

# 平展上同调基础

温尊

2023 年 4 月 1 日

## 摘要

平展上同调是代数几何中非常重要的一部分, 同时也是比较基础的一部分, 广泛应用在各个方向. 这篇笔记将以 Milne 的讲义为大体顺序, 以几何人的视角讲述平展上同调的基础理论, 为后续代数几何的学习和研究扫清一些障碍. 本笔记也得到了舍友很多支持, 感谢他对这个笔记的贡献和帮助.

## 目录

|          |                             |           |
|----------|-----------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>平展上同调简介</b>              | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>平展基本群</b>                | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>景和层和层化</b>               | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>平展拓扑的一些应用</b>            | <b>8</b>  |
| 4.1      | 拟有限映射的平展局部                  | 9         |
| 4.2      | Zariski 主定理                 | 9         |
| 4.3      | Stein 分解                    | 9         |
| <b>5</b> | <b>平展拓扑上的层</b>              | <b>9</b>  |
| 5.1      | 基本结果和例子                     | 9         |
| 5.2      | 平展预层/层的茎                    | 10        |
| 5.3      | 常值层和局部常值层                   | 12        |
| 5.4      | Abel 群预层和层构成的范畴             | 13        |
| 5.5      | Kummer 理论和 Artin-Schreier 列 | 13        |
| 5.6      | 拟凝聚层                        | 14        |
| <b>6</b> | <b>层的一些函子</b>               | <b>14</b> |
| 6.1      | 直像                          | 14        |
| 6.2      | 逆像                          | 15        |
| 6.3      | 零扩张函子 (下叹号函子)               | 16        |

|           |                          |           |
|-----------|--------------------------|-----------|
| <b>7</b>  | <b>平展上同调的定义和基本性质</b>     | <b>17</b> |
| 7.1       | 定义                       | 17        |
| 7.2       | 群上同调一瞥                   | 18        |
| 7.3       | 点的上同调                    | 18        |
| 7.4       | 严格 Hensel 局部环的上同调        | 19        |
| 7.5       | 平展上同调和极限一瞥               | 19        |
| 7.6       | 平展上同调的拓扑不变性一瞥            | 20        |
| 7.7       | 支撑在闭集的上同调及性质             | 20        |
| <b>8</b>  | <b>Čech 上同调和挠子</b>       | <b>22</b> |
| 8.1       | Čech 上同调                 | 22        |
| 8.2       | Čech-导出谱序列               | 23        |
| 8.3       | 应用 I——Mayer-Vietoris 列   | 24        |
| 8.4       | 应用 II——拟凝聚层的上同调          | 24        |
| 8.5       | 挠子理论一瞥和应用                | 25        |
| <b>9</b>  | <b>高阶直像</b>              | <b>26</b> |
| 9.1       | 基础性质                     | 26        |
| 9.2       | Leray 谱序列                | 27        |
| <b>10</b> | <b>曲线的上同调 I——基础结果</b>    | <b>28</b> |
| 10.1      | Brauer 群和 $C_r$ 域一瞥      | 28        |
| 10.2      | $\mathbb{G}_{m,X}$ 的上同调  | 29        |
| 10.3      | $\mu_{n,X}$ 的上同调         | 30        |
| 10.4      | 支撑在点上的上同调                | 31        |
| <b>11</b> | <b>可构建层和挠层</b>           | <b>32</b> |
| 11.1      | 可构建层                     | 32        |
| 11.2      | 挠层                       | 33        |
| <b>12</b> | <b>曲线的上同调 II——挠层的上同调</b> | <b>34</b> |
| 12.1      | 迹映射方法基础                  | 34        |
| 12.2      | 挠层的上同调                   | 34        |
| <b>13</b> | <b>上同调维数 I——一般情况</b>     | <b>36</b> |
| <b>14</b> | <b>紧合基变换和光滑基变换</b>       | <b>37</b> |
| 14.1      | 经典拓扑里的紧合基变换              | 37        |
| 14.2      | 紧合基变换的叙述和证明              | 38        |
| 14.3      | 紧合基变换的应用                 | 41        |
| 14.4      | 经典拓扑里的光滑基变换              | 41        |
| 14.5      | 光滑基变换一瞥                  | 42        |
| 14.6      | 紧合-光滑基变换及有限性定理           | 42        |
| <b>15</b> | <b>上同调维数 II——仿射情况</b>    | <b>43</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>16 紧支上同调</b>  | <b>44</b> |
| 16.1 分离有限型映射的下叹号函子 . . . . .                           | 44        |
| 16.2 紧支高阶直像 . . . . .                                  | 45        |
| 16.3 紧支上同调 . . . . .                                   | 45        |
| <b>17 平展上同调的 Künneth 公式</b>                            | <b>45</b> |
| 17.1 一般的 Künneth 公式 . . . . .                          | 45        |
| 17.2 紧支的 Künneth 公式 . . . . .                          | 45        |
| <b>18 <math>\ell</math>-进层和 <math>\ell</math>-进上同调</b> | <b>45</b> |
| <b>19 比较定理</b>   | <b>45</b> |
| 19.1 常值层上同调/经典 de Rham 上同调-奇异比较定理 . . . . .            | 45        |
| 19.2 GAGA 一瞥 . . . . .                                 | 47        |
| 19.3 平展-奇异比较定理 . . . . .                               | 47        |
| 19.4 其他比较定理 . . . . .                                  | 47        |
| <b>20 上同调纯性和 Gysin 序列</b>                              | <b>48</b> |
| <b>21 链映射和 Chern 类</b>                                 | <b>48</b> |
| <b>22 Poincaré 对偶</b>                                  | <b>48</b> |
| <b>23 Lefschetz 迹公式</b>                                | <b>48</b> |
| <b>24 Weil 上同调理论</b>                                   | <b>48</b> |
| <b>25 平展上同调的一些应用 I——代数曲面的应用</b>                        | <b>48</b> |
| 25.1 待添加 . . . . .                                     | 48        |
| <b>26 平展上同调的一些应用 II——Abel 簇相关</b>                      | <b>48</b> |
| 26.1 Abel 簇的平展上同调 . . . . .                            | 48        |
| 26.2 Abel 簇和 Jacobi 簇 . . . . .                        | 48        |
| 26.3 Mordell-Weil 定理 . . . . .                         | 48        |
| <b>27 平展上同调的一些应用 III——相关大定理和猜想一瞥</b>                   | <b>48</b> |
| 27.1 Mordell 猜想 . . . . .                              | 48        |
| 27.2 $p$ 进 Hodge 理论 . . . . .                          | 48        |
| 27.3 双有理几何 . . . . .                                   | 48        |
| <b>索引</b>  | <b>49</b> |
| <b>参考文献</b>  | <b>50</b> |

## 1 平展上同调简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取  $X$  为  $\mathbb{C}$  上的代数簇, 其解析化  $X^{\text{an}}$  可以对应奇异上同调  $H^i(X^{\text{an}}, \mathbb{Z})$  满足

- (i) 是有限生成  $\mathbb{Z}$  模;
- (ii) 群  $H^i(X^{\text{an}}, \mathbb{C})$  有额外的结构;
- (iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 我们会发现挠系数的上同调, 例如  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  系数的上同调可以比较好的模拟奇异上同调. 但会发现  $H_{\text{ét}}^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathbb{Z}) = 0$  而  $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  并不能很好的模拟奇异上同调, 另一方面我们发现如下结果:

**定理 1.1** (Serre). 不存在上同调理论  $H^*$  使得 (i) 具有函子性; (ii) 满足 *Kunneth* 公式; (iii) 对所有椭圆曲线  $E$  满足  $H^1(E) \cong \mathbb{Q}^2$ .

基本思路. 取  $E$  为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是  $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}$  是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到  $\text{End}(E)$  作用在  $E$  上会诱导出  $\text{End}(E)$  在  $H^1(E)$ , 进而诱导出代数同态  $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ . 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论.  $\square$

为了在非挠系数下也可以模仿奇异上同调, 我们会定义类似的  $\ell$ -进上同调理论, 其中  $\ell$  和特征  $p$  互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论):

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_{\ell}) = \varprojlim H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}) \text{ 和 } H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_{\ell}) = H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_{\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell},$$

这样也可以得到比较好的模拟.

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点  $(X, \bar{x})$ , 可以定义  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$  为平展基本群, 其定义事实是从代数拓扑里偷的, 运用了覆叠变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

**猜想 1** (Weil 猜想). 设  $X$  是  $\mathbb{F}_q$  上  $n$  维光滑紧合几何整的簇, 设

$$S_X(t) = \exp \left( \sum_{n>0} \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n} t^n \right),$$

则

- (i) 函数  $S_X(t)$  是有理函数, 即  $S_X(t) = \prod_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} S_i(t)$ , 其中  $S_i$  是满足一定条件的整系数多项式;
- (ii) 满足函数方程  $S_X(q^{-n}t^{-1}) = \pm q^{nE/2} t^E S_X(t)$  其中  $E$  是  $X$  欧拉示性数;
- (iii) 所有零点和极点的绝对值为  $q^{j/2}$  其中  $j \in \mathbb{Z}$ ;
- (iv) 若  $X$  提升为代数整数环  $R \subset \mathbb{C}$  上的光滑射影簇  $Y$ , 则对于  $i = 0, \dots, 2n$ , 流形  $Y(\mathbb{C})$  的 Betti 数为  $S_i(t)$  的次数  $b_i$ .

最后结果. (i) 由 Dwork 运用  $H^1$  的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Gorthendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明.  $\square$

因此平展上同调是相当成功的上同调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点集拓扑) 就会被我略去. 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐 [12] 里的 Tag 0BQ6 和 Tag 03N1, 扶磊教授的书 [7] 和 Milne 的传世经典 [8], 我们也会多次引用里面的代数细节.

前置知识: 至少是经典代数几何教材 [5] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 还有基本的导出范畴. 最好懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好.

## 2 平展基本群

对于连通概形  $X$ , 定义  $\mathbf{Fét}/X$  为  $X$  上的有限平展态射构成的范畴, 而  $\mathbf{Ét}/X$  为  $X$  上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点  $(X, \bar{x})$ , 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}} : \mathbf{Fét}/X \rightarrow \mathbf{Sets}, (\pi : Y \rightarrow X) \mapsto \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆盖空间? 事实上不一定存在:

**例 2.1.** 考虑  $\mathbb{C}$  上射影直线  $\mathbb{A}^1$ , 存在有限平展映射  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$ , 那么注定没有像拓扑里的  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  来表示万有覆盖!

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [8] 也没证明. 而 [7] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X' = ((X_i, f_i)_{i \in I}, \phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i, f_i = \phi_{ij} \circ f_j, f_i \in \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\mathrm{Hom}(X', Y) := \varinjlim \mathrm{Hom}_X(X_i, Y) \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y), \sigma \mapsto \sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取  $X_i/X$  为 Galois 覆盖, 也就是说  $\deg(X_i/X) = \#\mathrm{Aut}_X X_i$ , 见 [8] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于  $\phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$  可以诱导  $\mathrm{Aut}_X X_j \rightarrow \mathrm{Aut}_X X_i$  如下: 注意到  $\mathrm{Aut}_X X_j \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j), \sigma \mapsto \sigma(f_j)$  是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [7] 第三节), 则通过  $F(X_j) \rightarrow F(X_i), \alpha \mapsto \phi_{ij}(\alpha)$  即得到映射.

**定义 2.1.** 对于连通概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 考虑上述构造, 定义平展基本群为

$$\pi_1^{\mathrm{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

**定理 2.2.** 考虑连通概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ .

- (i) 函子  $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$  诱导出  $\mathbf{F\acute{e}t}/X$  到有限  $\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x})$ -集的等价;
- (ii) 取第二个几何点  $\bar{x}'$ , 我们有  $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \cong \mathfrak{F}_{\bar{x}'}$  进而诱导  $\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) \cong \pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}')$ , 并且和 (i) 契合;
- (iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考 Tag 0BND.  $\square$

**例 2.2.** (i) 对一个点  $X = \mathrm{Spec}(k)$  和几何点  $\Omega$ , 由定义知道  $\pi_1^{\acute{e}t}(X, \Omega) = \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$ ;

(ii) 考虑  $\mathbb{C}$  上的  $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ , 则考虑  $x \mapsto x^n$  得到

$$\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i = \varprojlim \mu_n(k) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{\ell} \mathbb{Z}_{\ell};$$

(iii) 考虑代数闭域上的  $X = \mathbb{P}^1$ , 由 *Riemann-Hurwitz* 公式不难得到  $X$  只有平凡的平展覆盖, 故  $\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) = 1$ . 归纳可以得到  $\pi_1^{\acute{e}t}(\mathbb{P}^n, \bar{x}) = 1$ ;

(iv) 事实上我们对  $\pi_1^{\acute{e}t}(\mathbb{A}_k^1, \bar{x})$  都一无所知, 其中  $k$  是正特征域 (根据 *Artin-Schreier* 列, 起码不是平凡的群);

(v) 对于正规簇  $X$ , 考虑一般点上的几何点  $\bar{x}$ , 假设

$$L = \bigcup \{ \text{几何点内的有限可分扩张 } K/K(X) : X \text{ 在 } K \text{ 内的正规化到 } X \text{ 平展} \},$$

则  $\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) \cong \mathrm{Gal}(L/K(X))$ , 参考 [7] 命题 3.3.6.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

**定理 2.3** (*Riemann 存在定理*). 设  $X$  是  $\mathbb{C}$  上的有限型概形, 则由范畴等价

$$(\mathbf{F\acute{e}t}/X) \rightarrow (\mathbf{FTopCov}/X^{\mathrm{an}}).$$

特别的有  $\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) \cong \pi_1(\widehat{X^{\mathrm{an}}}, x)$ , 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [3] 的定理 XII.5.1.  $\square$

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多  $\mathbb{C}$  上的有限型概形的平展基本群了.

**注 2.4** (算术和数论人的最爱). (i) 对于  $X$  为  $k$  上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 [7] 命题 3.3.7):

$$1 \rightarrow \pi_1^{\acute{e}t}(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) \rightarrow \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) \rightarrow 1;$$

(ii) 对于  $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ , 运用正合列得到

$$1 \rightarrow \pi_1^{\acute{e}t}(X_{\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) \rightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1.$$

嵌入  $\mathbb{Q}^{\mathrm{al}} \hookrightarrow \mathbb{C}$  可以得到

$$\pi_1^{\acute{e}t}(X_{\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}}, \bar{x}) \cong \langle a, b, c \mid \widehat{abc} = 1 \rangle.$$

而群  $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}/\mathbb{Q})$  则十分复杂, 如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 (摘自 *J. Milne* 的讲义 [9]).

### 3 景和层和层化

本质就是推广拓扑空间的定义.

**定义 3.1** (Grothendieck 拓扑和景). 设  $\mathcal{C}$  是范畴, 一个  $\mathcal{C}$  上的 *Grothendieck* 拓扑由集合  $\{\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}\} = \text{Cov}(U)$  组成, 其中  $U$  是任意对象, 满足

- (i) 若  $V \rightarrow X$  是同构, 则  $\{V \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$ ;
- (ii) 若  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$  且  $Y \rightarrow X$  是任意态射, 则纤维积  $X_i \times_X Y$  存在且

$$\{X_i \times_X Y \rightarrow Y\}_{i \in I} \in \text{Cov}(Y);$$

- (iii) 若  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$  且对任意  $i \in I$  都给定  $\{V_{ij} \rightarrow X_i\}_{j \in J_i}$ , 则

$$\{V_{ij} \rightarrow X_i \rightarrow X\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(X).$$

范畴  $\mathcal{C}$  和其上的 *Grothendieck* 拓扑称为景.

**例 3.1** (小 Zariski 景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Op}(X)$  由开子概形构成, 态射是包含关系. 则  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $U = \bigcup_i U_i$ . 记这个景为  $X_{\text{Zar}}$ .

**例 3.2** (大 Zariski 景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Sch}/X$ , 则  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $U_i \rightarrow U$  为开浸入且  $U = \bigcup_i U_i$ . 记这个景为  $X_{\text{ZAR}}$ .

**例 3.3** (小平展景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Et}/X$ , 不难证明里面的态射都是平展的, 所以我们不假设条件.  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$  是满射. 记这个景为  $X_{\text{ét}}$ .

**例 3.4** (大平展景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Sch}/X$ , 则  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $U_i \rightarrow U$  平展且  $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$  是满射. 记这个景为  $X_{\text{Ét}}$ .

**例 3.5** (fppf 景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Sch}/X$ , 则  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $U_i \rightarrow U$  平坦和局部有限表现, 且  $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$  是满射. 记这个景为  $X_{\text{fppf}}$ .

**定义 3.2.** 景  $\mathcal{C}$  上的预层为函子  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ ;

**定义 3.3.** 给定景  $\mathcal{C}$  和其上的预层  $F$ .

(i) 预层  $F$  称之为分离的, 如果对任意的  $U \in \mathcal{C}$  和覆盖  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$ , 诱导态射  $F(U) \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i)$  是单射;

(ii) 预层  $F$  称为层, 如果对任意的  $U \in \mathcal{C}$  和覆盖  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$ , 我们有如下等化子:

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被  $U_i \times_U U_j \rightarrow U_i$  和  $U_i \times_U U_j \rightarrow U_j$  诱导.

**定义 3.4.** 一个范畴称为 *Grothendieck* 意象 (*Topos*) 如果其等价于某个景上的层范畴.

**定义 3.5** (层化). 在某个景  $\mathcal{C}$  上, 取定  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$ , 称  $\mathcal{P}^\# \in \text{Sh}(\mathcal{C})$  使得  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\#$  是  $\mathcal{P}$  的层化, 如果任取  $\mathcal{G} \in \text{Sh}(\mathcal{C})$  和  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ , 都有交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}^\# \\ \downarrow & \swarrow \exists! & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

**定理 3.6.** 在某个景  $\mathcal{C}$  上, 取定  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$ . 对某个覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ , 定义

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := \ker \left( \prod_i \mathcal{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{P}(U_i \times_U U_j) \right).$$

故有典范映射  $\mathcal{P}(U) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ . 不难证明不同覆盖可以诱导良定义的态射且和覆盖间映射选取无关 (参考 Tag 03NQ), 故定义

$$\mathcal{P}^+ : U \mapsto \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P}).$$

- (i) 函子  $\mathcal{P}^+$  是分离预层;
- (ii) 若  $\mathcal{P}$  是分离预层, 则  $\mathcal{P}^+$  是层且  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^+$  单射;
- (iii) 若  $\mathcal{P}$  是层, 则  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^+$  是同构;
- (iv) 不论如何  $\mathcal{P}^{++}$  一定是层, 且  $\mathcal{P}^{++} \cong \mathcal{P}^\#$ .

证明. 这是纯粹的层论推导, 参考 Tag 00WB. □

**注 3.7.** 我们在景的定义 3.1 里规定  $\text{Cov}(U)$  是集合很大程度上就是为了保证这个极限存在.

**推论 3.8.** 在某个景  $\mathcal{C}$  上, 取定  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$ . 则  $\sharp : \text{PreSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C})$  是个函子, 且若规定遗忘函子为  $i : \text{Sh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{PreSh}(\mathcal{C})$ , 则有  $(\sharp, i)$  是伴随函子. 特别的, 函子  $\sharp$  是正合函子.

