平展上同调和反常层基础

刘晓龙

摘要

平展上同调是代数几何中非常重要的一部分, 同时也是比较基础的一部分, 广泛应用在各个方向. 这篇笔记第一部分将以 Milne 的讲义为大体顺序, 以几何人的视角讲述平展上同调的基础理论, 为后续代数几何的学习和研究扫清一些障碍. 第二部分将跟随 Bhargav 的讲义 (Takumi Murayama 记录) 来学习反常层理论的最基础的知识. 本笔记也得到了舍友很多支持, 感谢他对这个笔记的贡献和帮助.

最后日期

2023 年 4 月 26 日

目录

Part I
平展上同调基础

1 平展上同调简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取 X 为 $\mathbb{C}$ 上的代数簇, 其解析化 X^{an} 可以对应奇异上同调 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{Z})$ 满足

(i) 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模;

(ii) 群 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{C})$ 有额外的结构;

(iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 我们会发现挠系数的上同调, 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 系数的上同调可以比较好的模拟奇异上同调. 但会发现 $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})=0$ 而 $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ 并不能很好的模拟奇异上同调, 另一方面我们发现如下结果:

定理 1.1 (Serre)**.** *不存在上同调理论 H^* 使得 (i) 具有函子性;(ii) 满足 Kunneth 公式;(iii) 对所有椭圆曲线 E 满足 $H^1(E)\cong\mathbb{Q}^2$.*

基本思路. 取 E 为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}$ 是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到 $\mathrm{End}(E)$ 作用在 E 上会诱导出 $\mathrm{End}(E)$ 在 $H^1(E)$, 进而诱导出代数同态 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}\to\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{Q})$. 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论. □

为了在非挠系数下也可以模仿奇异上同调, 我们会定义类似的 ℓ-进上同调理论, 其中 ℓ 和特征 p 互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论):

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)=\varprojlim H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})\ \text{和}\ H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_\ell)=H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell,$$

这样也可以得到比较好的模拟.

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点 $(X,\bar{x})$, 可以定义 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$ 为平展基本群, 其定义事实上是从代数拓扑里偷的, 运用了覆叠变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

猜想 1 (Weil 猜想)**.** *设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上 n 维光滑紧合几何整的簇, 设*

$$S_X(t)=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n}t^n\right),$$

则

(i) 函数 $S_X(t)$ 是有理函数, 即 $S_X(t)=\prod_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}S_i(t)$, 其中 S_i 是满足一定条件的整系数多项式;

(ii) 满足函数方程 $S_X(q^{-n}t^{-1}) = \pm q^{nE/2}t^E S_X(t)$ 其中 E 是 X 欧拉示性数;

(iii) 所有零点和极点的绝对值为 $q^{j/2}$ 其中 $j \in \mathbb{Z}$;

(iv) 若 X 提升为代数整数环 $R \subset \mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 Y, 则对于 $i = 0, ..., 2n$, 流形 $Y(\mathbb{C})$ 的 *Betti* 数为 $S_i(t)$ 的次数 b_i.

最后结果. (i) 由 Dwork 运用 H^1 的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Gorthendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明. □

因此平展上同调是相当成功的上同调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点集拓扑) 就会被我略去 (当然大部分情况只是我懒得写了). 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐 [35] 里的Tag 0BQ6 和Tag 03N1, 扶磊教授的书 [27] 和 Milne 的传世经典 [29], 我们也会多次引用里面的某些细节.

前置知识: 至少是经典代数几何教材 [20] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 还有基本的导出范畴, 懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好, 你也会注意到平展上同调是研究概形的拓扑, 而凝聚上同调是研究概形的几何.

