给几何人的平展上同调基础

温尊

2023 年 3 月 23 日

摘要

平展上同调是代数几何中非常重要的一部分, 同时也是比较基础的一部分, 广泛应用在各个方向. 这篇笔记将以 Milne 的讲义为大体顺序, 以几何人的视角讲述平展上同调的基础理论, 为后续代数几何的学习和研究扫清一些障碍.

目录

1 平展上同调简介 **3**

2 平展基本群 **4**

3 景和层和层化 **5**

4 平展拓扑上的层 **6**
4.1 基本结果和例子 . . . 6
4.2 平展预层/层的茎 . . . 7
4.3 常值层和局部常值层 . . . 9
4.4 Abel 群预层和层构成的范畴 . . . 9
4.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列 . . . 10
4.6 拟凝聚层 . . . 10

5 层的一些函子 **11**
5.1 直像 . . . 11
5.2 逆像 . . . 11
5.3 零扩张函子 (下叹号函子) . . . 12

6 平展上同调的定义和基本性质 **13**
6.1 定义 . . . 13
6.2 群上同调一瞥 . . . 13
6.3 点的上同调 . . . 14
6.4 严格 Hensel 局部环的上同调 . . . 14
6.5 平展上同调和极限一瞥 . . . 15
6.6 支撑在闭集的上同调及性质 . . . 15

7 Čech 上同调和挠子 **16**
7.1 Čech 上同调 . . . 16
7.2 Čech-导出谱序列 . . . 17
7.3 应用 I——Mayer-Vietoris 列 . . . 18
7.4 应用 II——拟凝聚层的上同调 . . . 18
7.5 挠子理论一瞥和应用 . . . 19

8 高阶直像 **20**
8.1 基础性质 . . . 20
8.2 Leray 谱序列 . . . 21

9 曲线的上同调 I——基础结果 **21**
9.1 Brauer 群和 C_r 域一瞥 . . . 21
9.2 $\mathbb{G}_{m,X}$ 的上同调 . . . 22
9.3 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 的上同调 . . . 23
9.4 支撑在点上的上同调 . . . 24

10 可构建层和挠层 **24**

11 曲线的上同调 II——挠层的上同调 **24**

12 上同调维数 **24**

13 纯性和 Gysin 序列 **24**

14 紧合基变换 **24**

15 待添加 **24**

索引 **25**

参考文献 **25**

1 平展上同调简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取 X 为 $\mathbb{C}$ 上的代数簇, 其解析化 X^{an} 可以对应奇异上同调 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{Z})$ 满足

(i) 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模;

(ii) 群 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{C})$ 有额外的结构;

(iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 我们会发现挠系数的上同调, 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 系数的上同调可以比较好的模拟奇异上同调. 但会发现 $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})=0$ 而 $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ 并不能很好的模拟奇异上同调, 另一方面我们发现如下结果:

定理 1.1 (Serre)**.** *不存在上同调理论 H^* 使得 (i) 具有函子性;(ii) 满足 Kunneth 公式;(iii) 对所有椭圆曲线 E 满足 $H^1(E)\cong\mathbb{Q}^2$.*

基本思路. 取 E 为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}$ 是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到 $\mathrm{End}(E)$ 作用在 E 上会诱导出 $\mathrm{End}(E)$ 在 $H^1(E)$, 进而诱导出代数同态 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}\to\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$. 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论. □

为了模拟在非挠系数下也可以模仿奇异上同调, 我们会定义类似的 ℓ-进上同调理论, 其中 ℓ 和特征 p 互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论) $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)=\varprojlim H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ 和 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_\ell)=H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$. 这样也可以得到比较好的模拟.

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点 $(X,\bar{x})$, 可以定义 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$ 为平展基本群, 其定义事实上是从代数拓扑里偷的, 运用了覆叠变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

猜想 1 (Weil 猜想)**.** *设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上 n 维光滑紧合几何整的簇, 设*

$$S_X(t)=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n}t^n\right),$$

则

(i) 函数 $S_X(t)$ 是有理函数, 即 $S_X(t)=\prod_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}S_i(t)$, 其中 S_i 是满足一定条件的整系数多项式;

(ii) 满足函数方程 $S_X(q^{-n}t^{-1})=\pm q^{nE/2}t^ES_X(t)$ 其中 E 是 X 欧拉示性数;

(iii) 所有零点和极点的绝对值为 $q^{j/2}$ 其中 $j\in\mathbb{Z}$;

(iv) 若 X 提升为代数整数环 $R\subset\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 Y, 则对于 $i=0,...,2n$, 流形 $Y(\mathbb{C})$ 的 Betti 数为 $S_i(t)$ 的次数 b_i.

最后结果. (i) 由 Dwork 运用 H^1 的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Gorthendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明. □

因此平展上同调是相当成功的上同调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点集拓扑) 就会被我略去. 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐 [10] 里的Tag 0BQ6 和Tag 03N1, 扶磊教授的书 [5] 和 Milne 的传世经典 [6], 我们也会多次引用里面的代数细节.

前置知识: 至少是经典代数几何教材 [3] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 还有基本的导出范畴. 最好懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好.

2 平展基本群

对于连通概形 X, 定义 $\mathrm{Fét}/X$ 为 X 上的有限平展态射构成的范畴, 而 $\mathrm{Ét}/X$ 为 X 上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点 $(X,\bar{x})$, 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}}:\mathrm{Fét}/X\to\mathrm{Sets},(\pi:Y\to X)\mapsto\mathrm{Hom}_X(\bar{x},Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆叠空间? 事实上不一定存在:

例 2.1. *考虑 $\mathbb{C}$ 上射影直线 $\mathbb{A}^1$, 存在有限平展映射 $\mathbb{A}^1\backslash\{0\}\to\mathbb{A}^1\backslash\{0\},x\mapsto x^n$, 那么注定没有像拓扑里的 $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 来表示万有覆盖!*

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [6] 也没证明. 而 [5] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X'=((X_i,f_i)_{i\in I},\phi_{ij}:X_j\to X_i,f_i=\phi_{ij}\circ f_j,f_i\in\mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\mathrm{Hom}(X',Y):=\varinjlim\mathrm{Hom}_X(X_i,Y)\to\mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y),\sigma\mapsto\sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取 X_i/X 为 Galois 覆盖, 也就是说 $\deg(X_i/X)=\#\mathrm{Aut}_X X_i$, 见 [6] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于 $\phi_{ij}:X_j\to X_i$ 可以诱导 $\mathrm{Aut}_X X_j\to\mathrm{Aut}_X X_i$ 如下: 注意到 $\mathrm{Aut}_X X_j\to\mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j),\sigma\mapsto\sigma(f_j)$ 是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [5] 第三节), 则通过 $F(X_j)\to F(X_i),\alpha\mapsto\phi_{ij}(\alpha)$ 即得到映射.

定义 2.1. *对于连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 考虑上述构造, 定义平展基本群为*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})=\varprojlim\mathrm{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

定理 2.2. *考虑连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$.*
(i) 函子 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$ 诱导出 $\mathrm{Fét}/X$ 到有限 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$-集的等价;
(ii) 取第二个几何点 $\bar{x}'$, 我们有 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}\cong\mathfrak{F}_{\bar{x}'}$ 进而诱导 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\cong\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}')$, 并且和 (i) 契合;
(iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考Tag 0BND. □

例 2.2. *(i) 对一个点 $X=\mathrm{Spec}(k)$ 和几何点 Ω, 由定义知道 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\Omega)=\mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$;*
(ii) 考虑 $\mathbb{C}$ 上的 $X=\mathbb{A}^1\backslash\{0\}$, 则考虑 $x\mapsto x^n$ 得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})=\varprojlim\mathrm{Aut}_X X_i=\varprojlim\boldsymbol{\mu}_n(k)\cong\widehat{\mathbb{Z}}\cong\prod_\ell\mathbb{Z}_\ell;$$

(iii) 考虑代数闭域上的 $X=\mathbb{P}^1$, 由 Riemann-Hurwitz 公式不难得到 X 只有平凡的平展覆叠, 故 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})=1$. 归纳可以得到 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^n,\bar{x})=1$;
(iv) 事实上我们对 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^1,\bar{x})$ 都一无所知, 其中 k 是正特征域 (根据 Artin-Scheier 列, 起码不是平凡的群);
(v) 对于正规簇 X, 考虑一般点上的几何点 $\bar{x}$, 假设

$$L=\bigcup\left\{\text{几何点内的有限可分扩张}K/K(X):X\text{在}K\text{内的正规化到}X\text{平展}\right\},$$

则 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\cong\mathrm{Gal}(L/K(X))$, 参考 [5] 命题 3.3.6.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

定理 2.3 (Riemann 存在定理)**.** *设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形, 则由范畴等价*

$$(\mathrm{Fét}/X)\to(\mathrm{FTopCov}/X^{\text{an}}).$$

特别的有 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\cong\pi_1\widehat{(X^{\text{an}},x)}$, 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [2] 的定理 XII.5.1. □

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形的平展基本群了.

注 2.4 (算术和数论人的最爱)**.** *(i) 对于 X 为 k 上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 [5] 命题 3.3.7):*

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\text{sep}}}, \bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \to \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \to 1;$$

(ii) 对于 $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \backslash \{0, 1, \infty\}$, 运用正合列得到

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}}, \bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q}) \to 1.$$

嵌入 $\mathbb{Q}^{\text{al}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 可以得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}}, \bar{x}) \cong \langle a, b, \widehat{c | abc} = 1 \rangle.$$

而群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q})$ 则十分复杂, 如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 (摘自 J. Milne 的讲义 [7]).

3 景和层和层化

本质就是推广拓扑空间的定义.

定义 3.1 (Grothendieck 拓扑和景)**.** *设 $\mathcal{C}$ 是范畴, 一个 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑由集合 $\{\{U_i \to U\}_{i \in I}\} = \mathrm{Cov}(U)$ 组成, 其中 U 是任意对象, 满足*

(i) 若 $V \to X$ 是同构, 则 $\{V \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$;

(ii) 若 $\{X_i \to X\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ 且 $Y \to X$ 是任意态射, 则纤维积 $X_i \times_X Y$ 存在且

$$\{X_i \times_X Y \to Y\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(Y);$$

(iii) 若 $\{X_i \to X\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ 且对任意 $i \in I$ 都给定 $\{V_{ij} \to X_i\}_{j \in J_i}$, 则

$$\{V_{ij} \to X_i \to X\}_{i \in I, j \in J_i} \in \mathrm{Cov}(X).$$

范畴 $\mathcal{C}$ 和其上的 Grothendieck 拓扑称为景.

