

平展上同调——几何人专用笔记

温尊

2023 年 3 月 18 日

目录

1 简介	2
2 平展基本群	3
3 景和层的基本定义	4
4 平展拓扑上的层	5
4.1 基本结果和例子	5
4.2 茎和摩天大楼层	6
4.3 局部常值层	6
4.4 Abel 群预层和层构成的范畴	6
4.5 层化	6
5 关于层的一些函子	6
6 平展上同调的定义和基本性质	6
6.1 定义	6
6.2 群上同调一瞥	6
6.3 点的上同调	7
7 Čech 上同调和挠子	7
8 高阶直像	7
9 曲线的上同调——基础结果	7
10 可构建层和挠层	7
Index	8
参考文献	8

1 简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取 X 为 \mathbb{C} 上的代数簇, 其解析化 X^{an} 可以对应奇异上同调 $H^i(X^{\text{an}}, \mathbb{Z})$ 满足

- (i) 是有限生成 \mathbb{Z} 模;
- (ii) 群 $H^i(X^{\text{an}}, \mathbb{C})$ 有额外的结构;
- (iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 为了模拟 \mathbb{Z} -系数奇异上同调, 我们会定义类似的 ℓ -进上同调理论, 其中 ℓ 和特征 p 互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论) $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_{\ell}) = \varprojlim H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})$ 和 $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_{\ell}) = H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_{\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$. 那么为何不直接定义 \mathbb{Q} -系数的上同调呢? 因为我们发现如下结果:

定理 1.1 (Serre). 不存在上同调理论 H^* 使得 (i) 具有函子性; (ii) 满足 Kunneth 公式; (iii) 对所有椭圆曲线 E 满足 $H^1(E) \cong \mathbb{Q}^2$.

基本思路. 取 E 为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是 $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}$ 是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到 $\text{End}(E)$ 作用在 E 上会诱导出 $\text{End}(E)$ 在 $H^1(E)$, 进而诱导出代数同态 $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$. 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论. \square

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点 (X, \bar{x}) , 可以定义 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ 为平展基本群, 其定义事实上是从代数拓扑里偷的, 运用了覆盖变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

猜想 1 (Weil 猜想). 设 X 是 \mathbb{F}_q 上 n 维光滑紧合几何整的簇, 设

$$S_X(t) = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n} t^n \right),$$

则

(i) 函数 $S_X(t)$ 是有理函数, 即 $S_X(t) = \prod_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} S_i(t)$, 其中 S_i 是满足一定条件的整系数多项式;

(ii) 满足函数方程 $S_X(q^{-n}t^{-1}) = \pm q^{nE/2} t^E S_X(t)$ 其中 E 是 X 欧拉示性数;

(iii) 所有零点和极点的绝对值为 $q^{j/2}$ 其中 $j \in \mathbb{Z}$;

(iv) 若 X 提升为代数整数环 $R \subset \mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 Y , 则对于 $i = 0, \dots, 2n$, 流形 $Y(\mathbb{C})$ 的 Betti 数为 $S_i(t)$ 的次数 b_i .

最后结果. (i) 由 Dwork 运用 H^1 的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Gorthendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明. \square

因此平展上同调是相当成功的上同调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点

集拓扑) 就会被我略去. 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐Stacks project, 扶磊教授的书 [3] 和 Milne 的传世经典 [4], 我们也会多次引用里面的代数细节.

平展上调学习的前置知识: 至少是经典代数几何教材 [2] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 最好懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好.

2 平展基本群

对于连通概形 X , 定义 $\text{Fét}/X$ 为 X 上的有限平展态射构成的范畴, 而 $\text{Ét}/X$ 为 X 上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点 (X, \bar{x}) , 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}} : \text{Fét}/X \rightarrow \text{Sets}, (\pi : Y \rightarrow X) \mapsto \text{Hom}_X(\bar{x}, Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆盖空间? 事实上不一定存在:

例 2.1. 考虑 \mathbb{C} 上射影直线 \mathbb{A}^1 , 存在有限平展映射 $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$, 那么注定没有像拓扑里的 $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 来表示万有覆盖!

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [4] 也没证明. 而 [3] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X' = ((X_i, f_i)_{i \in I}, \phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i, f_i = \phi_{ij} \circ f_j, f_i \in \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\text{Hom}(X', Y) := \varprojlim \text{Hom}_X(X_i, Y) \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y), \sigma \mapsto \sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取 X_i/X 为 Galois 覆盖, 也就是说 $\deg(X_i/X) = \#\text{Aut}_X X_i$, 见 [4] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于 $\phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ 可以诱导 $\text{Aut}_X X_j \rightarrow \text{Aut}_X X_i$ 如下: 注意到 $\text{Aut}_X X_j \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j), \sigma \mapsto \sigma(f_j)$ 是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [3] 第三节), 则通过 $F(X_j) \rightarrow F(X_i), \alpha \mapsto \phi_{ij}(\alpha)$ 即得到映射.