2 平展基本群

对于连通概形 X, 定义 $\mathrm{Fét}/X$ 为 X 上的有限平展态射构成的范畴, 而 $\mathrm{Ét}/X$ 为 X 上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点 $(X, \bar{x})$, 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}} : \mathrm{Fét}/X \to \mathrm{Sets}, (\pi : Y \to X) \mapsto \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆叠空间? 事实上不一定存在:

例 2.1. *考虑 $\mathbb{C}$ 上射影直线 $\mathbb{A}^1$, 存在有限平展映射 $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\} \to \mathbb{A}^1 \backslash \{0\}, x \mapsto x^n$, 那么注定没有像拓扑里的 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ 来表示万有覆盖!*

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [29] 也没证明. 而 [27] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X' = ((X_i, f_i)_{i \in I}, \phi_{ij} : X_j \to X_i, f_i = \phi_{ij} \circ f_j, f_i \in \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\mathrm{Hom}(X', Y) := \varinjlim \mathrm{Hom}_X(X_i, Y) \to \mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y), \sigma \mapsto \sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取 X_i/X 为 Galois 覆盖, 也就是说 $\deg(X_i/X) = \#\mathrm{Aut}_X X_i$, 见 [29] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于 $\phi_{ij} : X_j \to X_i$ 可以诱导 $\mathrm{Aut}_X X_j \to \mathrm{Aut}_X X_i$ 如下: 注意到 $\mathrm{Aut}_X X_j \to \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j), \sigma \mapsto \sigma(f_j)$ 是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [27] 第三节), 则通过 $F(X_j) \to F(X_i), \alpha \mapsto \phi_{ij}(\alpha)$ 即得到映射.

定义 2.2. *对于连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 考虑上述构造, 定义平展基本群为*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

定理 2.3. *考虑连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$.*

(i) 函子 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$ 诱导出 $\mathrm{F\acute{e}t}/X$ 到有限 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$-集的等价;

(ii) 取第二个几何点 $\bar{x}'$, 我们有 $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \cong \mathfrak{F}_{\bar{x}'}$ 进而诱导 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}')$, 并且和 (i) 契合;

(iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换;

(iv) 还可以定义平展基本群为 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_{\bar{x}})$.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考Tag 0BND. □

注 2.4. *类似 (iv), 可以定义连接 $\bar{x},\bar{y}$ 的平展道路为 $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(X;\bar{x},\bar{y}) := \mathrm{Isom}(\mathfrak{F}_{\bar{x}},\mathfrak{F}_{\bar{y}})$, 会诱导*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{y}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}), \phi \mapsto \gamma^{-1} \circ \phi \circ \gamma.$$

例 2.5. *(i) 对一个点 $X = \mathrm{Spec}(k)$ 和几何点 Ω, 由定义知道 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\Omega) = \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$;*

(ii) 考虑 $\mathbb{C}$ 上的 $X = \mathbb{A}^1\backslash\{0\}$, 则考虑 $x \mapsto x^n$ 得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i = \varprojlim \boldsymbol{\mu}_n(k) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{\ell} \mathbb{Z}_\ell;$$

(iii) 考虑代数闭域上的 $X = \mathbb{P}^1$, 由 Riemann-Hurwitz 公式不难得到 X 只有平凡的平展覆叠, 故 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) = 1$. 归纳可以得到 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^n,\bar{x}) = 1$;

(iv) 事实上我们对 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^1,\bar{x})$ 都一无所知, 其中 k 是正特征域 (根据 Artin-Scheier 列, 起码不是平凡的群);

(v) 对于正规簇 X, 考虑一般点上的几何点 $\bar{x}$, 假设

$$L = \bigcup\left\{\text{几何点内的有限可分扩张}K/K(X) : X\text{在}K\text{内的正规化到}X\text{平展}\right\},$$

则 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \mathrm{Gal}(L/K(X))$, 参考 [27] 命题 3.3.6.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

定理 2.6 (Riemann 存在定理)**.** *设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形, 则由范畴等价*

$$(\mathrm{F\acute{e}t}/X) \to (\mathrm{FTopCov}/X^{\text{an}}).$$

特别的有 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \pi_1\widehat{(X^{\text{an}},x)}$, 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [18] 的定理 XII.5.1. □

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形的平展基本群了.