证明. 近乎平凡. □

**推论 3.9.** 考虑图  $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C})$ , 则  $\varprojlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$  存在且和预层范畴内一样, 而  $\varinjlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$  存在且为预层范畴内的层化.

证明. 也是纯粹的层论验证, 见 Tag 00W2 和 Tag 00W1. □

## 4 平展拓扑的一些应用

**定义 4.1** (平展邻域). 给定概形  $X$ , 称几何点  $\bar{x}$  的一个平展邻域为如下图表:

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \bar{u} \nearrow & \downarrow f & \\ \bar{x} & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

其中  $f$  平展. 我们记为  $(U, \bar{u}) \rightarrow (X, \bar{x})$ .



#### 4.1 拟有限映射的平展局部

#### 4.2 Zariski 主定理

#### 4.3 Stein 分解

### 5 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景  $X_{\text{ét}}$ . 记  $\text{Sh}(X_{\text{ét}})$  是集合取值的平展层范畴, 而  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为  $\text{PreSh}(X_{\text{ét}})$  和  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ .

#### 5.1 基本结果和例子

**命题 5.1.** 固定概形  $X$ , 对于  $\mathcal{F} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ . 若  $\mathcal{F}$  在限制到 Zariski 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖  $V \rightarrow U$  满足层条件, 则  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ .

证明. 详细细节参考 [8] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 Zariski 开覆盖上的条件会给出: 对于概形  $V = \coprod_i V_i$ , 我们有  $\mathcal{F}(V) = \prod_i \mathcal{F}(V_i)$ . 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖  $\coprod_i U_i \rightarrow U$  满足等化子条件, 那么  $\{U_i \rightarrow U\}$  也满足等化子条件 (因为  $\coprod_i U_i \times_U \coprod_j U_j = \coprod_{i,j} U_i \times_U U_j$ ). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  也满足等化子条件, 其中  $I$  有限且  $U_i$  仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去.  $\square$

**例 5.1** (结构层). 给定概形  $X$ . 定义  $\mathcal{O}_{X,\text{ét}}$  为  $\mathcal{O}_{X,\text{ét}}(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ . 我们断言  $\mathcal{O}_{X,\text{ét}} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ . 运用 5.1, 这其实就是环的忠实平坦下降: 设环同态  $f: A \rightarrow B$  忠实平坦, 则有正合列:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b \mapsto 1 \otimes b - b \otimes 1} B \otimes_A B$$

证明颇为经典, 分成三步: (a) 证明如果  $f$  有一个截面, 则命题成立; (b) 证明如果存在另一个忠实平坦同态  $A \rightarrow A'$  使得命题对  $A' \rightarrow A' \otimes_A B$  成立, 则也对  $A \rightarrow B$  成立; (c) 发现  $B \rightarrow B \otimes_A B, b \mapsto b \otimes 1$  存在截面  $b \otimes b' \mapsto bb'$ .

**例 5.2** (由概形表示的层). 给定概形  $X$ . 取定  $Z$  为  $X$ -概形, 定义为  $h_Z := \text{Hom}_X(-, Z)$ . 事实上通过 (i) 的正合列也容易得到  $h_Z \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ . 下面有几个常用的例子:

(a) 定义  $\mu_{n,X}(T) = \{\zeta \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T) : \zeta^n = 1\}$ , 即  $\mu_{n,X}$  被  $\text{Spec}_X \mathcal{O}_X[t]/(t^n - 1)$  表示;

(b) 定义  $\mathbb{G}_{a,X}(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ , 即  $\mathbb{G}_{a,X}$  是被  $\mathbb{A}_X^1$  表示的函子;

(c) 定义  $\mathbb{G}_{m,X}(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T^*)$ , 即  $\mathbb{G}_{m,X}$  是被  $\text{Spec}_X \mathcal{O}_X[t, t^{-1}]$  表示的函子;

(d) 定义  $\text{GL}_{n,X}(T) = \text{GL}_n(\Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ , 即  $\text{GL}_{n,X}$  是被

$$\text{Spec}_X \mathcal{O}_X[\{x_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}][1/\det(x_{ij})]$$

表示的函子.

**例 5.3** (拟凝聚层). 给定概形  $X$ . 考虑  $\mathcal{M} \in \text{Sh}(X_{\text{Zar}})$  是拟凝聚的, 定义  $\mathcal{M}^{\text{ét}}(\phi: U \rightarrow X) := \Gamma(U, \phi^* \mathcal{M})$ . 运用 5.1 和更一般的正合列: 环同态  $f: A \rightarrow B$  忠实平坦且  $M$  为  $A$ -模, 则有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

即可得到  $\mathcal{M}^{\text{ét}} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ .

**命题 5.2** (点上的层范畴). 对于  $X = \text{Spec } k$ , 有范畴等价

$$\text{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow (\text{离散 Gal}(k^{\text{sep}}/k) - \text{集}), \mathcal{F} \mapsto M_{\mathcal{F}} := \varinjlim_{k^{\text{sep}} \supset k' / k \text{ 有限 Galois}} \mathcal{F}(\text{Spec } k').$$

证明. 定义逆为  $M \mapsto \mathcal{F}_M := (A \mapsto \text{Hom}_G(\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k^{\text{sep}}), M))$ . 见 Tag 03QT.  $\square$

**注 5.3.** 类似的有范畴等价

$$\text{Ab}(X_{\text{ét}}) \rightarrow (\text{离散 Gal}(k^{\text{sep}}/k) - \text{模}).$$

## 5.2 平展预层/层的茎

**引理 5.4.** 给定概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 则

(i) 给定两个平展邻域  $(U_i, \bar{u}_i)_{i=1,2}$ , 存在第三个平展邻域  $(U, \bar{u})$  和态射  $(U, \bar{u}) \rightarrow (U_i, \bar{u}_i)$ ;

(ii) 假设  $h_1, h_2 : (U_1, \bar{u}_1) \rightarrow (U_2, \bar{u}_2)$  是平展邻域的态射, 则存在第三个平展邻域  $(U, \bar{u})$  和态射  $h : (U, \bar{u}) \rightarrow (U_1, \bar{u}_1)$  使得  $h_1 \circ h = h_2 \circ h$ .

证明. (i) 只需考虑  $U = U_1 \times_X U_2$ , 而  $\bar{s} \rightarrow U$  被  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  定义;

(ii) 定义  $U$  为纤维积

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & U_1 \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow (h_1, h_2) \\ U_2 & \xrightarrow{\Delta} & U_2 \times_X U_2 \end{array}$$

并定义  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ .  $\square$

**注 5.5.** 在 (ii) 内, 通过一些假设, 我们可以使得态射  $h_1 = h_2$ : 若我们有诺特分离概形的图标

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \swarrow g & \downarrow q \\ X & \xrightarrow[p]{} & S \\ & \nwarrow g' & \end{array}$$

其中  $Y$  连通且  $p, q$  平展, 则  $g = g'$ . 这是因为  $\delta : X \rightarrow X \times_S X$  平展且是闭浸入, 则  $X \times_S X = \delta(X) \sqcup Z$  为连通分支的无交并. 注意到  $g \times g' : Y \rightarrow X \times_S X$  有连通的像. 根据图知  $\delta(X) \cap \text{Im}(g \times g') \neq \emptyset$ , 故  $\text{Im}(g \times g') \subset \delta(X)$ , 故  $g = g'$ .

**定义 5.6.** 给定概形  $X$  和  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ . 给定几何点  $\bar{x}$ , 定义  $\mathcal{P}$  在  $\bar{x}$  的茎为

$$\mathcal{P}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U, \bar{u})} \mathcal{P}(U)$$

其中余极限遍历所有平展邻域, 根据引理 5.4 此为滤余极限.

注 5.7. 给定概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 则不难看出  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}$  作为函子  $\text{PreSh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sets}$  或者  $\text{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sets}$  或者  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{AbGrps}$  或者  $\text{Ab}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{AbGrps}$  都是正合的. 如果你不放心, 请参考 Tag 03PT.

定义 5.8. 给定概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 给定集合  $E$ , 定义  $E^{\bar{x}} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  为:

$$E^{\bar{x}}(U) := \bigoplus_{\text{Hom}_X(\bar{x}, U)} E.$$

注 5.9. 有几个简单的性质:

- (i) 这个  $E^{\bar{x}}$  在平展拓扑下一定是层, 其他景上面不一定;
- (ii) 我们有伴随函子  $((-)^{\bar{x}}, (-)^{\bar{x}})$ , 在预层范畴上这个伴随对任何景都对, 在层范畴上需要一定条件 (而小平展景显然满足), 若对这个有兴趣, 参考 Tag 00Y3;
- (iii) 对于几何点  $\bar{y}$ , 除非  $\bar{y}$  也在  $\bar{x}$  对应的点上, 否则  $(E^{\bar{x}})_{\bar{y}} = 0$ .

命题 5.10. 给定概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 对于  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$  有  $\mathcal{P}_{\bar{x}} = \mathcal{P}_{\bar{x}}^{\sharp}$ .

证明. 因为有伴随性, 对于任何集合  $E$ , 我们有

$$\text{Mor}_{\text{Sets}}(\mathcal{P}_{\bar{x}}, E) = \text{Hom}_{\text{PreSh}(X_{\text{ét}})}(\mathcal{P}, E^{\bar{x}}) = \text{Hom}_{\text{Sh}(X_{\text{ét}})}(\mathcal{P}^{\sharp}, E^{\bar{x}}) = \text{Mor}_{\text{Sets}}(\mathcal{P}_{\bar{x}}^{\sharp}, E),$$

因此成立.  $\square$

对于结构层  $\mathcal{O}_{X, \text{ét}}$ , 它的茎有特殊的代数性质.

命题 5.11. 给定概形  $X$  和在  $x \in X$  上的几何点  $\bar{x}$ . 设  $\kappa(x) \subset \kappa(x)^{\text{sep}} \subset \kappa(\bar{x})$  是可分代数闭包, 则有

- (i) 有同构  $(\mathcal{O}_{X, x})^{\text{sh}} \cong (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$ , 前者为  $\mathcal{O}_{X, x}$  的严格 Hensel 化;
- (ii) 设  $\mathfrak{m}_x$  是  $\mathcal{O}_{X, x}$  的极大理想, 则  $\mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$  是  $(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$  的极大理想, 且满足

$$(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}} / \mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}} \cong \kappa(x)^{\text{sep}};$$

(iii) 对任何首一多项式  $f \in (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}[T]$  和任意  $\bar{f} \in \kappa(x)^{\text{sep}}[T]$  的根  $\alpha_0 \in \kappa(x)^{\text{sep}}$  使得  $\bar{f}(\alpha_0) \neq 0$ , 则存在  $\alpha \in (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$  使得  $f(\alpha) = 0$  且  $\alpha_0 = \bar{\alpha}$ .

证明. 这些都是复杂的交换代数, 见 Tag 04GE, Tag 04GP 和 04GW. 其中 (iii) 被称之为 Hensel 引理, 满足 (iii) 的环叫做 Hensel 局部环, 如果这个环的剩余类域可分代数闭, 则称之为严格 Hensel 局部环. 所以我们这里就是一个严格 Hensel 环.  $\square$

注 5.12. 我们之后将记  $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}} := (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$ , 也不会有歧义.

对于 Hensel 局部环, 我们还有如下常用的结论:

命题 5.13 (Hensel 引理). 设  $(A, \mathfrak{m}, \kappa)$  是 Hensel 局部环, 则

- (i) 任何有限  $A$ -代数  $S$  都是在  $R$  上有限的局部环的乘积, 此时这些局部环依旧是 Hensel 局部环;
- (ii) 如果平展  $A$ -代数  $B$  满足  $B$  的极大理想  $\mathfrak{n}$  卧于  $\mathfrak{m}$  上使得  $\kappa \cong B/\mathfrak{n}$ , 则存在同构  $\phi: B \cong A \times B'$  使得  $\phi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m} \times B' \subset A \times B'$ ;
- (iii) 我们有范畴等价:

$$\{\text{有限平展 } A\text{-代数}\} \longleftrightarrow \{\text{有限平展 } \kappa\text{-代数}\}, S \mapsto S/\mathfrak{m}S.$$

证明. 纯粹的交换代数, 参考 Tag 04GG, Tag 04GH, Tag 04GK 和 Tag 03QH.  $\square$

### 5.3 常值层和局部常值层

**定义 5.14.** 给定概形  $X$ .

(i) 对于  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  (或者  $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ ), 则  $\mathcal{F}$  称为常值层如果存在集合  $E$  (或者  $\text{Abel}$  群  $G$ ) 使得  $\mathcal{F} \cong (U \mapsto E)^{\#} =: \underline{E}_X$  (或者  $\cong (U \mapsto G)^{\#} =: \underline{G}_X$ );

(ii) 称  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  (或者  $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ ) 是局部常值层, 如果存在覆盖  $\{U_i \rightarrow X\}$  使得  $\mathcal{F}|_{U_i}$  是常值层;

(iii) 称  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  (或者  $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ ) 是有限局部常值层, 如果  $\mathcal{F}$  是局部常值层且取值的集合 (或  $\text{Abel}$  群) 是有限集合.

**注 5.15.** 对于 (i)/(ii) 可以定义一般的  $\Lambda$ -模的常值层/局部常值层.

**引理 5.16** (有限平展映射的平展局部分解). (i) 设  $f: X \rightarrow S$  有限无分歧, 取  $s \in S$ , 则存在平展邻域  $(U, u) \rightarrow (S, s)$  和有限无交分解  $X_U = \coprod_j V_j$  使得所有  $V_j \rightarrow U$  均为闭浸入.

(ii) 设  $f: X \rightarrow S$  有限平展, 取  $s \in S$ , 则存在平展邻域  $(U, u) \rightarrow (S, s)$  和有限无交分解  $X_U = \coprod_j V_j$  使得所有  $V_j \rightarrow U$  均为同构.

证明. 首先, 有关各种映射的平展局部, 可参考Tag 024J. 二者究其本质都是拟有限态射的平展局部性质 (见Tag 02LM). 证明虽然不甚复杂, 但写于此意义也不大, 故这里我们略去证明, 证明参考Tag 04HJ和 Tag 04HN.  $\square$

**命题 5.17.** 给定概形  $X$ , 则有范畴等价

$$\{\text{有限平展映射 } U \rightarrow X\} \cong \{\text{有限局部常值层}\}, (U \rightarrow X) \mapsto \mathcal{F} = h_U.$$

证明. 根据引理5.16(ii), 不难看出  $h_U$  确实是有限局部常值层. 另一方面, 任取  $\mathcal{F}$  是有限局部常值层, 则存在平展覆盖  $\{U_i \rightarrow X\}$  使得  $\mathcal{F}|_{U_i}$  是常值层, 则可以被有限平展态射  $U_i \rightarrow X$  表示 (设取值集合的基数是  $\kappa$ , 若是诺特分离概形, 考虑注5.5, 则令  $Z_i = \coprod_{i=1}^{\kappa} U_i$ , 故  $\mathcal{F}|_{U_i} = h_{Z_i}$ ). 根据仿射态射满足有效的忠实平坦下降 (fpqc), 我们可以得到存在  $Z \rightarrow X$  使得  $h_Z \cong \mathcal{F}$ . 而由于有限性和平展性都是 fpqc 局部的, 故  $Z \rightarrow X$  仍然是有限平展映射.  $\square$

**命题 5.18.** 给定连通概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ .

(i) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})\} \rightarrow \{\text{有限 } \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-集}\};$$

(ii) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})\} \rightarrow \{\text{有限 } \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-模}\}.$$

证明. (i) 根据定理2.2(i) 和命题5.17, 得到结论; (ii) 即为 (i) 赋予加法结构.  $\square$

## 5.4 Abel 群预层和层构成的范畴

固定概形  $X$ , 可以看出  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$  一定是 Abel 范畴, 它里面的正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等皆为正常的定义方法. 我们主要考虑的是满子范畴  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 它是加性范畴, 我们将要证明它为 Abel 范畴 (其正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等和一般拓扑空间上类似, 皆为层化).

**命题 5.19.** 给定概形  $X$  和范畴  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内的列

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0,$$

则下述命题等价:

- (i) 列  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  在  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内 (函子性的) 正合;
- (ii) 列  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  在  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$  内正合且  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  满足对任意的  $U \in X_{\text{ét}}$  和  $s \in \mathcal{F}''(U)$ , 存在  $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$  使得  $s|_{U_i}$  在  $\mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}''(U_i)$  的像内;
- (iii) 对所有几何点  $\bar{x} \rightarrow X$ , 都有  $0 \rightarrow \mathcal{F}'_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}''_{\bar{x}} \rightarrow 0$  正合.

证明. (ii) 推 (i), 平凡. (i) 推 (iii) 由于取茎是正合函子, 故也平凡.

(iii) 推 (ii), 先证明满射部分. 任取  $U \in X_{\text{ét}}$  和几何点  $\bar{u} \rightarrow U$ . 设  $\bar{x} : \bar{u} \rightarrow U \rightarrow X$  也为几何点. 根据定义有  $\mathcal{F}_{\bar{u}} = \mathcal{F}_{\bar{x}}$ , 故  $\mathcal{F}_{\bar{u}} \rightarrow \mathcal{F}''_{\bar{u}}$  也是满射. 再由定义知道成立. 对于其他部分, 注意到  $s \in \mathcal{F}(U)$  为零当且仅当  $s_{\bar{u}} = 0$  即可, 这也是定义.  $\square$

**推论 5.20.** 给定概形  $X$ , 则范畴  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是 Abel 范畴.

## 5.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列

类似于复几何里的正合列  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \rightarrow 0$ , 我们有如下正合列 (以此取逆极限来模拟):

**定理 5.21** (Kummer 正合列). 给定概形  $X$  和正整数  $n$  使得  $n$  在  $X$  内可逆 (不被任何剩余类域的特征整除), 则有  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内的正合列

$$0 \rightarrow \mu_{n,X} \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow 0.$$

证明. 显然  $\mu_{n,X}$  为  $\mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X}$  的核. 故只需要证明满射. 取  $U = \text{Spec } A$  是仿射的平展  $X$ -概形, 任取  $a \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{m,X})$ , 根据假设知典范映射  $V = \text{Spec } A[t]/(t^n - a) \rightarrow U$  是平展映射. 注意到对应的环同态是有限自由的, 故忠实平坦, 于是是满射. 因此  $V \rightarrow U$  是平展覆盖, 根据 5.19 即可得到结论.  $\square$

**定理 5.22** (Artin-Schreier 列). 给定概形  $X$  和素数  $p$  使得在  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  内  $p = 0$ , 则有  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内的正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow 0.$$

证明. 类似于 Kummer 正合列, 注意到此时  $\text{Spec } A[t]/(t^p - t - a) \rightarrow \text{Spec } A$  是平展覆盖即可.  $\square$

## 5.6 拟凝聚层

**定义 5.23.** 考虑景  $X_{\text{ét}}$  上的  $\mathcal{O}_{X,\text{ét}}$ -模  $\mathcal{F}$  称之为拟凝聚的如果任取  $U \in X_{\text{ét}}$ , 存在  $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$  使得

$$\mathcal{F}|_{X_{\text{ét}}/U_i} \cong \text{coker} \left( \bigoplus_{k \in K} \mathcal{O}_{X,\text{ét}}/U_i \rightarrow \bigoplus_{l \in L} \mathcal{O}_{X,\text{ét}}/U_i \right).$$

其中  $X_{\text{ét}}/U_i$  是局部景, 其中的对象皆为  $V \rightarrow U_i$ , 覆盖皆为  $U_i$ -映射.

