导出范畴和代数几何一瞥

刘晓龙

2022 年 8 月 31 日

摘要

本文主要简述了导出范畴在代数几何中的比较浅显的应用, 这也体现了从概形的导出范畴内挖掘几何性质的可行之处. 这个方向也是代数几何里比较活跃的方向之一.

目录

1 简介

我们主要聚焦的范畴是一个概形的凝聚层范畴的导出范畴, 以此发展各种工具来研究上面的几何性质, 本文主要的工具是 Serre 函子, Fourier-Mukai 变换等等.

我们首先阐述了三角范畴和导出范畴的基本内容, 这作为我们的基本语言和时间场所. 然后探究了代数几何对象的导出范畴, 并发掘出来各种很好的性质, 最后引出了 Fourier-Mukai 变换, 并给出了几个有意思的小应用.

为了节约篇幅, 我们证明只说基本思路, 隐藏的技术细节会略讲一下. 更多的细节请参见如 [2, Bl2002],[7, Huy2006],[16, St].

2 三角范畴和导出范畴基础

为了方便, 我们这里只罗列基本的定义和性质. 关于导出范畴的详细讨论可以参见 [8, Illusie] 的第一章, 另外关于这个笔记我写了比较详细的勘误和注记 [12, Lxl2022].

2.1 三角范畴

首先考虑加性范畴 D, 定义平移函子 $T : D \to D$ 是加性的自同构, 一般对 $L \in D$, 我们记 $TL = L[1]$. 我们称 D 内的的一个三角为如下图像

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "+1"'] \\ L \arrow[r, "u"'] & M \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

简记为 $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{+1} L[1]$ 或者 $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to$.

对于两个三角 $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{+1} L[1]$ 和 $L' \xrightarrow{u'} M' \xrightarrow{v'} N' \xrightarrow{+1} L'[1]$, 二者之间的映射为 (f, g, h) 满足:

$$\begin{array}{ccccccc}
L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L[1] \\
\downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\
L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L'[1]
\end{array}$$

交换.

定义 2.1. *一个三角范畴是一个加性范畴 D 和一个平移函子 $T : D \to D$, 以及一个三角构成的集合 T(称为好三角), 满足如下公理:*

- *(TR1) 如果 $\Delta \in T$ 且 $\Delta \cong \Delta'$, 则 $\Delta' \in T$; 且任何形如 $(A \xrightarrow{1_A} A \to 0 \to A[1]) \in T$;*
- *(TR2) 任给 $X \xrightarrow{f} Y$ 均可补全为好三角*
$$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1];$$
- *(TR3)(旋转) 三角 $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]) \in T$ 当且仅当 $(Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]) \in T$;*
- *(TR4) 给定如下好三角的映射 f, g,*
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$
存在 h 使得图交换;
- *(TR5)(八面体公理) 给定好三角*
$$X \xrightarrow{u} Y \to Z' \to, Y \xrightarrow{v} Z \to X' \to, X \xrightarrow{vu} Z \to Y' \to,$$
存在态射 $Z' \xrightarrow{f} Y'$ 和 $Y' \xrightarrow{g} X'$ 使得
$$(Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{j[1]i} Z'[1]) \in T$$

且在下图

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y' \arrow[dll, near end] \arrow[drr, "g"] & & \\
Z' \arrow[urr, "f"] \arrow[d, "+1"'] & & & & X' \arrow[llll, "{j[1]i}"] \arrow[dll, "i"] \\
X \arrow[rrrr, "vu"] \arrow[drr, "u"'] & & & & Z \arrow[u] \arrow[uull] \\
 & & Y \arrow[urr, "v"'] \arrow[uull, "j"] & &
\end{tikzcd}
$$

使得 (id_X, v, f) 是态射 $XYZ' \to XZY'$ 且 (u, id_Z, g) 是态射 $XZY' \to YZX'$.

命题 2.2. 考虑三角范畴 D, 和其中的好三角 $X \to Y \to Z \to$, 对于任意 $L \in D$, 有正合列

$$\mathrm{Hom}(L, X) \to \mathrm{Hom}(L, Y) \to \mathrm{Hom}(L, Z),$$

另一个类似.

定义 2.3. 对于加性函子 $F : D \to D'$, 其中 D, D' 都为三角范畴, 如果 F 满足

(i) 和转移函子交换;*(ii)* 将好三角映到好三角.

命题 2.4. 设 $u : L \to M$ 是态射, 则 u 是同构当且仅当其补全的好三角 $L \to M \to N \to$ 满足 $N \simeq 0$.

2.2 复形范畴和同伦范畴

对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 考虑其复形范畴 $C(\mathcal{A})$.

定义 2.5. 定义同伦范畴 $K(\mathcal{A})$ 为: 对象与 $C(\mathcal{A})$ 一样, 态射满足

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(L, M) = \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(L, M)/(\textit{Homotopy equivalence}).$$

命题 2.6. 考虑复形交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] & M \arrow[r] \arrow[dr, "i"'] & N \arrow[r] & 0 \\
 & & & \mathrm{cone}(u) \arrow[u, "\phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

其中第一行是正合列, 且 i 是自然嵌入, $\mathrm{cone}(u)$ 是 u 的映射锥, $\phi=(0,u)$. 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
H^i(\mathrm{cone}(u)) \arrow[r, "H^i(-pr)"] \arrow[d, "H^i(\phi)"] & H^{i+1}(L) \arrow[d, "="] \\
H^i(N) \arrow[r, "\delta"'] & H^{i+1}(L)
\end{tikzcd}$$

其中 $pr:\mathrm{cone}(u)\to L[1]$ 是自然投影. 其中 ϕ 是拟同构.

定理 2.7. *对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 考虑其同伦范畴 $K(\mathcal{A})$. 考虑平移函子为自然的平移函子, 考虑三角 Δ 是好三角当且仅当 Δ 同构于*

$$L\xrightarrow{u}M\xrightarrow{i}\mathrm{cone}(u)\xrightarrow{-pr}L[1],$$

故使得 $K(\mathcal{A})$ 成为三角范畴.