注 2.7. *(i) 对于 X 为 k 上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 [27] 命题 3.3.7):*

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\text{sep}}},\bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \to \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \to 1;$$

(ii) 对于 $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\backslash\{0,1,\infty\}$, 运用正合列得到

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}},\bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q}) \to 1.$$

嵌入 $\mathbb{Q}^{\mathrm{al}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 可以得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}}, \bar{x}) \cong \langle a, b, \widehat{c | abc} = 1 \rangle.$$

而群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}/\mathbb{Q})$ 则十分复杂，如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 *(摘自 J. Milne 的讲义 [30])*.

3 景和层和层化

本质就是推广拓扑空间的定义.

定义 3.1 (Grothendieck 拓扑和景). 设 $\mathcal{C}$ 是范畴，一个 $\mathcal{C}$ 上的 *Grothendieck* 拓扑由集合 $\{\{U_i \to U\}_{i \in I}\} = \mathrm{Cov}(U)$ 组成，其中 U 是任意对象，满足

(i) 若 $V \to X$ 是同构，则 $\{V \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$;

(ii) 若 $\{X_i \to X\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ 且 $Y \to X$ 是任意态射，则纤维积 $X_i \times_X Y$ 存在且

$$\{X_i \times_X Y \to Y\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(Y);$$

(iii) 若 $\{X_i \to X\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ 且对任意 $i \in I$ 都给定 $\{V_{ij} \to X_i\}_{j \in J_i}$，则

$$\{V_{ij} \to X_i \to X\}_{i \in I, j \in J_i} \in \mathrm{Cov}(X).$$

范畴 $\mathcal{C}$ 和其上的 *Grothendieck* 拓扑称为景.

例 3.2 (小 Zariski 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\mathrm{Op}(X)$ 由开子概形构成，态射是包含关系. 则 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{Zar}.

例 3.3 (大 Zariski 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X，则 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 为开浸入且 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{ZAR}.

例 3.4 (小平展景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\text{Ét}/X$，不难证明里面的态射都是平展的，所以我们不假设条件. $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $\coprod_{i \in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\text{ét}}$.

例 3.5 (大平展景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X，则 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平展且 $\coprod_{i \in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\text{Ét}}$.

例 3.6 (fppf 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X，则 $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平坦和局部有限表现，且 $\coprod_{i \in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 X_{fppf}.

定义 3.7. 景 $\mathcal{C}$ 上的预层为函子 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$;

定义 3.8. 给定景 $\mathcal{C}$ 和其上的预层 F.

(i) 预层 F 称之为分离的，如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$，诱导态射 $F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i)$ 是单射;

(ii) 预层 F 称为层，如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$，我们有如下等化子:

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被 $U_i \times_U U_j \to U_i$ 和 $U_i \times_U U_j \to U_j$ 诱导.

定义 3.9. 一个范畴称为 *Grothendieck* 意象 *(Topos)* 如果其等价于某个景上的层范畴.

定义 3.10 (层化)**.** 在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$, 称 $\mathscr{P}^\sharp \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 使得 $\mathscr{P} \to \mathscr{P}^\sharp$ 是 $\mathscr{P}$ 的层化, 如果任取 $\mathscr{G} \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 和 $\mathscr{P} \to \mathscr{G}$, 都有交换图:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{P}^\sharp \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ \mathscr{G} & \end{tikzcd}$$

定理 3.11. 在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$. 对某个覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$, 定义

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) := \ker \left(\prod_i \mathscr{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathscr{P}(U_i \times_U U_j) \right).$$

故有典范映射 $\mathscr{P}(U) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$. 不难证明不同覆盖可以诱导良定义的态射且和覆盖间映射选取无关 *(*参考 *Tag 03NQ)*, 故定义

$$\mathscr{P}^+ : U \mapsto \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{P}).$$

(i) 函子 $\mathscr{P}^+$ 是分离预层;
(ii) 若 $\mathscr{P}$ 是分离预层, 则 $\mathscr{P}^+$ 是层且 $\mathscr{P} \to \mathscr{P}^+$ 单射;
(iii) 若 $\mathscr{P}$ 是层, 则 $\mathscr{P} \to \mathscr{P}^+$ 是同构;
(iv) 不论如何 $\mathscr{P}^{++}$ 一定是层, 且 $\mathscr{P}^{++} \cong \mathscr{P}^\sharp$.