例 3.1 (小 Zariski 景)**.** *假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\mathrm{Op}(X)$ 由开子概形构成, 态射是包含关系. 则 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{Zar}.*

例 3.2 (大 Zariski 景)**.** *假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 为开浸入且 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{ZAR}.*

例 3.3 (小平展景)**.** *假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\text{Ét}/X$, 不难证明里面的态射都是平展的, 所以我们不假设条件. $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $\coprod_{i \in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\text{ét}}$.*

例 3.4 (大平展景)**.** *假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平展且 $\coprod_{i \in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\text{Ét}}$.*

例 3.5 (fppf 景)**.** *假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平坦和局部有限表现, 且 $\coprod_{i \in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 X_{fppf}.*

定义 3.2. *景 $\mathcal{C}$ 上的预层为函子 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$;*

定义 3.3. *给定景 $\mathcal{C}$ 和其上的预层 F.*

(i) 预层 F 称之为分离的, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$, 诱导态射 $F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i)$ 是单射;

(ii) 预层 F 称为层, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$, 我们有如下等化子:

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被 $U_i \times_U U_j \to U_i$ 和 $U_i \times_U U_j \to U_j$ 诱导.

定义 3.4. 一个范畴称为 *Grothendieck* 意象 *(Topos)* 如果其等价于某个景上的层范畴.

定义 3.5 (层化)**.** 在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$, 称 $\mathscr{P}^\sharp\in\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 使得 $\mathscr{P}\to\mathscr{P}^\sharp$ 是 $\mathscr{P}$ 的层化, 如果任取 $\mathscr{G}\in\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 和 $\mathscr{P}\to\mathscr{G}$, 都有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{P}^\sharp \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\
\mathscr{G} &
\end{tikzcd}$$

定理 3.6. 在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$. 对某个覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to U\}\in\mathrm{Cov}(U)$, 定义

$$\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{P}):=\ker\left(\prod_i\mathscr{P}(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j}\mathscr{P}(U_i\times_U U_j)\right).$$

故有典范映射 $\mathscr{P}(U)\to\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{P})$. 不难证明不同覆盖可以诱导良定义的态射且和覆盖间映射选取无关 *(*参考 *Tag 03NQ)*, 故定义

$$\mathscr{P}^+:U\mapsto\varinjlim_{\mathfrak{U}}\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{P}).$$

(i) 函子 $\mathscr{P}^+$ 是分离预层;
(ii) 若 $\mathscr{P}$ 是分离预层, 则 $\mathscr{P}^+$ 是层且 $\mathscr{P}\to\mathscr{P}^+$ 单射;
(iii) 若 $\mathscr{P}$ 是层, 则 $\mathscr{P}\to\mathscr{P}^+$ 是同构;
(iv) 不论如何 $\mathscr{P}^{++}$ 一定是层, 且 $\mathscr{P}^{++}\cong\mathscr{P}^\sharp$.

证明. 这是纯粹的层论推导, 参考Tag 00WB. □

注 3.7. 我们在景的定义*3.1*里规定 $\mathrm{Cov}(U)$ 是集合很大程度上就是为了保证这个极限存在.

推论 3.8. 在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$. 则 $\sharp:\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})\to\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 是个函子, 且若规定遗忘函子为 $i:\mathrm{Sh}(\mathcal{C})\to\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$, 则有 $(\sharp,i)$ 是伴随函子. 特别的, 函子 $\sharp$ 是正合函子.

证明. 近乎平凡. □

推论 3.9. 考虑图 $\mathscr{F}:\mathcal{I}\to\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$, 则 $\varprojlim_{\mathcal{I}}\mathscr{F}$ 存在且和预层范畴内一样, 而 $\varinjlim_{\mathcal{I}}\mathscr{F}$ 存在且为预层范畴内的层化.

证明. 也是纯粹的层论验证, 见Tag 00W2和Tag 00WI. □

4 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景 $X_{\text{ét}}$. 记 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 是集合取值的平展层范畴, 而 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为 $\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 和 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$.

4.1 基本结果和例子

命题 4.1. 固定概形 X, 对于 $\mathscr{F}\in\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 若 $\mathscr{F}$ 在限制到 *Zariski* 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖 $V\to U$ 满足层条件, 则 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.

证明. 详细细节参考 [6] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 Zariski 开覆盖上的条件会给出: 对于概形 $V=\coprod_i V_i$, 我们有 $\mathscr{F}(V)=\prod_i\mathscr{F}(V_i)$. 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖 $\coprod_i U_i\to U$ 满足等化子条件, 那么 $\{U_i\to U\}$ 也满足等化子条件 (因为 $\coprod_i U_i\times_U\coprod_j U_j=\coprod_{i,j}U_i\times_U U_j$). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到 $\{U_i\to U\}_{i\in I}$ 也满足等化子条件, 其中 I 有限且 U_i 仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去. □

例 4.1 (结构层)**.** 给定概形 X. 定义 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$ 为 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}(U) := \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$. 我们断言 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$. 运用*4.1*, 这其实就是环的忠实平坦下降*:* 设环同态 $f: A \to B$ 忠实平坦, 则有正合列*:*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b \mapsto 1\otimes b - b \otimes 1} B \otimes_A B$$

证明颇为经典, 分成三步*:(a)* 证明如果 f 有一个截面, 则命题成立*;(b)* 证明如果存在另一个忠实平坦同态 $A \to A'$ 使得命题对 $A' \to A' \otimes_A B$ 成立, 则也对 $A \to B$ 成立*;(c)* 发现 $B \to B \otimes_A B, b \mapsto b \otimes 1$ 存在截面 $b \otimes b' \mapsto bb'$.

例 4.2 (由概形表示的层)**.** 给定概形 X. 取定 Z 为 X-概形, 定义其为 $h_Z := \mathrm{Hom}_X(-, Z)$. 事实上通过 *(i)* 的正合列也容易得到 $h_Z \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$. 下面有几个常用的例子*:*

(a) 定义 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}(T) = \{\zeta \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T) : \zeta^n = 1\}$, 即 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t]/(t^n - 1)$ 表示*;*

(b) 定义 $\mathbb{G}_{a,X}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$, 即 $\mathbb{G}_{a,X}$ 是被 $\mathbb{A}^1_X$ 表示的函子*;*

(c) 定义 $\mathbb{G}_{m,X}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T^*)$, 即 $\mathbb{G}_{m,X}$ 是被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t, t^{-1}]$ 表示的函子*;*

(d) 定义 $\mathrm{GL}_{n,X}(T) = \mathrm{GL}_n(\Gamma(T, \mathscr{O}_T))$, 即 $\mathrm{GL}_{n,X}$ 是被

$$\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[\{x_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}][1/\det(x_{ij})]$$

表示的函子.

例 4.3 (拟凝聚层)**.** 给定概形 X. 考虑 $\mathscr{M} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{Zar}})$ 是拟凝聚的, 定义 $\mathscr{M}^{\text{ét}}(\phi : U \to X) := \Gamma(U, \phi^* \mathscr{M})$. 运用*4.1*和更一般的正合列*:* 环同态 $f: A \to B$ 忠实平坦且 M 为 A-模, 则有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \otimes_A M \Longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A M$$

即可得到 $\mathscr{M}^{\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.

命题 4.2 (点上的层范畴)**.** 对于 $X = \mathrm{Spec}\, k$, 有范畴等价

$$\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) \to (\text{离散}\, \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) - \text{集}), \mathscr{F} \mapsto M_{\mathscr{F}} := \varinjlim_{k^{\mathrm{sep}} \supset k'/k \text{有限 } Galois} \mathscr{F}(\mathrm{Spec}\, k').$$

证明. 定义逆为 $M \mapsto \mathscr{F}_M := (A \mapsto \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(A, k^{\mathrm{sep}}), M))$. 见Tag 03QT. □

注 4.3. 类似的有范畴等价

$$\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to (\text{离散}\, \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) - \text{模}).$$

4.2 平展预层/层的茎

定义 4.4 (平展邻域)**.** 给定概形 X, 称几何点 $\bar{x}$ 的一个平展邻域为如下图表*:*

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "f"] \\ \bar{x} \arrow[ur, "\bar{u}"] \arrow[r, "\bar{x}"'] & X \end{tikzcd}$$

其中 f 平展. 我们记为 $(U, \bar{u}) \to (X, \bar{x})$.

引理 4.5. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 则

(i) 给定两个平展邻域 $(U_i, \bar{u}_i)_{i=1,2}$, 存在第三个平展邻域 $(U, \bar{u})$ 和态射 $(U, \bar{u}) \to (U_i, \bar{u}_i)$*;*

(ii) 假设 $h_1, h_2 : (U_1, \bar{u}_1) \to (U_2, \bar{u}_2)$ 是平展邻域的态射, 则存在第三个平展邻域 $(U, \bar{u})$ 和态射 $h : (U, \bar{u}) \to (U_1, \bar{u}_1)$ 使得 $h_1 \circ h = h_2 \circ h$.

证明. (i) 只需考虑 $U = U_1 \times_X U_2$, 而 $\bar{s} \to U$ 被 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 定义;

(ii) 定义 U 为纤维积

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & U_1 \arrow[d, "(h_1, h_2)"] \\ U_2 \arrow[r, "\Delta"] & U_2 \times_X U_2 \end{tikzcd}$$

并定义 $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. □

注 4.6. 在 *(ii)* 内, 通过一些假设, 我们可以使得态射 $h_1 = h_2$: 若我们有诺特分离概形的图标

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, shift right, "g"'] \arrow[dl, shift left, "g'"] \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "p"'] & S \end{tikzcd}$$

其中 Y 连通且 p, q 平展, 则 $g = g'$. 这是因为 $\delta : X \to X \times_S X$ 平展且是闭浸入, 则 $X \times_S X = \delta(X) \sqcup Z$ 为连通分支的无交并. 注意到 $g \times g' : Y \to X \times_S X$ 有连通的像. 根据图知 $\delta(X) \cap \mathrm{Im}(g \times g') \neq \emptyset$, 故 $\mathrm{Im}(g \times g') \subset \delta(X)$, 故 $g = g'$.

定义 4.7. 给定概形 X 和 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 给定几何点 $\bar{x}$, 定义 $\mathscr{P}$ 在 $\bar{x}$ 的茎为

$$\mathscr{P}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U, \bar{u})} \mathscr{P}(U)$$

其中余极限遍历所有平展邻域, 根据引理*4.5*此为滤余极限.

注 4.8. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 则不难看出 $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_{\bar{x}}$ 作为函子 $\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sets}$ 或者 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sets}$ 或者 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{AbGrps}$ 或者 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{AbGrps}$ 都是正合的. 如果你不放心, 请参考*Tag 03PT*.