命题 2.8. 对于 $K(\mathcal{A})$ 内的好三角 $L\xrightarrow{u}M\xrightarrow{v}N\xrightarrow{w}L[1]$, 我们有长正合列

$$\cdots\longrightarrow H^i(L)\xrightarrow{H^i(u)}H^i(M)\xrightarrow{H^i(v)}H^i(N)\xrightarrow{H^i(w)}H^{i+1}(L)\longrightarrow\cdots$$

2.3 导出范畴

有关范畴局部化的内容我不再赘述, 有关内容可以看 [8, Illusie].

定义 2.9. *对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 定义其导出范畴为 $D(\mathcal{A}):=K(\mathcal{A})(QIS^{-1})$, 其中 QIS 是指拟同构.*

注 2.10. *(i)* 事实上

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X,Y) &= \varinjlim_{(t:Y\to Y')\in QIS}\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X,Y') \\
&= \varinjlim_{(s:X'\to X)\in QIS}\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X',Y) \\
&= \varinjlim_{(s:X'\to X),(t:Y\to Y')\in QIS}\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X',Y'),
\end{aligned}$$

这使得 $D(\mathcal{A})$ 是加性函子, 考虑自然映射 $q:K(\mathcal{A})\to D(\mathcal{A})$, 则我们考虑 $D(\mathcal{A})$ 内的好三角是 $K(\mathcal{A})$ 内的好三角在 q 下的像, 这使得 $D(\mathcal{A})$ 为三角范畴;

(ii) 考虑

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^+(\mathcal{A}) &= \{L \in D(\mathcal{A}) : H^i L = 0, i \ll 0\};\\
\mathrm{D}^-(\mathcal{A}) &= \{L \in D(\mathcal{A}) : H^i L = 0, i \gg 0\};\\
\mathrm{D}^b(\mathcal{A}) &= \{L \in D(\mathcal{A}) : H^i L = 0, |i| \gg 0\},
\end{aligned}$$

事实上我们可以证明, 对 $* = +, -, b$, 有 $K^*(\mathcal{A})(QIS) \cong \mathrm{D}^*(\mathcal{A})$.

2.4 导出函子

我们这里只讨论右导出函子, 而左导出函子是类似的. 我们考虑的都是 Abel 范畴.

定义 2.11. *考虑加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 其右导出函子是三角函子 $RF : \mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}^+(\mathcal{B})$ 和自然变换 $\varepsilon : q \circ F \to RF \circ q$ 满足以下泛性质: 任给三角函子 $G : \mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}^+(\mathcal{B})$ 和自然变换 $\eta : q \circ F \to G \circ q$, 存在唯一的 $\alpha : RF \to G$ 使得 $\eta = \alpha \circ \varepsilon$, 如图:*

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "F"'] & D^+(\mathcal{A}) \arrow[d, shift right, "G"'] \arrow[d, shift left, "RF"] \\
K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "q"'] & D^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

注 2.12. 事实上左导出函子 $LF : \mathrm{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}^-(\mathcal{B})$ 定义就是把泛性质图像反过来.

定理 2.13. *对于加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 考虑满子范畴 $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ 满足*

(i) 对任何 $E \in \mathcal{A}$, 存在 $E' \in \mathcal{A}'$ 和单态射 $E \hookrightarrow E'$;

(ii) 对正合列 $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$, 如果 $E', E \in \mathcal{A}$, 则 $E'' \in \mathcal{A}$ 且 $0 \to FE' \to FE \to FE'' \to 0$ 也正合.

则

(A) 对任意 $L \in \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ 都有拟同构 $L \to L'$, 其中 $L' \in K^+(\mathcal{A}')$; 且有三角范畴的等价

$$\psi : K^+(\mathcal{A}')(QIS^{-1}) \to \mathrm{D}^+(\mathcal{A});$$

(B) 存在右导出范畴 $RF : \mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}^+(\mathcal{B})$, 且对任意的 $L \in \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$, 如果 $L' \in K^+(\mathcal{A})$ 使得 $L \to L'$ 是拟同构, 则

$$F(L') \cong RF(L).$$

注 2.14. *(i)* 事实上此处 RF 的构造主要考虑下图:

$$\begin{tikzcd} K^+(\mathcal{A}') \arrow[r] \arrow[d, "F"] & K^+(\mathcal{A}')(QIS^{-1}) \arrow[r, shift left, leftarrow, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[d, "F'"'] & D^+(\mathcal{A}) \arrow[dl, "RF"] \\ K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "q"] & D^+(\mathcal{B}) & \end{tikzcd}$$

然后假设 $RF = F \circ \phi$;

(ii) 事实上满子范畴可这样构造: 考虑全是 F-*acyclic* 的元素, 可证明它满足条件;

(iii) 左导出函子 $LF : \mathrm{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}^-(\mathcal{B})$ 也有反过来的此定理;

(iv) 一般记 $R^iF = H^i \circ RF$, 这就是经典导出函子理论的记号;

(v) 我们没有假设 F 有什么正合性!

我们还有如下重要的结论:

命题 2.15. 条件同定理, 则

(a) 对于 $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ 内的好三角 $L' \to L \to L'' \to$, 我们有长正合列:

$$\cdots \to R^iFL' \to R^iFL \to R^iFL'' \to R^{i+1}FL' \to \cdots ;$$

(b) 映射 $FL \to R^0FL$ 是同构当且仅当 F 左正合.

3 概形的导出范畴

3.1 概形的导出范畴

关于一系列典范函子 $(\Gamma, f^*, f_*, \mathrm{Hom}, \mathscr{H}om, \otimes)$ 及其导出 $(R\Gamma, Lf^*, Rf_*, R\,\mathrm{Hom}$ 和 $R\mathscr{H}om, \otimes^{\mathbf{L}}, \mathrm{Ext}, \mathscr{E}xt, \mathrm{Tor}, \mathscr{T}or)$ 我们就不再赘述, 我们推荐 [8, Illusie] 和 [7, Huy2006] 的相关介绍. 对于一个概形 X, 我们简写为 $\mathrm{D}^b(X) := \mathrm{D}^b(\mathbf{Coh}(X))$ 为凝聚层的有界导出范畴.