证明. 这是纯粹的层论推导, 参考Tag 00WB. □

注 3.12. 我们在景的定义*3.1*里规定 $\mathrm{Cov}(U)$ 是集合很大程度上就是为了保证这个极限存在.

推论 3.13. 在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$. 则 $\sharp : \mathrm{PreSh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 是个函子, 且若规定遗忘函子为 $i : \mathrm{Sh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$, 则有 $(\sharp, i)$ 是伴随函子. 特别的, 函子 $\sharp$ 是正合函子.

证明. 近乎平凡. □

推论 3.14. 考虑图 $\mathscr{F} : \mathcal{I} \to \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$, 则 $\varprojlim_{\mathcal{I}} \mathscr{F}$ 存在且和预层范畴内一样, 而 $\varinjlim_{\mathcal{I}} \mathscr{F}$ 存在且为预层范畴内的层化.

证明. 也是纯粹的层论验证, 见Tag 00W2和Tag 00WI. □

4 平展拓扑的一些应用

定义 4.1 (平展邻域)**.** 给定概形 X, 称几何点 $\bar{x}$ 的一个平展邻域为如下图表:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "f"] \\ \bar{x} \arrow[ur, "\bar{u}"] \arrow[r, "\bar{x}"'] & X \end{tikzcd}$$

其中 f 平展. 我们记为 $(U,\bar{u}) \to (X,\bar{x})$. 我们称其为初等平展邻域, 如果其剩余类域相同.

4.1 拟有限映射的平展局部

命题 4.2. *设 $f: X \to S$ 是概形映射. 任取 $s \in S$ 和 $x_1, ..., x_n \in X_s$ 为孤立点, 假设 f 分离且局部有限型, 则存在初等平展邻域 $(U,u) \to (S,s)$ 和分解 (均为即开又闭的集合)*

$$U \times_S X = W \sqcup \coprod_{i=1}^{n} V_j$$

使得 $V_i \to U$ 有限且 u 的纤维是单点集 $\{v_i\}$ 使得每个 v_i 会打到 x_i 且 $\kappa(x_i) = \kappa(v_i)$, 且 $W \to U$ 在 u 的纤维里任何点不会打到任何一个 x_i.

证明. 这是相等复杂的一个纯代数结果, 参考Tag 02LN. □

4.2 Zariski 主定理

引理 4.3. *设 $f: X \to S$ 是概形映射且分离有限型, 考虑相对正规化*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & S' \arrow[dl, "\nu"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

则存在开子概形 $U' \subset S'$ 使得

(a) $(f')^{-1}(U') \to U'$ 是同构;

(b) $(f')^{-1}(U') \subset X$ 是使得 f 拟有限的点集.

证明. 可以证明使得 f 拟有限的点集是开的, 假设其为 U, 则只需要证明:

(a) $U' = f'(U)$ 是开的;

(b) $U = (f')^{-1}(U')$;

(c) $U \to U'$ 是同构.

• **步骤 1.** 事实上考虑如下断言: (d) 对任何 $x \in U$ 存在开邻域 $f'(x) \in V \subset S'$ 使得 $(f')^{-1}V \to V$ 是同构. 则不难证明 (d) 可以推出 (a)(b)(c). 我们略去这一部分. 因此只需要证明 (d).

• **步骤 2.** 证明可以将 S 替换成 $s = f(x)$ 的 (初等) 平展邻域.

考虑初等平展邻域 $(T,t) \to (S,s)$, 根据正规化和光滑基变换交换我们得知替换成平展领域之后条件未变. 若断言对平展邻域成立, 存在 $f'_T(y) \in V' \subset S'_T$ 使得 $(f'_T)^{-1}(V') \to V'$ 是同构. 因为平展, 所以 $S'_T \to S'$ 是开的, 设 V 是 V' 在映射下的像. 则有纤维积:

$$\begin{tikzcd} (f'_T)^{-1}V' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & (f')^{-1}(V) \arrow[d] \\ V' \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

再根据平展下降得到结论.