定义 4.9. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 给定集合 E, 定义 $E^{\bar{x}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 为:

$$E^{\bar{x}}(U) := \bigoplus_{\mathrm{Hom}_X(\bar{x}, U)} E.$$

注 4.10. 有几个简单的性质:

(i) 这个 $E^{\bar{x}}$ 在平展拓扑下一定是层, 其他景上面不一定;

(ii) 我们有伴随函子 $((-)_{\bar{x}}, (-)^{\bar{x}})$, 在预层范畴上这个伴随对任何景都对, 在层范畴上需要一定条件 *(*而小平展景显然满足*)*, 若对这个有兴趣, 参考*Tag 00Y3*;

(iii) 对于几何点 $\bar{y}$, 除非 $\bar{y}$ 也在 $\bar{x}$ 对应的点上, 否则 $(E^{\bar{x}})_{\bar{y}} = 0$.

命题 4.11. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 对于 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 有 $\mathscr{P}_{\bar{x}} = \mathscr{P}^{\sharp}_{\bar{x}}$.

证明. 因为有伴随性, 对于任何集合 E, 我们有

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sets}}(\mathscr{P}_{\bar{x}}, E) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})}(\mathscr{P}, E^{\bar{x}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})}(\mathscr{P}^{\sharp}, E^{\bar{x}}) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sets}}(\mathscr{P}^{\sharp}_{\bar{x}}, E),$$

因此成立. □

对于结构层 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$, 它的茎有特殊的代数性质.

命题 4.12. 给定概形 X 和在 $x \in X$ 上的几何点 $\bar{x}$. 设 $\kappa(x) \subset \kappa(x)^{\mathrm{sep}} \subset \kappa(\bar{x})$ 是可分代数闭包, 则有

(i) 有同构 $(\mathscr{O}_{X,x})^{\mathrm{sh}} \cong (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 前者为 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的严格 *Hensel* 化;

(ii) 设 $\mathfrak{m}_x$ 是 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的极大理想, 则 $\mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 是 $(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 的极大理想, 且满足

$$(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}} / \mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}} \cong \kappa(x)^{\mathrm{sep}};$$

(iii) 对任何首一多项式 $f \in (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}[T]$ 和任意 $\bar{f} \in \kappa(x)^{\mathrm{sep}}[T]$ 的根 $\alpha_0 \in \kappa(x)^{\mathrm{sep}}$ 使得 $\bar{f}'(\alpha_0) \neq 0$, 则存在 $\alpha \in (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 使得 $f(\alpha) = 0$ 且 $\alpha_0 = \bar{\alpha}$.

证明. 这些都是复杂的交换代数, 见Tag 04GE, Tag 04GP和04GW. 其中 (iii) 被称之为 Hensel 引理, 满足 (iii) 的环叫做 Hensel 局部环, 如果这个环的剩余类域可分代数闭, 则称之为严格 Hensel 局部环. 所以我们这里就是一个严格 Hensel 环. □

注 4.13. 我们之后将记 $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}} := (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 也不会有歧义.

对于 Hensal 局部环, 我们还有如下常用的结论:

命题 4.14 (Hensel 引理)**.** *设* $(A, \mathfrak{m}, \kappa)$ *是 Hensal 局部环, 则*

(i) 任何有限 A*-代数* S *都是在* R *上有限的局部环的乘积, 此时这些局部环依旧是 Hensal 局部环;*

(ii) 如果平展 A*-代数* B *满足* B *的极大理想* $\mathfrak{n}$ *卧于* $\mathfrak{m}$ *上使得* $\kappa \cong B/\mathfrak{n}$*, 则存在同构* $\phi : B \cong A \times B'$ *使得* $\phi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m} \times B' \subset A \times B'$*;*

(iii) 我们有范畴等价:

$$\{\text{有限平展}A\text{-代数}\} \longleftrightarrow \{\text{有限平展}\kappa\text{-代数}\}, S \mapsto S/\mathfrak{m}S.$$

证明. 纯粹的交换代数, 参考Tag 04GG, Tag 04GH, Tag 04GK和Tag 03QH. □

4.3 常值层和局部常值层

定义 4.15. *给定概形* X*.*

(i) 对于 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$*(或者* $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$*), 则* $\mathscr{F}$ *称为常值层如果存在集合* E*(或者 Abel 群* G*) 使得* $\mathscr{F} \cong (U \mapsto E)^\sharp =: \underline{E}_X$*(或者* $\cong (U \mapsto G)^\sharp =: \underline{G}_X$*);*

(ii) 称 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$*(或者* $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$*) 是局部常值层, 如果存在覆盖* $\{U_i \to X\}$ *使得* $\mathscr{F}|_{U_i}$ *是常值层;*

(iii) 称 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$*(或者* $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$*) 是有限局部常值层, 如果* $\mathscr{F}$ *是局部常值层且取值的集合(或 Abel 群) 是有限集合.*

引理 4.16 (有限平展映射的平展局部分解)**.** *(i) 设* $f : X \to S$ *有限无分歧, 取* $s \in S$*, 则存在平展邻域* $(U, u) \to (S, s)$ *和有限无交分解* $X_U = \coprod_j V_j$ *使得所有* $V_j \to U$ *均为闭浸入.*

(ii) 设 $f : X \to S$ *有限平展, 取* $s \in S$*, 则存在平展邻域* $(U, u) \to (S, s)$ *和有限无交分解* $X_U = \coprod_j V_j$ *使得所有* $V_j \to U$ *均为同构.*

证明. 首先, 有关各种映射的平展局部, 可参考Tag 024J. 二者究其本质都是拟有限态射的平展局部性质 (见Tag 02LM). 证明虽然不甚复杂, 但写于此意义也不大, 故这里我们略去证明, 证明参考Tag 04HJ和Tag 04HN. □

命题 4.17. *给定概形* X*, 则有范畴等价*

$$\{\text{有限平展映射}U \to X\} \cong \{\text{有限局部常值层}\}, (U \to X) \mapsto \mathscr{F} = h_U.$$

证明. 根据引理4.16(ii), 不难看出 h_U 确实是有限局部常值层. 另一方面, 任取 $\mathscr{F}$ 是有限局部常值层, 则存在平展覆盖 $\{U_i \to X\}$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是常值层, 则可以被有限平展态射 $U_i \to X$ 表示 (设取值集合的基数是 κ, 若是诺特分离概形, 考虑注4.6, 则令 $Z_i = \coprod_{i=1}^{\kappa} U_i$, 故 $\mathscr{F}|_{U_i} = h_{Z_i}$). 根据仿射态射满足有效的忠实平坦下降 (fpqc), 我们可以得到存在 $Z \to X$ 使得 $h_Z \cong \mathscr{F}$. 而由于有限性和平展性都是 fpqc 局部的, 故 $Z \to X$ 仍然是有限平展映射. □

命题 4.18. *给定连通概形* X *和几何点* $\bar{x}$*.*

(i) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})\} \to \{\text{有限}\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-集}\};$$

(ii) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\} \to \{\text{有限}\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-模}\}.$$

证明. (i) 根据定理2.2(i) 和命题4.17, 得到结论; (ii) 即为 (i) 赋予加法结构. □

4.4 Abel 群预层和层构成的范畴

固定概形 X, 可以看出 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 一定是 Abel 范畴, 它里面的正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等皆为正常的定义方法. 我们主要考虑的是满子范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 它是加性范畴, 我们将要证明它为 Abel 范畴 (其正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等和一般拓扑空间上类似, 皆为层化).

命题 4.19. *给定概形 X 和范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的列*

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0,$$

则下述命题等价:

(i) 列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 在 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内 (函子性的) 正合;

(ii) 列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 在 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内正合且 $\mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ 满足对任意的 $U \in X_{\text{ét}}$ 和 $s \in \mathscr{F}''(U)$, 存在 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ 使得 $s|_{U_i}$ 在 $\mathscr{F}(U_i) \to \mathscr{F}''(U_i)$ 的像内;

(iii) 对所有几何点 $\bar{x} \to X$, 都有 $0 \to \mathscr{F}'_{\bar{x}} \to \mathscr{F}_{\bar{x}} \to \mathscr{F}''_{\bar{x}} \to 0$ 正合.

证明. (ii) 推 (i), 平凡. (i) 推 (iii) 由于取茎是正合函子, 故也平凡.

(iii) 推 (ii), 先证明满射部分. 任取 $U \in X_{\text{ét}}$ 和几何点 $\bar{u} \to U$. 设 $\bar{x} : \bar{u} \to U \to X$ 也为几何点. 根据定义有 $\mathscr{F}_{\bar{u}} = \mathscr{F}_{\bar{x}}$, 故 $\mathscr{F}_{\bar{u}} \to \mathscr{F}''_{\bar{u}}$ 也是满射. 再由定义知道成立. 对于其他部分, 注意到 $s \in \mathscr{F}(U)$ 为零当且仅当 $s_{\bar{u}} = 0$ 即可, 这也是定义. □

推论 4.20. *给定概形 X, 则范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 范畴.*

4.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列

定理 4.21 (Kummer 正合列)**.** *给定概形 X 和正整数 n 使得 n 在 X 内可逆 (不被任何剩余类域的特征整除), 则有 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列*

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_{n,X} \to \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X} \to 0.$$

证明. 显然 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 为 $\mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X}$ 的核. 故只需要证明满射. 取 $U = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的平展 X-概形, 任取 $a \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{m,X})$, 根据假设知典范映射 $V = \operatorname{Spec} A[t]/(t^n - a) \to U$ 是平展映射. 注意到对应的环同态是有限自由的, 故忠实平坦, 于是是满射. 因此 $V \to U$ 是平展覆盖, 根据4.19即可得到结论. □

定理 4.22 (Artin-Schreier 列)**.** *给定概形 X 和素数 p 使得在 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ 内 $p = 0$, 则有 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列*

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X \to \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \to 0.$$

证明. 类似于 Kummer 正合列, 注意到此时 $\operatorname{Spec} A[t]/(t^p - t - a) \to \operatorname{Spec} A$ 是平展覆盖即可. □

4.6 拟凝聚层

定义 4.23. *考虑景 $X_{\text{ét}}$ 上的 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$-模 $\mathscr{F}$ 称之为拟凝聚的如果任取 $U \in X_{\text{ét}}$, 存在 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ 使得*

$$\mathscr{F}|_{X_{\text{ét}}/U_i} \cong \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{k \in K} \mathscr{O}_{X,\text{ét}/U_i} \to \bigoplus_{l \in L} \mathscr{O}_{X,\text{ét}/U_i} \right).$$

其中 $X_{\text{ét}}/U_i$ 是局部景, 其中的对象皆为 $V \to U_i$, 覆盖皆为 U_i-映射.

