbb{P}^n_k \cong \mathrm{Pic}\mathbb{P}^n_k \cong \mathbb{Z}.$$

4 复代数几何简介

4.1 Hodge 理论基础及其应用

定义 4.1.1. 对 *Hermitian* 流形 (X, g), 我们定义 $d-$ 调和形式为 $\mathscr{H}^k(X, g) = \{\alpha \in \mathscr{A}^k : \Delta\alpha = 0\}$, 其余的 $\mathscr{H}^k_{\overline{\partial}}(X, g)$ 和 $\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X, g)$ 也是如此.

定理 4.1.2 (Hodge 分解定理)**.** 若 (X, g) 是紧 *Hermitian* 流形, 则有相互正交的分解:

$$\mathscr{A}^{p,q}(X) = \partial\mathscr{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathscr{H}^{p,q}_{\partial}(X, g) \oplus \partial^*\mathscr{A}^{p+1,q}(X),$$

$$\mathscr{A}^{p,q}(X) = \overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X, g) \oplus \overline{\partial}^*\mathscr{A}^{p+1,q}(X);$$

另外, 我们有

$$\ker\partial = \partial\mathscr{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathscr{H}^{p,q}_{\partial}(X, g), \ker\overline{\partial} = \overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X, g).$$

证明. 我们只用 Hodge 分解定理的主体部分来证明 $\ker\overline{\partial} = \overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)$, 另一个同理. 我们知道 $\overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g) \subset \ker\overline{\partial}$. 另一方面, 我们断言 $\overline{\partial}\overline{\partial}^*\beta = 0$ 当且仅当 $\overline{\partial}^*\beta = 0$, 事实上这是因为 $\overline{\partial}\overline{\partial}^*\beta = 0$ 蕴含 $0 = (\overline{\partial}\overline{\partial}^*\beta, \beta) = \|\overline{\partial}^*\beta\|^2$, 则 $\overline{\partial}^*\beta = 0$. 那么由 Hodge 分解定理, 如果 $\overline{\partial}^*\beta \in \ker\overline{\partial}$, 则得到 $\overline{\partial}^*\beta = 0$, 故得证. □

命题 4.1.3. *设 (X,g) 是紧 Hermitian 流形, 则典范投影 $\mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g) \to H^{p,q}(X)$ 是同构.*

证明. 取 $\alpha \in \mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)$, 则 $\overline{\partial}\alpha = 0$, 故典范投影为将其映射到 Dolbeault 上同调类 $[\alpha] \in H^{p,q}(X)$. 由 Hodge 分解定理我们知道 $\ker\overline{\partial} = \overline{\partial}\mathscr{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathscr{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,g)$, 则这个命题显然成立. □

Hodge 分解定理是 Hodge 理论在紧 Hermitian 流形上的主要结果之一, 但如果我们考虑紧 Kähler 流形, 则有一些非常美妙和重要的性质, 下面是一些重要结果.

命题 4.1.4. *设 (X,g) 是紧 Kähler 流形, 对于 $d-$ 闭形式 $\alpha \in \mathscr{A}^{p,q}(X)$, 则 α 是 $d-$ 正合的当且仅当是 $\partial-$ 正合的当且仅当是 $\overline{\partial}-$ 正合的当且仅当是 $\partial\overline{\partial}-$ 正合的.*

证明. 略. □

定理 4.1.5 (紧 Kähler 流形的 Hodge 分解)**.** *设 (X,g) 是紧 Kähler 流形, 则有分解*

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

并且这个分解不依赖于选取的 Kähler 结构.