事实上根据 [6, Har1977] 的习题 III.3.6(a) 我们知道对诺特概形, 范畴 $\mathbf{Qcoh}(X)$ 是足够内射的 (这样的内射对象根据 (b), 是松弛的, 所以我们可以做层上同调), 更进一步, 根据 [5, Har1966] 的 II.7.18, 此时 $\mathbf{Qcoh}(X)$ 里的内射对象作为 $\mathscr{O}_X$-模也是内射的! 这样应用范畴论的一些知识, 我们可以得到

命题 3.1. 对任意诺特概形 X 和 $* = b, +$, 我们有

$$\mathrm{D}^*(\mathbf{Qcoh}(X)) \cong \mathrm{D}^*_{qcoh}(\mathbf{Mod}(X)),$$

其中后者为上同调群为拟凝聚的范畴.

但是对于 $\mathbf{Coh}(X)$ 在里面取内射消解就几乎不可能, 所以也没有上述结论, 但有

命题 3.2. 对任意诺特概形 X, 我们有

$$\mathrm{D}^b(X) \to \mathrm{D}^b(\mathbf{Qcoh}(X))$$

给出从 $\mathrm{D}^b(X)$ 到 $\mathrm{D}^b_{coh}(\mathbf{Qcoh}(X))$ 的等价, 其中后者为上同调群为凝聚的范畴.

3.2 Grothendieck 对偶

接下来介绍著名的 Grothendieck 对偶, 这个定理我们比较特殊的情况, 并且不给出证明. 对于这一定理的外蕴证明, 我们推荐 [8, Illusie] 的小节 III.5. 关于内蕴且紧合 (Proper) 的情况, 根据 [15, Nee2018] 得知, 关于这个定理有两种经典的方法, 一种是 Robin Hartshorne 和 A. Grothendieck 通讯成书 [5, Har1966] 中的证明, 此书笔误和未验证的东西很多, 有 Brian Conrad 重新的补充 [3, Conrad2000]; 另一个是书 [5, Har1966] 中 Pierre Deligne 写的附录和 Jean-Louis Verdier 的 [17, Verdier69], 这些也有 Lipman 的现代总结 [11, Lipman09]. 按照 Neeman 所说, 这两种方法都不令人满意, 第一种方法是一个噩梦, 第二个方法无法计算. 当然关于这一方面更进一步的就是 Amnon Neeman 的著名工作 [14, Nee1996]. 接下来考虑所有概形都是局部诺特概形.

定义 3.3. *(a)* 考虑闭浸入 $i : X \to Y$, 定义

$$\begin{aligned} i^! : \mathrm{D}^+(Y) &\longrightarrow \mathrm{D}^+(X) \\ \mathcal{F} &\longmapsto R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})|_X \end{aligned}$$

(b) 对于相对维数是 d 的光滑态射 $f : X \to Y$, 定义

$$\begin{aligned} f^! : \mathrm{D}^+(Y) &\longrightarrow \mathrm{D}^+(X) \\ \mathcal{F} &\longmapsto f^*\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{L}} \omega_{X/Y}[d] \end{aligned}$$

(c) 对于交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

其中 g 是光滑态射且 i 是闭浸入, 则 $f^! := i^! g^!$ 和概形 Z 选取无关 (见 [8]).

注 3.4. 我们常常考虑 $f : X \to Y$ 是域上的相对维数是 $\dim f = \dim X - \dim Y$ 的光滑态射, 此时常常定义 $\omega_f := \omega_X \otimes f^*\omega_Y^*$, 则有 $f^!(\mathcal{E}) = f^*(\mathcal{E}) \otimes \omega_f[\dim f]$.

定理 3.5 (Grothendieck 对偶)**.** 考虑射影态射 $f : X \to Y$, 对于 $\mathcal{L} \in \mathrm{D}^-(X)$ 和 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^+(Y)$, 存在同构

$$\Theta_f : Rf_*R\mathcal{H}om(\mathcal{L}, f^!\mathcal{M}) \to R\mathcal{H}om(Rf_*\mathcal{L}, \mathcal{M}).$$

注 3.6. 之前谈到对于紧合态射有 *Grothendieck* 对偶, 事实上根据著名的 *Nagata* 紧化 (证明见 *Brian Conrad* 的笔记 [4, Conrad2007]), 对于 $f : X \to S$ 是分离有限型态射且 S 是拟紧拟分离概形 (*qcqs*), 那么存在 S-概形 $\overline{X}$ 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[dl, "g"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

其中 i 是概形稠密的开浸入 (于是光滑) 且 g 是紧合态射. 那么对于这样的分离有限型态射就也可以定义 $f^!$, 并且探究对偶性质, 相关内容见 [16] 的 *St 0DWE*.

接下来我们考虑特殊的情况, 如果 $f : X \to \operatorname{Spec} k$ 是光滑射影态射, 那么对于 $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{D}^b(X)$, 则

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{E} \otimes \omega_X[\dim X]) \\
&\cong H^0(R\operatorname{Hom}(R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \omega_X[\dim X]) \\
&\cong H^0(R\operatorname{Hom}(R\Gamma(R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})), k)) \\
&\cong H^0(R\operatorname{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})^*) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(\mathcal{E}, \mathcal{F})^*.
\end{aligned}$$

设 $\dim X = n$, 那么还可以写成

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \operatorname{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}, \mathcal{E} \otimes \omega_X)^*.$$

这就是光滑情况下的 Serre 对偶.