**注 5.24.** 这个在所有景上面都可以定义.

作为下降理论的应用, 我们有如下令人震惊的结论:

**定理 5.25.** 如下拟凝聚层范畴是范畴等价:

$$\text{Qcoh}(X_{\text{Zar}}) \rightarrow \text{Qcoh}(X_{\text{ét}}), \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{ét}}.$$

证明. 这个是下降理论的直接应用, 需要用到纤维范畴  $\text{QCOH}$  然后可以证明其为有效的 fpqc 下降, 但这个的证明非常复杂 (参考 [2] 定理 4.23). 我们推荐感兴趣的读者阅读 [11] 命题 4.3.15.  $\square$

**注 5.26.** 作为推广我们可以考虑一些特殊的景, 也满足类似结论. 见 *Tag 03OJ*.

## 6 层的一些函子

### 6.1 直像

**定义 6.1.** 考虑概形映射  $f: X \rightarrow Y$ , 设  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ , 定义直像为

$$f_*\mathcal{P}(U \rightarrow Y) = \mathcal{P}(U \times_Y X \rightarrow X).$$

**命题 6.2.** 概形映射  $f: X \rightarrow Y$ , 设  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ .

- (i) 必然有  $f_*\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$ ;
- (ii) 对于  $g: Y \rightarrow Z$ , 我们有  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ;
- (iii) 若视作函子  $f_*: \text{Ab}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}(Y_{\text{ét}})$ , 则左正合.

证明. 此乃定义, 略去.  $\square$

**命题 6.3.** 考虑概形映射  $f: X \rightarrow Y$  和几何点  $\bar{y} = \text{Spec } k \rightarrow Y$ , 设  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ .

- (i) 若  $f$  是闭浸入, 则

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \begin{cases} \{*\} & \text{当 } \bar{y} \notin X \\ \mathcal{F}_{\bar{y}} & \text{当 } \bar{y} \in X \end{cases}$$

其中  $\{*\}$  指单点集;

- (ii) 若  $f$  是开浸入, 若  $\bar{y} \in X$ , 则  $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \mathcal{F}_{\bar{y}}$ ;
- (iii) 如果  $f$  是有限态射, 则

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \prod_{\bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X, f(\bar{x})=\bar{y}} \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则  $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \bigoplus_{\bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X, f(\bar{x})=\bar{y}} \mathcal{F}_{\bar{x}}.$

证明. (ii) 是平凡的;(iii) 颇为麻烦, 需要用到严格 Hensel 环的性质, 我们略去, 参考 Tag 03QP.

(i) 当  $\bar{y} \notin X$ , 这是显然的. 下面考虑  $\bar{y} \in X$  的情况. 考虑两个事实:

**事实 1.** 对任意两个平展态射  $U, U' \rightarrow Y$ , 设  $h : U_X \rightarrow U'_X$  是  $X$ -态射, 则存在  $a : W \rightarrow U, b : W \rightarrow U'$  使得  $a_X : W_X \rightarrow U_X$  是同构且  $h = b_X \circ (a_X)^{-1}$ .

事实 1 的证明: 设  $M = U \times_Y U'$  和图像  $\Gamma_h \subset M_X$ . 注意到  $\Gamma_h$  是平展映射  $\text{pr}_{1,X} : M_X \rightarrow U_X$  一个截面的像, 故是开的. 则存在开子概形  $W \subset M$  使得  $W \cap M_X = \Gamma_h$ . 故取  $a = \text{pr}_1|_W, b = \text{pr}_2|_W$  即可.

**事实 2.** 对平展态射  $V \rightarrow X$ , 存在一族平展态射  $U_i \rightarrow Y$  和态射  $U_{i,X} \rightarrow V$  使得  $\{U_{i,X} \rightarrow V\}$  是  $V$  的 Zariski 覆盖.

事实 2 的证明: 不妨设  $Y, V$  皆为仿射的, 则化为以下简单的交换代数: 假设环  $R$  和理想  $I \subset R$ , 设  $R/I \rightarrow S'$  平展, 则存在平展同态  $R \rightarrow S$  使得  $S' \cong S/IS$  是  $R/I$ -代数同构. 这是因为平展同态总可以写成  $S' = (R/I)[x_1, \dots, x_n]/(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$  其中  $\bar{\Delta} = \det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$  在  $S'$  里可逆. 只需要提升成某些  $f_1, \dots, f_n$  且设

$$S = R[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]/(f_1, \dots, f_n, x_{n+1}\Delta - 1),$$

其中  $\Delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$  即可.

回到原结论. 注意到  $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U, \bar{u})} \mathcal{F}(U_X)$  且  $\mathcal{F}_{\bar{y}} = \varinjlim_{(V, \bar{v})} \mathcal{F}(V)$ , 故  $\{(U, \bar{u})\}$  在  $\{(V, \bar{v})\}$  内共尾, 则得证.  $\square$

## 6.2 逆像

**定义 6.4.** 考虑概形映射  $f : X \rightarrow Y$ , 设  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$ , 定义逆像为

$$f^{-1}\mathcal{F} = \left( (U \rightarrow X) \mapsto \varinjlim_{U \rightarrow X \times_Y V} \mathcal{F}(V \rightarrow Y) \right)^{\#}.$$

**命题 6.5.** 考虑概形映射  $f : X \rightarrow Y$ , 则

- (i) 有伴随函子  $(f^{-1}, f_*)$ ;
- (ii) 函子  $f^{-1} : \text{Sh}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  和  $f^{-1} : \text{Ab}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  正合;
- (iii) 对几何点  $\bar{x} \rightarrow X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$ , 设  $\bar{y} = \bar{x} \rightarrow X \rightarrow Y$ , 则  $(f^{-1}\mathcal{F})_{\bar{x}} \cong \mathcal{F}_{\bar{y}}$ ;
- (iv) 对  $g : Y \rightarrow Z$ , 有  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ;
- (v) 对平展映射  $V \rightarrow Y$ , 有  $f^{-1}h_V = h_{X \times_Y V}$ .

证明. (i)(ii) 略去.(iv) 和 (v) 由伴随性和 Yoneda 引理显然. 考虑 (iii), 注意到

$$\begin{aligned} (f^{-1}\mathcal{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(U, \bar{u})} (f^{-1}\mathcal{F})(U) \\ &= \varinjlim_{(U, \bar{u})} \varinjlim_{a: U \rightarrow X \times_Y V} \mathcal{F}(U) \\ &= \varinjlim_{(V, a \circ \bar{u})} \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_{\bar{y}} \end{aligned}$$

即可.  $\square$

**命题 6.6** (基变换). 考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

其中  $f$  有限, 则  $f'_* \circ (g')^{-1} = g^{-1} \circ f_*$ .

证明. 只需验证茎即可. 注意到纤维积, 对  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  考虑几何点  $\bar{y}' : \text{Spec } k \rightarrow Y'$ , 我们有

$$\begin{aligned} (f'_*(g')^{-1}(\mathcal{F}))_{\bar{y}'} &= \prod_{\bar{x}' : \text{Spec } k \rightarrow X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} ((g')^{-1}(\mathcal{F}))_{\bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x}' : \text{Spec } k \rightarrow X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} \mathcal{F}_{g' \circ \bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow X, f \circ \bar{x} = g \circ \bar{y}'} \mathcal{F}_{\bar{x}} = (f_* \mathcal{F})_{g \circ \bar{y}'} = (g^{-1} f_* \mathcal{F})_{\bar{y}'} \end{aligned}$$

得到结论. □

### 6.3 零扩张函子 (下叹号函子)

**定义 6.7.** 考虑平展映射  $j : U \rightarrow X$ , 定义  $j_! : \text{Ab}(U_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  为

$$j_! \mathcal{F} = \left( (V \mapsto X) \mapsto \bigoplus_{V \rightarrow U} \mathcal{F}(V \rightarrow U) \right)^{\#}.$$

**命题 6.8.** 对平展映射  $j : U \rightarrow X$ , 有

- (i) 有伴随函子  $(j_!, j^{-1})$ ;
- (ii) 对  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(U_{\text{ét}})$  和几何点  $\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow X$  我们有

$$(j_! \mathcal{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{\bar{u} : \text{Spec } k \rightarrow U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathcal{F}_{\bar{u}},$$

特别的, 函子  $j_!$  正合;

- (iii) 若  $j$  有限平展, 则存在  $j_! \rightarrow j_*$  使得对任何  $\text{Ab}(U_{\text{ét}})$  都同构;
  - (iv) 若  $j$  是开浸入, 则对  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(U_{\text{ét}})$  有  $j^{-1} j_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  和  $\mathcal{F} \rightarrow j^{-1} j_! \mathcal{F}$  是同构.
- 事实上  $j_! \mathcal{F}$  是唯一一个使得限制在  $U$  上是  $\mathcal{F}$ , 且在其他地方的茎是 0 的  $\text{Abel}$  群层.

证明. (i)(iv) 平凡, 略去. (iii) 只需要考虑平展局部, 用引理 5.16(ii) 即可验证.

考虑 (ii), 映射为

$$\begin{aligned} (j_! \mathcal{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(V, \bar{v})} (j_! \mathcal{F})(V) = \varinjlim_{(V, \bar{v})} \bigoplus_{\phi : V \rightarrow U} \mathcal{F}(\phi) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\bar{u} : \text{Spec } k \rightarrow U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathcal{F}_{\bar{u}}. \end{aligned}$$

同构参考 Tag 03S5. □



**命题 6.9** (基变换). (i) 设  $f: Y \rightarrow X$  是概形映射且  $j: V \rightarrow X$  平展, 考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X V & \xrightarrow{f'} & V \\ j' \downarrow & \lrcorner & \downarrow j \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

则在  $\text{Ab}((-)_{\text{ét}})$  和  $\Lambda$ -模层都有  $j'_! \circ (f')^{-1} = f^{-1} \circ j_!$ ;

(ii) 设  $f: X \rightarrow Y$  是有限映射且  $j: V \rightarrow Y$  开浸入, 且基变换之后  $g: U = X \times_Y V \rightarrow V$  平展, 设  $j': U \rightarrow X$ , 则在  $\text{Ab}((-)_{\text{ét}})$  内有  $f_* \circ j'_* = j_! \circ g_*$ .

证明. (i) 考虑二者的右伴随函子, 然后因为直像和平展局部化交换即可得到结论;

(ii) 首先考虑  $Y$  的不在  $U$  内的几何点上的茎不难得知二者皆为零. 其次用命题6.8(iv) 和命题6.6, 得到同构

$$j^{-1} f_* j'_! \mathcal{F} = g_*(j')^{-1} j'_! \mathcal{F} = g_* \mathcal{F}.$$

再次用命题6.8(iv) 即可得到结论.  $\square$

**命题 6.10.** 对于概形  $X$  和闭子概形  $i: Z \rightarrow X$  及其补  $j: U \rightarrow X$ , 则对任何  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  有正合列

$$0 \rightarrow j_! j^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^{-1} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

证明. 分情况不难根据定义得到取茎之后正合, 然后用命题5.19即可.  $\square$

## 7 平展上同调的定义和基本性质

### 7.1 定义

**引理 7.1.** 对概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 存在内射对象  $\mathcal{I} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  使得有单射  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ .

证明. 任取  $x \in X$  和在其上的几何点  $i_x: \bar{x} \rightarrow X$ , 取内射 Abel 群满足  $\mathcal{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow I(x)$ . 则  $\mathcal{I}(x) := i_{x,*} I(x)$  是内射的, 故取  $\mathcal{I} = \prod_{x \in X} \mathcal{I}(x)$  即可得到  $\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow \mathcal{I}$ .  $\square$

**定义 7.2.** 对概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 不难得知截面函子  $\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$  左正合. 由引理7.1知有内射预解  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$ , 则定义  $X$  上  $\mathcal{F}$  的平展上同调为

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) := R^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) = H^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathcal{I}^*).$$

和我们之前定义的上同调理论类似, 我们也有如下基本结果:

**命题 7.3.** (i) 满足  $H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ ;

(ii) 若  $\mathcal{I}$  内射, 则当  $i > 0$  时  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{I}) = 0$ ;

(iii) 短正合列  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  会诱导长正合列

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}'') \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \cdots$$

注 7.4. (a) 若  $g : U \rightarrow X$  平展, 则  $g^{-1} \circ \Gamma(U, -) = \Gamma(U, -)$ , 故  $H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}|_U) = H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F})$ ;

(b) 对于  $f : X \rightarrow Y$ , 因为  $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^{-1} \mathcal{F}$ , 则诱导  $R\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, f^{-1} \mathcal{F})$ , 故可以诱导映射  $H_{\text{ét}}^i(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, f^{-1} \mathcal{F})$ .

## 7.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

定义 7.5. 设  $G$  是拓扑群.

(i) 一个 *Abel* 群  $M$  (赋予离散拓扑) 称为  $G$ -模, 如果有连续作用  $G \times M \rightarrow M$ ;

(ii) 设  $\text{Mod}_G$  是  $G$ -模构成的范畴. 根据 Tag 04JF, 范畴  $\text{Mod}_G$  有足够内射对象. 考虑左正合函子

$$\Gamma_G : \text{Mod}_G \rightarrow \text{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群  $G$  的 (连续) 上同调为  $H^i(G, M) = R^i \Gamma_G(M)$ . 若  $G$  是 *Galois* 群则成为 *Galois* 上同调.

命题 7.6. 对于群  $G$ , 考虑群环  $\mathbb{Z}[G]$ , 那么有自然的范畴等价  $\text{Mod}_G \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$ . 设  $\mathbb{Z}$  可以经过平凡  $G$  作用来作为  $\mathbb{Z}[G]$  模, 则  $H^i(G, M) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$ .

证明. 近乎平凡, 略去. □

定理 7.7 (Tate). 设  $M$  是拓扑群并且赋予连续  $G$ -作用. 考虑复形

$$C_{\text{cont}}^*(G, M) : M \rightarrow \text{Maps}_{\text{cont}}(G, M) \rightarrow \text{Maps}_{\text{cont}}(G \times G, M) \rightarrow \dots$$

其中边界算子为当  $n = 0$ , 则  $m \mapsto (g \mapsto g(m) - m)$ ; 当  $n > 0$  时定义为

$$\begin{aligned} d(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1(f(g_2, \dots, g_{n+1})) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (-1)^j f(g_1, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

这样定义 *Tate* 连续上同调为  $H_{\text{cont}}^i(G, M) := H^i(C_{\text{cont}}^*(G, M))$ . 则对于  $M \in \text{Mod}_G$ , 存在典范映射  $H^i(G, M) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(G, M)$ . 并且当  $G$  是离散群或者射有限群, 则为同构  $H^i(G, M) \cong H_{\text{cont}}^i(G, M)$ .

证明. 映射  $H^i(G, M) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(G, M)$  通过万有  $\delta$ -函子不难诱导. 证明见 [10] 第二章. □

## 7.3 点的上同调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上同调也是很复杂的.

引理 7.8. 设  $x = \text{Spec } k$ , 固定几何点  $\bar{x} = \text{Spec } \Omega$ . 取  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(x_{\text{ét}})$ , 则

$$\Gamma(x, \mathcal{F}) \cong (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}.$$

证明. 根据命题5.17和命题5.2, 我们用 Yoneda 引理有

$$\Gamma(x, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Sh}(X_{\text{ét}})}(h_x, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)\text{-集}}(\{*\}, \mathcal{F}_{\bar{x}}) = (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}$$

得到结论.  $\square$

**定理 7.9.** 设  $x = \text{Spec } k, \bar{x} = \text{Spec } k^{\text{sep}}$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则对任意  $i \geq 0$ ,

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), \mathcal{F}_{\bar{x}}).$$

证明. 根据引理, 我们得知  $\Gamma(x, \mathcal{F}) = \Gamma_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) := (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}$ , 故我们有

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(x, \mathcal{F}) = R^i\Gamma_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) = H^i(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), \mathcal{F}_{\bar{x}})$$

即可得到结论.  $\square$

注意到当  $x = \bar{x}$  且当  $i > 0$  时, 就有  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) = 0$ , 这和几何上是一样的.

## 7.4 严格 Hensel 局部环的上同调

我们时常会使用严格 Hensel 局部环的谱的上同调消失的结论如下:

**定理 7.10.** 设  $R$  是严格 Hensel 局部环, 设  $X = \text{Spec } R$  和闭点  $\bar{x}$ . 则对任何  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  都有  $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\bar{x}}$ . 特别的, 函子  $\Gamma(X, -)$  正合, 故对任何  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  和  $i > 0$  都有  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) = 0$ .

证明. 设平展邻域  $(U, \bar{u})$ , 取  $\bar{u}$  的仿射邻域  $\text{Spec } A$ , 故  $R \rightarrow A$  平展且  $\kappa(\bar{x}) = \kappa(\bar{u})$ . 由命题5.13(ii) 得知作为  $R$ -代数有  $A \cong R \times A'$  且和  $\kappa(\bar{x}) = \kappa(\bar{u})$  契合. 故我们有截面  $X \rightarrow \text{Spec } A$ . 因此平展邻域  $(X, \bar{x})$  是共尾的, 故  $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\bar{x}}$ . 其他结论就平凡了.  $\square$

## 7.5 平展上同调和极限一瞥

我们这里只给出叙述, 不给出证明, 详细细节参考Tag 03Q4.

**定义 7.11.** 设  $I$  是预序集, 考虑逆系统  $(X_i, f_{i'i})_I$ . 一个在其上定义的层系统  $(\mathcal{F}_i, \varphi_{i'i})$  为满足

- (i) 层  $\mathcal{F}_i \in \text{Sh}(X_{i,\text{ét}})$ ;
- (ii) 对  $i' \geq i$ , 有  $\text{Sh}(X_{i,\text{ét}})$  内的映射  $\varphi_{i'i} : f_{i'i}^{-1}\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i'}$  使得  $\varphi_{i''i} = \varphi_{i''i'} \circ f_{i''i'}^{-1}\varphi_{i'i}$ .

**定理 7.12** (Tag 09YQ). 考虑定向逆系统  $(X_i, f_{i'i})_I$  使得  $X_i$  拟紧拟分离且  $f_{i'i}$  仿射. 对于其上定义的层系统  $(\mathcal{F}_i, \varphi_{i'i})$ , 假设  $f_i : X = \varprojlim X_i \rightarrow X_i$  且  $\mathcal{F} := \varinjlim f_i^{-1}\mathcal{F}_i$ , 则有

$$\varinjlim H_{\text{ét}}^i(X_i, \mathcal{F}_i) \cong H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}).$$

## 7.6 平展上同调的拓扑不变性一瞥

**定理 7.13** (平展上同调的拓扑不变性). 设  $f : X_0 \rightarrow X$  是万有同胚 (例如幂零理想层定义的闭浸入), 则

- (i) 小平展景  $X_{\text{ét}} \rightarrow (X_0)_{\text{ét}}, V \mapsto V \times_X X_0$  是同构;
- (ii) 平展意象  $\text{Sh}(X_{\text{ét}})$  和  $\text{Sh}((X_0)_{\text{ét}})$  是同构;
- (iii) 对任何  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  和任何  $q$  都有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^q(X_0, \mathcal{F}|_{X_0})$ .