注 4.24. *这个在所有景上面都可以定义.*

作为下降理论的应用, 我们有如下令人震惊的结论:

定理 4.25. *如下拟凝聚层范畴是范畴等价:*

$$\mathrm{Qcoh}(X_{\text{Zar}}) \to \mathrm{Qcoh}(X_{\text{ét}}), \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\text{ét}}.$$

证明. 这个是下降理论的直接应用, 需要用到纤维范畴 QCOH 然后可以证明其为有效的 fpqc 下降, 但这个的证明非常复杂 (参考 [1] 定理 4.23). 我们推荐感兴趣的读者阅读 [9] 命题 4.3.15. □

注 4.26. *作为推广我们可以考虑一些特殊的景, 也满足类似结论. 见 Tag 03OJ.*

5 层的一些函子

5.1 直像

定义 5.1. 考虑概形映射 $f: X \to Y$, 设 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$, 定义直像为

$$f_*\mathscr{P}(U \to Y) = \mathscr{P}(U \times_Y X \to X).$$

命题 5.2. 概形映射 $f: X \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.
(i) 必然有 $f_*\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$;
(ii) 对于 $g: Y \to Z$, 我们有 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;
(iii) 若视作函子 $f_*: \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$, 则左正合.

证明. 此乃定义, 略去. □

命题 5.3. 考虑概形映射 $f: X \to Y$ 和几何点 $\bar{y} = \operatorname{Spec} k \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.
(i) 若 f 是闭浸入, 则

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \begin{cases} \{*\} & \text{当} \quad \bar{y} \notin X \\ \mathscr{F}_{\bar{y}} & \text{当} \quad \bar{y} \in X \end{cases}$$

其中 $\{*\}$ 指单点集;
(ii) 若 f 是开浸入, 若 $\bar{y} \in X$, 则 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \mathscr{F}_{\bar{y}}$;
(iii) 如果 f 是有限态射, 则

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \prod_{\bar{x}: \operatorname{Spec} k \to X, f(\bar{x}) = \bar{y}} \mathscr{F}_{\bar{x}}.$$

若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \bigoplus_{\bar{x}: \operatorname{Spec} k \to X, f(\bar{x}) = \bar{y}} \mathscr{F}_{\bar{x}}$.

证明. (ii) 是平凡的;(iii) 颇为麻烦, 需要用到严格 Hensel 环的性质, 我们略去, 参考Tag 03QP.
(i) 当 $\bar{y} \notin X$, 这是显然的. 下面考虑 $\bar{y} \in X$ 的情况. 考虑两个事实:
事实 1. 对任意两个平展态射 $U, U' \to Y$, 设 $h: U_X \to U'_X$ 是 X-态射, 则存在 $a: W \to U, b: W \to U'$ 使得 $a_X: W_X \to U_X$ 是同构且 $h = b_X \circ (a_X)^{-1}$.
事实 1 的证明: 设 $M = U \times_Y U'$ 和图像 $\Gamma_h \subset M_X$. 注意到 Γ_h 是平展映射 $\mathrm{pr}_{1,X}: M_X \to U_X$ 一个截面的像, 故是开的. 则存在开子概形 $W \subset M$ 使得 $W \cap M_X = \Gamma_h$. 故取 $a = \mathrm{pr}_1|_W, b = \mathrm{pr}_2|_W$ 即可.
事实 2. 对平展态射 $V \to X$, 存在一族平展态射 $U_i \to Y$ 和态射 $U_{i,X} \to V$ 使得 $\{U_{i,X} \to V\}$ 是 V 的是 Zariski 覆盖.
事实 2 的证明: 不妨设 Y, V 皆为仿射的, 则化为以下简单的交换代数: 假设环 R 和理想 $I \subset R$, 设 $R/I \to S'$ 平展, 则存在平展同态 $R \to S$ 使得 $S' \cong S/IS$ 是 R/I-代数同构. 这是因为平展同态总可以写成 $S' = (R/I)[x_1, ..., x_n]/(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)$ 其中 $\overline{\Delta} = \det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$ 在 S' 里可逆. 只需要提升成某些 $f_1, ..., f_n$ 且设 $S = R[x_1, ..., x_n, x_{n+1}]/(f_1, ..., f_n, x_{n+1}\Delta - 1)$, 其中 $\Delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 即可.
回到原结论. 注意到 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} \mathscr{F}(U_X)$ 且 $\mathscr{F}_{\bar{y}} = \varinjlim_{(V,\bar{v})} \mathscr{F}(V)$. 由这两个事实可以得到 $\{(U, \bar{u})\}$ 在 $\{(V, \bar{v})\}$ 内共尾, 则得证. □

5.2 逆像

定义 5.4. 考虑概形映射 $f: X \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 定义逆像为

$$f^{-1}\mathscr{F} = \left((U \to X) \mapsto \varinjlim_{U \to X \times_Y V} \mathscr{F}(V \to Y) \right)^\sharp.$$

命题 5.5. 考虑概形映射 $f: X \to Y$, 则
(i) 有伴随函子 (f^{-1}, f_*);
(ii) 函子 $f^{-1}: \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和 $f^{-1}: \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 正合;
(iii) 对几何点 $\bar{x} \to X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 设 $\bar{y} = \ \to X \to Y$, 则 $(f^{-1}\mathscr{F})_{\bar{x}} \cong \mathscr{F}_{\bar{y}}$;
(iv) 对 $g: Y \to Z$, 有 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
(v) 对平展映射 $V \to Y$, 有 $f^{-1}h_V = h_{X \times_Y V}$.

证明. (i)(ii) 略去.(iv) 和 (v) 由伴随性和 Yoneda 引理显然. 考虑 (iii), 注意到

$$\begin{aligned}(f^{-1}\mathscr{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(U,\bar{u})}(f^{-1}\mathscr{F})(U)\\ &= \varinjlim_{(U,\bar{u})}\ \varinjlim_{a:U\to X\times_Y V}\mathscr{F}(U)\\ &= \varinjlim_{(V,a\circ\bar{u})}\mathscr{F}(V)=\mathscr{F}_{\bar{y}}\end{aligned}$$

即可. □

命题 5.6 (基变换)**.** 考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

其中 f 有限, 则 $f'_*\circ(g')^{-1}=g^{-1}\circ f_*$.

证明. 只需验证茎即可. 注意到纤维积, 对 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 考虑几何点 $\bar{y}':\operatorname{Spec}k\to Y'$, 我们有

$$\begin{aligned}(f'_*(g')^{-1}(\mathscr{F}))_{\bar{y}'} &= \prod_{\bar{x}':\operatorname{Spec}k\to X',f'\circ\bar{x}'=\bar{y}'}((g')^{-1}(\mathscr{F}))_{\bar{x}'}\\ &= \prod_{\bar{x}':\operatorname{Spec}k\to X',f'\circ\bar{x}'=\bar{y}'}\mathscr{F}_{g'\circ\bar{x}'}\\ &= \prod_{\bar{x}:\operatorname{Spec}k\to X,f\circ\bar{x}=g\circ\bar{y}'}\mathscr{F}_{\bar{x}}=(f_*\mathscr{F})_{g\circ\bar{y}'}=(g^{-1}f_*\mathscr{F})_{\bar{y}'}\end{aligned}$$

得到结论. □

5.3 零扩张函子 (下叹号函子)

定义 5.7. 考虑平展映射 $j:U\to X$, 定义 $j_!:\mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})\to\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 为

$$j_!\mathscr{F}=\left((V\mapsto X)\mapsto\bigoplus_{V\to U}\mathscr{F}(V\to U)\right)^{\sharp}.$$

命题 5.8. 对平展映射 $j:U\to X$, 有

(i) 有伴随函子 $(j_!,j^{-1})$;

(ii) 对 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 和几何点 $\bar{x}:\operatorname{Spec}k\to X$ 我们有

$$(j_!\mathscr{F})_{\bar{x}}=\bigoplus_{\bar{u}:\operatorname{Spec}k\to U,j(\bar{u})=\bar{x}}\mathscr{F}_{\bar{u}},$$

特别的, 函子 $j_!$ 正合;

(iii) 若 j 有限平展, 则存在 $j_!\to j_*$ 使得对任何 $\mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 都同构;

(iv) 若 j 是开浸入, 则对 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 有 $j^{-1}j_*\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}\to j^{-1}j_!\mathscr{F}$ 是同构. 事实上 $j_!\mathscr{F}$ 是唯一一个使得限制在 U 上是 $\mathscr{F}$, 且在其他地方的茎是 0 的 *Abel* 群层.

证明. (i)(iv) 平凡, 略去.(iii) 只需要考虑平展局部, 用引理4.16(ii) 即可验证.

考虑 (ii), 映射为

$$\begin{aligned}(j_!\mathscr{F})_{\bar{x}}=\varinjlim_{(V,\bar{v})}(j_!\mathscr{F})(V)=\varinjlim_{(V,\bar{v})}\bigoplus_{\phi:V\to U}\mathscr{F}(\phi)\\ \to\bigoplus_{\bar{u}:\operatorname{Spec}k\to U,j(\bar{u})=\bar{x}}\mathscr{F}_{\bar{u}}.\end{aligned}$$

同构参考Tag 03S5. □

命题 5.9 (基变换). *(i) 设 $f: Y \to X$ 是概形映射且 $j: V \to X$ 平展, 考虑纤维积*

$$\begin{tikzcd} Y \times_X V \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & V \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

则有 $j'_! \circ (f')^{-1} = f^{-1} \circ j_!$;

(ii) 设 $f: X \to Y$ 是有限映射且 $j: V \to Y$ 开浸入, 且基变换之后 $g: U = X \times_Y V \to V$ 平展, 设 $j': U \to X$, 则有 $f_* \circ j'_* = j_! \circ g_*$.

证明. (i) 考虑二者的右伴随函子, 然后因为直像和平展局部化交换即可得到结论;

(ii) 首先考虑 Y 的不在 U 内的几何点上的茎不难得知二者皆为零. 其次用命题5.8(iv) 和命题5.6, 得到同构

$$j^{-1} f_* j'_! \mathscr{F} = g_* (j')^{-1} j'_! \mathscr{F} = g_* \mathscr{F}.$$

再次用命题5.8(iv) 即可得到结论. □

命题 5.10. *对于概形 X 和闭子概形 $i: Z \to X$ 及其补 $j: U \to X$, 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有正合列*

$$0 \to j_! j^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to i_* i^{-1} \mathscr{F} \to 0.$$

证明. 分情况不难根据定义得到取茎之后正合, 然后用命题4.19即可. □

6 平展上同调的定义和基本性质

6.1 定义

引理 6.1. *对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 存在内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 使得有单射 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}$.*

证明. 任取 $x \in X$ 和在其上的几何点 $i_x: \bar{x} \to X$, 取内射 Abel 群满足 $\mathscr{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow I(x)$. 则 $\mathscr{I}(x) := i_{x,*} I(x)$ 是内射的, 故取 $\mathscr{I} = \prod_{x \in X} \mathscr{I}(x)$ 即可得到 $\mathscr{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} \mathscr{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow \mathscr{I}$. □

定义 6.2. *对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 不难得知截面函子 $\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$ 左正合. 由引理6.1知有内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$, 则定义 X 上 $\mathscr{F}$ 的平展上同调为*

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) := R^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathscr{F}) = H^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathscr{I}^*).$$

和我们之前定义的上同调理论类似, 我们也有如下基本结果:

命题 6.3. *(i) 满足 $H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$;*

(ii) 若 $\mathscr{I}$ 内射, 则当 $i > 0$ 时 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{I}) = 0$;

(iii) 短正合列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 会诱导长正合列

$$0 \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}') \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}'') \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}') \to \cdots.$$

注 6.4. *(a) 若 $g: U \to X$ 平展, 则 $g^{-1} \circ \Gamma(U, -) = \Gamma(U, -)$, 故 $H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U) = H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F})$;*

(b) 对于 $f: X \to Y$, 因为有 $\mathscr{F} \to f_* f^{-1} \mathscr{F}$, 故可以诱导 $R\Gamma(Y, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, f^{-1}\mathscr{F})$, 故可以诱导映射 $H^i_{\text{ét}}(Y, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(X, f^{-1}\mathscr{F})$.