证明. 由于 (X,g) 是紧 Kähler 流形, 那么有

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \mathscr{H}^k(X,g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{H}^{p,q}(X,g) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

若 X 上由另一个 Kähler 度量 g', 则显然 $\mathscr{H}^{p,q}(X,g) \cong H^{p,q}(X) \cong \mathscr{H}^{p,q}(X,g')$, 那取 $\alpha \in \mathscr{H}^{p,q}(X,g)$, 对应了 $\alpha' \in \mathscr{H}^{p,q}(X,g')$, 则我们只需证明其对应的 de Rham 上同调类 $[\alpha], [\alpha'] \in H^k(X,\mathbb{C})$ 是相同的. 由 $[\alpha] = [\alpha'] \in H^{p,q}(X)$, 则 $\alpha' = \alpha + \overline{\partial}\gamma$, 则有 $\overline{\partial}\gamma \in \ker d$, 那么用关于 d 的 Hodge 分解我们知道 $\overline{\partial}\gamma \in \mathrm{Im} d \oplus \mathscr{H}^k(X,g)_{\mathbb{C}}$, 而且注意到 $(\overline{\partial}\gamma, \theta) = (\gamma, \overline{\partial}^*\theta) = 0$, 则 $\overline{\partial}\gamma$ 和 $\mathscr{H}^k(X,g)_{\mathbb{C}}$ 正交, 故 $\overline{\partial}\gamma \in \mathrm{Im} d$, 则定理成立. □

定义 4.1.6. *设 (X,g) 是紧 Kähler 流形, 则其本原上同调定义为*

$$H^k(X,\mathbb{R})_p = \ker(\Lambda : H^k(X,\mathbb{R}) \to H^{k-2}(X,\mathbb{R})),$$

$$H^{p,q}(X)_p = \ker(\Lambda : H^{p,q}(X) \to H^{p-1,q-1}(X)).$$

定理 4.1.7 (Hard Lefschetz 定理)**.** *设 (X,g) 是 n 维紧 Kähler 流形, 则对 $k \le n$ 有*

$$L^{n-k} : H^k(X,\mathbb{R}) \cong H^{2n-k}(X,\mathbb{R}),$$

且

$$H^k(X,\mathbb{R}) = \bigoplus_{i\ge 0} L^i H^{k-2i}(X,\mathbb{R})_p.$$

当然这些分解和 (p,q) 型有关, 例如 $H^k(X,\mathbb{R})_p \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)_p$.

事实上 Hodge $*$ 算子也有 $*: H^{p,q}(X) \cong H^{n-q,n-p}(X)$, 我们不再赘述.

我们有一张很好的图来总结一些对偶, 我们用 Hodge 数 $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(X)$ 来完成这张基于紧 Kähler 流形上的图, 其中 Serre 对偶为 $H^{p,q}(X) \cong H^{n-p,n-q}(X)^*$, 而 Hodge $*$ 对偶为 $*: H^{p,q}(X) \cong H^{n-q,n-p}(X)$, 共轭作用为 $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{0,0} & & & \\ & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\ & & & \vdots & & & \\ h^{n,0} & & & \overset{\curvearrowleft}{\textbf{Serre}} & & & h^{0,n} \quad \updownarrow \textbf{Hodge} \\ & & & \vdots & & & \\ & & h^{n,n-1} & & h^{n-1,n} & & \\ & & & h^{n,n} & & & \\ & & & \leftrightarrow & & & \\ & & & \textbf{conjugation} & & & \end{array}$$

命题 4.1.8 (Hodge 指标定理)**.** *设 (X,g) 是紧 Kähler 曲面, 则相交对*

$$H^2(X,\mathbb{R}) \times H^2(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (\alpha,\beta) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

的指标是 $(2h^{2,0}+1, h^{1,1}-1)$.

证明. 注意到 $H^2(X,\mathbb{R}) = \big((H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)) \cap H^2(X,\mathbb{R})\big) \oplus H^{1,1}(X)$, 取 α 为 $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ 中元素, 注意到这里面全是本原上同调类, 设 $\alpha = \alpha^{2,0} + \alpha^{0,2}$, 则

$$\int_X \alpha^2 = 2\int_X \alpha^{2,0} \wedge \alpha^{0,2} = 2\int_X \alpha^{2,0} \wedge \overline{\alpha^{2,0}} > 0,$$

我们只需考虑 $H^{1,1}(X)$, 由 Lefschetz 分解我们得到

$$H^{1,1}(X) = H^{1,1}(X) \oplus LH^0(X) = H^{1,1}(X) \oplus [\omega]\mathbb{R},$$

由 Hodge $*$ 对偶和分解的正交性我们得到 $\int_X \omega \wedge \alpha = 0$. 而且显然 $\int_X \omega^2 > 0$, 由 Hodge-Riemann 我们得到 $\int_X \alpha^2 < 0$, 所以命题成立. □

4.2 消灭定理

4.2.1 Bochner 消灭定理——杀掉全纯截面

Bochner 的工作告诉我们, 对于一个复流形上的全纯向量丛, 给定 Hermitian 度量和 Chern 联络, 那么通过控制其平均曲率为半负定乃至负定, 可以使得向量丛的全纯截面都平行, 而且截面处的平均曲率为零, 乃至让向量丛的全纯截面消失.