证明. (ii) 和 (iii) 由 (i) 可以得到. 而 (i) 比较复杂, 我们只给一瞥, 完整证明参考 Tag 03SI. 事实上可以 (不太容易地) 约化到幂零理想层定义的闭浸入且是仿射局部的情况. 也就是说对于幂零理想  $I \subset A$ , 有  $A_{\text{ét}} \cong (A/I)_{\text{ét}}$ . 事实上对于平展  $A/I$ -代数, 可以写为

$$A/I[x_1, \dots, x_n]/(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$$

且  $\det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$  可逆, 取一个提升得到  $A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n)$ , 现在考察  $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$  是否可逆. 不难得知由于  $I$  幂零, 则  $A/I$  内可逆的元素在  $A$  上一定可逆.  $\square$

## 7.7 支撑在闭集的上同调及性质

首先, 不难证明如下事实: 对概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 取截面  $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ , 则存在开集  $W \subset U$  使得

- (i)  $W$  是  $U$  内最大的开集使得  $s|_W = 0$ ;
- (ii) 对任何几何点  $\bar{u} \rightarrow U$ , 设  $\bar{s} = (U \rightarrow S) \circ \bar{u}$ , 则

$$0 = (U, \bar{u}, s) \in \mathcal{F}_{\bar{s}} \Leftrightarrow \bar{u} \in W.$$

读者可以自己证明, 如果想当懒狗, 参考 Tag 04FR.

**定义 7.14.** 对概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ .

- (i) 层  $\mathcal{F}$  的支集为点集  $\text{supp}(\mathcal{F}) \ni s$  使得对所有 (一些)  $s$  上的几何点  $\bar{s}$  都有  $\mathcal{F}_{\bar{s}} \neq 0$ ;
- (ii) 截面  $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ , 其支集  $\text{supp}(s)$  定义为闭集  $U \setminus W$ .

**注 7.15.** 层的支集不一定是闭的, 但如果取值是环, 那一定是闭的, 因为这时相当于单位截面的支集.

**定义 7.16.** 对概形  $X$ , 闭子概形  $Z \subset X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 定义

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(X) : \text{supp}(s) \subset Z\}.$$

定义支撑在  $Z$  的平展上同调为

$$H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) := R^i \Gamma_Z(X, \mathcal{F}).$$

**命题 7.17.** 对概形  $X$ , 闭子概形  $Z \subset X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 设  $U = X \setminus Z$ , 则有好三角:

$$R\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_Z(X, \mathcal{F})[1]$$

进而诱导出正合列:

$$\cdots \rightarrow H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

证明. 任取内射对象  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 我们断言  $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  是满的. 设  $j: U \rightarrow X$ , 注意到对任何  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  都有

$$\text{Hom}(j_!\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}|_U) = \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

因为  $\mathcal{F}$  是内射的, 故只需证明  $j_!\mathbb{Z}_U \rightarrow \mathbb{Z}_X$  是单射. 根据层化函子是正合的, 只需证明对平展映射  $V \rightarrow X$ , 典范映射

$$\bigoplus_{V \rightarrow U} \mathbb{Z}(U) \rightarrow \bigoplus_{V \rightarrow X} \mathbb{Z}(U)$$

是单射, 而这是显然的, 故断言成立.

不难发现上述满射的核为  $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ , 因此立即得到好三角

$$R\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_Z(X, \mathcal{F})[1].$$

而长正合列因此是显然的. □

**定理 7.18 (切除).** 设  $f: X' \rightarrow X$  平展和闭子概形  $Z' \subset X'$  使得

(i) 设  $Z := f(Z')$  是闭集且  $f|_{Z'}: Z' \cong Z$  同构;

(ii) 有  $f(X' \setminus Z') \subset X \setminus Z$ .

则对任意的  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  都有对任意  $i$  的同构

$$H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{Z', \text{ét}}^i(X', f^{-1}\mathcal{F}).$$

证明. 设  $U' = X' \setminus Z', U = X \setminus Z$ , 考虑

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \cong \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \end{array}$$

得到

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X', f^{-1}\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U', f^{-1}\mathcal{F}) \end{array}$$

其中虚线为诱导出来的映射. 由于  $f^{-1}$  正合且和内射对象交换, 则只需证明诱导的

$$g: \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathcal{F})$$

是同构. 注意到若  $s \in \ker g$ , 则  $s$  在  $\Gamma(X', \mathcal{F})$  和  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  是 0. 而  $\{X', U\}$  是平展覆盖, 则  $s = 0$ , 故是单射. 另一方面, 取  $s' \in \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathcal{F}) \subset \Gamma(X', f^{-1}\mathcal{F})$ . 注意到  $s', 0$  在  $U'$  是 0; 另外  $s'$  限制  $X' \times_X X' \rightrightarrows X'$  都是相等的, 因此可以粘合成  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ , 故满射. □

**推论 7.19.** 对概形  $X$  和闭点  $x \in X$ , 任取  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则有

$$H_{x, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{x, \text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{X, x}^{\text{sh}}, \mathcal{F}).$$

证明. 用定理 7.18 和定理 7.12 即可. □

## 8 Čech 上同调和挠子

### 8.1 Čech 上同调

定义 8.1. 考虑概形  $X$  和一族平展覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ , 考虑  $\mathcal{P} \in \text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ , 定义

$$\check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) = \prod_{(i_0, \dots, i_r) \in I^{r+1}} \mathcal{P}(U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_r})$$

和映射  $d^r : \check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$  为

$$s = (s_{i_0, \dots, i_r}) \mapsto \left( \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j (s_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{r+1}}) |_{U_{i_0}, \dots, i_{r+1}} \right)_{i_0, \dots, i_{r+1}}.$$

复形  $\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$  称为 Čech 复形, 其上同调

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := H^i(\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}))$$

称为  $\mathcal{P}$  关于覆盖  $\mathfrak{U}$  的 Čech 上同调.

注 8.2. 不难注意到 Čech 复形可以重新写成:

$$\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) = \text{Hom}_{\text{PreAb}(X_{\text{ét}})} \left( \left( \bigoplus_{i_0 \in I} \mathbb{Z}_{U_{i_0}} \leftarrow \bigoplus_{(i_0, i_1) \in I^2} \mathbb{Z}_{U_{i_0} \times_X U_{i_1}} \leftarrow \cdots \right), \mathcal{P} \right).$$

而且直接 (大量) 计算会得到 Hom 里面的复形  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{U}}^*$  是正合的 (参考 Tag 03AT).

例 8.1. 考虑覆盖  $\mathfrak{U} = \{Y \rightarrow X\}$  使得  $Y \rightarrow X$  是 Galois 覆盖  $G$ . 对  $\mathcal{P} \in \text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ , 假设其吧无交并映成积, 应用定理 7.7 则有  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \cong H^r(G, \mathcal{P}(Y))$ .

命题 8.3. 给定概形  $X$  和平展覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ .

- (i) 对任何内射对象  $\mathcal{S} \in \text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ , 对  $i > 0$  我们有  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) = 0$ ;
- (ii) 在  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$  内  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, -)$  是  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -)$  的导出函子;
- (iii) 若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ .

证明. (ii) 运用万有  $\delta$  函子理论即可; (iii) 就是层的条件之一; (i) 注意到

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) = H^i(\text{Hom}_{\text{PreAb}(X_{\text{ét}})}(\mathbb{Z}_{\mathfrak{U}}^*, \mathcal{S}))$$

且  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{U}}^*$  正合和  $\mathcal{S}$  内射即可. □

定义 8.4. 考虑概形  $X$  和一族平展覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ . 这个覆盖的一个加细指覆盖  $\mathfrak{V} = \{V_j \rightarrow X\}_{j \in J}$  满足对任意的  $V_j \rightarrow X$  都存在分解  $V_j \rightarrow U_{\alpha(j)} \rightarrow X$ . 这样会自然诱导一个  $\alpha^* : \check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^*(\mathfrak{V}, \mathcal{P})$  为  $(\alpha^* s)_{j_0, \dots, j_r} = s_{\alpha(j_0), \dots, \alpha(j_r)} |_{V_{j_0}, \dots, j_r}$ . 因此诱导  $\rho(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) : \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^i(\mathfrak{V}, \mathcal{P})$ . 故而可以定义 Čech 上同调为

$$\check{H}_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{P}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{P}).$$

**命题 8.5.** 给定概形  $X$ .

- (i) 对任何内射对象  $\mathcal{I} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 对  $i > 0$  我们有  $\check{H}_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{I}) = 0$ ;
- (ii) 若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则  $\check{H}_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ .

证明. (i) 注意到遗忘函子保持内射性质, 于是在  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内也满足; (ii) 由于对所有覆盖都满足, 因此余极限也满足.  $\square$

## 8.2 Čech-导出谱序列

类似于 Zariski 上同调, 平展上同调也有类似的 Čech-导出的比较结论.

**引理 8.6.** 考虑概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ . 考虑预层  $\underline{H}^i(\mathcal{F}) : U \mapsto H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}|_U)$ . 考虑遗忘函子  $i : \text{Ab}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ , 我们有  $\underline{H}^r(-) = R^r i(-)$ . 特别的  $\underline{H}^i(\mathcal{F})^\# = 0$ .

证明. 考虑  $\text{Ab}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{i} \text{PreAb}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{\#} \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则取内射预解  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  我们有  $\underline{H}^r(\mathcal{F}) = H^r(i(\mathcal{I}^*))$ . 因此  $\underline{H}^r(-) = R^r i(-)$ .  $\square$

**推论 8.7.** 考虑概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ . 对  $r > 0$ , 任取  $s \in H_{\text{ét}}^r(X, \mathcal{F})$  都存在平展覆盖  $\{U_i \rightarrow X\}$  使得  $s$  在每个  $H_{\text{ét}}^r(U_i, \mathcal{F}|_{U_i})$  内均为 0.

证明. 这是引理8.6的直接推论.  $\square$

**定理 8.8.** 考虑概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ . 考虑预层  $\underline{H}^i(\mathcal{F}) : U \mapsto H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}|_U)$ , 则有谱序列

$$E_2^{p,q} = \check{H}_{\text{ét}}^p(X, \underline{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

证明. 对  $\text{Ab}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{i} \text{PreAb}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{\check{H}_{\text{ét}}^0(X, -)} \text{AbGrps}$ , 因为  $\check{H}_{\text{ét}}^0(X, -) \circ i = \Gamma(X, -)$ , 引用上述引理和 Grothendieck 谱序列, 我们得到结论.  $\square$

作为应用, 我们有如下比较结果:

**命题 8.9.** 考虑概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ . 对于  $r = 0, 1$ , 我们有  $\check{H}_{\text{ét}}^r(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^r(X, \mathcal{F})$ .

证明. 考虑谱序列  $E_2^{p,q} = \check{H}_{\text{ét}}^p(X, \underline{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathcal{F})$ . 根据推论8.7, 我们得知对  $s > 0$  有  $E_2^{0,s} = 0$ . 观察谱序列第二页:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & \bullet & & \bullet \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \bullet & & \bullet \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & & 0 & & E_2^{0,0} & & E_2^{1,0} & & \bullet \end{array}$$

即可得知对于  $r = 0, 1$ , 有  $\check{H}_{\text{ét}}^r(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^r(X, \mathcal{F})$ .  $\square$

**注 8.10.** 如果  $X$  拟紧且对任何有限子集都包含在某个仿射开集内, 则对任何  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  和任何  $r$ , 我们都有  $\check{H}_{\text{ét}}^r(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^r(X, \mathcal{F})$ . 参考 [8] 内的 III.2.17.

### 8.3 应用 I——Mayer-Vietoris 列

**定理 8.11** (Mayer-Vietoris). 设概形  $X = U \cup V$  为开集的并, 给定  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 我们有正合列:

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow H_{\text{ét}}^s(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H_{\text{ét}}^s(U, \mathcal{F}) \oplus H_{\text{ét}}^s(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \\ \longleftarrow H_{\text{ét}}^s(U \cap V, \mathcal{F}) \longrightarrow H_{\text{ét}}^{s+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

证明. 设覆盖为  $\mathfrak{U} = \{U \rightarrow X, V \rightarrow X\}$ . 根据 Čech 上同调定义, 我们有如下正合列:

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathcal{F})) \longrightarrow H_{\text{ét}}^s(U, \mathcal{F}) \oplus H_{\text{ét}}^s(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \\ \longleftarrow H_{\text{ét}}^s(U \cap V, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathcal{F})) \longrightarrow 0. \end{array}$$

另一方面, 考虑谱序列  $E_2^{p,q} = \check{H}_{\text{ét}}^p(X, \underline{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathcal{F})$ . 注意到当  $r > 1$  时有  $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathcal{F})) = 0$ , 运用谱序列结论 [6] 命题 2.2.4 我们有如下正合列

$$0 \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathcal{F})) \rightarrow H_{\text{ét}}^{s+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^{s+1}(\mathcal{F})) \rightarrow 0.$$

综合两个正合列即可得到结论.  $\square$

**注 8.12.** 直接证明参考 Tag 0A50. 还有相对版本的 Mayer-Vietoris 列, 我们不再赘述, 见 Tag 0EYK.

### 8.4 应用 II——拟凝聚层的上同调

接下来介绍一个意料之中的结果.

**引理 8.13.** 设  $X = \text{Spec } A$  仿射, 取拟凝聚层  $\mathcal{F}^{\text{ét}}$ , 则对  $i > 0$  都有  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}^{\text{ét}}) = 0$ .

证明. 我们用对  $i$  的归纳法.

先考虑  $i = 1$ . 取  $\xi \in H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{F}^{\text{ét}})$ . 将覆盖加细可以假设  $U_i$  仿射. 根据命题 8.9 得到其对应  $\eta' \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}^{\text{ét}})$ . 设  $\mathfrak{V} = \{\sqcup_i U_i \rightarrow X\}$  不难看出  $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}^{\text{ét}})$ . 假设  $\mathfrak{V} = \{\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A\}$ , 则复形  $\check{C}^*(\mathfrak{V}, \mathcal{F}^{\text{ét}})$  为

$$B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A M \rightarrow \cdots$$

故成立.

对于  $i > 1$ , 取  $\xi \in H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}^{\text{ét}})$ , 由推论 8.7 存在平展覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}$  使得  $\eta|_{U_i} = 0$ . 将覆盖加细可以假设  $U_i$  仿射. 注意到  $U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$  皆为仿射, 考虑谱序列 8.8

$$E_2^{p,q} = \check{H}_{\text{ét}}^p(X, \underline{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

根据归纳假设知道对  $0 < q < p$  都有  $E_2^{p,q} = 0$ , 我们可以看出  $\xi$  必然来自  $\xi' \in \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}^{\text{ét}})$ . 继续  $i = 1$  情况的证明即可.  $\square$



**定理 8.14** (平展-Zariski 的拟凝聚上同调比较定理). 对概形  $X$  和拟凝聚层  $\mathcal{F}$ , 对任何  $i \geq 0$  我们都有

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}^{\text{ét}}).$$

证明. 我们只考虑概形  $X$  分离的情况 (一般情况可以由 Tag 03F3 和 Tag 03DW 得到). 取 Zariski 开覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}$ , 根据分离性,  $U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$  皆为仿射. 则谱序列 8.8 除了第一行全是零. 故我们有

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F})$$

即可得到结论.  $\square$

**定理 8.15** (拟凝聚层). 计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调.

证明. 运用定理 5.25 和定理 8.14 即可.  $\square$

因此, 我们只需要计算不是拟凝聚层的平展上同调即可. 比如挠层, 这是我们一大目标之一.

## 8.5 挠子理论一瞥和应用

类似于概型理论里的挠子理论, 我们可以将其推广至小平展景.

**定义 8.16.** 对概形  $X$  和平展覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ . 取取值为群 (不一定交换) 的平展层  $\mathcal{G}$ , 设  $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$ . 我们定义取值在  $\mathcal{G}$  的 1-余链为  $g = (g_{ij})_{(i,j) \in I^2}$  使得  $g_{ij} \in \mathcal{G}(U_{ij})$  满足

$$g_{ij}|_{U_{ijk}} g_{jk}|_{U_{ijk}} = g_{ik}|_{U_{ijk}}.$$

两个 1-余链  $g, g'$ , 定义  $g \sim g'$  使得存在  $(h_i)_{i \in I}$  其中  $h_i \in \mathcal{G}(U_i)$  满足

$$g'_{ij} = h_i|_{U_{ij}} g_{ij} (h_j|_{U_{ij}})^{-1}.$$

定义  $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) := \{g\} / \sim$ .

**注 8.17.** 根据构造, 对于短正合列  $1 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 1$ , 我们有

$$1 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}'') \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}') \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}'').$$

**定义 8.18.** 对概形  $X$  和取值为群 (不一定交换) 的平展层  $\mathcal{G}$ . 设  $\mathcal{S} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  存在右  $\mathcal{G}$ -作用. 我们称  $\mathcal{S}$  是  $\mathcal{G}$ -挠子如果满足

- (i) 存在平展覆盖  $\{U_i \rightarrow X\}$  使得  $\mathcal{S}(U_i) \neq \emptyset$ ;
- (ii) 对任意的平展映射  $U \rightarrow X$  和  $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ , 映射  $\mathcal{G}|_U \rightarrow \mathcal{S}|_U, g \mapsto sg$  是同构.

我们称  $\mathcal{S}$  被  $\{U_i \rightarrow X\}$  平凡化. 如果  $\mathcal{S}(X) \neq \emptyset$  我们称  $\mathcal{S}$  是平凡  $\mathcal{G}$ -挠子.

这两个概念出现不是偶然, 事实上我们有如下结论:

**定理 8.19.** 对概形  $X$  和取值为群 (不一定交换) 的平展层  $\mathcal{G}$ . 我们有双射

$$\{\text{被}\mathfrak{U}\text{平凡化的}\mathcal{G}\text{-挠子}\} / \cong \hookrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

证明. 我们阐述映射如何诱导. 给定被  $\mathfrak{U}$  平凡化的  $\mathcal{G}$ -挠子  $\mathcal{S}$ . 对  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ , 给定  $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$ , 由于作用单可迁, 存在  $g_{ij} \in \mathcal{G}(U_{ij})$  使得  $(s_i|_{U_{ij}})g_{ij} = s_j|_{U_{ij}}$ . 则得到  $g = (g_{ij})_{I^2}$ . 对另一组  $s'_i$ , 我们可以有  $s'_i = s_i h_i$ , 故会得到  $g \sim g'$ , 因此良定义. 有关这个证明因为没什么意思所以我们略去, 参考 [9] 命题 11.1.  $\square$

**注 8.20.** 如果  $G$  是有限常值群层且  $X$  连通, 则

$$\{G\text{-挠子}\} / \cong = \{ \text{Galois 群为 } G \text{ 的 } X \text{ 的 Galois 覆盖} \} = \text{Hom}_{\text{cont}}(\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}), G).$$

**定理 8.21** (向量丛和挠子). 对概形  $X$  和秩  $n$  局部自由模构成的群  $\text{Vect}_{\text{Zar}}^n(X)$ , 我们有

$$\text{Vect}_{\text{Zar}}^n(X) \cong \check{H}_{\text{Zar}}^1(X, \text{GL}_{n,X}) \cong \check{H}_{\text{fpf}}^1(X, \text{GL}_{n,X}) \cong \check{H}_{\text{ét}}^1(X, \text{GL}_{n,X}).$$

证明. 忽略, 参考 [9] 定理 11.4.  $\square$

**推论 8.22.** 我们有

$$H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_{m,X}) \cong \text{Pic}(X).$$

证明. 注意到  $\mathbb{G}_{m,X}$  交换, 根据命题8.9和定理8.21即得到结果.  $\square$

**推论 8.23** (Hilbert 定理 90). 对于有限 Galois 扩张  $L/k$ , 有  $H^1(\text{Gal}(L/k), L^*) = 0$ .

证明. 注意到

$$H^1(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), (k^{\text{sep}})^*) = \varinjlim_{\text{有限 Galois 覆盖 } L/k} H^1(\text{Gal}(L/k), L^*)$$

其中后者是  $L \subset L'$  诱导  $H^1(\text{Gal}(L/k), L^*) \hookrightarrow H^1(\text{Gal}(L'/k), (L')^*)$ . 根据推论8.22和定理7.9得到当  $X = \text{Spec } k$  有  $H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_{m,X}) \cong H^1(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), (k^{\text{sep}})^*)$  且

$$H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{G}_{m,X}) \cong \text{Pic}(\text{Spec } k) = 0$$

即可得到结论.  $\square$

## 9 高阶直像

### 9.1 基础性质

**定义 9.1.** 对概形态射  $f: X \rightarrow Y$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 因为  $f_*$  左正合, 故可以得到高阶直像  $R^i f_* \mathcal{F}$ .