6.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

定义 6.5. *设 G 是拓扑群.*

(i) 一个 Abel 群 M(赋予离散拓扑) 称为 G-模, 如果有连续作用 $G \times M \to M$;

(ii) 设 Mod_G 是 G-模构成的范畴. 根据 Tag 04JF, 范畴 Mod_G 有足够内射对象. 考虑左正合函子

$$\Gamma_G: \mathrm{Mod}_G \to \mathrm{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群 G 的 (连续) 上同调为 $H^i(G, M) = R^i \Gamma_G(M)$. 若 G 是 Galois 群则成为 Galois 上同调.

命题 6.6. *对于群 G, 考虑群环 $\mathbb{Z}[G]$, 那么有自然的范畴等价 $\mathrm{Mod}_G \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$. 设 $\mathbb{Z}$ 可以经过平凡 G 作用来作为 $\mathbb{Z}[G]$ 模, 则 $H^i(G,M) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$.*

证明. 近乎平凡, 略去. □

定理 6.7 (Tate)**.** *设 M 是拓扑群并且赋予连续 G-作用. 考虑复形*

$$C^*_{\mathrm{cont}}(G,M) : M \to \mathrm{Maps}_{\mathrm{cont}}(G,M) \to \mathrm{Maps}_{\mathrm{cont}}(G\times G,M) \to \cdots$$

其中边界算子为当 $n=0$, 则 $m \mapsto (g \mapsto g(m)-m)$; 当 $n>0$ 时定义为

$$\begin{aligned} d(f)(g_1,...,g_{n+1}) = g_1(f(g_2,...,g_{n+1})) \\ &+ \sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(g_1,...,g_jg_{j+1},...,g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1,...,g_n). \end{aligned}$$

这样定义 Tate 连续上同调为 $H^i_{\mathrm{cont}}(G,M) := H^i(C^*_{\mathrm{cont}}(G,M))$. 则对于 $M \in \mathrm{Mod}_G$, 存在典范映射 $H^i(G,M) \to H^i_{\mathrm{cont}}(G,M)$. 并且当 G 是离散群或者射有限群, 则为同构 $H^i(G,M) \cong H^i_{\mathrm{cont}}(G,M)$.

证明. 映射 $H^i(G,M) \to H^i_{\mathrm{cont}}(G,M)$ 通过万有 δ-函子不难诱导. 证明见 [8] 第二章. □

6.3 点的上同调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上同调也是很复杂的.

引理 6.8. *设 $x = \mathrm{Spec}\, k$, 固定几何点 $\bar{x} = \mathrm{Spec}\, \Omega$. 取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(x_{\text{ét}})$, 则*

$$\Gamma(x,\mathscr{F}) \cong (\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}.$$

证明. 根据命题4.17和命题4.2, 我们用 Yoneda 引理有

$$\Gamma(x,\mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})}(h_x,\mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)-\text{集}}(\{*\},\mathscr{F}_{\bar{x}}) = (\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$$

得到结论. □

定理 6.9. *设 $x = \mathrm{Spec}\, k, \bar{x} = \mathrm{Spec}\, k^{\mathrm{sep}}$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(x_{\text{ét}})$, 则对任意 $i \geq 0$,*

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) \cong H^i(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),\mathscr{F}_{\bar{x}}).$$

证明. 根据引理, 我们得知 $\Gamma(x,\mathscr{F}) = \Gamma_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}(\mathscr{F}_{\bar{x}}) := (\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$, 故我们有

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) = R^i\Gamma(x,\mathscr{F}) = R^i\Gamma_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}(\mathscr{F}_{\bar{x}}) = H^i(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),\mathscr{F}_{\bar{x}})$$

即可得到结论. □

注意到当 $x = \bar{x}$ 且当 $i>0$ 时, 就有 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) = 0$, 这和几何上是一样的.

6.4 严格 Hensel 局部环的上同调

我们时常会使用严格 Hensel 局部环的谱的上同调消失的结论如下:

定理 6.10. *设 R 是严格 Hensel 局部环, 设 $X = \mathrm{Spec}\, R$ 和闭点 $\bar{x}$. 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有 $\Gamma(X,\mathscr{F}) = \mathscr{F}_{\bar{x}}$. 特别的, 函子 $\Gamma(X,-)$ 正合, 故对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和 $i>0$ 都有 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) = 0$.*

证明. 设平展邻域 $(U,\bar{u})$, 取 $\bar{u}$ 的的仿射邻域 $\mathrm{Spec}\, A$, 故 $R \to A$ 平展且 $\kappa(\bar{x}) = \kappa(\bar{u})$. 由命题4.14(ii) 得知作为 R-代数有 $A \cong R \times A'$ 且和 $\kappa(\bar{x}) = \kappa(\bar{u})$ 契合. 故我们有截面 $X \to \mathrm{Spec}\, A$. 因此平展邻域 $(X,\bar{x})$ 是共尾的, 故 $\Gamma(X,\mathscr{F}) = \mathscr{F}_{\bar{x}}$. 其他结论就平凡了. □

6.5 平展上同调和极限一瞥

我们这里只给出叙述, 不给出证明, 详细细节参考Tag 03Q4.

定义 6.11. 设 I 是预序集, 考虑逆系统 $(X_i, f_{i'i})_I$. 一个在其上定义的层系统 $(\mathscr{F}_i, \varphi_{i'i})$ 为满足
(i) 层 $\mathscr{F}_i \in \mathrm{Sh}(X_{i,\text{ét}})$;
(ii) 对 $i' \geq i$, 有 $\mathrm{Sh}(X_{i,\text{ét}})$ 内的映射 $\varphi_{i'i} : f_{i'i}^{-1}\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_{i'}$
使得 $\varphi_{i''i} = \varphi_{i''i'} \circ f_{i''i'}^{-1}\varphi_{i'i}$.

定理 6.12 (Tag 09YQ)**.** 考虑定向逆系统 $(X_i, f_{i'i})_I$ 使得 X_i 拟紧拟分离且 $f_{i'i}$ 仿射. 对于其上定义的层系统 $(\mathscr{F}_i, \varphi_{i'i})$, 假设 $f_i : X = \varprojlim X_i \to X_i$ 且 $\mathscr{F} := \varinjlim f_i^{-1}\mathscr{F}_i$, 则有

$$\varinjlim H^i_{\text{ét}}(X_i, \mathscr{F}_i) \cong H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

6.6 支撑在闭集的上同调及性质

首先, 不难证明如下事实: 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 取截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 则存在开集 $W \subset U$ 使得

(i) W 是 U 内最大的开集使得 $s|_W = 0$;
(ii) 对任何几何点 $\bar{u} \to U$, 设 $\bar{s} = (U \to S) \circ \bar{u}$, 则

$$0 = (U, \bar{u}, s) \in \mathscr{F}_{\bar{s}} \Leftrightarrow \bar{u} \in W.$$

读者可以自己证明, 如果想当懒狗, 参考Tag 04FR.

定义 6.13. 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$.
(i) 层 $\mathscr{F}$ 的支集为点集 $\mathrm{supp}(\mathscr{F}) \ni s$ 使得对所有 *(一些)*s 上的几何点 $\bar{s}$ 都有 $\mathscr{F}_{\bar{s}} \neq 0$;
(ii) 截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 其支集 $\mathrm{supp}(s)$ 定义为闭集 $U \backslash W$.

注 6.14. 层的支集不一定是闭的, 但如果取值是环, 那一定是闭的, 因为这时相当于单位截面的支集.

定义 6.15. 对概形 X, 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 定义

$$\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) = \{s \in \mathscr{F}(X) : \mathrm{supp}(x) \subset Z\}.$$

定义支撑在 Z 的平展上同调为

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) := R^i\Gamma_Z(X, \mathscr{F}).$$

命题 6.16. 对概形 X, 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 设 $U = X \backslash Z$, 则有好三角:

$$R\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(U, \mathscr{F}) \to R\Gamma_Z(X, \mathscr{F})[1]$$

进而诱导出正合列:

$$\cdots \to H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \to H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to \cdots.$$

证明. 任取内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们断言 $\mathscr{I}(X) \to \mathscr{I}(U)$ 是满的. 设 $j : U \to X$, 注意到对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有

$$\mathrm{Hom}(j_!\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathscr{F}|_U) = \Gamma(U, \mathscr{F}),$$

因为 $\mathscr{I}$ 是内射的, 故只需证明 $j_!\underline{\mathbb{Z}}_U \to \underline{\mathbb{Z}}_X$ 是单射. 根据层化函子是正合的, 只需证明对平展映射 $V \to X$, 典范映射

$$\bigoplus_{V \to U} \underline{\mathbb{Z}}(U) \to \bigoplus_{V \to X} \underline{\mathbb{Z}}(U)$$

是单射, 而这是显然的, 故断言成立.

不难发现上述满射的核为 $\Gamma_Z(X, \mathscr{I})$, 因此立即得到好三角

$$R\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(U, \mathscr{F}) \to R\Gamma_Z(X, \mathscr{F})[1].$$

而长正合列因此是显然的. □

定理 6.17 (切除)**.** 设 $f: X' \to X$ 平展和闭子概形 $Z' \subset X'$ 使得

(i) 设 $Z := f(Z')$ 是闭集且 $f|_{Z'}: Z' \cong Z$ 同构;

(ii) 有 $f(X' \backslash Z') \subset X \backslash Z$.