• **步骤 3.** 完成证明.

根据步骤 2, 不妨将 S 替换为 $s=f(x)$ 的 (初等) 平展邻域. 根据命题4.2 我们有 $X=V\sqcup W$ 使得 $V\to S$ 有限且 $x\in V$. 由于 $V\to S$ 有限, 设 W' 是 S,W 的相对正规化, 则我们考虑的正规化为

$$X=V\sqcup W\to V\sqcup W'\to S.$$

因此取 V 即可得到结论. □

定理 4.4 (Zariski 主定理)**.** *设 $f:X\to S$ 是分离拟有限映射.*

(i) 考虑相对正规化

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & S' \arrow[dl, "\nu"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

则有 f' 是拟紧开浸入且 ν 整. 特别的 f 拟仿射;

(ii) 且 S 拟紧拟分离, 则存在分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

使得 j 是拟紧开浸入且 π 有限.

证明. (i) 根据引理4.3得到这是显然的;

(ii) 考虑 (i) 里的分解 $X\to S'\to S$, 设 $\nu_*\mathscr{O}_{S'}=\varinjlim_i\mathscr{A}_i$ 为有限 $\mathscr{O}_X$-子代数的余极限 (因为 $\nu_*\mathscr{O}_{S'}$ 已经是整的了), 则 $\pi_i=T_i:=\underline{\mathrm{Spec}}_S\mathscr{A}_i\to S$ 是有限的且 T_i 之间的转换映射是仿射的. 根据一些极限技巧得知存在 j 使得 $X\to T_j$ 是浸入且拟紧, 则可以分解为 $X\to T\to T_j$ 其中 $X\to T$ 开浸入且 $T\to T_j$ 闭浸入. 成立. □

5 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景 $X_{\text{ét}}$. 记 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 是集合取值的平展层范畴, 而 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为 $\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 和 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$.

5.1 基本结果和例子

命题 5.1. *固定概形 X, 对于 $\mathscr{F}\in\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 若 $\mathscr{F}$ 在限制到 Zariski 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖 $V\to U$ 满足层条件, 则 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.*

证明. 详细细节参考 [29] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 Zariski 开覆盖上的条件会给出: 对于概形 $V=\coprod_i V_i$, 我们有 $\mathscr{F}(V)=\prod_i\mathscr{F}(V_i)$. 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖 $\coprod_i U_i\to U$ 满足等化子条件, 那么 $\{U_i\to U\}$ 也满足等化子条件 (因为 $\coprod_i U_i\times_U\coprod_j U_j=\coprod_{i,j}U_i\times_U U_j$). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到 $\{U_i\to U\}_{i\in I}$ 也满足等化子条件, 其中 I 有限且 U_i 仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去. □

例 5.2 (结构层)**.** 给定概形 X. 定义 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$ 为 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}(U) := \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$. 我们断言 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$. 运用*5.1*, 这其实就是环的忠实平坦下降*:* 设环同态 $f : A \to B$ 忠实平坦, 则有正合列*:*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b \mapsto 1\otimes b - b\otimes 1} B \otimes_A B$$

证明颇为经典, 分成三步*:(a)* 证明如果 f 有一个截面, 则命题成立*;(b)* 证明如果存在另一个忠实平坦同态 $A \to A'$ 使得命题对 $A' \to A' \otimes_A B$ 成立, 则也对 $A \to B$ 成立*;(c)* 发现 $B \to B \otimes_A B, b \mapsto b \otimes 1$ 存在截面 $b \otimes b' \mapsto bb'$.