**命题 9.2.** 对概形态射  $f: X \rightarrow Y$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则有

$$R^i f_* \mathcal{F} = (U \mapsto H_{\text{ét}}^i(U \times_Y X, \mathcal{F}))^\sharp.$$

证明. 定义函子  $f_*^{\text{pre}} : \text{PreAb}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{PreAb}(Y_{\text{ét}})$  为  $\mathcal{P} \mapsto (U \mapsto \Gamma(U \times_Y X, \mathcal{P}))$ . 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \text{PreAb}(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{f_*^{\text{pre}}} & \text{PreAb}(Y_{\text{ét}}) \\ \uparrow i & & \downarrow \sharp \\ \text{Ab}(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{f_*} & \text{Ab}(Y_{\text{ét}}) \end{array}$$

由于  $\sharp, f_*^{\text{pre}}$  正合, 取内射预解  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  得到

$$R^r f_* \mathcal{F} = H^i(f_* \mathcal{I}^*) = H^r(\sharp \circ f_*^{\text{pre}} \circ i \mathcal{I}^*) = (f_*^{\text{pre}} H^r(i \mathcal{I}^*))^\sharp = (f_*^{\text{pre}} \underline{H}^r(\mathcal{F}))^\sharp$$

即可.  $\square$

**推论 9.3.** 对于几何点  $\bar{y}$ , 我们有

$$(R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U, \bar{u})} H_{\text{ét}}^i(U \times_Y X, \mathcal{F}).$$

**推论 9.4.** 如果  $f$  拟紧拟分离, 我们有

$$(R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{y}} = H_{\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^{\text{sh}} \times_Y X, \mathcal{F}).$$

证明. 根据定义, 上述命题还有定理7.12即可得到结论 (这个在导出范畴内也对, 参考Tag 03Q7).  $\square$

**例 9.1.** 参考 [9] 定理 12.4, 如果  $X$  是正规整概形, 考虑一般点  $f : \eta \rightarrow X$ , 则有  $(R^i f_* \mathcal{F})_\eta = H_{\text{ét}}^i(\text{Spec } \text{Frac } \mathcal{O}_{X, x}^{\text{sh}} \times_Y X, \mathcal{F})$ .

**推论 9.5.** 如果  $f : X \rightarrow Y$  是有限映射, 则对  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  有对于所有  $i > 0$  有  $R^i f_* \mathcal{F} = 0$ .

证明. 这时我们有

$$(R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U, \bar{u})} H_{\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^{\text{sh}} \times_Y X, \mathcal{F}).$$

由于  $f$  有限, 那么  $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^{\text{sh}} \times_Y X$  在  $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^{\text{sh}}$  上有限. 故  $\text{Spec } A = \text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^{\text{sh}} \times_Y X$ . 根据命题5.13(i) 得到  $A \cong A_1 \times \cdots \times A_r$  为 Hensel 局部有限  $\mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^{\text{sh}}$ -代数. 故而  $A_i$  也是严格 Hensel 局部环. 此时  $\text{Spec } A = \coprod_{i=1}^r \text{Spec } A_i$ , 运用定理7.10得到对  $i > 0$  有  $(R^i f_* \mathcal{F})_{\bar{y}} = 0$ .  $\square$

## 9.2 Leray 谱序列

**定理 9.6** (Leray 谱序列). 对概形态射  $f : X \rightarrow Y$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则有谱序列

$$E_2^{p, q} = H_{\text{ét}}^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

证明. 注意到  $\Gamma(X, -) \circ f_* = \Gamma(Y, -)$ , 由于  $f_*$  保持内射, 根据 Grothendieck 谱序列得到

$$E_2^{p, q} = H_{\text{ét}}^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

即可.  $\square$

## 10 曲线的上同调 I——基础结果

我们已经知道, 计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调, 因此只需要考虑不是拟凝聚的情况. 眼下我们只能解决最简单的情况——代数闭域上光滑曲线的上同调, 我们主要关心的是它上面挠层的上同调. 本节我们讨论挠层里的基石—— $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -系数的上同调, 求出这个我们根据有限生成 Abel 群就可以得到常值层的上同调, 之后的内容在后续章节阐述.

### 10.1 Brauer 群和 $C_r$ 域一瞥

**定义 10.1.** 考虑所有域  $k$  上的 (有限维) 中心单代数构成的集合  $\text{CSA}_k$ , 定义等价关系为  $A \sim B$  当且仅当存在中心除环  $D$  使得  $A \cong \text{Mat}_m(D), B \cong \text{Mat}_n(D)$ . 定义 Brauer 群为  $\text{Br}(k) := \text{CSA}_k / \sim$ .

**注 10.2.** 由定义,  $\text{Mat}_n(D) \sim D$ .

事实上根据 Wedderburn 定理, 域  $k$  上任何中心单代数都形如  $\text{Mat}_n(D)$ . 也就是说,  $\text{Br}(k)$  给出了  $k$  上中心除环的分类! 结合代数理论告诉我们, 如果  $A$  是中心单代数, 那么  $A \otimes_k k^{\text{sep}} \cong \text{Mat}_n(k^{\text{sep}})$  (参考 Tag 0753). 也就是说, 中心除环平展局部地是局部环, 而这一点能让我们使用 Galois 下降.

此外, 我们还能在一般的概形上定义中心单代数, 也就是所谓的 Azumaya 代数. 伽罗瓦上同调告诉我们  $\text{Br}(k) = H^2(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), (k^{\text{sep}})^*)$ , 根据定理 7.9, 我们有  $\text{Br}(k) = H_{\text{ét}}^2(\text{Spec}(k), \mathbb{G}_m)$ , 于是我们可以通过这个来定义一般概形的 Brauer 群.

**定义 10.3.** 域  $K$  称之为  $C_r$  的, 如果对任何  $0 < d^r < n$  和任何  $d$  次齐次多项式  $f \in K[T_1, \dots, T_n]$ , 都存在不全为零的  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  使得  $f(\alpha) = 0$ .

**命题 10.4.** 若  $K$  是  $C_1$  的, 则  $\text{Br}(K) = 0$ .

证明. 不然, 考虑  $K$  上非平凡的有限维除环  $D$ , 则  $D \otimes_K K^{\text{sep}} \cong \text{Mat}_d(K^{\text{sep}})$ . 考虑行列式映射  $\det : D \otimes_K K^{\text{sep}} \cong \text{Mat}_d(K^{\text{sep}}) \rightarrow K^{\text{sep}}$ . 取  $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ -不变元得到映射  $N : D \rightarrow K$ . 因为  $K$  是  $C_1$  的, 若  $d > 1$ , 则存在非零  $x \in D$  使得  $N(x) = 0$ . 这会推出  $x$  不可逆, 这不可能!  $\square$

**定理 10.5** (Tsen 定理). 代数闭域  $k$  上的  $r$  维代数簇的函数域是  $C_r$  的.

证明.  $\square$

Tsen 定理告诉我们为什么  $C_r$  域的条件如此奇怪. 事实上我们还会使用 Serre 的如下定理:

**定理 10.6** (Serre). 假设对于  $K$ , 若对所有的有限扩张  $K'/K$  都有  $\text{Br}(K') = 0$ , 则对所有  $q \geq 1$  都有

$$H^q(\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K), (K^{\text{sep}})^*) = 0.$$

证明. 参考 Tag 03R8.  $\square$

## 10.2 $\mathbb{G}_{m,X}$ 的上同调

**定理 10.7** (基本正合列). 设  $X$  是整正规概形, 设一般点嵌入为  $g: \eta \rightarrow X$  和余一维点的嵌入  $i_z: z \rightarrow X$ , 则有正合列:

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow g_* \mathbb{G}_{m,\eta} \rightarrow \bigoplus_{\text{codim}(z)=1} i_{z,*} \mathbb{Z}.$$

如果  $X$  光滑, 则也右正合, 进而正合.

证明. 取平展映射  $\phi: U \rightarrow X$ , 不妨设  $U = \text{Spec } A$  连通仿射. 则根据正规性, 这个列限制在  $U_{\text{Zar}}$  上正合:

$$0 \rightarrow A^* \rightarrow K^* \xrightarrow{\oplus v_p} \bigoplus_{\text{ht}(\mathfrak{p})=1} \mathbb{Z}.$$

故我们得到正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow g_* \mathbb{G}_{m,\eta} \rightarrow \bigoplus_{\text{codim}(z)=1} i_{z,*} \mathbb{Z}.$$

当  $X$  光滑, 因为此时 Weil 除子和 Cartier 除子重合, 因此局部主, 故而右正合.  $\square$

**引理 10.8.** 设  $k$  是代数闭域且  $K/k$  是超越度为 1 的域扩张, 则对  $r \geq 1$  有

$$H_{\text{ét}}^r(\text{Spec } K, \mathbb{G}_m) = 0.$$

证明. 根据定理 7.9, 只需考虑  $H^q(\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K), (K^{\text{sep}})^*)$ . 再根据定理 10.6 我们只需证明对所有的有限扩张  $K'/K$  都有  $\text{Br}(K') = 0$ . 设  $K' = \varinjlim K''$  为在  $k$  上超越度为 1 的有限生成扩张, 故  $\text{Br}(K') = \varinjlim \text{Br}(K'')$ . 于是只需考虑  $k$  上超越度为 1 的有限生成扩张. 根据 Tsen 定理 10.5, 我们得知这样的域都是  $C_1$  的, 再根据命题 10.4 即可得到结论.  $\square$

**定理 10.9.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的光滑射影曲线, 则

$$H_{\text{ét}}^q(X, \mathbb{G}_{m,X}) = \begin{cases} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* & q = 0, \\ \text{Pic}(X) & q = 1, \\ 0 & q \geq 2. \end{cases}$$

证明. 根据推论 8.22, 只需要考虑  $q \geq 2$  的情况.

• **步骤 1.** 对任何  $q \geq 1$ , 考虑一般点嵌入  $j: \eta \rightarrow X$ , 则  $R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta} = 0$ .

考虑茎即可. 考虑闭点  $\bar{x} \rightarrow X$ , 取仿射邻域  $\text{Spec } A$ , 设  $K = \text{Frac}(A)$ , 则

$$(\text{Spec } \mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}) \times_X \eta = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}} \otimes_A K),$$

其中后者是 DVR 的局部化. 由于现在极大理想生成元可逆, 故

$$\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}} \otimes_A K = \text{Frac}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}) =: K_{\bar{x}}^{\text{sh}}.$$

因此  $(R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{x}} = H_{\text{ét}}^q(\text{Spec } K_{\bar{x}}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m)$ . 根据引理 10.8 得到结论.

若一般点, 考虑几何点  $\bar{\eta}$ , 则  $\mathcal{O}_{\bar{\eta}}^{\text{sh}} = \kappa(\eta)^{\text{sep}}$ , 故

$$\begin{aligned} (R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{\eta}} &= H_{\text{ét}}^q(\text{Spec}(\kappa(\eta)^{\text{sep}}) \times_X \eta, \mathbb{G}_m) \\ &= H_{\text{ét}}^q(\text{Spec}(\kappa(\eta)^{\text{sep}}), \mathbb{G}_m) \\ &= H_{\text{ét}}^q(\text{Gal}(\kappa(\eta)^{\text{sep}}/\kappa(\eta)^{\text{sep}}), (\kappa(\eta)^{\text{sep}})^*) = 0, \end{aligned}$$

于是步骤 1 成立.

- **步骤 2.** 对任何  $q \geq 1$ , 有  $H_{\text{ét}}^q(X, j_* \mathbb{G}_{m, \eta}) = 0$ .

根据定理9.6得到

$$E_2^{p,q} = H_{\text{ét}}^p(Y, R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}).$$

再根据引理10.8得到当  $p+q \geq 1$  时有  $H_{\text{ét}}^{p+q}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$ . 取  $q = 0$  再利用步骤 1 即可得到步骤 2.

- **步骤 3.** 对任何  $q \geq 1$  和闭点嵌入  $i_x: x \rightarrow X$ , 有  $H_{\text{ét}}^q(X, \bigoplus_{x \text{ 闭点}} i_{x,*} \mathbb{Z}) = 0$ .

只需证明对闭点嵌入  $i_x: x \rightarrow X$  和  $q > 0$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, i_{x,*}\mathbb{Z}) = 0$ . 根据推论 9.5 和定理 9.6 得到  $H_{\text{ét}}^q(X, i_{x,*}\mathbb{Z}) = H_{\text{ét}}^q(x, \mathbb{Z})$ . 由于代数闭, 步骤 3 成立.

- 步骤 4. 完成证明.

根据步骤 2 和步骤 3 还有正合列 10.7 即可得到结论.

### 10.3 $\mu_{n,X}$ 的上同调

**引理 10.10.** 若概形  $X$  在基概形  $\mathrm{Spec} A$  上, 其中  $A$  是严格 Hensel 局部环且  $n \in A^*$ , 则  $\mu_{n,X} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}_X$ .

证明. 因为  $\mu_{n,X} = \underline{\mathrm{Spec}}_X \mathcal{O}_X[t]/(t^n - 1)$ , 由于严格 Hensel, 多项式  $t^n - 1$  会分裂. 故得到平凡的平展覆盖  $\mu_{n,X} \rightarrow X$ , 则  $\mu_{n,X} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}_X$  (参考 [7] 命题 7.2.2).  $\square$

**定理 10.11.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的亏格  $g$  光滑射影曲线, 且  $n \in k^*$ , 则

$$H_{\text{ét}}^q(X, \mu_{n,X}) = \begin{cases} \mu_n(k) & q = 0, \\ \text{Pic}^0(X)[n] & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \geq 3. \end{cases}$$

$$\text{根据引理10.10我们有 } H_{\text{ét}}^q\left(X, \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 0, \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g} & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \geq 3. \end{cases}$$

证明. 根据 Kummer 正合列5.21和定理10.9引出长正合列为:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \boldsymbol{\mu}_n(k) & \longrightarrow & k^* & \xrightarrow{(-)^n} & k^* \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & & H_{\text{ét}}^1(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \longrightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{(-)^n} \text{Pic}(X) \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & & H_{\text{ét}}^2(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

故当  $q \geq 3$  时  $H_{\text{ét}}^q(X, \mu_{n,X}) = 0$ . 只需考虑  $q = 1, 2$ . 由于代数闭, 映射  $(-)^n : k^* \rightarrow k^*$  是满射, 因此对于  $(-)^n : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ ,  $H_{\text{ét}}^1(X, \mu_{n,X}) = \ker(-)^n$  且  $H_{\text{ét}}^2(X, \mu_{n,X}) = \text{coker}(-)^n$ . 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Pic}^0(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow [n] & & \downarrow (-)^n & & \downarrow \times n \\ 0 & \longrightarrow & \text{Pic}^0(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

根据 Abel 簇的知识我们知道  $[n]$  是满射且  $\ker[n] = \text{Pic}^0(X)[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g}$ . 运用蛇引理即可得到结论.  $\square$

**定理 10.12.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的仿射光滑曲线且  $n \in k^*$ . 取光滑紧化  $X \subset X'$ , 设  $g$  为  $X'$  亏格, 设  $r = \#(X' \setminus X)$ , 则

$$H_{\text{ét}}^q(X, \mu_{n,X}) = \begin{cases} \mu_n(k) & q = 0, \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+r-1} & q = 1, \\ 0 & q \geq 2. \end{cases}$$

证明. 设  $X = X' \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ , 则  $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(X')/R$  其中  $R$  被  $\mathcal{O}_{X'}(x_i)$  生成. 由于  $R$  非空, 则  $\text{Pic}^0(X') \rightarrow \text{Pic}(X)$  是满射, 故  $\text{Pic}(X)$  可除, 因此不难得知  $H_{\text{ét}}^0(X, \mu_{n,X}) = \mu_n(k)$  且当  $q \geq 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mu_{n,X}) = 0$ . 只需证明  $H_{\text{ét}}^1(X, \mu_{n,X}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+r-1}$ .

注意到我们有

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1(X, \mu_{n,X}) &= \{(\mathcal{L}, \alpha) : \mathcal{L} \in \text{Pic}(X), \alpha : \mathcal{L}^{\otimes n} \cong \mathcal{O}_X\} / \cong \\ &= \frac{\{(\mathcal{L}', D, \alpha') : \mathcal{L}' \in \text{Pic}^0(X'), \text{supp}(D) \subset \{x_1, \dots, x_r\}, \alpha' : (\mathcal{L}')^{\otimes n} \cong \mathcal{O}_{X'}(D)\}}{\{(\mathcal{O}_{X'}(D), nD, 1^{\otimes n}) : \deg D = 0, \text{supp}(D) \subset \{x_1, \dots, x_r\}\}}. \end{aligned}$$

则有

$$0 \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(X', \mu_{n,X'}) \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mu_{n,X}) \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus r} \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

其中  $f$  为  $(\mathcal{L}', D = \sum a_i[x_i], \alpha') \mapsto (a_i)_{i=1}^r$ . 运用定理10.11计算秩即可.  $\square$

## 10.4 支撑在点上的上同调

**命题 10.13.** 设  $U$  是代数闭域  $k$  上的光滑曲线且  $n \in k^*$ . 取闭点  $x \in U$ , 则

$$H_{x,\text{ét}}^q(U, \mu_{n,U}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \neq 2. \end{cases}$$

证明. 由推论7.19得知  $H_{x,\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}) \cong H_{x,\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathcal{F})$ . 根据定理10.9得到当  $i > 0$  时

$$H_{\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m) = 0.$$

再根据命题7.17得到正合列

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow H_{x,\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H_{\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m) \\ \searrow \hspace{10em} \nearrow \\ \longrightarrow H_{\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}} \setminus \{x\}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H_{x,\text{ét}}^{i+1}(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

得到对  $i \neq 1$  有

$$H_{\text{ét}}^{i-1}(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}} \setminus \{x\}, \mathbb{G}_m) \cong H_{x,\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m).$$

由于  $\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}} \setminus \{x\} = \text{Spec } K$ , 根据引理10.8我们有当  $i \geq 1$  时

$$H_{\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}} \setminus \{x\}, \mathbb{G}_m) = 0.$$

故

$$H_{x,\text{ét}}^1(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m) = \frac{H_{\text{ét}}^0(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}} \setminus \{x\}, \mathbb{G}_m)}{H_{\text{ét}}^0(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m)} \cong \mathbb{Z},$$

且当  $i \neq 1$  时候有  $H_{x,\text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{U,x}^{\text{sh}}, \mathbb{G}_m) = 0$ . 再根据 Kummer 正合列即可得到结论.  $\square$

## 11 可构建层和挠层

### 11.1 可构建层

**定义 11.1.** 设  $X$  是概形, 设  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  称为可构建的, 如果任取仿射开集  $U \subset X$ , 存在有限分解  $U = \coprod_i U_i$  为可构建局部闭集使得  $\mathcal{F}|_{U_i}$  是有限局部常值层.