假设 $f : X \to Y$, 考虑 $K_X = f^!\mathcal{O}_Y$ 称为对偶复形, 那假设 X/k 是 Cohn-Macaulay 且等维数 n 的情况下, 可以通过计算深度得到投射维数, 从而得到 $K_X \in \mathrm{D}^{[-n,-n]}(X)$ 且 $K_X = \omega_X^\circ[n]$, 其中 $\omega_X^\circ = \mathcal{E}xt_{\mathbb{P}^N}^{N-n}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N})$ 且 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. 从而立刻得到 $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F})^*$, 这就是书 [6, Har1977] 中的 III.7.6 的 Serre 对偶, 也可参见 [8, Illusie] 中 III.5.19 到 III.5.21 的现代证明.

4 概形和代数簇的导出范畴里的几何信息

4.1 一些基本结论

对于 $F \in \mathrm{D}^b(X)$, 我们定义 $\mathrm{supp}(F) = \bigcup_i \mathrm{supp}(\mathscr{H}^i(F))$.

引理 4.1. *设 $F \in \mathrm{D}^b(X)$, 且 $\mathrm{supp}(F) = Z_1 \sqcup Z_2$ 为不交的闭集, 则有分解 $F \simeq F_1 \oplus F_2$, 且 $\mathrm{supp}(F_i) \subset Z_i$.*

证明. 对复形的长度用归纳法, 长度为 1 是平凡的. 假设 F 长度不小于 2. 设 m 是使得 $0 \neq \mathscr{H}^m(F) := \mathscr{H}$ 最小的数, 则 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ 且 $\mathrm{supp}(\mathscr{H}_i) \subset Z_i$.

考虑典范嵌入 $\mathscr{H}[-m] \to F$ 补全为好三角 $\mathscr{H}[-m] \to F \to G \to \mathscr{H}[1-m]$. 长正合列得到 $\mathscr{H}^q(G) = \mathscr{H}^q(F)$ 对于 $q > m$ 且 $\mathscr{H}^q(G) = 0$ 对于 $q \leq m$. 根据归纳假设我们得到 $G \simeq G_1 \oplus G_2$, 且 $\mathrm{supp}(G_i) \subset Z_i$. 根据谱序列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Hom}(\mathscr{H}^{-q}(G_1), \mathscr{H}_2[p]) \Rightarrow \mathrm{Hom}(G_1, \mathscr{H}_2[p+q])$$

和 $\mathscr{H}^{-q}(G_1), \mathscr{H}_2[p]$ 在不相交的支集里面, 故 $\mathrm{Hom}(G_1, \mathscr{H}_2[1-m]) = 0$. 类似的我们有 $\mathrm{Hom}(G_2, \mathscr{H}_1[1-m]) = 0$.

根据这些我们就得到 $F \simeq F_1 \oplus F_2$, 其中 F_i 为拓展的好三角 $F_i \to G_i \to \mathscr{H}_i[1-m] \to$, 于是 $\mathrm{supp}(F_i) \subset Z_i$. □

定义 4.2. *对三角范畴 D, 我们称 D 可以被分解成两个三角子范畴 D_1, D_2, 如果*

(i) 子范畴 D_1, D_2 都有不同构于 0 的对象;

(ii) 对于任何 $A \in D$, 都有好三角 $B_1 \to A \to B_2 \to$, 其中 $B_i \in D_i$;

(iii) 对任意的 $B_i \in D_i$, 都有 $\mathrm{Hom}(B_1, B_2) = \mathrm{Hom}(B_2, B_1) = 0$.

下面这个定理告诉我们, 导出范畴的可分解性相当于概形的连通性, 这就是我们第一次从导出范畴里找出来几何信息.

定理 4.3. *假设 X 是诺特概形, 则 $\mathrm{D}^b(X)$ 不可被分解当且仅当 X 连通.*

证明. 如果 $X = X_1 \sqcup X_2$ 不连通, 则假设 $D_i = \mathrm{D}^b(X_i)$, 根据引理我们知道 $\mathrm{D}^b(X)$ 可被分解. 现在假设 X 连通, 且 $\mathrm{D}^b(X)$ 可以被分解成两个三角子范畴 D_1, D_2.

考虑 $\mathscr{O}_X[0] \in \mathrm{D}^b(X)$, 则 $\mathscr{O}_X[0] = F_1 \oplus F_2$, 其中 $F_i \in D_i$. 不妨假设 $F_i = F_i[0]$ 就是凝聚层, 故 $F_i \cong \mathscr{I}_{X_i}$, 其中 X_i 为闭子概形. 故 $\mathscr{O}_X = \mathscr{I}_{X_1} + \mathscr{I}_{X_2} \subset \mathscr{I}_{X_1 \cap X_2}$ 且 $\mathscr{I}_{X_1 \cup X_2} \subset \mathscr{I}_{X_1} \cap \mathscr{I}_{X_2} = 0$. 故我们得到 $X = X_1 \sqcup X_2$. 但 X 连通, 那么不妨设 $\mathscr{O}_X \subset D_1$.

考虑闭点 $x \in X$(存在因为诺特假设), 则 $\kappa(x)$ 必然是平凡分解. 因为有非平凡映射 $\mathscr{O}_X \twoheadrightarrow \kappa(x)$, 故 $\kappa(x) \in D_1$. 假设存在非平凡 $F \in D_2$, 设 m 是使得 $\mathscr{H}^m := \mathscr{H}^m(F) \neq 0$

的最大数 (有限因为诺特概形), 取闭点 $x \in \mathrm{supp}(\mathscr{H}^m)$, 我们有 $\mathscr{H}^m \twoheadrightarrow \kappa(x)$. 考虑拟同构 $\tau_{\leq m}F \to F$. 取其在导出范畴里的逆复合 $\tau_{\leq m}F \to \mathscr{H}^m[-m] \to \kappa(x)[-m]$, 从而得到非平凡的 $F \to \kappa(x)[-m]$, 这和分解矛盾! □

接下来我们转而看域 k 上的光滑射影簇的导出范畴! 下面的定理告诉我们事实上导出范畴同构可以得到射影簇维数的相等, 这个结论我们也可以用 Fourier-Mukai 变换来证明. 很自然的想法是导出范畴同构怎么样能得到射影簇同构, 一个经典的结果是 Bondal-Orlov 的结果, 这在下一小节讨论.