定义 2.1. 对于连通概形 X 和几何点 \bar{x} , 考虑上述构造, 定义平展基本群为

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \text{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

定理 2.2. 考虑连通概形 X 和几何点 \bar{x} .

- (i) 函子 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$ 诱导出 $\text{Fét}/X$ 到有限 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ -集的等价;
- (ii) 取第二个几何点 \bar{x}' , 我们有 $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \cong \mathfrak{F}_{\bar{x}'}$, 进而诱导 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \cong \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}')$, 并且和 (i) 契合;
- (iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考Tag 0BND. □

例 2.2. (i) 对一个点 $X = \text{Spec}(k)$ 和几何点 Ω , 由定义知道 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \Omega) = \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$;

(ii) 考虑 \mathbb{C} 上的 $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, 则考虑 $x \mapsto x^n$ 得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \text{Aut}_X X_i = \varprojlim \mu_n(k) \cong \hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{\ell} \mathbb{Z}_{\ell};$$

(iii) 考虑代数闭域上的 $X = \mathbb{P}^1$, 由 *Riemann-Hurwitz* 公式不难得到 X 只有平凡的平展覆盖, 故 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = 1$. 归纳可以得到 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^n, \bar{x}) = 1$;

(iv) 事实上我们对 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^1, \bar{x})$ 都一无所知, 其中 k 是正特征域 (根据 *Artin-Schreier* 列, 起码不是平凡的群);

(v) 对于正规簇 X , 考虑一般点上的几何点 \bar{x} , 假设

$$L = \bigcup \{ \text{几何点内的有限可分扩张 } K/K(X) : X \text{ 在 } K \text{ 内的正规化到 } X \text{ 平展} \},$$

则 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \cong \text{Gal}(L/K(X))$, 参考 [3] 命题 3.3.6.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

定理 2.3 (*Riemann 存在定理*). 设 X 是 \mathbb{C} 上的有限型概形, 则由范畴等价 $(\text{Fét}/X) \rightarrow (\text{FTopCov}/X^{\text{an}})$. 特别的有 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \cong \pi_1(\widehat{X^{\text{an}}}, x)$, 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [1] 的定理 XII.5.1. \square

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多 \mathbb{C} 上的有限型概形的平展基本群了.

注 2.4 (算术和数论人的最爱). (i) 对于 X 为 k 上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 [3] 命题 3.3.7):

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\text{sep}}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \rightarrow 1;$$

(ii) 对于 $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, 运用正合列得到

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1.$$

嵌入 $\mathbb{Q}^{\text{al}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 可以得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}}, \bar{x}) \cong \langle a, b, c \mid abc = 1 \rangle.$$

而群 $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q})$ 则十分复杂, 如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 (摘自 *J. Milne* 的讲义 [5]).

3 景和层的基本定义

本质就是推广拓扑空间的定义.

定义 3.1 (*Grothendieck 拓扑和景*). 设 \mathcal{C} 是范畴, 一个 \mathcal{C} 上的 *Grothendieck* 拓扑由集合 $\{\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}\} = \text{Cov}(U)$ 组成, 其中 U 是任意对象, 满足

(i) 若 $V \rightarrow X$ 是同构, 则 $\{V \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$;

(ii) 若 $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ 且 $Y \rightarrow X$ 是任意态射, 则纤维积 $X_i \times_X Y$ 存在且

$$\{X_i \times_X Y \rightarrow Y\}_{i \in I} \in \text{Cov}(Y);$$

(iii) 若 $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ 且对任意 $i \in I$ 都给定 $\{V_{ij} \rightarrow X_i\}_{j \in J_i}$, 则

$$\{V_{ij} \rightarrow X_i \rightarrow X\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(X).$$

范畴 \mathcal{C} 和其上的 *Grothendieck* 拓扑称为景.

例 3.1 (小 Zariski 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\text{Op}(X)$ 由开子概形构成, 态射是包含关系. 则 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{Zar} .

例 3.2 (大 Zariski 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X , 则 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \rightarrow U$ 为开浸入且 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{ZAR} .

例 3.3 (小平展景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Et/X , 不难证明里面的态射都是平展的, 所以我们不假设条件. $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\text{ét}}$.

例 3.4 (大平展景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X , 则 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \rightarrow U$ 平展且 $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\text{ét}}$.

例 3.5 (fppf 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X , 则 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \rightarrow U$ 平坦和局部有限表现, 且 $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$ 是满射. 记这个景为 X_{fppf} .

定义 3.2. 景 \mathcal{C} 上的预层为函子 $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$;

定义 3.3. 给定景 \mathcal{C} 和其上的预层 F .