**注 11.2.** 对  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  也同理定义, 但对一般的  $\Lambda$ -模层, 需定义  $\mathcal{F}|_{U_i}$  是有限型的局部常值层.

**命题 11.3.** 设概形  $X$  是拟紧拟分离且  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  (或  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  和  $\Lambda$ -模层, 这时需假设  $\Lambda$  诺特), 则  $\mathcal{F}$  可构建当且仅当存在开覆盖  $X = \bigcup_i U_i$  使得  $\mathcal{F}|_{U_i}$  可构建当且仅当存在分解  $X = \bigcup_i U_i$  可构建局部闭集使得  $\mathcal{F}|_{U_i}$  是有限局部常值层.

证明. 纯粹的点集拓扑和层论, 参考Tag 095E.  $\square$

**命题 11.4.** (i) 设  $f: X \rightarrow Y$  是概形映射, 令  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$  (或  $\text{Ab}(Y_{\text{ét}})$  和  $\Lambda$ -模层, 其中  $\Lambda$  诺特) 是可构建的, 则  $f^{-1}\mathcal{F}$  也是可构建的;

(ii) 设  $X$  是概形, 则  $\text{Sh}(X_{\text{ét}})$  内的可构建层关于有限极限和余极限封闭, 若为  $\text{Ab}(Y_{\text{ét}})$  和  $\Lambda$ -模层 (其中  $\Lambda$  诺特), 则为弱 Serre 子范畴 (若  $X$  诺特, 则可为强 Serre 子范畴);

(iii) 若  $X$  拟紧拟分离, 若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  (或  $\Lambda$ -模层, 其中  $\Lambda$  诺特) 可构建, 则  $\text{supp}(\mathcal{F})$  也可构建.

证明. 纯粹的点集拓扑和层论, 参考Tag 095G, Tag 03RZ, Tag 09YS 和Tag 098H.  $\square$



**引理 11.5.** 设  $j: U \rightarrow X$  是拟紧拟分离概形间的平展映射, 则

(i) 层  $h_U$  可构建;

(ii) 对于有限 *Abel* 群  $M$  (或  $\Lambda$ -模, 其中  $\Lambda$  诺特), 层  $j_! M_U$  可构建.

证明. 运用如下结论:

• **事实.** 若  $U \rightarrow X$  是拟紧拟分离概形间的平展映射, 则存在有限分解  $X = \coprod_i X_i$  为可构建局部闭集使得  $\pi_i: X_i \times_X U \rightarrow X_i$  是有限平展映射. (参考Tag 03S0)

(i) 根据这个事实和命题5.17即可得到结论.

(ii) 运用命题6.9(i) 和命题6.8(iii) 可以得到

$$(j_! M_U)|_{X_i} = \pi_{i,!} M = \pi_{i,*} M.$$

此时  $\pi_i$  有限平展, 则根据直像是平展局部的且引理5.16(ii), 因此  $\pi_{i,*} M$  必然是有限局部常值.  $\square$

**命题 11.6.** 设概形  $X$  拟紧拟分离. 若  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  (或  $\Lambda$ -模, 其中  $\Lambda$  诺特), 则  $\mathcal{F}$  是可构建层的滤余极限.

证明. 我们需要如下结论 (参考Tag 093C):

• **事实 1.** 任何  $\text{Sh}(X_{\text{ét}})$  内的层都可以写成

$$\text{Coequalizer} \left( \coprod_{j=1, \dots, m} h_{V_j} \rightrightarrows \coprod_{i=1, \dots, n} h_{U_i} \right)$$

其中  $V_j, U_i$  均为  $X_{\text{ét}}$  内的拟紧拟分离元.

• **事实 2.** 任何  $(\Lambda \text{ 诺特})\Lambda$ -模都可以写成

$$\text{coker} \left( \coprod_{j=1, \dots, m} j_{V_j,!} \underline{\Lambda}_{V_j} \longrightarrow \coprod_{i=1, \dots, n} j_{U_i,!} \underline{\Lambda}_{U_i} \right)$$

其中  $V_j, U_i$  均为  $X_{\text{ét}}$  内的拟紧拟分离元.

故根据命题11.4和引理11.5即可得到.  $\square$

## 11.2 挠层

**定义 11.7.** 设  $X$  是概形, 设  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 如果任何  $\mathcal{F}(U)$  是挠群, 则称其为挠层.

**命题 11.8.** 若  $f: X \rightarrow Y$  拟紧拟分离, 则若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是挠层, 则  $R^n f_* \mathcal{F}$  也是挠层.

证明. 注意到

$$R^n f_* \mathcal{F} = (U \mapsto H_{\text{ét}}^n(U \times_Y X, \mathcal{F}))^\sharp.$$

可以取仿射  $V$  使得  $X \times_Y V$  是拟紧拟分离的 (因为  $f$  是如此). 因此只需要证明若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是挠层且  $X$  拟紧拟分离, 则  $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})$  是挠群. 设  $\mathcal{F} = \bigcup_d \mathcal{F}[d]$  其中  $\mathcal{F}[d]$  是  $d$ -挠元的部分, 根据定理7.12我们有

$$H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_d H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}[d]).$$

而  $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}[d])$  也是  $d$ -挠群, 故成立.  $\square$

**命题 11.9.** 若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是挠层, 则  $\mathcal{F}$  是可构建层的滤余极限.

证明. 设  $\mathcal{F} = \bigcup_d \mathcal{F}[d]$  其中  $\mathcal{F}[d]$  是  $d$ -挠元的部分, 视  $\mathcal{F}[d]$  为  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ -模. 根据命题 11.6 即可得到结论.  $\square$

**注 11.10.** 若  $X$  诺特, 任取  $E$  在特殊化下稳定, 如果挠层  $\mathcal{F}$  在  $E$  上支撑, 那么其可以写为在  $E$  上支撑的可构建层的滤余极限. 这是因为命题 11.4 知道每个  $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$  的像  $\mathcal{F}'_i$  均为可构建, 则  $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}'_i$ . 其支集可构建且在  $E$  内, 则闭包也是如此.

## 12 曲线的上同调 II——挠层的上同调

### 12.1 迹映射方法基础

考虑  $\text{Ab}((-)_{\text{ét}})$  内的函子. 对于平展映射  $f: Y \rightarrow X$ , 有伴随对  $(f_!, f^{-1})$  和  $(f^{-1}, f_*)$ . 因此得到映射  $\text{id} \rightarrow f_* f^{-1}$  和  $f_! f^{-1} \rightarrow \text{id}$ .

**定义 12.1.** 根据命题 6.8(iii), 当  $f$  有限平展时  $f_* = f_!$ , 因此有映射  $f_* f^{-1} \rightarrow \text{id}$ , 称之为迹映射.

**命题 12.2.** 设  $f: Y \rightarrow X$  有限平展, 则迹映射被如下性质所决定:

- (a) 和  $X$  上的平展局部化交换;
- (b) 若  $Y = \coprod_{i=1}^d X$ , 则迹映射是求和映射  $f_* f^{-1} \mathcal{F} = \mathcal{F}^{\oplus d} \rightarrow \mathcal{F}$ .

证明. 根据引理 5.16, 用 (a) 考虑平展局部上自然是 (b) 中的情况.  $\square$

**命题 12.3** (迹映射方法). 设  $f: Y \rightarrow X$  处处满足  $\deg f = d$ , 则不难看出  $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  是乘  $d$  映射. 如果  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  满足乘  $d$  映射是同构, 则有单射

$$H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow H_{\text{ét}}^n(Y, f^{-1} \mathcal{F}).$$

特别的, 如果  $H_{\text{ét}}^n(Y, f^{-1} \mathcal{F}) = 0$ , 则  $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) = 0$ .

证明. 注意到因为  $f$  有限, 则  $H_{\text{ét}}^n(Y, f^{-1} \mathcal{F}) = H_{\text{ét}}^n(X, f_* f^{-1} \mathcal{F})$ . 乘  $d$  映射诱导

$$H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(Y, f^{-1} \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{F})$$

是同构, 于是成立.  $\square$

### 12.2 挠层的上同调

**定理 12.4.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的分离有限型一维概形且  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是挠层, 则

- (i) 对任何  $q > 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ ;
- (ii) 若  $X$  仿射, 则对任何  $q > 1$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ ;
- (iii) 若  $p = \text{char}(k) > 0$  且  $\mathcal{F}$  是  $p$ -幂次挠层, 则对任何  $q > 1$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ ;
- (iv) 如果  $\mathcal{F}$  是可构建层且和  $\text{char}(k)$  互素的挠层, 则  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F})$  有限;
- (v) 如果  $\mathcal{F}$  是可构建层且  $X$  紧合, 则  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F})$  有限;
- (vi) 对任何代数闭扩张  $K/k$ , 如果  $\mathcal{F}$  是  $\text{char}(k)$  互素的挠层, 则  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^q(X_K, \mathcal{F}|_{X_K})$ ;
- (vii) 对任何代数闭扩张  $K/k$ , 如果  $X$  是紧合, 则  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^q(X_K, \mathcal{F}|_{X_K})$ ;
- (viii) 对任何开集  $U \subset X$ , 映射  $H_{\text{ét}}^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(U, \mathcal{F})$  是满射.

参考Tag 03SB. 这是本节最重要的结论, 这些命题的证明事实上是殊途同归的, 我们只以 (i) 和 (iii) 在光滑的情况下来举例说明. 对于不光滑的情况, 取概形的既约结构, 因为是一个加厚所以不改变上同调. 然后取正规化, 我们总能得到一个交换图和一些函子运算的交换性. 最后, 把曲线分解成连通分支即可, 更多细节我们不在介绍.

这里按照惯例我们定义局部系为有限局部常值层, 记作  $\text{Loc}(X)$ . 我们首先证明如下结论:

**定理 12.5.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的光滑曲线且  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是挠层 (且挠部分在  $k$  中可逆), 则对  $q > 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ .

**引理 12.6.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的光滑曲线且局部系  $\mathcal{F}$  的挠部分在  $k$  中可逆, 则对  $q > 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ .

证明. 设  $\ell$  在  $k$  中可逆, 如果  $\mathcal{F}$  是一个  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -层, 即对于每个平展开集  $U$ , 层  $\mathcal{F}(U)$  是  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$  线性空间. 对于某个  $k$  中可逆的  $d$ , 取  $d$  次平展覆叠  $\pi: U \rightarrow X$  使得  $\mathcal{F}|_U$  是常值层. 由于是线性空间上, 故乘  $d$  为同构, 根据命题12.3 和定理10.11, 我们得知对  $q > 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ .

一般地, 将  $\mathcal{F}$  分解成  $\mathcal{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_r$ , 其中  $\mathcal{F}_i$  被  $\ell_i$  的幂次消灭,  $\mathcal{F}$  被某个  $\ell$  的幂次消灭. 最后, 记  $\mathcal{F}[\ell]$  为  $\mathcal{F}$  的  $\ell$ -挠部分, 考虑正合列  $0 \rightarrow \mathcal{F}[\ell] \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}[\ell] \rightarrow 0$ , 然后归纳即可.  $\square$

**引理 12.7.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的光滑曲线且可构建层  $\mathcal{F}$  的挠部分在  $k$  中可逆, 根据点集拓扑推导不难得知存在稠密开浸入  $j: U \rightarrow X$  使得  $\mathcal{F}|_U \in \text{Loc}(U)$ . 考虑下面命题等价:

- (a) 对  $q > 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ ;
- (b) 对  $q > 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, j_! j^{-1} \mathcal{F}) = 0$ .

证明. 设  $Z = X \setminus U$  和  $i: Z \rightarrow X$ , 根据命题6.10有正合列

$$0 \rightarrow j_! j^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^{-1} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

注意到  $H_{\text{ét}}^q(X, i_* i^{-1} \mathcal{F}) = H^q(Z, i^{-1} \mathcal{F})$  且  $Z$  是代数闭域的谱的乘积, 因此诱导长正合列即可得到证明.  $\square$

定理12.5的证明. 根据命题11.9, 只需考虑可构建层的情况. 再根据引理12.7, 我们只需证明: 对稠密开浸入  $j: U \rightarrow X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Loc}(U)$ , 对  $q > 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, j_! \mathcal{F}) = 0$ .

再次使用迹映射方法, 取合适的有限平展覆盖  $g: V \rightarrow U$ , 只需考虑形如  $j_! g_* g^{-1} \mathcal{F}$  的上同调且使得  $g^{-1} \mathcal{F}$  是常值层. 由 Zariski 主定理, 有分解

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ a \nearrow & & \searrow b \\ V & & X \\ g \searrow & & \nearrow j \\ & U & \end{array}$$

为开浸入  $a$  和有限态射  $b$  的复合. 不难验证得到  $j_! g_* = b_* a_!$ , 只需要证明对  $q > 2$  有  $H_{\text{ét}}^q(Y, a_! \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$ , 其中  $\ell$  在  $k$  里可逆. 只需要考虑  $a_! a^{-1} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ , 根据引理12.7和引理12.6.  $\square$

再考虑如下:

**定理 12.8.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的光滑曲线, 设  $p = \text{char}(k) > 0$  且  $\mathcal{F}$  是  $p$ -幂次挠层, 则对任何  $q > 1$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0$ .

**引理 12.9.** 设  $k$  是一个特征  $p$  代数闭域, 设  $V$  是有限维  $k$ -线性空间. 设线性映射  $F: V \rightarrow V$  是加性的且  $F(ax) = a^p F(x)$ . 那么  $F - \text{id}: V \rightarrow V$  是满射.

证明. 交换代数, 参考Tag 0A3L. □

**命题 12.10.** 设  $X/k$  是  $d$  维紧合概形, 那么对于  $q > d$ , 有  $H_{\text{ét}}^q(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$ .

证明. 考虑 Artin-Schreier 正合列定理5.22:

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow 0.$$

诱导长正合列为

$$\cdots \rightarrow H_{\text{ét}}^d(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{F_{\text{id}}} H_{\text{ét}}^d(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H_{\text{ét}}^{d+1}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots.$$

其中根据定理8.14和 Grothendieck 消灭定理得知当  $q > d$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ , 因此之后的项是 0. 因此当  $q > d + 1$  时  $H_{\text{ét}}^q(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$ . 再根据引理12.9得到  $H_{\text{ét}}^{d+1}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$ , 于是得到结果. □

定理12.8的证明. 类似定理12.5的证明, 化归到局部系, 然后再到可构建层即可, 略去. □

事实上定理12.4的某些可以减弱至可分闭域:

**命题 12.11** (参考Tag 0A5E). 设  $K/k$  是可分闭域的扩张, 设  $X$  在  $\text{Spec } k$  上紧合且维数不大于 1, 则对挠层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  有  $H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^q(X_K, \mathcal{F}|_{X_K})$ .

### 13 上同调维数 I——一般情况

**定义 13.1.** 对于概形  $X$ , 定义其 (平展) 上同调维数为

$$\text{cd}(X) := \min\{d : \text{对于所有挠 Abel 层 } \mathcal{F} \text{ 都有当 } q > d \text{ 时有 } H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) = 0\}$$

或者  $\text{cd}(X) = \infty$ .

**引理 13.2** (Tate). 设  $L/K$  是域扩张, 那么  $\text{cd}(L) \leq \text{cd}(K) + \text{trdeg}(L/K)$ .

证明. 首先断言: 若  $X$  是  $K$  上的一维代数概形, 则  $\text{cd}(X) \leq \text{cd}(K) + 1$ . 对  $f: X \rightarrow \text{Spec } K$  和挠层  $\mathcal{F}$  用 Leray 谱序列

$$E_2^{p,q} = H_{\text{ét}}^p(\text{Spec } K, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

注意到对于几何点  $\bar{x}: \text{Spec } \bar{K} \rightarrow \text{Spec } K$ , 由推论9.4 有  $(R^q f_* \mathcal{F})_{\bar{x}} = H^q(X_{\bar{K}}, \mathcal{F})$ . 当  $q > 1$  时由定理12.4知为 0. 分析谱序列得到断言成立.

回到引理本身. 若  $\text{trdeg}(L/K) = \infty$  则显然成立. 当超越度有限时, 根据归纳法不妨设  $\text{trdeg}(L/K) = 1$ . 设  $L = \varinjlim_i A_i$  是一些有限生成  $K$  代数的滤余极限, 这些  $A_i$  的维数都不超过 1. 再利用断言和定理7.12即可得到结论. □

**定理 13.3.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的代数簇, 则  $\text{cd}(X) \leq 2 \dim X$ .

证明. 固定一个挠层  $\mathcal{F}$ , 用归纳法.

- **步骤 1.** 对一般点含入  $j: \eta \rightarrow X$ , 划归到形如  $j_*\mathcal{F}$  的情况.

注意到映射  $\mathcal{F} \rightarrow j_*j^{-1}\mathcal{F}$  诱导同构  $(\mathcal{F})_\eta \cong (j_*j^{-1}\mathcal{F})_\eta$ . 其核和余核都是支撑在维数更小的闭子概形上的层. 根据归纳假设只需要证明  $j_*\mathcal{F}$  的情况.

- **步骤 2.**  $R^q j_*\mathcal{F}$  支撑在维数  $\dim X - q$  的子簇上.

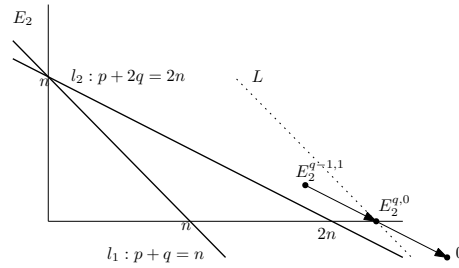
对于  $X$  的任何不可约闭子簇  $Z$ , 设  $Z$  的一般点为  $\xi$ , 然后选择一个几何点  $\bar{\xi} \rightarrow \xi \rightarrow Z$ . 注意到由推论 9.4 得到  $(R^q j_*\mathcal{F})_{\bar{\xi}} = H^q(\text{Frac}(\mathcal{O}_{\bar{\xi}}^{\text{sh}}), \mathcal{F})$ . 由于  $\text{Frac}(\mathcal{O}_{\bar{\xi}}^{\text{sh}})/\text{Frac}(\mathcal{O}_{\bar{\xi}})$  是代数扩张 (因为其为有限扩张的极限), 注意到

$$\text{trdeg}(\text{Frac}(\mathcal{O}_{\bar{\xi}})/k) = \dim X - \dim Z,$$

根据引理 13.2 得知成立.