则对任意的 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有对任意 i 的同构

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^i_{Z',\text{ét}}(X', f^{-1}\mathscr{F}).$$

证明. 设 $U' = X' \backslash Z', U = X \backslash Z$, 考虑

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "\cong"] \\ U \arrow[r, "j"] & X & Z \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

得到

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Gamma(X, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U, \mathscr{F}) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(X', f^{-1}\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(U', f^{-1}\mathscr{F}) \end{tikzcd}$$

其中虚线为诱导出来的映射. 由于 f^{-1} 正合且和内射对象交换, 则只需证明诱导的

$$g: \Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F})$$

是同构. 注意到若 $s \in \ker g$, 则 s 在 $\Gamma(X', \mathscr{F})$ 和 $\Gamma(U, \mathscr{F})$ 是 0. 而 $\{X', U\}$ 是平展覆盖, 则 $s = 0$, 故是单射. 另一方面, 取 $s' \in \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F}) \subset \Gamma(X', f^{-1}\mathscr{F})$. 注意到 $s', 0$ 在 U' 是 0; 另外 s' 限制 $X' \times_X X' \rightrightarrows X'$ 都是相等的, 因此可以粘合成 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$, 故满射. □

推论 6.18. 对概形 X 和闭点 $x \in X$, 任取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有

$$H^i_{x,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,x}, \mathscr{F}).$$

证明. 用定理6.17和定理6.12即可. □

7 Čech 上同调和挠子

7.1 Čech 上同调

定义 7.1. 考虑概形 X 和一族平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i \in I}$, 考虑 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 定义

$$\check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) = \prod_{(i_0, \ldots, i_r) \in I^{r+1}} \mathscr{P}(U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_r})$$

和映射 $d^r: \check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \to \check{C}^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$ 为

$$s = (s_{i_0, \ldots, i_r}) \mapsto \left(\sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j (s_{i_0, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_{r+1}})|_{U_{i_0, \ldots, i_{r+1}}} \right)_{i_0, \ldots, i_{r+1}}.$$

复形 $\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$ 称为 *Čech* 复形, 其上同调

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) := H^i(\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P}))$$

称为 $\mathscr{P}$ 关于覆盖 $\mathfrak{U}$ 的 *Čech* 上同调.

注 7.2. *不难注意到 Čech 复形可以重新写成:*

$$\check{C}^*(\mathfrak{U},\mathscr{P})=\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})}\left(\left(\bigoplus_{i_0\in I}\underline{\mathbb{Z}}_{U_{i_0}}\leftarrow\bigoplus_{(i_0,i_1)\in I^2}\underline{\mathbb{Z}}_{U_{i_0}\times_X U_{i_1}}\leftarrow\cdots\right),\mathscr{P}\right).$$

而且直接 (大量) 计算会得到 Hom 里面的复形 $\underline{\mathbb{Z}}^*_{\mathfrak{U}}$ 是正合的 (参考 Tag 03AT).

例 7.1. *考虑覆盖 $\mathfrak{U}=\{Y\to X\}$ 使得 $Y\to X$ 是 Galois 覆叠 G. 对 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 假设其吧无交并映成积, 应用定理6.7则有 $\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{P})\cong H^r(G,\mathscr{P}(Y))$.*

命题 7.3. *给定概形 X 和平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$.*
(i) 对任何内射对象 $\mathscr{I}\in\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 对 $i>0$ 我们有 $\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{I})=0$;
(ii) 在 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内 $\check{H}^i(\mathfrak{U},-)$ 是 $\check{H}^0(\mathfrak{U},-)$ 的导出函子;
(iii) 若 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})=\Gamma(X,\mathscr{F})$.

证明. (ii) 运用万有 δ 函子理论即可;(iii) 就是层的条件之一;(i) 注意到

$$\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{I})=H^i(\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})}(\underline{\mathbb{Z}}^*_{\mathfrak{U}},\mathscr{I}))$$

且 $\underline{\mathbb{Z}}^*_{\mathfrak{U}}$ 正合和 $\mathscr{I}$ 内射即可. □

定义 7.4. *考虑概形 X 和一族平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$. 这个覆叠的一个加细指覆盖 $\mathfrak{V}=\{V_j\to X\}_{j\in J}$ 满足对任意的 $V_j\to X$ 都存在分解 $V_j\to U_{\alpha(j)}\to X$. 这样会自然诱导一个 $\alpha^*:\check{C}^*(\mathfrak{U},\mathscr{P})\to\check{C}^*(\mathfrak{V},\mathscr{P})$ 为 $(\alpha^r s)_{j_0,\ldots,j_r}=s_{\alpha(j_0),\ldots,\alpha(j_r)}|_{V_{j_0,\ldots,j_r}}$. 因此诱导 $\rho(\mathfrak{V},\mathfrak{U}):\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{P})\to\check{H}^i(\mathfrak{V},\mathscr{P})$. 故而可以定义 Čech 上同调为*

$$\check{H}^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{P}):=\varinjlim_{\mathfrak{U}}\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{P}).$$

命题 7.5. *给定概形 X.*
(i) 对任何内射对象 $\mathscr{I}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 对 $i>0$ 我们有 $\check{H}^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{I})=0$;
(ii) 若 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $\check{H}^0_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=\Gamma(X,\mathscr{F})$.

证明. (i) 注意到遗忘函子保持内射性质, 于是在 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内也满足; (ii) 由于对所有覆盖都满足, 因此余极限也满足. □

7.2 Čech-导出谱序列

类似于 Zariski 上同调, 平展上同调也有类似的 Čech-导出的比较结论.

引理 7.6. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 考虑预层 $\underline{H}^i(\mathscr{F}):U\mapsto H^i_{\text{ét}}(U,\mathscr{F}|_U)$. 考虑遗忘函子 $i:\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\to\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 我们有 $\underline{H}^r(-)=R^r i(-)$. 特别的 $\underline{H}^i(\mathscr{F})^\sharp=0$.*

证明. 考虑 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\xrightarrow{i}\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})\xrightarrow{\sharp}\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则取内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$ 我们有 $\underline{H}^r(\mathscr{F})=H^r(i(\mathscr{I}^*))$. 因此 $\underline{H}^r(-)=R^r i(-)$. □

推论 7.7. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 对 $r>0$, 任取 $s\in H^r_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$ 都存在平展覆盖 $\{U_i\to X\}$ 使得 s 在每个 $H^r_{\text{ét}}(U_i,\mathscr{F}|_{U_i})$ 内均为 0.*

证明. 这是引理7.6的直接推论. □

定理 7.8. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 考虑预层 $\underline{H}^i(\mathscr{F}):U\mapsto H^i_{\text{ét}}(U,\mathscr{F}|_U)$, 则有谱序列*

$$E_2^{p,q}=\check{H}^p_{\text{ét}}(X,\underline{H}^q(\mathscr{F}))\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

证明. 对 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\xrightarrow{i}\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})\xrightarrow{\check{H}^0_{\text{ét}}(X,-)}\mathrm{AbGrps}$, 因为 $\check{H}^0_{\text{ét}}(X,-)\circ i=\Gamma(X,-)$, 引用上述引理和 Grothendieck 谱序列, 我们得到结论. □

作为应用, 我们有如下比较结果:

命题 7.9. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 对于 $r = 0, 1$, 我们有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$.*

证明. 考虑谱序列 $E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 根据推论7.7, 我们得知对 $s > 0$ 有 $E_2^{0,q} = 0$. 观察谱序列第二页:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \bullet & \bullet \\
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \bullet & \bullet \\
0 & 0 & E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & \bullet
\end{tikzcd}$$

即可得知对于 $r = 0, 1$, 有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. $\square$

注 7.10. *如果 X 拟紧且对任何有限子集都包含在某个仿射开集内, 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和任何 r, 我们都有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 参考 [6] 内的 III.2.17.*

7.3 应用 I——Mayer-Vietoris 列

定理 7.11 (Mayer-Vietoris)**.** *设概形 $X = U \cup V$ 为开集的并, 给定 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们有正合列:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^s_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \arrow[r] & H^s_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \oplus H^s_{\text{ét}}(V, \mathscr{F}) \arrow[dll, rounded corners] \\
H^s_{\text{ét}}(U \cap V, \mathscr{F}) \arrow[r] & H^{s+1}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

证明. 设覆盖为 $\mathfrak{U} = \{U \to X, V \to X\}$. 根据 Čech 上同调定义, 我们有如下正合列:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \arrow[r] & H^s_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \oplus H^s_{\text{ét}}(V, \mathscr{F}) \arrow[dll, rounded corners] \\
H^s_{\text{ét}}(U \cap V, \mathscr{F}) \arrow[r] & \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

另一方面, 考虑谱序列 $E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 注意到当 $r > 1$ 时有 $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) = 0$, 运用谱序列结论 [4] 命题 2.2.4 我们有如下正合列

$$0 \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \to H^{s+1}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^{s+1}(\mathscr{F})) \to 0.$$

综合两个正合列即可得到结论. $\square$

注 7.12. *直接证明参考 Tag 0A50. 还有相对版本的 Mayer-Vietoris 列, 我们不再赘述, 见 Tag 0EYK.*

7.4 应用 II——拟凝聚层的上同调

接下来介绍一个意料之中的结果.

引理 7.13. *设 $X = \operatorname{Spec} A$ 仿射, 取拟凝聚层 $\mathscr{F}^{\text{ét}}$, 则对 $i > 0$ 都有 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}}) = 0$.*

证明. 我们用对 i 的归纳法.

先考虑 $i = 1$. 取 $\xi \in H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 将覆盖加细可以假设 U_i 仿射. 根据命题7.9得到其对应 $\eta' \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 设 $\mathfrak{V} = \{\sqcup_i U_i \to X\}$ 不难看出 $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 假设 $\mathfrak{V} = \{\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A\}$, 则复形 $\check{C}^*(\mathfrak{V}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$ 为

$$B \otimes_A M \to B \otimes_A B \otimes_A M \to B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A M \to \cdots .$$

故成立.

对于 $i>1$, 取 $\xi \in H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}})$, 由推论7.7存在平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i \to X\}$ 使得 $\eta|_{U_i}=0$. 将覆盖加细可以假设 U_i 仿射. 注意到 $U_{i_0}\times_X U_{i_1}\times_X \cdots \times_X U_{i_p}$ 皆为仿射, 考虑谱序列7.8

$$E_2^{p,q}=\check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F}))\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

根据归纳假设知道对 $0<q<p$ 都有 $E_2^{p,q}=0$, 我们可以看出 ξ 必然来自 $\xi' \in \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 继续 $i=1$ 情况的证明即可. □

定理 7.14 (平展-Zariski 的拟凝聚上同调比较定理). *对概形 X 和拟凝聚层 $\mathscr{F}$, 对任何 $i\geq 0$ 我们都有*

$$H^i(X,\mathscr{F})\cong H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}}).$$

证明. 我们只考虑概形 X 分离的情况 (一般情况可以由Tag 03F3和 Tag 03DW得到). 取 Zariski 开覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}$, 根据分离性,$U_{i_0}\times_X U_{i_1}\times_X \cdots \times_X U_{i_p}$ 皆为仿射. 则谱序列7.8除了第一行全是零. 故我们有

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}})=\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{F}^{\text{ét}})=\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{F})=H^i(X,\mathscr{F})$$

即可得到结论. □

定理 7.15 (拟凝聚层). *计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调.*

证明. 运用定理4.25和定理7.14即可. □

因此, 我们只需要计算不是拟凝聚层的平展上同调即可. 比如挠层, 这是我们一大目标之一.