事实上这个结论严重依赖于 Serre 对偶的成立, 事实上我们在一般范畴上也可以定义类似的东西, 称为 Serre 函子, 也就是 k-线性函子 $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 满足同构 $\mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(B, S(A))^*$. 不难用纯范畴论证明对于任何的 k-线性范畴等价都和各自的 Serre 函子交换!

现在我们重新来看 Serre 对偶, 其对应的 Serre 函子就是复合

$$\mathrm{D}^*(X) \xrightarrow{\omega_X \otimes -} \mathrm{D}^*(X) \xrightarrow{[\dim(X)]} \mathrm{D}^*(X),$$

其中 $* = b, +, -$.

定理 4.4. *假设 X, Y 是域 k 上的光滑射影簇, 如果我们有正合等价 $\mathrm{D}^b(X) \cong \mathrm{D}^b(Y)$, 则 $\dim(X) = \dim(Y)$. 且典范丛的阶数相同.*

证明. 考虑闭点 $x \in X$, 则 $\kappa(x) \cong \kappa(x) \otimes_X \cong S_X(\kappa(x))[-\dim(X)]$, 则

$$\begin{aligned} F(\kappa(x)) &\cong F(S_X(\kappa(x))[-\dim(X)]) \cong F(S_X(\kappa(x)))[-\dim(X)] \\ &\cong S_Y(F(\kappa(x)))[-\dim(X)] \cong F(\kappa(x)) \otimes \omega_Y[\dim(Y) - \dim(X)], \end{aligned}$$

其中和 $[-\dim(X)]$ 交换是因为正合性.

由于 F 等价, 则 $F(\kappa(x))$ 是非平凡有界复形. 设 i 是使得 $\mathscr{H}^i(F(\kappa(x))) \neq 0$ 最大 (类似的, 最小) 的数, 故

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathscr{H}^i(F(\kappa(x))) &\cong \mathscr{H}^i(F(\kappa(x))) \otimes \omega_Y[\dim(Y) - \dim(X)] \\ &\cong \mathscr{H}^{i+\dim(Y)-\dim(X)}(F(\kappa(x))) \otimes \omega_Y, \end{aligned}$$

故 $\mathscr{H}^{i+\dim(Y)-\dim(X)}(F(\kappa(x))) \neq 0$, 故如果 $\dim(Y) - \dim(X) > 0$(类似的, < 0) 和 i 最大 (类似的, 最小) 矛盾! 故 $\dim(X) = \dim(Y) := n$.

假设 $\omega_X^k \cong \mathscr{O}_X$, 则 $S_X^k[-kn] \simeq id$, 则 $F^{-1} \circ S_Y^k[-kn] \circ F \simeq S_X^k[-kn] \simeq id$, 则 $S_Y^k[-kn] \simeq id$, 故 $\omega_Y^k \cong \mathscr{O}_Y$. □

4.2 Bondal-Orlov 的重要结论

我们接下来要证明 Bondal-Orlov 的一个经典的重要结论 [1, BO2001], 这个结论的证明需要定义两个对象: 点样对象和可逆对象, 通过对这两种对象在 ω_X 或 ω_X^*(Fano) 是丰沛条件下的性质的研究, 我们可以得到以下结论:

定理 4.5 (Bondal-Orlov,2001)**.** *假设 X 和 Y 是光滑射影簇且 X 的典范丛 ω_X 满足 ω_X 或 ω_X^*(Fano) 是丰沛的. 如果我们有正合等价 $\mathrm{D}^b(X) \cong \mathrm{D}^b(Y)$, 则 $X \cong Y$.*

证明. 我们将在两个假设下来证明这个定理. 事实上通过点样对象和可逆对象的分析我们可以将情况化归到这个假设下, 我们略去化归的部分, 可以参考 [7](代数闭域下), 或者 [1](一般情况).

我们假设等价 F 满足 $F(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_Y$ 且 ω_Y(或 ω_Y^*) 丰沛. 首先有 $\dim(X) = \dim(Y) := n$, 于是

$$\begin{aligned} F(\omega_X^k) &= F(S_X^k(\mathscr{O}_X))[-kn] \cong S_Y^k(F(\mathscr{O}_X))[-kn] \\ &\cong S_Y^k(\mathscr{O}_Y)[-kn] = \omega_Y^k. \end{aligned}$$

因为 F 满忠实, 我们得到

$$H^0(X, \omega_X^k) = \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_X, \omega_X^k) = \mathrm{Hom}(F(\mathscr{O}_X), F(\omega_X^k)) = \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_Y, \omega_Y^k) = H^0(Y, \omega_Y^k).$$

考虑分次代数 $\bigoplus_k H^0(X, \omega_X^k)$, 为了和上述同构合适, 我们假设乘法为 $s_1 \cdot s_2 = S_X^{k_1}(s_2)[-k_1 n] \circ s_1$. 故得到同构

$$\bigoplus_k H^0(X, \omega_X^k) \cong \bigoplus_k H^0(Y, \omega_Y^k).$$

由于 X 和 Y 是紧合的且典范或反典范丛丰沛, 根据概形理论我们有

$$X \cong \mathrm{Proj} \bigoplus_k H^0(X, \omega_X^k) \cong \mathrm{Proj} \bigoplus_k H^0(Y, \omega_Y^k) \cong Y,$$

故得到结论! □

5 Fourier-Mukai 变换初步

5.1 返璞归真——从经典 Fourier 变换谈起

我们都知道, 经典的 Fourier 变换的定义是 $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} dx$. 事实上我们可以从另一个角度来粗略一瞥: 假设 x, y 分别取自空间 $X = Y = \mathbb{R}$, 那么考虑在 $X \times Y$