- **步骤 3.** 完成证明.

考虑 Leray 谱序列  $E_2^{p,q} = H_{\text{ét}}^p(X, R^q j_*\mathcal{F}) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(\eta, \mathcal{F})$  如图 ( $n = \dim X$ ):



根据归纳, 当  $p > 2(n - q)$  且  $q > 0$  时  $E_2^{p,q} = 0$ ; 由引理 13.2 知当  $p + q > n$  时  $H_{\text{ét}}^{p+q}(\eta, \mathcal{F}) = 0$ . 故在图中  $l_1$  右方区域均收敛至 0, 在  $l_2$  右方的区域均为零. 于是考虑当  $p > 2 \dim X$  时有  $E_2^{p-1,1} = 0$ , 故  $E_2^{p,0} = E_{\infty}^{p,0}$ . 在虚线  $L$  上全部收敛至 0, 因此  $E_2^{p,0} = 0$ , 则证明完毕.  $\square$

## 14 紧合基变换和光滑基变换

### 14.1 经典拓扑里的紧合基变换

**定义 14.1.** 连续映射  $f: X \rightarrow S$  称为紧合的如果  $f$  是万有闭的且  $\Delta: X \rightarrow X \times_S X$  是闭映射. 如果  $f$  紧合当且仅当紧集的逆像仍然是紧的, 我们称  $f$  是拟紧合 (更多的参考 Tag 005M).

**引理 14.2.** 设  $f: X \rightarrow Y$  是紧合映射, 则对于任何  $X$  上的层  $\mathcal{F}$  和点  $y \in Y$  都有

$$(Rf_*\mathcal{F})_y \cong R\Gamma(X_y, \mathcal{F}|_{X_y}),$$

其中  $X_y = f^{-1}(y)$ .

证明. 我们需要如下结论 (参考 Tag 09V3):

• 设  $Z$  是空间  $X$  的紧子集使得任何两个  $Z$  内的点都有  $X$  内的不交开邻域包含它们, 则对层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X)$  都有  $\varinjlim_{U \supset Z} H^r(U, \mathcal{F}) \cong H^r(Z, \mathcal{F}|_Z)$ .

回到引理本身. 取内射预解用伴随性不难得到映射  $(Rf_*\mathcal{F})_y \rightarrow R\Gamma(X_y, \mathcal{F}|_{X_y})$ . 取内射预解  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$ , 由于  $\mathcal{I}^*|_{X_y}$  是  $\Gamma(X_y, -)$ -零调的, 故  $R\Gamma(X_y, \mathcal{F}|_{X_y})$  可被  $\Gamma(X_y, \mathcal{I}^*|_{X_y})$  表示, 故只需证明同构

$$\varinjlim_V \mathcal{I}^*(f^{-1}(V)) \cong \Gamma(X_y, \mathcal{I}^*|_{X_y}).$$

注意到如果  $X_y \subset U$  是开邻域, 由于  $f$  闭, 则设  $V = Y \setminus f(X \setminus U)$  就得到  $f^{-1}(V) \subset U$ , 进而此系统共尾, 因此根据上述结论即可得到结论.  $\square$

**定理 14.3** (拓扑紧合基变换). 设  $f: X \rightarrow Y$  是紧合的映射, 设  $g: Y' \rightarrow Y$  是连续映射, 考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' := X \times_Y Y' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

则对层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X)$  都有  $g^{-1}(Rf_*\mathcal{F}) \cong Rf'_*((g')^{-1}\mathcal{F})$ .

证明. 取内射预解用伴随性不难得到所述映射, 故只需在茎上证明同构即可. 取  $y' \in Y$  在  $y \in Y$  上, 根据引理14.2得到同构

$$(Rf'_*((g')^{-1}\mathcal{F}))_{y'} = R\Gamma((f')^{-1}(y'), (g')^{-1}\mathcal{F}|_{(f')^{-1}(y')})$$

和

$$(Rf_*\mathcal{F})_y = R\Gamma(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)})$$

于是同构是显然的, 故成立.  $\square$

## 14.2 紧合基变换的叙述和证明

但平展上同调的紧合基变换类比没有那么容易.

**引理 14.4.** 对概形的紧合映射  $f: X \rightarrow S$  和几何点  $\bar{s} \rightarrow S$ , 对任意的  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  都有双射

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{s}} \rightarrow \Gamma(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}_{\bar{s}}).$$

证明. 这个需要 Hensel 对的一些结果, 见 Tag 0A3T.  $\square$

**引理 14.5.** 设  $\ell$  是任一素数且  $A$  是严格 Hensel 局部环, 设  $X \rightarrow \text{Spec}(A)$  紧合, 那么对于挠层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  有

$$H_{\text{ét}}^q(X, \mathcal{F}) \cong H_{\text{ét}}^q(X_0, \mathcal{F}|_{X_0}),$$

其中  $X_0$  是特殊纤维.

证明. 这个结论颇为复杂, 直接证明需要 Artin 逼近等技术, 我们略去. 读者可以用紧合基变换来推出它 (其实和紧合基变换等价). 而 [12] 内只证明了  $\mathbb{F}_\ell$ -模层且  $X = \mathbb{P}_A^1$  的情况 (我们也只需要这个条件), 我们简述一下这种情况: 取  $\mathbb{F}_\ell$ -模内射预解  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^*$ , 可以证明  $\mathcal{F}^*|_{X_0}$  是  $\mathcal{F}|_{X_0}$  的右  $H_{\text{ét}}^0(X_0, -)$ -零调的 (参考 Tag 0A5H), 于是  $H_{\text{ét}}^q(X_0, \mathcal{F}|_{X_0})$  可以由  $H_{\text{ét}}^0(X_0, \mathcal{F}|_{X_0})$  得到, 再由引理 14.4 即可得到结论.  $\square$

**注 14.6.** 在复几何里有一个给予动机的类比 (证明见 [13] 定理 9.3):

• *Ehresmann* 定理. 设  $f : \mathcal{X} \rightarrow (B, 0)$  是微分流形之间的紧合浸没, 其中  $B$  是可缩的流形且  $0$  是其上的一个基点. 则存在微分同胚  $T : \mathcal{X} \cong \mathcal{X}_0 \times B$  使得对投影  $p : \mathcal{X}_0 \times B \rightarrow B$  满足  $p \circ T = f$ . 因此在此种情况下有同伦等价  $\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}_0$ , 因此有相同的上同调.

**定理 14.7** (紧合基变换). 设  $f : X \rightarrow Y$  是概形间的紧合映射, 对任何概形映射  $g : Y' \rightarrow Y$  和纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' := X \times_Y Y' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

对任何挠层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 都有同构

$$g^{-1} Rf_* \mathcal{F} \longrightarrow Rf'_*(g')^{-1} \mathcal{F}.$$

证明. 我们需要如下几个步骤来得到证明.

• **步骤 1.** 先证明不导出的情况对任意的  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  成立.

映射不难由伴随性给出, 同构只需要在茎上验证, 根据引理 14.4 即可得到结论.

• **步骤 2.** 研究几个基变换的重要关系.

为了方便, 如果对所有  $S' \rightarrow S$  和基变换  $X \times_S S'$  和挠层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  都满足定理的结论, 我们就称  $f : X \rightarrow S$  和上同调的基变换交换. 则我们有如下结论:

•• (a) 紧合映射  $f : X \rightarrow Y$  和上同调的基变换交换当且仅当对任何素数  $\ell$  和内射  $\mathbb{F}_\ell$ -模层  $\mathcal{S} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  和任何  $Y' \rightarrow Y$  和定理的基变换  $X \times_Y Y'$ , 对任何  $q > 0$  都有层  $R^q f'_*(g')^{-1} \mathcal{S} = 0$ .

这个不太困难, 首先设  $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}[n]$ , 根据定理 7.12 不难得出高阶直像和滤余极限交换, 而逆像本来就交换, 因此只需要假设  $\mathcal{F}$  被某个  $n$  零化. 取素数  $\ell | n$ , 考虑

$$0 \rightarrow \mathcal{F}[\ell] \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}[\ell] \rightarrow 0,$$

运用 5-引理, 只需对  $\mathcal{F}[\ell], \mathcal{F}/\mathcal{F}[\ell]$  证明即可. 不断重复这一步骤, 则不妨设  $\mathcal{F}$  被某个素数  $\ell$  零化. 取  $\mathbb{F}_\ell$ -模内射预解  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^*$ , 只需证明对  $\mathcal{F}^*$  运用步骤 1 即可.

•• (b) 若  $f : X \rightarrow Y$  有限, 则其和上同调的基变换交换.

这个基本上平凡, 运用 (a) 和推论 9.5 即可得到结果.

•• (c) 对紧合映射  $f : X \rightarrow Y$  和  $g : Y \rightarrow Z$ , 若  $f, g$  都和上同调的基变换交换, 则  $g \circ f$  也是如此;

•• (d) 对紧合映射  $f : X \rightarrow Y$  和  $g : Y \rightarrow Z$ , 若  $f, g \circ f$  都和上同调的基变换交换且  $f$  是满射, 则  $g$  也是如此.

(b)(c) 证明类似, 运用相对 Leray 谱序列即可, 参考Tag 0A4C 和Tag 0A4D, 我们略去.

• **步骤 3.** 将问题划归到 (相对) 射影空间.

根据命题9.2, 我们可以考虑 Zariski 局部, 于是不妨设  $Y$  仿射. 由 Chow 引理得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\pi} & X'' & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n \\ & \searrow f & \downarrow f'' & \swarrow & \\ & & Y & & \end{array}$$

其中  $\pi$  是 (H-) 射影满射且  $f''$  是紧合映射. 根据步骤 2 的 (b), 则  $i$  和上同调的基变换交换. 如果我们证明了对形如  $\mathbb{P}_S^n \rightarrow S$  的映射也和上同调的基变换交换, 那么根据步骤 2 的 (c) 得到  $f'', \pi$  和上同调的基变换交换, 再根据步骤 2 的 (d), 我们就得到了  $f$  和上同调的基变换交换. 因此问题划归到了形如  $\mathbb{P}_S^n \rightarrow S$  的映射.

• **步骤 4.** 将问题划归到 (相对) 射影直线.

注意到对于  $n > 0$ , 有有限满射

$$\mathbb{P}_S^1 \times_S \cdots \times_S \mathbb{P}_S^1 \rightarrow \mathbb{P}_S^n$$

为  $((x_1 : y_1), (x_2 : y_2), \dots, (x_n : y_n)) \mapsto (F_0 : \dots : F_n)$ , 其中  $F_i$  是  $x_i, y_i$  的整系数多项式满足

$$\prod_i (x_i t + y_i) = F_0 t^n + F_1 t^{n-1} + \dots + F_n.$$

因此根据步骤 2 的 (c) 和 (d) 只需要考虑  $\mathbb{P}_S^1 \rightarrow S$  的情况.

• **步骤 5.** 完成证明.

对任何  $g : T \rightarrow S$  和  $\mathcal{F}$  是  $\mathbb{F}_\ell$  模层 (根据步骤 2 的 (a) 的证明, 只需考虑这种情况), 观察交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_T^1 & \xrightarrow{g'} & \mathbb{P}_S^1 \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

只需要在茎上验证. 首先注意到对几何点  $\bar{s}' \rightarrow S$ , 根据引理14.5和推论9.4我们有

$$(R^q f_* \mathcal{F})_{\bar{s}'} = H^q(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_{S, \bar{s}'}}^1, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}_{\mathcal{O}_{S, \bar{s}'}}^1}) = H^q(\mathbb{P}_{\kappa(\bar{s}')^{\text{sep}}}^1, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}_{\kappa(\bar{s}')^{\text{sep}}}^1}).$$

因此考虑几何点  $\bar{t} \rightarrow T$ , 设  $\bar{s} = g(\bar{t})$ , 考虑映射  $g^{-1} R^q f_* \mathcal{F} \rightarrow R^q f'_*(g')^{-1} \mathcal{F}$  的茎为

$$H^q(\mathbb{P}_{\kappa(\bar{s})^{\text{sep}}}^1, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}_{\kappa(\bar{s})^{\text{sep}}}^1}) \rightarrow H^q(\mathbb{P}_{\kappa(\bar{t})^{\text{sep}}}^1, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}_{\kappa(\bar{t})^{\text{sep}}}^1}).$$

根据命题12.11即可得到结论. □



### 14.3 紧合基变换的应用

**命题 14.8** (相对上同调维数). 若紧合概形映射  $f: X \rightarrow Y$  满足纤维维数  $\leq n$ , 则对所有挠层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  都有当  $q > 2n$  时  $R^q f_* \mathcal{F} = 0$ .

证明. 当  $n = 0$  时, 因为紧合且拟有限, 则  $f$  有限, 故命题由推论9.5得到.

当  $n > 0$  时, 只需要证明茎为零即可. 对几何点映射运用紧合基变换14.7和上同调维数的结果13.3即可得到结论.  $\square$

**引理 14.9.** 设概形  $X$  拟紧拟分离, 设  $\mathcal{E} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  且  $A \in \text{AbGrps}$ , 则

$$R\Gamma(X, \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} A) = R\Gamma(X, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} A.$$

证明. 更一般的情况考虑Tag 0F0E. 参照上述 Tag 里的证明, 可以不妨设  $A$  是平坦  $\mathbb{Z}$ -模. 因此只需证明当  $A$  是平坦  $\mathbb{Z}$ -模时有  $H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} A) = H_{\text{ét}}^n(X, \mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} A$ . 根据一个有趣的代数结论, 即平坦模都可以写成有限自由模的滤余极限 (Lazard 定理, 参考Tag 058G), 故而不妨设  $A$  是有限自由  $\mathbb{Z}$ -模, 而此时结论显然成立.  $\square$

**命题 14.10.** 假设  $f: X \rightarrow Y$  紧合, 对任何挠层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  和层  $\mathcal{G} \in \text{Ab}(Y_{\text{ét}})$ , 我们有

$$Rf_* \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathcal{G} = Rf_*(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{G}).$$

证明. 更一般的情况考虑Tag 0F0F. 映射不难由伴随性给出, 因此只需要在茎上验证. 首先注意到

$$(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} f^{-1} \mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q} = (\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{L}} (f^{-1} \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q}) = 0,$$

则满足紧合基变换的条件, 因此运用定理14.7和引理14.9即可.  $\square$

### 14.4 经典拓扑里的光滑基变换

**定义 14.11.** 我们称拓扑空间间的连续映射  $f: X \rightarrow Y$  是光滑的, 如果对任何  $x \in X$ , 存在其开邻域同胚于  $U \times [0, 1]^n$ , 其中  $U$  是  $f(x)$  的开邻域.

**定理 14.12** (拓扑的光滑基变换). 对任何  $\mathcal{F} \in \text{Loc}(X)$  和纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_S S' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

如果  $g$  光滑, 则有  $g^{-1} R^i f_* \mathcal{F} \cong R^i f'_*(g')^{-1} \mathcal{F}$ .

证明. 映射类似于拓扑紧合基变换, 由于高阶直像可以是上同调群的层化, 我们只需证明

$$H^i(X \times [0, 1]^n, (g')^{-1} \mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}).$$

因为有同伦等价  $X \times [0, 1]^n \simeq X$ , 如果局部系的上同调在同伦等价下不变, 我们就得到结论.

我们只需证明若  $h_0, h_1 : Y' \rightrightarrows Y$  是同伦的映射, 那么会诱导相同的  $H^i(Y, \underline{A}) \rightarrow H^i(Y', \underline{A})$ , 其中  $\underline{A}$  是常值 Abel 群层. 设同伦为  $F : [0, 1] \times Y' \rightarrow Y$  使得  $F|_{0 \times Y} = f_0, F|_{1 \times Y} = f_1$ . 取  $j_t : Y' \rightarrow Y' \times [0, 1]$  为  $y' \mapsto (t, y')$ , 则有  $f_0 = F \circ j_0, f_1 = F \circ j_1$ , 因此只需证明对任何  $t \in [0, 1]$ , 映射  $j_t$  都诱导相同的  $H^i(Y' \times [0, 1], \underline{A}) \rightarrow H^i(Y', \underline{A})$ . 考虑  $\pi : [0, 1] \times Y' \rightarrow Y'$  为自然投影, 则有  $\pi \circ j_t = \text{id}_{Y'}$ , 因此只需要考虑  $\pi$  诱导上同调群同构.

根据 Leray 谱序列有  $E_2^{p,q} = H^p(Y', R^q \pi_* \underline{A}) \Rightarrow H^{p+q}([0, 1] \times Y', \underline{A})$ . 根据拓扑的紧合基变换 14.3 得到对任意的  $y' \in Y'$  有自然同构  $R^i \pi_* (\underline{A})_{y'} \cong H^i([0, 1], \underline{A})$ . 由层上同调-奇异上同调比较定理 19.1 得知当  $i > 0$  时有

$$H^i([0, 1], \underline{A}) \cong H_{\text{sing}}^i([0, 1], A) = 0.$$

故有典范同构  $\underline{A} \cong \pi_* \underline{A}$  且当  $i > 0$  有  $R^i \pi_* \underline{A} = 0$ . 因此 Leray 谱序列退化, 故而所有边界映射

$$H^p(Y', \pi_* \underline{A}) \rightarrow H^p([0, 1] \times Y', \underline{A})$$

是同构. 最后, 不难验证得到此映射即为:

$$H^p(Y', \pi_* \underline{A}) \rightarrow H^p([0, 1] \times Y', \pi^{-1} \pi_* \underline{A}) \rightarrow H^p([0, 1] \times Y', \underline{A}),$$

故而因为  $\pi^* \underline{A} \rightarrow \pi^{-1} \pi_* \underline{A} \rightarrow \underline{A}$  是单位, 故边界映射和  $\underline{A} \cong \pi_* \underline{A}$  诱导的同构即为  $\pi$  诱导的映射.  $\square$

## 14.5 光滑基变换一瞥

**定理 14.13** (光滑基变换). 对概形映射  $f : X \rightarrow S$  和挠群  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  使得挠阶数在  $S$  内可逆. 对于纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_S S' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

其中  $S' = \varprojlim_{\lambda} S_{\lambda}$  为光滑  $S$  概形  $S_{\lambda}$  构成的拟系统满足转移映射  $S_{\lambda'} \rightarrow S_{\lambda}$  是仿射的, 因此有典范同构

$$g^{-1} R^i f_* \mathcal{F} \cong R^i f'_*(g')^{-1} \mathcal{F}.$$

这个定理的证明非常之复杂, 需要用到太多的技术和技巧, 想学的读者请参考笔记 (smooth-base-change) 或者 Tag 0EYQ.

## 14.6 紧合-光滑基变换及有限性定理

**定理 14.14** (紧合-光滑基变换). 设  $f : X \rightarrow Y$  紧合且光滑, 则对任何  $\mathcal{F} \in \text{Loc}(X)$  满足挠阶数在  $Y$  内可逆, 则有  $R^i f_* \mathcal{F} \in \text{Loc}(Y)$ .