7.5 挠子理论一瞥和应用

类似于概型理论里的挠子理论, 我们可以将其推广至小平展景.

定义 7.16. *对概形 X 和平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$. 取取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$, 设 $U_{i_0\cdots i_p}=U_{i_0}\times_X\cdots\times_X U_{i_p}$. 我们定义取值在 $\mathscr{G}$ 的 1-余链为 $g=(g_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ 使得 $g_{ij}\in\mathscr{G}(U_{ij})$ 满足*

$$g_{ij}|_{U_{ijk}}g_{jk}|_{U_{ijk}}=g_{ik}|_{U_{ijk}}.$$

两个 1-余链 g,g', 定义 $g\sim g'$ 使得存在 $(h_i)_{i\in I}$ 其中 $h_i\in\mathscr{G}(U_i)$ 满足

$$g'_{ij}=h_i|_{U_{ij}}g_{ij}(h_j|_{U_{ij}})^{-1}.$$

定义 $\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}):=\{g\}/\sim$.

注 7.17. *根据构造, 对于短正合列 $1\to\mathscr{G}'\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}''\to 1$, 我们有*

$$1\to\Gamma(X,\mathscr{G}')\to\Gamma(X,\mathscr{G})\to\Gamma(X,\mathscr{G}'')\to\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}')\to\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G})\to\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}'').$$

定义 7.18. *对概形 X 和取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$. 设 $\mathscr{S}\in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 存在右 $\mathscr{G}$-作用. 我们称 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{G}$-挠子如果满足*

(i) 存在平展覆盖 $\{U_i\to X\}$ 使得 $\mathscr{S}(U_i)\neq\emptyset$;

(ii) 对任意的平展映射 $U\to X$ 和 $s\in\Gamma(U,\mathscr{S})$, 映射 $\mathscr{G}|_U\to\mathscr{S}|_U, g\mapsto sg$ 是同构.

我们称 $\mathscr{S}$ 被 $\{U_i\to X\}$ 平凡化. 如果 $\mathscr{S}(X)\neq\emptyset$ 我们称 $\mathscr{S}$ 是平凡 $\mathscr{G}$-挠子.

这两个概念出现不是偶然, 事实上我们有如下结论:

定理 7.19. *对概形 X 和取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$. 我们有双射*

$$\{\text{被}\mathfrak{U}\text{平凡化的}\mathscr{G}\text{-挠子}\}/\cong\longleftrightarrow\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}).$$

证明. 我们阐述映射如何诱导. 给定被 $\mathfrak{U}$ 平凡化的 $\mathscr{G}$-挠子 $\mathscr{S}$. 对 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$, 给定 $s_i\in\mathscr{S}(U_i)$, 由于作用单可迁, 存在 $g_{ij}\in\mathscr{G}(U_{ij})$ 使得 $(s_i|_{U_{ij}})g_{ij}=s_j|_{U_{ij}}$. 则得到 $g=(g_{ij})_{I^2}$. 对另一组 s'_i, 我们可以有 $s'_i=s_ih_i$, 故会得到 $g\sim g'$, 因此良定义. 有关这个证明因为没什么意思所以我们略去, 参考 [7] 命题 11.1. □

注 7.20. 如果 G 是有限常值群层且 X 连通, 则

$$\{G\text{-挠子}\}/\cong = \{\textit{Galois}\ \text{群为}G\text{的}X\text{的}\ \textit{Galois}\ \text{覆盖}\} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}),G).$$

定理 7.21 (向量丛和挠子)**.** 对概形 X 和秩 n 局部自由模构成的群 $\mathrm{Vect}^n_{\mathrm{Zar}}(X)$, 我们有

$$\mathrm{Vect}^n_{\mathrm{Zar}}(X) \cong \check{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathrm{GL}_{n,X}) \cong \check{H}^1_{\mathrm{fppf}}(X,\mathrm{GL}_{n,X}) \cong \check{H}^1_{\text{ét}}(X,\mathrm{GL}_{n,X}).$$

证明. 忽略, 参考 [7] 定理 11.4. □

推论 7.22. 我们有

$$H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X}) \cong \mathrm{Pic}(X).$$

证明. 注意到 $\mathbb{G}_{m,X}$ 交换, 根据命题7.9和定理7.21即得到结果. □

推论 7.23 (Hilbert 定理 90)**.** 对于有限 *Galois* 扩张 L/k, 有 $H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)=0$.

证明. 注意到

$$H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),(k^{\mathrm{sep}})^*) = \varinjlim_{\text{有限 Galois 覆盖}L/k} H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)$$

其中后者是 $L\subset L'$ 诱导 $H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)\hookrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(L'/k),(L')^*)$. 根据推论7.22和定理6.9得到当 $X=\mathrm{Spec}\,k$ 有 $H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})\cong H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),(k^{\mathrm{sep}})^*)$ 且 $H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})\cong \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\,k)=0$ 即可得到结论. □

8 高阶直像

8.1 基础性质

定义 8.1. 对概形态射 $f:X\to Y$ 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 因为 f_* 左正合, 故可以得到高阶直像 $R^if_*\mathscr{F}$.

命题 8.2. 对概形态射 $f:X\to Y$ 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有

$$R^if_*\mathscr{F} = \big(U\mapsto H^i_{\text{ét}}(U\times_Y X,\mathscr{F})\big)^\sharp.$$

证明. 定义函子 $f_*^{\mathrm{pre}}:\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})\to\mathrm{PreAb}(Y_{\text{ét}})$ 为 $\mathscr{P}\mapsto(U\mapsto\Gamma(U\times_Y X,\mathscr{P}))$. 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{f_*^{\mathrm{pre}}} & \mathrm{PreAb}(Y_{\text{ét}}) \\
{\scriptstyle i}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \sharp} \\
\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})
\end{array}$$

由于 $\sharp, f_*^{\mathrm{pre}}$ 正合, 取内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$ 得到

$$R^rf_*\mathscr{F} = H^i(f_*\mathscr{I}^*) = H^r(\sharp\circ f_*^{\mathrm{pre}}\circ i\mathscr{I}^*) = (f_*^{\mathrm{pre}}H^r(i\mathscr{I}^*))^\sharp = (f_*^{\mathrm{pre}}\underline{H}^r(\mathscr{F}))^\sharp$$

即可. □

推论 8.3. 对于几何点 $\bar{y}$, 我们有

$$(R^if_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} H^i_{\text{ét}}(U\times_Y X,\mathscr{F}).$$

注 8.4. 如果 f 拟紧拟分离, 我们有

$$(R^if_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}\times_Y X,\mathscr{F}).$$

参考 *Tag 03Q7*, 这个在导出范畴内也对.

例 8.1. 参考 [7] 定理 12.4, 如果 X 是正规整概形, 考虑一般点 $f: \eta \to X$, 则有 $(R^i f_* \mathscr{F})_\eta = H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\operatorname{Frac}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,x} \times_Y X, \mathscr{F})$.

推论 8.5. 如果 $f: X \to Y$ 是有限映射, 则对 $\mathscr{F} \in \operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有对于所有 $i > 0$ 有 $R^i f_* \mathscr{F} = 0$.

证明. 这时我们有

$$(R^i f_* \mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y} \times_Y X, \mathscr{F}).$$

由于 f 有限, 那么 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y} \times_Y X$ 在 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}$ 上有限. 故 $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y} \times_Y X$. 根据命题4.14(i) 得到 $A \cong A_1 \times \cdots \times A_r$ 为 Hensel 局部有限 $\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}$-代数. 故而 A_i 也是严格 Hensel 局部环. 此时 $\operatorname{Spec} A = \coprod_{i=1}^r \operatorname{Spec} A_i$, 运用定理6.10得到对 $i > 0$ 有 $(R^i f_* \mathscr{F})_{\bar{y}} = 0$. □

8.2 Leray 谱序列

定理 8.6 (Leray 谱序列)**.** 对概形态射 $f: X \to Y$ 和 $\mathscr{F} \in \operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(Y, R^q f_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

证明. 注意到 $\Gamma(X, -) \circ f_* = \Gamma(Y, -)$, 由于 f_* 保持内射, 根据 Grothendieck 谱序列得到

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(Y, R^q f_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$$

即可. □

9 曲线的上同调 I——基础结果

我们已经知道, 计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调, 因此只需要考虑不是拟凝聚的情况. 眼下我们只能解决最简单的情况——代数闭域上光滑曲线的上同调, 我们主要关心的是它上面挠层的上同调. 本节我们讨论挠层里的基石——$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-系数的上同调, 求出这个我们根据有限生成 Abel 群就可以得到常值层的上同调, 之后的内容在后续章节阐述.

9.1 Brauer 群和 C_r 域一瞥

定义 9.1. 考虑所有域 k 上的 (有限维) 中心单代数构成的集合 CSA_k, 定义等价关系为 $A \sim B$ 当且仅当存在中心除环 D 使得 $A \cong \operatorname{Mat}_m(D), B \cong \operatorname{Mat}_n(D)$. 定义 *Brauer* 群为 $\operatorname{Br}(k) := \mathrm{CSA}_k / \sim$.

注 9.2. 由定义,$\operatorname{Mat}_n(D) \sim D$.

事实上根据 Wedderburn 定理, 域 k 上任何中心单代数都形如 $\operatorname{Mat}_n(D)$. 也就是说,$\operatorname{Br}(k)$ 给出了 k 上中心除环的分类! 结合代数理论告诉我们, 如果 A 是中心单代数, 那么 $A \otimes_k k^{\text{sep}} \cong \operatorname{Mat}_n(k^{\text{sep}})$(参考 Tag 0753). 也就是说, 中心除环平展局部地是局部环, 而这一点能让我们使用 Galois 下降.

此外, 我们还能在一般的概形上定义中心单代数, 也就是所谓的 Azumaya 代数. 伽罗瓦上同调告诉我们 $\operatorname{Br}(k) = H^2(\operatorname{Gal}(k^{\text{sep}}/k), (k^{\text{sep}})^*)$, 根据定理6.9, 我们有 $\operatorname{Br}(k) = H^2_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(k), \mathbb{G}_m)$, 于是我们可以通过这个来定义一般概形的 Brauer 群.