设 $E \to M$ 为全纯向量丛, 考虑度量 h 和对应的 Chern 联络 D 和曲率 $R = D^2$. 考虑全纯局部标架场 $s_1, ..., s_r$ 及其对偶标架 $t_1, ..., t_r$, 对光滑截面 ξ 可以写为 $\xi = \sum_i \xi^i s_i$. 另外给定 M 上的局部坐标卡 $z^1, ..., z^n$.

由于 D 是 Chern 联络, 那么 $D\xi = D'\xi + \overline{\partial}\xi = \sum_i(\partial\xi^i + \sum_j \omega^i_j\xi^j + \overline{\partial}\xi^i)$. 那我们可以假设 $\partial\xi^i + \sum_j \omega^i_j\xi^j = \sum \nabla_\alpha\xi^i dz^\alpha$ 且 $\overline{\partial}\xi^i = \sum \nabla_{\bar{\beta}}\xi^i d\bar{z}^\beta$. 设 Ω^i_j 是曲率形式, 设 $\Omega^i_j = \sum R^i_{j\alpha\bar{\beta}} dx^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$.

接下来考虑 M 上的 Hermitian 度量 $g = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$, 如果假设 $K^i_j = \sum g^{\alpha\bar{\beta}} R^i_{j\alpha\bar{\beta}}$, $K_{j\bar{k}} = \sum h_{i\bar{k}} K^i_j$, 那么称 $K = (K^i_j), \widehat{K} = (K_{j\bar{k}})$ 分别为平均曲率变换和平均曲率形式, 他们分别的作用为 $K(\xi) = \sum K^i_j \xi^j s_i, \widehat{K}(\xi,\eta) = \sum K_{j\bar{k}}\xi^j\bar{\eta}^k$.

事实上我们不难计算得到下面命题

命题 4.2.1. *取全纯截面 ξ, 则有*

$$\frac{\partial^2 h(\xi,\xi)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} = \sum h_{i\bar{j}} \nabla_\alpha \xi^i \nabla_{\bar{\beta}} \bar{\xi}^j - \sum h_{i\bar{k}} R^i_{j\alpha\bar{\beta}} \xi^j \bar{\xi}^k.$$

通过两边取迹可以得到

命题 4.2.2 (Weitzenböck Formula)**.** *取全纯截面 ξ, 则有*

$$\sum g^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2 h(\xi,\xi)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} = \|D'\xi\|^2 - \widehat{K}(\xi,\xi),$$

其中 $\|D'\xi\|^2 = \sum h_{i\bar{j}} g^{\alpha\bar{\beta}} \nabla_\alpha\xi^i \nabla_{\bar{\beta}}\bar{\xi}^j$.

这时对这个式子用 Hopf 最大值原理我们就可以很容易的得到主要结论:

定理 4.2.3 (Bochner 消灭定理)**.** *对紧复流形 M 上的全纯向量丛 E, 如果 D 是其 Chern 联络且 $R, \widehat{K}$ 是其曲率和平均曲率形式.*

(i) 如果 $\widehat{K}$ 处处半负定, 则对其任意的全纯截面 ξ, 我们有

$$D\xi = 0, \widehat{K}(\xi,\xi) = 0;$$

(ii) 如果 $\widehat{K}$ 满足 (i) 条件, 且在某点严格负定, 那么 E 无非零全纯截面.