**定理 14.15** (有限性定理). 设  $f : X \rightarrow Y$  紧合, 则对任何可构建层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  有  $R^i f_* \mathcal{F}$  可构建.

## 15 上同调维数 II——仿射情况

**定理 15.1.** 设  $X$  是代数闭域  $k$  上的仿射簇, 则  $\mathrm{cd}(X) \leq \dim X$ .

证明. 固定挠层  $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$ , 对维数做归纳法.

当  $\dim X = 0$ , 则为有限映射, 因此根据 Leray 谱序列和推论9.5即可. 当  $\dim X = 1$  时即为定理12.4. 假设  $d = \dim X > 1$  使得定理当  $< d$  时均成立, 要证明对  $X$  成立.

• **步骤 1.** 约化到证明  $\mathbb{A}_k^d$  的情况.

根据 Noether 正规化得到有限映射  $\delta: X \rightarrow \mathbb{A}_k^d$ , 根据推论9.5和 Leray 谱序列得到  $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(X, \mathcal{F}) = H_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(\mathbb{A}_k^d, \delta_* \mathcal{F})$ , 再根据命题11.8得知  $\delta_* \mathcal{F}$  依旧是挠层, 故只需对  $\mathbb{A}_k^d$  证明.

• **步骤 2.** 首先讨论两种情况, 为后续做铺垫.

•• 设  $j: X \rightarrow Y$  是开浸入且满足补集是某个有效 Cartier 除子  $D$  的支集, 对  $q > 0$ , 层  $R^q j_* \mathcal{F}$  在  $D$  上支撑, 断言当  $a := \mathrm{trdeg}(\kappa(y)/k) > d - q$  时有  $(R^q j_* \mathcal{F})_{\bar{y}} = 0$ .

取定义  $D$  的局部函数  $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ , 根据推论9.4有

$$(R^q j_* \mathcal{F})_{\bar{y}} = H_{\mathrm{\acute{e}t}}^q(\mathrm{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}^{\mathrm{sh}} \times_Y X, \mathcal{F}) = H_{\mathrm{\acute{e}t}}^q(\mathrm{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}^{\mathrm{sh}}[1/f], \mathcal{F}).$$

根据一个代数结论 (参考Tag 0F0U) 有  $\mathcal{O}_{Y,y}^{\mathrm{sh}}[1/f]$  是域  $k(t_1, \dots, t_a)^{\mathrm{sep}}(x)$  上的  $(d-a-1)$ -维有限型代数的滤余极限, 再根据引理13.2和归纳假设即可.

•• 设  $Z$  是  $k$  上光滑  $d-1$  维, 设  $E_a$  为满足  $\mathrm{trdeg}(\kappa(z)/k) \leq a$  的集合, 不难得知其在特殊化下稳定. 若  $\mathcal{G} \in \mathrm{Ab}(Z_{\mathrm{\acute{e}t}})$  是支撑在  $E_a$  上的挠层, 则当  $b > a$  时  $H_{\mathrm{\acute{e}t}}^b(Z, \mathcal{G}) = 0$ .

根据注11.10可以得到  $\mathcal{G} = \varinjlim \mathcal{G}_i$  在  $E_a$  上支撑, 根据归纳假设以及定理7.12即可.

• **步骤 3.** 完成证明.

考虑典范分解

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_k^d & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^{d-1} \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & \mathbb{A}_k^{d-1} & \end{array}$$

其中  $j$  是开浸入且满足补集是某个有效 Cartier 除子  $D$  的支集. 考虑谱序列

$$E_2^{p,q} = R^p g_* R^q j_* \mathcal{F} \Rightarrow R^{p+q} f_* \mathcal{F}.$$

由于  $R^q j_* \mathcal{F}$  在  $D$  上支撑且  $g|_D$  是同构, 故当  $p > 0, q > 0$  时  $E_2^{p,q} = 0$ . 根据步骤 2 知当  $q > d$  时  $R^q j_* \mathcal{F} = 0$ . 由于  $g$  是紧合且相对维数是 1, 根据命题14.8得到当  $p > 2$  时有  $E_2^{p,q} = 0$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ g_* R^d f_* \mathcal{F} & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ g_* R^1 f_* \mathcal{F} & 0 & 0 & 0 & & & \\ g_* f_* \mathcal{F} & R^1 g_* f_* \mathcal{F} & R^2 g_* f_* \mathcal{F} & 0 & \dots & & \end{array}$$

故当  $q > 2$  有  $R^q f_* \mathcal{F} = g_* R^q j_* \mathcal{F}$ . 根据步骤 2 第 1 条得知当  $q > 2$  有  $\text{supp } R^q f_* \mathcal{F} \subset E_{d-q} \subset \mathbb{A}_k^{d-1}$ . 根据步骤 2 第 2 条得知当  $p > d - q$  且  $q > 2$  时有

$$H_{\text{ét}}^p(\mathbb{A}_k^{d-1}, R^q f_* \mathcal{F}) = 0.$$

由推论 9.4 有一般点的茎  $(R^2 f_* \mathcal{F})_{\bar{\eta}} = H^2(\mathbb{A}_{\bar{\eta}}^1, \mathcal{F}) = 0$ , 再用步骤 2 第 2 条得知当  $p > d - 2$  时有

$$H_{\text{ét}}^p(\mathbb{A}_k^{d-1}, R^2 f_* \mathcal{F}) = 0.$$

再用归纳假设得到当  $p > d - 1$  且  $q > 2 = 0, 1$  时有

$$H_{\text{ét}}^p(\mathbb{A}_k^{d-1}, R^q f_* \mathcal{F}) = 0.$$

综合上述结论, 考虑谱序列  $H_{\text{ét}}^p(\mathbb{A}_k^{d-1}, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(\mathbb{A}_k^{d-1}, \mathcal{F})$  即可.  $\square$

**注 15.2.** 事实上对于一般的域  $K$  和其上的有限型仿射概形  $X$ , 都有

$$\text{cd}(X) \leq \dim(X) + \text{cd}(K)$$

(证明基本类似, 略去). 甚至更有推广 (Artin 消灭定理): 若  $f : X \rightarrow Y$  是域  $K$  上有限型仿射映射, 若挠层  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  支撑在满足  $\text{trdeg}(\kappa(x)/K) \leq a$  的区域上, 则  $R^q f_* \mathcal{F}$  支撑在满足  $\text{trdeg}(\kappa(x)/K) \leq a - q$  的区域上 (参考 Tag 0F0X).

## 16 紧支上同调

### 16.1 分离有限型映射的下叹号函子

我们通常需要如下紧化作为基础:

**定理 16.1** (Nagata 紧化). 设概形  $S$  拟紧拟分离且  $f : X \rightarrow S$  分离有限型, 则存在如下分解:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & S \end{array}$$

其中  $j$  概形论稠密的开浸入且  $\bar{f}$  是紧合的.

证明. 异常复杂, 现代证明见 [1].  $\square$

**定义 16.2.** 设  $f : X \rightarrow Y$  分离有限型, 对  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  定义

$$(f_! \mathcal{F})(U) := \{s \in (f_* \mathcal{F})(U) : \text{supp}(s) \text{ 在 } S \text{ 上紧合}\}.$$

**命题 16.3.** 设  $f : X \rightarrow Y$  分离有限型, 设  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ .

- (i) 当  $f$  还是平展的, 则  $f_!$  是零扩张函子;
- (ii) 若  $f$  紧合, 则  $f_! \mathcal{F} = f_* \mathcal{F}$ ;
- (iii) 取一个 Nagata 紧化  $f = \bar{f} \circ j$ , 则  $f_! \cong \bar{f}_* \circ j_!$ .

证明. (i) 这个是比较繁琐的, 首先要说明分离平展的时候零扩张可以单射到直像 (参考 Tag 0F4L), 其次要证明二者相同 (参考 Tag 0F4Y);

(ii) 是平凡的; (iii) 不难构造出单射  $f_!(j^{-1} j_! \mathcal{F}) \rightarrow \bar{f}_* j_! \mathcal{F}$  (比如 Tag 0F53). 根据推论 6.8(iii), 只需说明满射即可, 但这是平凡的.  $\square$

## 16.2 紧支高阶直像

定义 16.4 (紧支高阶直像). 设概形  $S$  拟紧拟分离且  $f : X \rightarrow S$  分离有限型, 定义

$$\begin{aligned} R^q f_! &:= R^q \bar{f}_* \circ j_! : \text{Ab}_{\text{tor}}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}_{\text{tor}}(S_{\text{ét}}), \\ Rf_! &:= R\bar{f}_* \circ j_! : D_{\text{tor}}^+(X_{\text{ét}}) \rightarrow D_{\text{tor}}^+(S_{\text{ét}}), \end{aligned}$$

其中  $f = \bar{f} \circ j$  是 Nagata 紧化且  $\text{tor}$  指具有挠上同调的范畴.

命题 16.5. 设概形  $S$  拟紧拟分离且  $f : X \rightarrow S$  分离有限型有

- (i) 紧支高阶直像  $R^* f_!$  和  $Rf_!$  定义和 Nagata 紧化选取无关;
- (ii) 设  $f' : X' \rightarrow X$  也是分离有限型, 则有典范同构  $Rf_! \circ Rf'_! \cong R(f \circ f')_!$ , 故有 Leray 谱序列  $E_2^{p,q} := R^p f_! R^q f'_! \mathcal{F} \Rightarrow R^{p+q}(f \circ f')_! \mathcal{F}$ ;
- (iii) 若  $h : Y \rightarrow X$  紧合, 则有典范映射  $R^* f_! \circ F \rightarrow R^* h_! \circ h^{-1} \mathcal{F}$ ;
- (iv) 对于拟紧拟分离概形的纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

有  $g^{-1} \circ Rf_! \cong Rf'_! \circ (g')^{-1}$ ;

(v) 设  $Z \rightarrow X$  是闭子概形, 补为  $U$ . 设  $f_Z : Z \rightarrow S, f_U : U \rightarrow S$  是结构映射, 则有长正合列

$$\cdots \rightarrow R^i f_{U,!}(\mathcal{F}|_U) \rightarrow R^i f_! \mathcal{F} \rightarrow R^i f_{Z,!}(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow \cdots;$$

(vi) 短正合列可以诱导  $R^* f_!$  的长正合列.

证明. □

注 16.6. 事实上根据 Nagata 紧化选取无关性, 可以在仿射开集上定义然后抛弃拟紧拟分离性.

## 16.3 紧支上同调

## 17 平展上同调的 Künneth 公式

### 17.1 一般的 Künneth 公式

### 17.2 紧支的 Künneth 公式

## 18 $\ell$ -进层和 $\ell$ -进上同调

## 19 比较定理

### 19.1 常值层上同调/经典 de Rham 上同调-奇异比较定理

定理 19.1 (常值层-奇异上同调比较). 设  $X$  是局部可缩拓扑空间, 则对任何交换环  $G$  都有典范同构

$$H_{\text{sing}}^i(X, G) \cong H^i(X, \underline{G}).$$

证明. (摘自 [13] 定理 4.47) 定义层

$$\mathcal{C}_{\text{sing}}^q := \left( U \mapsto C_{\text{sing}}^q(U, G) \right)^{\sharp}$$

及自然的映射  $\partial : \mathcal{C}_{\text{sing}}^q \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^{q+1}$ .

• **步骤 1.** 证明有预解  $0 \rightarrow \underline{G} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^*$ .

这是因为  $X$  局部可缩, 则  $\mathcal{C}_{\text{sing}}^*$  在非零指标处正合. 又因为  $X$  局部道路连通, 则若  $U$  可缩, 对  $f \in C_{\text{sing}}^q(U, G)$  有道路  $\alpha$  连接任意两个点  $x, y \in U$ , 故  $0 = \partial f(\alpha) = f(\partial\alpha) = f(x) - f(y)$ , 故局部常值, 则

$$\ker(\partial : \mathcal{C}_{\text{sing}}^0 \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^1) \cong \underline{G},$$

因此成立.

• **步骤 2.** 此预解  $0 \rightarrow \underline{G} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sing}}^*$  关于  $\Gamma(X, -)$  零调.

不难验证预层  $(U \mapsto C_{\text{sing}}^q(U, G))$  是松弛的, 而且我们断言

$$\Gamma(U, \mathcal{C}_{\text{sing}}^q) \cong C_{\text{sing}}^q(U, G) / C_{\text{sing}}^q(U, G)_0,$$

其中  $C_{\text{sing}}^q(U, G)_0 \subset C_{\text{sing}}^q(U, G)$  由这样的  $\alpha$  构成: 满足存在  $U$  的开覆盖  $\mathfrak{V}$  使得对所有的  $V \in \mathfrak{V}$  都有  $\alpha|_{C_{\text{sing}}^q(V, G)} = 0$ . 事实上构造同态  $C_{\text{sing}}^q(U, G) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{C}_{\text{sing}}^q)$  为  $f \mapsto f^{\sharp}$ . 事实上根据定义不难得到同态的核为  $C_{\text{sing}}^q(U, G)_0$ . 满射也不难, 取  $g \in \Gamma(U, \mathcal{C}_{\text{sing}}^q)$ , 存在开覆盖  $\{U_i\}$  和  $g_i \in C_{\text{sing}}^q(U_i, G)$  使得  $g|_{U_i} = g_i$ . 定义

$$g' := \alpha \mapsto \begin{cases} g_i(\alpha) & \text{Im } \alpha \subset U_i, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

即可得到结果, 因此成立.

• **步骤 3.** 完成证明.

根据步骤 2 得到  $H^q(X, \underline{G}) = H^q\Gamma(X, \mathcal{C}_{\text{sing}}^*)$ . 因此只需证明

$$\Gamma(U, \mathcal{C}_{\text{sing}}^*) = C_{\text{sing}}^*(U, G) / C_{\text{sing}}^*(U, G)_0 \sim_{\text{qis}} C_{\text{sing}}^*(U, G)$$

即可. 这是纯代数拓扑的, 对  $X$  的开覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ , 定义复形  $C_*^{\mathfrak{U}}(X, G)$  为

$$C_q^{\mathfrak{U}}(X, G) = \{\sigma : \Delta^q \rightarrow X : \text{Im } \sigma \subset \text{某个 } U_i\}.$$

根据 [4] 第 178 页的结论, 我们有链同伦  $C_*^{\mathfrak{U}}(X, G) \sim_{\text{ChainHomotopy}} C_{*, \text{sing}}(X, G)$ , 因此取对偶得到同伦

$$\pi_{\mathfrak{U}} : C_{\text{sing}}^*(X, G) \sim_{\text{ChainHomotopy}} C_{\text{sing}}^{\mathfrak{U}, *}(X, G).$$

故有正合列  $0 \rightarrow \ker \pi_{\mathfrak{U}} \rightarrow C_{\text{sing}}^*(X, G) \rightarrow C_{\text{sing}}^{\mathfrak{U}, *}(X, G) \rightarrow 0$ , 其中  $\ker \pi_{\mathfrak{U}}$  零调. 对覆盖取余极限得到结论.  $\square$

**定理 19.2** (经典 de Rham-奇异上同调比较). 对流形  $M$  和复流形  $X$ , 我们有

$$H_{\text{dR}}^i(M, \mathbb{R}) \cong H_{\text{sing}}^i(M, \mathbb{R}), \quad H_{\text{dR}}^i(X, \mathbb{C}) \cong H_{\text{sing}}^i(X, \mathbb{C}).$$

证明.  $\square$

## 19.2 GAGA 一瞥

### 19.3 平展-奇异比较定理

### 19.4 其他比较定理

**定义 19.3** (代数 de Rham 上同调). 设  $f: X \rightarrow S$  是概形映射, 考虑 *de Rham* 复形  $\Omega_{X/S}^*$  为  $\Omega_{X/S}^q = \bigwedge^q \Omega_{X/S}$  且微分映射为局部定义成

$$d: b_0 db_1 \wedge \cdots \wedge db_q \mapsto ab_0 \wedge db_1 \wedge \cdots \wedge db_q.$$

定义  $X$  在  $S$  上的代数 *de Rham* 上同调为

$$H_{\text{dR}}^i(X/S) := H^i(R\Gamma(X, \Omega_{X/S}^*)).$$

**定理 19.4** (经典-代数 de Rham 比较). 若  $X$  是  $\mathbb{C}$  上的光滑紧合簇, 则

$$H_{\text{dR}}^i(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \cong H_{\text{dR}}^i(X/\mathbb{C}).$$

证明. 此时  $X^{\text{an}}$  是紧复流形, 根据 Poincaré 引理知有预解  $0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_{X^{\text{an}}}^*$ . 因此

$$H_{\text{sing}}^i(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) =$$

□

- 20 上同调纯性和 Gysin 序列
- 21 链映射和 Chern 类
- 22 Poincaré 对偶
- 23 Lefschetz 迹公式
- 24 Weil 上同调理论
- 25 平展上同调的一些应用 I——代数曲面的应用
  - 25.1 待添加
- 26 平展上同调的一些应用 II——Abel 簇相关
  - 26.1 Abel 簇的平展上同调
  - 26.2 Abel 簇和 Jacobi 簇
  - 26.3 Mordell-Weil 定理
- 27 平展上同调的一些应用 III——相关大定理和猜想一瞥
  - 27.1 Mordell 猜想
  - 27.2  $p$  进 Hodge 理论
  - 27.3 双有理几何



## 索引

- 1-余链, 25
- $C_r$  域, 28
- $G$ -模, 18
- $\mathrm{GL}_{n,X}$ , 9
- $\mathbb{G}_{a,X}$ , 9
- $\mathbb{G}_{m,X}$ , 9
- $\mu_{n,X}$ , 9
- $\mathcal{G}$ -挠子, 25
- $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\mathrm{sh}}$ , 11
- Brauer 群, 28
- Galois 上同调, 18
- Grothendieck 意象, 7
- Grothendieck 拓扑, 7
- Hensel 局部环, 11
- Hensel 引理, 11
- Riemann 存在定理, 6
- Tate 连续上同调, 18
- Tsen 定理, 28
- Weil 猜想, 4
- Čech 上同调, 22
- 严格 Hensel 化, 11
- 严格 Hensel 局部环, 11
- 分离预层, 7
- 切除, 21
- 可构建层, 32
- 局部常值层, 12
- 层, 7
- 层化, 8
- 常值层, 12
- 平凡  $\mathcal{G}$ -挠子, 25
- 平展上同调, 17
- 平展基本群, 5
- 拟凝聚层, 9
- 摩天大厦层, 11
- 景, 7
- 有限局部常值层, 12
- 直像, 14
- 纤维函子, 5
- 结构层, 9
- 群上同调, 18
- 茎, 10
- 逆像, 15
- 零扩张函子, 16
- 预层, 7

## 参考文献

- [1] Brian Conrad. Deligne’s notes on nagata compactifications. *Journal of the Ramanujan Mathematical Society*, 22(3), 2007.
- [2] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck’s FGA Explained*. AMS, 2005.
- [3] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer-Verlag, 1971.
- [4] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, 1966.
- [5] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

- [6] Fu Lei. *Algebraic geometry*. TsingHua and Springer, 2006.
- [7] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version*. World Scientific, 2015.
- [8] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton university press, 1980.
- [9] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013.
- [10] James S. Milne. Class field theory, 2020.
- [11] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. AMS, 2016.
- [12] Stacks project collaborators. The stacks project, 2023.
- [13] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*. Cambridge University Press, 2002.