上定义的核 $\mathcal{P}=e^{-2\pi ixy}$, 我们假设 $\mathcal{F}=f(x)$ 在 X 上定义, 那么考虑图

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & Y \\ X \end{tikzcd}$$

则拉回 $p^*\mathcal{F}$ 就是 $F(x,y)=f(x)$, 于是

$$f(x)e^{-2\pi ixy}=F(x,y)e^{-2\pi ixy}=p^*\mathcal{F}\otimes\mathcal{P}.$$

那么考虑到 Y 的推出 $q_*(p^*\mathcal{F}\otimes\mathcal{P})$, 推出在这里可以看作在纤维上积分, 那么就有

$$q_*(p^*\mathcal{F}\otimes\mathcal{P})=\int_X f(x)e^{-2\pi ixy}dx=\hat{f}(y).$$

于是现在用这种方式推广到域 k 上的光滑射影簇:

定义 5.1. *对域 k 上的光滑射影簇 X,Y, 取定 $\mathcal{P}\in\mathrm{D}^b(X\times_k Y)$, 定义 Fourier-Mukai 变换为*

$$\Phi_{\mathcal{P}}:\mathrm{D}^b(X)\longrightarrow\mathrm{D}^b(Y)$$

$$\mathcal{F}\longmapsto Rq_*(\mathcal{P}\otimes p^*\mathcal{F})$$

注 5.2. *(1) 事实上在 Mukai 的原始论文 [13, Mukai1981] 中, 用了类似的想法推广到了 X 为 Abel 簇, 而 $Y=\widehat{X}$ 是对偶 Abel 簇的情况, 且 $\mathcal{P}$ 是 $X\times\widehat{X}$ 上的 Poincaré 线丛, 从而给出了 $\mathrm{D}^b(X)$ 到 $\mathrm{D}^b(\widehat{X})$ 的等价.*

(2) 事实上一般的概形都能定义 Fourier-Mukai 变换为 $\Phi_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})=Rq_*(\mathcal{P}\otimes^{\mathbf{L}}Lp^*\mathcal{F})$, 这里如果是光滑射影簇, 那么由于 p 平坦且 $\mathcal{P}$ 有局部自由的预解, 那么此时 $Lp^*=p^*$ 且 $\mathcal{P}\otimes^{\mathbf{L}}(-)=\mathcal{P}\otimes(-)$. 我们这里只关心光滑射影簇.

注 5.3. *事实上据我了解, 真实的历史是 Fourier-Mukai 变换是从 Fourier-Deligne 变换 (即 ℓ-进 Fourier 变换) 中受到启发的, 而 ℓ-进 Fourier 变换是大数学家 Pierre Deligne 在一封于 1976 年给 David Kazhdan 的信中发明的, 在仿射直线上 ℓ-进层上的导出范畴中模仿通常的 Fourier 变换而得到. 这些后来被 Gérard Laumon 用来简化 Deligne 关于 Weil 猜想的证明 (见*https://handwiki.org/wiki/Fourier%E2%80%93Deligne_transform*).*

此处我们跨过了中间的 ℓ-进 Fourier 变换, 直接介绍了普通 Fourier 变换和 Fourier-Mukai 变换的关系, 原因是因为笔者不太懂数论. 关于更详尽的内容和改进的 Weil 猜想的证明, 请参考 [10, Kiehl2001].

命题 5.4. 一些常见的函子都是 *Fourier-Mukai* 变换的特例 *(*通过直接计算和投影公式*):*

(1)(identity) 考虑 $i : X \to \Delta \subset X \times_k X$, 则 $id = \Phi_{i_*\mathscr{O}_X}$;

*(2)(*拉回和推出*)* 对于 f, 考虑 $\Gamma_f \subset X \times_k Y$, 则核 $\mathscr{O}_{\Gamma_f}$ 的两种方向给出 f_* 和 f^*;

*(3)(*张量线丛*)* 对线丛 L, 我们有 $(-) \otimes L = \Phi_{i_*L}$;

*(4)(*平移函子*)* 我们有 $T = \Phi_{i_*\mathscr{O}_X[1]}$;

(5)(Serre 函子*)* 我们有 $S_X^k[-kn] = \Phi_{i_*\omega_X^k}$.

5.2 Fourier-Mukai 变换的基本性质

考虑 $p : X \times_k Y \to Y, q : X \times_k Y \to X$. 对于 $\mathcal{P} \in \mathrm{D}^b(X \times_k Y)$, 假设

$$\mathcal{P}_L := \mathcal{P}^\vee \otimes p^*\omega_Y[\dim Y], \mathcal{P}_R := \mathcal{P}^\vee \otimes q^*\omega_X[\dim X].$$

命题 5.5 (Mukai)**.** 我们有伴随函子

$$\Phi_{\mathcal{P}_L} \dashv \Phi_{\mathcal{P}} \dashv \Phi_{\mathcal{P}_R}.$$

证明. 显然, 直接计算即可. □

另外, 事实上 Fourier-Mukai 变换的复合还是 Fourier-Mukai 变换, 考虑 $\mathcal{P} \in \mathrm{D}^b(X \times Y)$ 和 $\mathcal{Q} \in \mathrm{D}^b(Y \times Z)$, 考虑下图

$$\begin{tikzcd} Y \times Z & X \times Y \times Z \arrow[l, "\pi_{YZ}"'] \arrow[r, "\pi_{XY}"'] \arrow[d, "\pi_{XZ}"'] & X \times Y \\ & X \times Z & \end{tikzcd}$$

假设 $\mathcal{R} := \pi_{XZ,*}(\pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{YZ}^*\mathcal{Q})$, 很容易计算得到

$$\Phi_{\mathcal{R}} = \Phi_{\mathcal{Q}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}.$$

当然这个核 $\mathcal{R}$ 不一定唯一.

定理 5.6 (Orlov)**.** 设 X, Y 是光滑射影簇, 假设有满忠实正合函子 $F : \mathrm{D}^b(X) \to \mathrm{D}^b(Y)$. 如果 F 有左右伴随, 则存在 $\mathcal{P} \in \mathrm{D}^b(X \times Y)$*(*在同构意义下唯一*)* 使得

$$F \cong \Phi_{\mathcal{P}}.$$

注 5.7. 这个是一个高度不平凡的结果, 证明可以看 *Kawamata[9]*.