现在我们考虑一个重要的特例, 考虑紧 Kähler 流形. 因为 M 上的度量 g 可以诱导切丛和余切丛上的度量, 我们在 TM 上定义 Ricci 曲率为 $\mathrm{Ric} = \sum R_{k\bar{h}} dz^k \otimes d\bar{z}^h$, 其中 $R_{k\bar{h}} = \sum R^i_{ik\bar{h}}$, 由 Kähler 条件得知在 TM 上 $R_{i\bar{j}} = K_{i\bar{j}}$, 则 $\mathrm{Ric} = \widehat{K}$. 那么在 $(T^*M)^{\otimes p}$ 上用 Bochner 消灭定理可以得到著名结论:

推论 4.2.4. *设 $p > 0$, 若紧 Kähler 流形的 Ricci 曲率处处半正定, 那么 $(T^*M)^{\otimes p}$ 的所有全纯截面都平行. 如果更多的, 在某点严格正定, 则 $(T^*M)^{\otimes p}$ 无非零全纯截面.*

特别的, 如果 Ricci 曲率处处半正定, 那么 M 上所有 $(p,0)$-形式都平行 $(p > 0)$. 如果更多的, 在某点严格正定, 那么 $H^{p,0}(M) = 0, p > 0$.

注 4.2.5. *(i) 根据 Hodge Diamond, 容易知道 (只是共轭) $H^{p,0}(M) = H^{0,p}(M) = 0, p > 0$.*

(ii) 所以对于 Kähler-Einstein 流形 (满足 $\mathrm{Ric}(\omega) = \omega$), 有 $H^{p,0}(M) = 0, p > 0$.

4.2.2 Kodaira-Nakano 消灭定理

线丛的消灭定理最著名的结果莫过于这个定理.

定理 4.2.6 (Kodaira-Nakano 消灭定理)**.** *对紧 Kähler 流形 M, 如果 L 为全纯 Positive 线丛, 那么如果 $p+q>n$, 则*

$$H^q(M,\Omega_M^p\otimes L)=0.$$

(事实上紧复流形 M, 如果 L 为全纯 Positive 线丛, 那么 M 一定是 Kähler 的, 这个得益于 $c_1(L)$ 正定, 可以充当 Kähler 形式) 这个定理的证明主要得益于紧 Kähler 流形上的一系列算符的等式和不等式. 事实上在流形上任意全纯向量丛 E 我们熟知有 Kähler 等式 $[\Lambda,L]=(n-p-q)\mathrm{id}$ 和 $[\Lambda,\overline{\partial}]=-i\partial^*$. 另外事实上 Nakano 证明了 E 上面的 Chern 联络 D 满足 $[\Lambda,\overline{\partial}_E]=-i(D')^*=i(\bar{*}_{E^*}\circ D'_{E^*}\circ\bar{*}_E)$. 如果进而考虑 R 为其曲率, 那么对于任何调和形式 $\alpha\in\mathscr{H}^{p,q}(M,E)$ 都有 (经过一些分析和计算)$\frac{i}{2\pi}(R\Lambda(\alpha),\alpha)\le 0$ 且 $\frac{i}{2\pi}(\Lambda R(\alpha),\alpha)\ge 0$.

有了这些工具我们就可以来证明 Kodaira-Nakano 消灭定理. 选取度量使得 $\frac{i}{2\pi}R$ 为 M 的 Kähler 形式, 那么 L 就是 $\frac{i}{2\pi}R$, 那么任取 $\alpha\in\mathscr{H}^{p,q}(M,L)$ 有

$$0\le\frac{i}{2\pi}([\Lambda,R](\alpha),\alpha)=([\Lambda,R]\alpha,\alpha)=(n-p-q)\|\alpha\|^2,$$

那么如果 $p+q>n$, 那么 $\alpha=0$. 根据 Hodge 定理得到 $H^q(M,\Omega_M^p\otimes L)=0$.

事实上有更推广的结果如下, 我们不再赘述, 感兴趣者请看 [3].