定义 9.3. 域 K 称之为 C_r 的, 如果对任何 $0 < d^r < n$ 和任何 d 次齐次多项式 $f \in K[T_1, ..., T_n]$, 都存在不全是零的 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ 使得 $f(\alpha) = 0$.

命题 9.4. 若 K 是 C_1 的, 则 $\operatorname{Br}(K) = 0$.

证明. 不然, 考虑 K 上非平凡的有限维除环 D, 则 $D \otimes_K K^{\text{sep}} \cong \operatorname{Mat}_d(K^{\text{sep}})$. 考虑行列式映射 $\det: D \otimes_K K^{\text{sep}} \cong \operatorname{Mat}_d(K^{\text{sep}}) \to K^{\text{sep}}$. 取 $\operatorname{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$-不变元得到映射 $N: D \to K$. 因为 K 是 C_1 的, 若 $d > 1$, 则存在非零 $x \in D$ 使得 $N(x) = 0$. 这会推出 x 不可逆, 这不可能! □

定理 9.5 (Tsen 定理)**.** 代数闭域 k 上的 r 维代数簇的函数域是 C_r 的.

证明. □

Tsen 定理告诉我们为什么 C_r 域的条件如此奇怪. 事实上我们还会使用 Serre 的如下定理:

定理 9.6 (Serre)**.** *假设对于 K, 若岁所有的有限扩张 K'/K 都有 $\mathrm{Br}(K')=0$, 则对所有 $q\geq 1$ 都有*

$$H^q(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K),(K^{\mathrm{sep}})^*)=0.$$

证明. 参考Tag 03R8. □

9.2 $\mathbb{G}_{m,X}$ 的上同调

定理 9.7 (基本正合列)**.** *设 X 是整正规概形, 设一般点嵌入为 $g:\eta\to X$ 和余一维点的嵌入 $i_z:z\to X$, 则有正合列:*

$$0\to\mathbb{G}_{m,X}\to g_*\mathbb{G}_{m,\eta}\to\bigoplus_{\mathrm{codim}(z)=1}i_{z,*}\underline{\mathbb{Z}}.$$

如果 X 光滑, 则也右正合, 进而正合.

证明. 取平展映射 $\phi:U\to X$, 不妨设 $U=\operatorname{Spec}A$ 连通仿射. 则根据正规性, 这个列限制在 U_{Zar} 上正合:

$$0\to A^*\to K^*\xrightarrow{\oplus v_{\mathfrak{p}}}\bigoplus_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1}\mathbb{Z}.$$

故我们得到正合列

$$0\to\mathbb{G}_{m,X}\to g_*\mathbb{G}_{m,\eta}\to\bigoplus_{\mathrm{codim}(z)=1}i_{z,*}\underline{\mathbb{Z}}.$$

当 X 光滑, 因为此时 Weil 除子和 Cartier 除子重合, 因此局部主, 故而右正合. □

引理 9.8. *设 k 是代数闭域且 K/k 是超越度为 1 的域扩张, 则对 $q\geq 1$ 有 $H^r_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}K,\mathbb{G}_m)=0$.*

证明. 根据定理6.9, 只需考虑 $H^q(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K),(K^{\mathrm{sep}})^*)$. 再根据定理9.6 我们只需证明对所有的有限扩张 K'/K 都有 $\mathrm{Br}(K')=0$. 设 $K'=\varinjlim K''$ 为在 k 上超越度为 1 的有限生成扩张, 故 $\mathrm{Br}(K')=\varinjlim\mathrm{Br}(K'')$. 于是只需考虑 k 上超越度为 1 的有限生成扩张. 根据 Tsen 定理9.5, 我们得知这样的域都是 C_1 的, 再根据命题9.4即可得到结论. □

定理 9.9. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑射影曲线, 则*

$$H^q_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})=\begin{cases}\Gamma(X,\mathscr{O}_X)^* & q=0,\\ \mathrm{Pic}(X) & q=1,\\ 0 & q\geq 2.\end{cases}$$

证明. 根据推论7.22, 只需要考虑 $q\geq 2$ 的情况.

• **步骤 1.** 对任何 $q\geq 1$, 考虑一般点嵌入 $j:\eta\to X$, 则 $R^qj_*\mathbb{G}_{m,\eta}=0$.

考虑茎即可. 考虑闭点 $\bar{x}\to X$, 取仿射邻域 $\operatorname{Spec}A$, 设 $K=\mathrm{Frac}(A)$, 则 $(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}})\times_X\eta=\operatorname{Spec}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}}\otimes_A K)$, 其中后者是 DVR 的局部化. 由于现在极大理想生成元可逆, 故 $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}}\otimes_A K=\mathrm{Frac}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}})=:K^{\mathrm{sh}}_{\bar{x}}$. 因此 $(R^qj_*\mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{x}}=H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}K^{\mathrm{sh}}_{\bar{x}},\mathbb{G}_m)$. 根据引理9.8 得到结论.

若一般点, 考虑几何点 $\bar{\eta}$, 则 $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\bar{\eta}}=\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}$, 故

$$\begin{aligned}(R^qj_*\mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{\eta}}&=H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}})\times_X\eta,\mathbb{G}_m)\\&=H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}),\mathbb{G}_m)\\&=H^q_{\text{ét}}(\mathrm{Gal}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}/\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}),(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}})^*)=0,\end{aligned}$$

于是步骤 1 成立.

• **步骤 2.** 对任何 $q\geq 1$, 有 $H^q_{\text{ét}}(X,j_*\mathbb{G}_{m,\eta})=0$.

根据定理8.6得到

$$E_2^{p,q}=H^p_{\text{ét}}(Y,R^qj_*\mathbb{G}_{m,\eta})\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta,\mathbb{G}_{m,\eta}).$$

再根据引理9.8得到当 $p+q\geq 1$ 时有 $H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta,\mathbb{G}_{m,\eta})=0$. 取 $q=0$ 再利用步骤 1 即可得到步骤 2.

- **步骤 3.** 对任何 $q\geq 1$ 和闭点嵌入 $i_x: x\to X$, 有 $H^q_{\text{ét}}\left(X,\bigoplus_{x\text{闭点}} i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}\right)=0$.

  只需证明对闭点嵌入 $i_x: x\to X$ 和 $q>0$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X,i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}})=0$. 根据推论8.5和定理8.6得到 $H^q_{\text{ét}}(X,i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}})=H^q_{\text{ét}}(x,\underline{\mathbb{Z}})$. 由于代数闭, 步骤 3 成立.
- **步骤 4.** 完成证明.

  根据步骤 2 和步骤 3 还有正合列9.7即可得到结论. □

9.3 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 的上同调

引理 9.10. *若概形 X 在基概形 $\operatorname{Spec} A$ 上, 其中 A 是严格 Hensel 局部环且 $n\in A^*$, 则 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}\cong\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X$.*

证明. 因为 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}=\underline{\operatorname{Spec}}_X\mathscr{O}_X[t]/(t^n-1)$, 由于严格 Hensal, 多项式 t^n-1 会分裂. 故得到平凡的平展覆盖 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}\to X$, 则 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}\cong\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X$(参考 [5] 命题 7.2.2). □

定理 9.11. *设 X 是代数闭域 k 上的亏格 g 光滑射影曲线, 且 $n\in k^*$, 则*

$$H^q_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=\begin{cases}\boldsymbol{\mu}_n(k) & q=0,\\ \operatorname{Pic}^0(X)[n] & q=1,\\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q=2,\\ 0 & q\geq 3.\end{cases}$$

根据引理9.10我们有 $H^q_{\text{ét}}\left(X,\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X\right)=\begin{cases}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q=0,\\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g} & q=1,\\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q=2,\\ 0 & q\geq 3.\end{cases}$

证明. 根据 Kummer 正合列4.21和定理9.9引出长正合列为:

$$0\longrightarrow\boldsymbol{\mu}_n(k)\longrightarrow k^*\xrightarrow{(-)^n}k^*\longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})\longrightarrow\operatorname{Pic}(X)\xrightarrow{(-)^n}\operatorname{Pic}(X)\longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots.$$

故而当 $q\geq 3$ 时 $H^q_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=0$. 只需考虑 $q=1,2$. 由于代数闭, 映射 $(-)^n: k^*\to k^*$ 是满射, 因此对于 $(-)^n:\operatorname{Pic}(X)\to\operatorname{Pic}(X)$, $H^1_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=\ker(-)^n$ 且 $H^2_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=\operatorname{coker}(-)^n$. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Pic}^0(X) \arrow[r] \arrow[d, "{[n]}"] & \operatorname{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "(-)^n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\times n"] & 0\\
0 \arrow[r] & \operatorname{Pic}^0(X) \arrow[r] & \operatorname{Pic}(X) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据 Abel 簇的知识我们知道 $[n]$ 是满射且 $\ker[n]=\operatorname{Pic}^0(X)[n]\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g}$. 运用蛇引理即可得到结论. □

9.4 支撑在点上的上同调

10 可构建层和挠层

11 曲线的上同调 II——挠层的上同调

12 上同调维数

13 纯性和 Gysin 序列

14 紧合基变换

15 待添加

索引

1-余链, 19
C_r 域, 21
G-模, 13
$\mathrm{GL}_{n,X}$, 7
$\mathbb{G}_{a,X}$, 7
$\mathbb{G}_{m,X}$, 7
$\boldsymbol{\mu}_{n,X}$, 7
$\mathscr{G}$-挠子, 19
$\mathscr{O}_{X,\bar{x}}^{\mathrm{sh}}$, 8

Brauer 群, 21

Galois 上同调, 13
Grothendieck 意象, 6
Grothendieck 拓扑, 5

Hensel 局部环, 8
Hensel 引理, 8

Riemann 存在定理, 4

Tate 连续上同调, 14
Tsen 定理, 21

Weil 猜想, 3

Čech 上同调, 17

严格 Hensel 化, 8
严格 Hensel 局部环, 8

分离预层, 5
切除, 16
局部常值层, 9
层, 5
层化, 6
常值层, 9
平凡 $\mathscr{G}$-挠子, 19
平展上同调, 13
平展基本群, 4

拟凝聚层, 7
摩天大厦层, 8
景, 5
有限局部常值层, 9

直像, 11
纤维函子, 4
结构层, 7
群上同调, 13

茎, 8

逆像, 11
零扩张函子, 12
预层, 5

参考文献

[1] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained*. AMS, 2005.

[2] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer-Verlag, 1971.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

[4] Fu Lei. *Algebraic geometry*. TsingHua and Springer, 2006.

[5] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version*. World Scientific, 2015.

[6] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton university press, 1980.

[7] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013. Available at www.jmilne.org/math/.

[8] James S. Milne. Class field theory, 2020. Available at www.jmilne.org/math/.

[9] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. AMS, 2016.

[10] Stacks project collaborators. The stacks project, 2023. https://stacks.math.columbia.edu/.