推论 1 (Gabriel)**.** 假设 X, Y 是光滑射影簇且有等价 $\mathbf{Coh}(X) \cong \mathbf{Coh}(Y)$, 则 $X \cong Y$.

证明. 参见 [7] 的 5.24. □

5.3 上同调 Fourier-Mukai 变换

这里我们只考虑光滑复射影簇, 因此通过 GAGA 原理, 我们可以将其等效为复射影流形, 于是可以用复几何那一套方法来做.

我们考虑有理上同调 $H^*(X,\mathbb{Q})$ 的 Fourier-Mukai 变换. 两个上同调类 α,β 的积简记为 $\alpha.\beta$. 对 $f:X\to Y$ 自然诱导 $f^*:H^*(Y,\mathbb{Q})\to H^*(X,\mathbb{Q})$. 根据 Poincare 对偶, 我们定义了对偶的映射 $f_*:H^*(X,\mathbb{Q})\to H^{*+2\dim Y-2\dim X}(Y,\mathbb{Q})$. 于是这些满足投影公式.

对于 $\alpha\in H^*(X\times Y,\mathbb{Q})$, 我们定义上同调 Fourier-Mukai 变换

$$\Phi_\alpha^H: H^*(X,\mathbb{Q})\to H^*(Y,\mathbb{Q}), \beta\mapsto p_*(\alpha.q^*(\beta)).$$

设 $K(X)$ 为 Grothendieck 群, 我们可以定义 Chern 特征 $\mathrm{ch}(L)=\exp(c_1(L))$ 和 Todd 类 $\mathrm{td}(L)=\frac{c_1(L)}{1-\exp(-c_1(L))}$(这种是用形式 Chern roots 定义). 另外我们定义 $f_![F]=\sum_i(-1)^i[R^if_*(F)]$.

定理 5.8 (Grothendieck-Riemann-Roch)**.** *设 $f:X\to Y$ 是光滑复射影簇间的射影态射, 则对于任意的 $e\in K(X)$, 我们有*

$$\mathrm{ch}(f_!(e)).\,\mathrm{td}(\mathcal{T}_Y)=f_*(\mathrm{ch}(e).\,\mathrm{td}(\mathcal{T}_Y)).$$

推论 2 (Hirzebruch-Riemann-Roch)**.** *对于任意的 $e\in K(X)$, 我们有*

$$\chi(e)=\int_X(\mathrm{ch}(e).\,\mathrm{td}(\mathcal{T}_Y)).$$

定义 5.9. *对 $e\in K(X)$ 或者 $E\in \mathrm{D}^b(X)$, 定义其 Mukai 向量为 $v(e)=\mathrm{ch}(e).\sqrt{\mathrm{td}(\mathcal{T}_X)}$ 或者 $v(E)=\mathrm{ch}(E).\sqrt{\mathrm{td}(\mathcal{T}_X)}$.*

这样我们定义对于 $\mathcal{P}\in\mathrm{D}^b(X\times Y)$ 的上同调 Fourier-Mukai 变换为

$$\Phi_{\mathcal{P}}^H:=\Phi_{v(\mathcal{P})}^H.$$

由于这些示性类都是偶数次, 我们得到 $\Phi_{\mathcal{P}}^H$ 保持上同调阶数的奇偶性.

最后我们考虑其和 Hodge 结构的关系. Hodge 理论告诉我们

$$H^n(X,\mathbb{C})\cong\bigoplus_{p+q=n}H^{p,q}(X),$$

而 Chern 类是 (p,p)-类的, 于是我们考虑的所有示性类都是如此, 因此 Mukai 向量满足 $v(-):K(X)\to\bigoplus_p H^{p,p}(X)\cap H^{2p}(X,\mathbb{Q})$.

命题 5.10. 如果普通 *Fourier-Mukai* 变换 $\Phi_{\mathcal{P}}:\mathrm{D}^b(X)\to\mathrm{D}^b(Y)$ 是范畴等价, 则诱导的上同调 *Fourier-Mukai* 变换 $\Phi_{\mathcal{P}}^H$ 诱导对所有 $i=-\dim X,...,0,...,\dim X$ 的同构

$$\bigoplus_{p-q=i}H^{p,q}(X)\cong\bigoplus_{p-q=i}H^{p,q}(Y).$$

证明. 根据 Grothendieck-Riemann-Roch 定理不难证明 $\Phi_{\mathcal{P}}^H$ 是同构. 故我们只需证明

$$\Phi_{\mathcal{P}}^H(H^{p,q}(X))\subset\bigoplus_{r-s=p-q}H^{r,s}(Y).$$

考虑 Künneth 分解我们得到

$$\mathrm{ch}(\mathcal{P}).\sqrt{\mathrm{td}(X\times Y)}=\sum\alpha^{p',q'}\boxtimes\beta^{r,s},$$

其中 $\alpha^{p',q'}\in H^{p',q'}(X),\beta^{r,s}\in H^{r,s}(Y)$. 当然这里面有效的只有 $p'+r=q'+s$ 的项.

接下来我们断言对于 $\alpha\in H^{p,q}(X)$, 和 $\sum\alpha^{p',q'}\boxtimes\beta^{r,s}$, 对 $\Phi_{\mathcal{P}}^H(\alpha)$ 有作用的只有 $p+p'=q+q'=\dim X$ 的项. 事实上我们计算得到

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{P}}^H(\alpha)&=p_*(q^*(\alpha)\wedge\mathrm{ch}(\mathcal{P}).\sqrt{\mathrm{td}(X\times Y)})\\&=p_*\left(q^*(\alpha)\wedge\sum\alpha^{p',q'}\boxtimes\beta^{r,s}\right)\\&=p_*\left(q^*(\alpha)\wedge\sum q^*\alpha^{p',q'}\otimes p^*\beta^{r,s}\right)\\&=\sum(p_*(q^*(\alpha)\wedge q^*\alpha^{p',q'})).\beta^{r,s}\\&=\sum\left(\int_X\alpha\wedge\alpha^{p',q'}\right).\beta^{r,s},\end{aligned}$$

故 $p-q=p'-q'=r-s$. □

注 5.11. 事实上对任意的域上可以用 *Hochschild* 上同调来描述.