定理 4.2.7 (Gigante-Girbau 消灭定理)**.** *设 L 是紧 Kähler 流形 X 上的全纯线丛, 如果 $c_1(L)$ 半负定, 而且 $\mathrm{rank}(c_1(L))\ge k$, 那么*

$$H^q(X,\Omega^p\otimes L)=0, p+q\le k-1.$$

作为 Kodaira-Nakano 消灭定理推论事实上还有著名的 Weak Lefschetz 定理:

定理 4.2.8 (Weak Lefschetz 定理)**.** *对 n 维紧 Kähler 流形 X, 设 $Y\subset X$ 为光滑超曲面使得 $\mathscr{O}(Y)$ positive, 则典范限制映射*

$$H^k(X,\mathbb{C})\to H^k(Y,\mathbb{C})$$

在 $k\le n-2$ 时为双射, 在 $k=n-1$ 时为单射.

这个最标准的证明就是先用 Hodge 分解定理将其转化为 $H^q(X,\Omega_X^p)\to H^q(Y,\Omega_Y^p)$ 的情况, 然后注意到 $\mathscr{O}_X(-Y)=\mathscr{I}_Y$ 和 $\mathscr{O}_Y(Y)=\mathscr{N}_{Y/X}$, 那么会有两个著名的正合列, 之后用 Serre 对偶和 Kodaira-Nakano 消灭定理得到某个上同调为零, 然后考虑之前 $\mathscr{O}_X(-Y)$ 诱导短正合列引出的长正合列, 就可以看到 $H^q(X,\Omega_X^p)\to H^q(Y,\Omega_X^p|_Y)$ 有定理描述的样子, 之后考虑自然映射 $H^q(Y,\Omega_X^p|_Y)\to H^q(Y,\Omega_Y^p)$, 这个事实上先考虑映射的 kernel 和 cokernel 为 $\Omega_Y^{p-1}(-Y)$ 的元素, 然后用 $\mathscr{O}_Y(Y)$ 诱导短正合列引出的长正合列, 之后操作和之前类似, 这样就证明了定理.

神奇的是, 这个定理有一个 Morse 理论的证明, 线丛 $\mathscr{O}(Y)$ 存在整体截面 s 满足诱导除子为 $z(s)=Y$, 这个很容易做到. 考虑线丛上的度量为 $\frac{i}{2\pi}R^{\mathscr{O}(Y)}=\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log|s|^{-2}$, 那么考虑 $\phi:X\to[-\infty,\infty)$ 为 $\phi(x)=\log|s|^2$, 注意到 $\phi^{-1}(-\infty)=Y$, 我们将其视作一个 Morse 函数, 可以发现 $\mathrm{Hess}\phi$ 的负特征值个数至少是 n, 这说明 x 增大时, 是从 Y 粘至少 n 维胞腔, 这就得到纯粹拓扑上的解释, 这样的也增进了对 positive 线丛的一点理解.

定理 4.2.9 (Serre 消灭定理)**.** *设 $L \to X$ 是紧 Kaähler 流形上的 positive 线丛, 那么对任意的全纯向量丛 E, 存在 m_0 使得当 $q > 0, m \geq m_0$ 时有*

$$H^q(X, E \otimes L^m) = 0.$$

赋予 E, L 两个 Hermitian 度量, 考虑其 Chern 联络为 ∇_E, ∇_L, 且 R_L 诱导 X 上的 Kähler 形式 ω. 注意到 $E \otimes L^m$ 对应的联络为 $\nabla = \nabla_E \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{L^m}$. 事实上会发现 $\frac{i}{2\pi} R_{L^m} = m\omega$, 那么 $\frac{i}{2\pi} R = \frac{i}{2\pi} R_E \otimes 1 + m(1 \otimes \omega)$. 和 Kodaira 消灭定理的证明一样, 我们任取调和形式 $\alpha \in \mathscr{H}^{p,q}(X, E \otimes L^m)$, 那么仍有 Kähler 形式的不等式 $\frac{i}{2\pi}([\Lambda, R](\alpha), \alpha) \geq 0$, 简单计算不难得到

$$\frac{i}{2\pi}([\Lambda, R](\alpha), \alpha) = \frac{i}{2\pi}([\Lambda, R_E](\alpha), \alpha) + m(n-p-q)\|\alpha\|^2 \leq (C + m(n-p-q))\|\alpha\|^2,$$

于是取 $m_0 > C$ 即可得到 $H^q(X, E \otimes L^m \otimes K_X) = 0, m \geq m_0$, 只需要替换 E 为 $E \otimes K_X^*$ 即可. 这就完成了证明, 事实上这个和 Kodaira 消灭定理证明类似, 都是强迫调和形式变成零, 然后用 Hodge 定理.