(i) 预层 F 称之为分离的, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$, 诱导态射 $F(U) \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i)$ 是单射;

(ii) 预层 F 称为层, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$, 我们有如下等化子:

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被 $U_i \times_U U_j \rightarrow U_i$ 和 $U_i \times_U U_j \rightarrow U_j$ 诱导.

定义 3.4. 一个范畴称为 *Grothendieck* 意象 (*Topos*) 如果其等价于某个景上的层范畴.

4 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景 $X_{\text{ét}}$. 记 $\text{Sh}(X_{\text{ét}})$ 是集合取值的平展层范畴, 而 $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为 $\text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 和 $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$.

4.1 基本结果和例子

命题 4.1. 固定概形 X , 对于 $\mathcal{F} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 若 \mathcal{F} 在限制到 *Zariski* 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖 $V \rightarrow U$ 满足层条件, 则 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$.

证明. 详细细节参考 [4] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 *Zariski* 开覆盖上的条件会给出: 对于概形 $V = \coprod_i V_i$, 我们有 $\mathcal{F}(V) = \prod_i \mathcal{F}(V_i)$. 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖 $\coprod_i U_i \rightarrow U$ 满足等化子条件, 那么 $\{U_i \rightarrow U\}$ 也满足等化子条件 (因为 $\coprod_i U_i \times_U \coprod_j U_j = \coprod_{i, j} U_i \times_U U_j$). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 也满足等化子条件, 其中 I 有限且 U_i 仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去. \square

例 4.1. 给定概形 X .

(i)

4.2 茎和摩天大楼层

4.3 局部常值层

4.4 Abel 群预层和层构成的范畴

4.5 层化

5 关于层的一些函子

6 平展上同调的定义和基本性质

6.1 定义

6.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

定义 6.1. 设 G 是拓扑群.

(i) 一个 Abel 群 M (赋予离散拓扑) 称为 G -模, 如果有连续作用 $G \times M \rightarrow M$;

(ii) 设 Mod_G 是 G -模构成的范畴. 根据 *Tag 04JF*, 范畴 Mod_G 有足够内射对象. 考虑左正合函子

$$\Gamma_G : \text{Mod}_G \rightarrow \text{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群 G 的 (连续) 上同调为 $H^i(G, M) = R^i\Gamma_G(M)$. 若 G 是 *Galois* 群则成为 *Galois* 上同调.

命题 6.2. 对于群 G , 考虑群环 $\mathbb{Z}[G]$, 那么有自然的范畴等价 $\text{Mod}_G \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$. 设 \mathbb{Z} 可以经过平凡 G 作用来作为 $\mathbb{Z}[G]$ 模, 则 $H^i(G, M) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$.

证明. 近乎平凡, 略去. □

定理 6.3 (Tate). 设 M 是拓扑群并且赋予连续 G -作用. 考虑复形

$$C_{\text{cont}}^*(G, M) : M \rightarrow \text{Maps}_{\text{cont}}(G, M) \rightarrow \text{Maps}_{\text{cont}}(G \times G, M) \rightarrow \cdots$$

其中边界算子为当 $n = 0$, 则 $m \mapsto (g \mapsto g(m) - m)$; 当 $n > 0$ 时定义为

$$\begin{aligned} d(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1(f(g_2, \dots, g_{n+1})) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^j f(g_1, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

这样定义 Tate 连续上同调为 $H_{\text{cont}}^i(G, M) := H^i(C_{\text{cont}}^*(G, M))$. 则对于 $M \in \text{Mod}_G$, 存在典范映射 $H^i(G, M) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(G, M)$. 并且当 G 是离散群或者射有限群, 则为同构 $H^i(G, M) \cong H_{\text{cont}}^i(G, M)$.

证明. 映射 $H^i(G, M) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(G, M)$ 通过万有 δ -函子不难诱导. 证明见 [6] 第二章. □

6.3 点的上同调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上同调也是很复杂的.

引理 6.4. 设 $x = \operatorname{Spec} k$, 固定几何点 $\bar{x} = \operatorname{Spec} \Omega$. 取 $\mathcal{F} \in \operatorname{Ab}(x_{\text{ét}})$, 则

$$\Gamma(x, \mathcal{F}) \cong (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\operatorname{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}.$$

证明.

□

7 Čech 上同调和挠子

8 高阶直像

9 曲线的上同调——基础结果

10 可构建层和挠层

索引

G -模, 6	分离预层, 5
Galois 上同调, 6	层, 5
Grothendieck 意象, 5	平展基本群, 3
Grothendieck 拓扑, 4	景, 4
Riemann 存在定理, 4	纤维函子, 3
Tate 连续上同调, 6	群上同调, 6
Weil 猜想, 2	预层, 5

参考文献

- [1] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer-Verlag, 1971.
- [2] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.
- [3] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version*. World Scientific, 2015.
- [4] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton university press, 1980.
- [5] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013. Available at www.jmilne.org/math/.
- [6] James S. Milne. Class field theory, 2020. Available at www.jmilne.org/math/.