6 几个应用

6.1 光滑射影曲线

定理 6.1. 假设 C 是代数闭域 k 上的亏格 $g\neq1$ 的光滑射影曲线, 假设 Y 是 k 上的光滑射影簇, 则存在正合等价 $\mathrm{D}^b(C)\simeq\mathrm{D}^b(Y)$ 当且仅当 Y 是同构于 C 的曲线.

证明. 对典范丛 ω_C, 由 Riemann-Roch 定理得到 $\deg(\omega_C)=2g-2$, 故当 $g=0$, 即 $C\cong\mathbb{P}^1$ 时, $\omega_C^\vee$ 丰沛, 当 $g>1$ 时 ω_C 丰沛, 由 Bondal-Orlov 定理得知定理成立. □

定理 6.2. *假设 C 是 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲线, 假设 Y 是复光滑射影簇, 则存在正合等价 $\mathrm{D}^b(C) \simeq \mathrm{D}^b(Y)$ 当且仅当 Y 是同构于 C 的曲线.*

证明. 首先根据等价我们得知 Y 是光滑射影曲线, 如果 $g(Y) \neq 1$, 则根据上面定理知 $g(X) \neq 1$, 矛盾, 故 Y 也是椭圆曲线.

根据 Orlov 存在定理得到 $\Phi_{\mathcal{P}} : \mathrm{D}^b(C) \to \mathrm{D}^b(Y)$ 范畴等价. 其诱导的上同调 Fourier-Mukai 变换是下面同构的直和:

$$H^1(C, \mathbb{Q}) \cong H^1(Y, \mathbb{Q}), (H^0 \oplus H^2)(C, \mathbb{Q}) \cong (H^0 \oplus H^2)(Y, \mathbb{Q}).$$

根据上同调 Fourier-Mukai 会和 Hodge 分解 $H^1 = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$ 契合, 且椭圆曲线会被 weight-one Hodge 结构所决定, 即 $C \cong H^{1,0}(E)^*/H_1(E, \mathbb{Z}) \cong H^{0,1}(E)/H^1(E, \mathbb{Z})$, 故我们只需要证明这个上同调 Fourier-Mukai 变换是保持整系数一阶上同调.

事实上 $\mathrm{td}(C \times Y) = 1$ 且 $\mathrm{ch}(\mathcal{P}) = r + c_1(\mathcal{P}) + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2)(\mathcal{P})$. 但后面的 4 次不对一阶上同调产生影响, 故确实保持整系数一阶上同调. □

6.2 丰沛典范 (反典范) 丛的自等价

对光滑射影簇 X, 定义 $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^b(X))$ 为 k-线性等价 $\mathrm{D}^b(X) \to \mathrm{D}^b(X)$ 的同构类构成的群. 则我们可以如下描述:

定理 6.3. *假设 X 和 Y 是光滑射影簇且 X 的典范丛 ω_X 满足 ω_X 或 ω_X^* (Fano) 是丰沛的. 则*

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^b(X)) \cong \mathbb{Z} \times (\mathrm{Aut}(X) \ltimes \mathrm{Pic}(X)).$$

证明. 我们只简陋的说一下想法. 事实上这里的 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathrm{Pic}(X)$ 都来源于 Bondal-Orlov 定理里面关于转化到 $F(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_X$ 的分析, 而如果已经有这个条件我们就会得到 $F(\omega_X^k) = \omega_Y^k$, 因此类似的得到 X 的自同构! 通过一些关于丰沛列的东西我们就可以得到 $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^b(X))$ 就是由平移函子 ($\cong \mathbb{Z}$), $\mathrm{Aut}(X)$ 和 $\mathrm{Pic}(X)$ 生成的! 至于表达式是因为平移函子和典范丛张量交换, 而且拉回和张量交换. □

参考文献

[1] Alexei Bondal and Dmitri Orlov. Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences. *Compositio Mathematica*, 125(3):327–344, 2001.

[2] Tom Bridgeland. *Fourier-Mukai transforms for surfaces and moduli spaces of stable sheaves*. PhD thesis, University of Edinburgh, 2002.

[3] Brian Conrad. *Grothendieck duality and base change*. Springer, 2000.

[4] Brian Conrad. Deligne's notes on nagata compactifications. *Journal-Ramanujan Mathematical Society*, 22(3):205, 2007.

[5] Robin Hartshorne. *Residues and duality*, volume 20. Springer, 1966.

[6] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

[7] Daniel Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Clarendon Press, 2006.

[8] Luc Illusie. *Topics in Algebraic Geometry*. http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/Illusie.pdf, Unkown Year.

[9] Yujiro Kawamata. Equivalences of derived catgories of sheaves on smooth stacks. *American journal of mathematics*, pages 1057–1083, 2004.

[10] Reinhardt Kiehl and Rainer Weissauer. *Weil conjectures, perverse sheaves and ℓ-adic Fourier transform*. Springer, 2001.

[11] Joseph Lipman and Mitsuyasu Hashimoto. *Foundations of Grothendieck duality for diagrams of schemes*. Springer, 2009.

[12] Xiaolong Liu. *Errata and Notes for Illusie's Topics in Algebraic Geometry*. https://dvlxlwz.github.io/IllusieErrataNotes.pdf, 2022.

[13] Shigeru Mukai. Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to picard sheaves. *Nagoya Mathematical Journal*, 81:153–175, 1981.

[14] Amnon Neeman. The grothendieck duality theorem via bousfield's techniques and brown representability. *Journal of the American Mathematical Society*, 9(1):205–236, 1996.

[15] Amnon Neeman. Grothendieck duality made simple. 2018.

[16] Stacks project collaborators. Stacks project. https://stacks.math.columbia.edu/. 2022.

[17] Jean-Louis Verdier. Base change for twisted inverse image of coherent sheaves. *Algebraic geometry*, pages 393–408, 1969.