通过 Riemann Roch 定理和 Serre 消灭定理, 我们可以对 $\mathbb{P}^1$ 上的向量丛分类:

定理 4.2.10 (Grothendieck 引理)**.** *任何 $\mathbb{P}^1$ 上的全纯向量丛都同构于 $\bigoplus \mathscr{O}(a_i)$.*

4.2.3 从线丛移植到向量丛上的消灭定理

定理 4.2.11. *假设 E 是复流形 X 的全纯向量丛, 设 $\mathscr{P}(E) = (E \backslash \{0\})/\mathbb{C}^*$, 那么设 $p : \mathscr{P}(E) \to X$. 设 $L(E)$ 是 $\mathscr{P}(E)$ 上的重言线丛, 其在 $\xi \in \mathscr{P}(E)$ 的纤维为 $L(E)_\xi$ 是在 $E_{p(\xi)}$ 内被 ξ 表示的复直线. 那么有自然同构:*

$$H^q(X, \Omega_X^p(E^*)) = H^q(\mathscr{P}(E), \Omega_{\mathscr{P}(E)}^p(L(E)^*)).$$

证明细节见 [3], 我们略去. 我们现在可以把线丛的 Positive 那一套搬到一般的全纯向量丛上, 只需要考虑 $c_1(L(E))$ 的相关概念即可. 运用这个, 我们根据 Gigante-Girbau 消灭定理就得到

定理 4.2.12. *设 E 是紧 Kähler 流形 X 上的秩 r 全纯向量丛, 如果 E 是半负定且 $\mathrm{rank}(E) \geq k$, 那么*

$$H^q(X, \Omega^p(E)) = 0, p + q \leq k - r.$$

4.3 Riemannian-Roch 定理

我们这节最主要的是如下 Hirzebruch 用配边理论证明的经典 Riemannian-Roch 的推广, 可以参考 [2]. 我们考虑紧复流形 X 上的全纯向量丛 E, 定义其 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(X, E) = \sum_{j=0}^{\dim X} (-1)^j h^j(X, E)$.

定理 4.3.1 (Hirzebruch-Riemann-Roch 定理)**.** *对紧复流形 X 上的全纯向量丛 E, 则*

$$\chi(X,E)=\int_X \mathrm{ch}(E)\mathrm{td}(X),$$

其中 $\mathrm{ch}(E)$ 为 E 的 chern 特征标, 而 $\mathrm{td}(X)$ 是 X 的 todd 类.

这个著名的定理有相当多的应用, 其证明甚至启发了 Atiyah 证明 Atiyah-Singer 指标定理. 我们举一个例子来表明其威力:

例 4.3.2. *一个紧复曲面 X 我们称之为 $K3$ 曲面, 如果它满足 $K_X\cong\mathscr{O}_X$, 且 $h^1(X,\mathscr{O}_X)=0$. 我们现在要探究其 Betti 数和 Hodge 数. 首先要知道 Y.-T.Siu 在 1983 年 ([6]) 证明了所有 K3 曲面都是 Kähler 流形, 我们以这个为前提, 便于使用各种工具.*

事实上我们不难得到对于紧复曲面的 Hirzebruch-Riemann-Roch *定理 $\chi(X,\mathscr{O}_X)=\int_X\frac{c_1^2(X)+c_2(X)}{12}$. 计算形式 Chern roots 会得到对任何向量丛 $E\to X$, 都有 $c(\det E)=1+c_1(E)$. 另外, 对 n 维紧 Kähler 流形 X, 有 $e(X)=\int_X c_n(x)$, 其中 $e(X)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k b_k(X)$ 为 Euler 数 (Gauss-Bonnet).*

下面假设 X 是某个 K3 曲面, 那么我们有 $c_1(X)=-c_1(\Omega_X)=-c_1(K_X)=-c_1(\mathscr{O}_X)=0$, 接下来开始正题. 由连通性和 Poincaré 对偶我们知道 $b_0(X)=b_4(X)=1$ 且 $b_1(X)=b_3(X)$. 因为是 K3 曲面, 所以 $H^{0,1}(X)\cong H^1(X,\mathscr{O}_X)=0$, 从而 $h^{0,1}(X)=0$, 由共轭得到 $h^{1,0}(X)=0$. 用 Hodge 分解定理得知 $b_1(X)=b_3(X)=0$, 于是 $h^{2,1}(X)=h^{1,2}(X)=0$ 且 $h^{2,2}(X)=1$.

注意到 $H^0(X,\mathscr{O}_X)=\Gamma(X,\mathscr{O}_X)=\mathbb{C}$, 则由 Serre 对偶得到

$$H^2(X,\mathscr{O}_X)\cong H^0(X,K_X)^*=H^0(X,\mathscr{O}_X)^*=\mathbb{C},$$

于是 $\chi(X,\mathscr{O}_X)=2$. 由于 $\chi(X,\mathscr{O}_X)=\frac{1}{12}\int_X c_2(X)$, 于是 $\int_X c_2(X)=24$, 从而由 Gauss-Bonnet 得到 $e(X)=24$. 由于 $e(X)=2+b_2(X)$, 我们得到 $b_2(X)=22$. 之前有 $H^{0,2}(X)\cong H^2(X,\mathscr{O}_X)=\mathbb{C}$, 我们有 $h^{2,0}(X)=h^{0,2}(X)=1$, 故 $h^{1,1}(X)=20$, 这样我们得到结论.

其有两个方向的推广, 都是极为著名的结果:

定理 4.3.3 (Grothendieck-Riemann-Roch 定理)**.** *设 $f:X\to Y$ 是光滑射影簇之间的光滑射影映射, 则对于 X 上任意凝聚层 $\mathscr{F}$ 在 Chow 群 $\mathrm{CH}(Y)_{\mathbb{Q}}$(或者说 $H^*(Y,\mathbb{R})$) 内有*

$$\mathrm{ch}\left(\sum(-1)^iR^if_*\mathscr{F}\right)\mathrm{td}(Y)=f_*(\mathrm{ch}(\mathscr{F})\mathrm{td}(X)).$$

我们考虑 $f:X\to\{point\}$, 则 $f_*=\int_X$ 且 $R^if_*\mathscr{F}=H^i(X,\mathscr{F})$, 由于 $\mathrm{td}(point)=1$ 且 $\mathrm{ch}(E_{point})=\dim E_{point}$, 这就得到 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理.

定理 4.3.4 (Atiyah-Singer 指标定理)**.** *设 M 是紧可定向微分流形, E,F 是上面的两个向量丛, 考虑 $D:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是椭圆微分算子. 设解析指标 $\mathrm{index}(D)=\dim\ker D-\dim\mathrm{coker}D$ 和拓扑指标 $\gamma(D)$, 则*

$$\mathrm{index}(D)=\gamma(D).$$

在此处考虑算子 $\Delta_{\overline{\partial}_E}$ 即可得到 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理.

4.4 Kodaira 嵌入定理

首先, 我们事实上熟知在复流形 X 上的全纯线丛 L, 假设 $s_0,...,s_N$ 是 $H^0(X,L)$ 的生成元, 那么有自然的全纯映射 $\phi_L : X\backslash \mathrm{Bs}(L) \to \mathbb{P}^N$ 为 $x \mapsto (s_0(x):\cdots,s_N(x))$, 且 $\phi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \cong L|_{X\backslash \mathrm{Bs}(L)}$. 我们的想法就是用这个来将流形嵌入射影空间.

如果存在自然数 k 使得 $\phi_{L^k} : X \to \mathbb{P}^N$ 是嵌入, 那我们称 L 是丰沛的, 如果 $k=1$, 则 L 是极丰沛的. Kodaira 告诉我们, 事实上有如下结论:

定理 4.4.1 (Kodaira 嵌入定理)**.** *考虑紧 Kähler 流形上的全纯线丛 L, 那么 L 是 Positive 的当且仅当 L 是丰沛的. 所以在此情况下, 我们得到 X 是射影流形.*

这个证明的关键是分析映射 ϕ_L 何时是嵌入. 首先 $\mathrm{Bs}(L)=\emptyset$ 保证 ϕ_L 是个映射, 其次需要 ϕ_L 是单射, 然后保证 ϕ_L 是闭嵌入. 证明细节可以参考 [1] 或者 [4], 我们不在这里赘述 (事实上首先是用正合列等价表示 ϕ_L 的闭嵌入, 然后考虑用 Blow-up 手段和 Blow-up 前后的上同调关系).

推论 4.4.2. *对于紧 Kähler 流形 X, 其是射影流形当且仅当 Hodge 类 $\mathcal{K}_X \cap H^2(X,\mathbb{Z}) \neq \emptyset$.*

证明. 这个事实上是 Lefschetz (1,1) 定理的直接推论, 这个定理告诉我们 $\mathrm{Pic}(X) \to H^{1,1}(X,\mathbb{Z})$ 是满的, 那么如果 $\mathcal{K}_X \cap H^2(X,\mathbb{Z}) \neq \emptyset$, 就有线丛 L 使得 $c_1(L)$ 正定, 根据 Kodaira 嵌入定理就完成了证明. □

接下来考虑一个比较在意的问题, 就是典范的映射 $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ 何时是满射?

推论 4.4.3. *如果紧复流形 X 是射影流形, 那么映射 $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ 是满的.*

证明. 考虑 L 是 Positive 线丛, 那么根据 Serre 消灭定理得到对任何 $M \in \mathrm{Pic}(X)$ 和 $k \gg 0$ 都有 $\chi(X, M\otimes L^k) = h^0(X, M\otimes L^k)$. 注意到

$$\mathrm{ch}(M\otimes L^k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_1^j(M\otimes L^k)}{j!} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(c_1(M)+kc_1(L))^j}{j!},$$

根据 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理就有 $\chi(X,M\otimes L^k) = \frac{1}{n!}\int_X c_1(L)^n k^n + \cdots$, 故其为最高次 n 次的系数为 $\frac{1}{n!}\int_X c_1(L)^n$ 的 k 的多项式. 事实上由于 L 是 Positive 线丛, 那么 $\frac{1}{n!}\int_X c_1(L)^n > 0$, 故 $H^0(X, M\otimes L^k) \neq 0$(特别的 $H^0(X,L^k)\neq 0$, 这个是证明的核心).

接下来就是熟悉的东西, 熟知存在非零截面 $s_1 \in H^0(X, M\otimes L^k)$ 和 $s_2 \in H^0(X, L^k)$ 使得 $\mathscr{O}(Z(s_1)) \cong M\otimes L^k, \mathscr{O}(Z(s_2)) \cong L^k$, 于是 $M \cong \mathscr{O}(Z(s_1)-Z(s_2))$, 所以是满的. □

5 总结与后记

这一年的科创让我们学到了很多东西, 也在学习过程中逐渐有了自己喜欢的大体方向, 从而有目的性的向后学习, 所以科创活动受益匪浅.

参考文献

[1] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry, An Introduction*; Springer: Berlin Heidelberg, 2004; 231-253.

[2] F.Hirzebruch. *Topological Methods in Algebraic Geometry*; Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 1978; 148-158.

[3] Shoshichi Kobayashi. *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*; Princeton University Press: Japan, 1987; 48-78.

[4] Phillip Griffiths; Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*; A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION: New York, 1994; 158.

[5] Weiping Zhang. *Lectures On Chern-Weil Theory and Witten Deformations*; World Scientific: Singapore, 2001; 6-16.

[6] Y.-T.Siu. *Every K3 surface is Kähler*; Invent. math. 73, 1983; 135-150.

[7] Ravi Vakil. *THE RISING SEA-Foundations of Algebraic Geometry*; http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf, 2017.

[8] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*; Springer: New York, 1977; 61-78.

[9] Ulrich Görtz; Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I: Schemes, Second Edition*; Springer: Germany, 2020; 42-90.