例 5.3 (由概形表示的层)**.** 给定概形 X. 取定 Z 为 X-概形, 定义为 $h_Z := \mathrm{Hom}_X(-, Z)$. 事实上通过 *(i)* 的正合列也容易得到 $h_Z \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$. 下面有几个常用的例子*:*

(a) 定义 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}(T) = \{\zeta \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T) : \zeta^n = 1\}$, 即 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t]/(t^n - 1)$ 表示*;*

(b) 定义 $\mathbb{G}_{a,X}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$, 即 $\mathbb{G}_{a,X}$ 是被 $\mathbb{A}^1_X$ 表示的函子*;*

(c) 定义 $\mathbb{G}_{m,X}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T^*)$, 即 $\mathbb{G}_{m,X}$ 是被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t, t^{-1}]$ 表示的函子*;*

(d) 定义 $\mathrm{GL}_{n,X}(T) = \mathrm{GL}_n(\Gamma(T, \mathscr{O}_T))$, 即 $\mathrm{GL}_{n,X}$ 是被

$$\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[\{x_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}][1/\det(x_{ij})]$$

表示的函子.

例 5.4 (拟凝聚层)**.** 给定概形 X. 考虑 $\mathscr{M} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{Zar}})$ 是拟凝聚的, 定义 $\mathscr{M}^{\text{ét}}(\phi : U \to X) := \Gamma(U, \phi^* \mathscr{M})$. 运用*5.1*和更一般的正合列*:* 环同态 $f : A \to B$ 忠实平坦且 M 为 A-模, 则有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \otimes_A M \Longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A M$$

即可得到 $\mathscr{M}^{\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.

命题 5.5 (点上的层范畴)**.** 对于 $X = \mathrm{Spec}\, k$, 有范畴等价

$$\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) \to (\text{离散}\,\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) - \text{集}), \mathscr{F} \mapsto M_{\mathscr{F}} := \varinjlim_{k^{\mathrm{sep}} \supset k'/k\text{有限 } Galois} \mathscr{F}(\mathrm{Spec}\, k').$$

证明. 定义逆为 $M \mapsto \mathscr{F}_M := (A \mapsto \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(A, k^{\mathrm{sep}}), M))$. 见Tag 03QT. □

注 5.6. 类似的有范畴等价

$$\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to (\text{离散}\,\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) - \text{模}).$$

5.2 平展预层/层的茎

引理 5.7. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 则

(i) 给定两个平展邻域 $(U_i, \bar{u}_i)_{i=1,2}$, 存在第三个平展邻域 $(U, \bar{u})$ 和态射 $(U, \bar{u}) \to (U_i, \bar{u}_i)$*;*

(ii) 假设 $h_1, h_2 : (U_1, \bar{u}_1) \to (U_2, \bar{u}_2)$ 是平展邻域的态射, 则存在第三个平展邻域 $(U, \bar{u})$ 和态射 $h : (U, \bar{u}) \to (U_1, \bar{u}_1)$ 使得 $h_1 \circ h = h_2 \circ h$.

证明. (i) 只需考虑 $U = U_1 \times_X U_2$, 而 $\bar{s} \to U$ 被 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 定义;

(ii) 定义 U 为纤维积

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & U_1 \arrow[d, "{(h_1,h_2)}"] \\ U_2 \arrow[r, "\Delta"] & U_2 \times_X U_2 \end{tikzcd}$$

并定义 $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. □

注 5.8. 在 *(ii)* 内, 通过一些假设, 我们可以使得态射 $h_1 = h_2$: 若我们有诺特分离概形的图标

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, shift right, "g"'] \arrow[dl, shift left, "g'"] \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "p"'] & S \end{tikzcd}$$

其中 Y 连通且 p, q 平展, 则 $g = g'$. 这是因为 $\delta : X \to X \times_S X$ 平展且是闭浸入, 则 $X \times_S X = \delta(X) \sqcup Z$ 为连通分支的无交并. 注意到 $g \times g' : Y \to X \times_S X$ 有连通的像. 根据图知 $\delta(X) \cap \mathrm{Im}(g \times g') \neq \emptyset$, 故 $\mathrm{Im}(g \times g') \subset \delta(X)$, 故 $g = g'$.

定义 5.9. 给定概形 X 和 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 给定几何点 $\bar{x}$, 定义 $\mathscr{P}$ 在 $\bar{x}$ 的茎为

$$\mathscr{P}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U,\bar{u})} \mathscr{P}(U)$$

其中余极限遍历所有平展邻域, 根据引理5.7此为滤余极限.

注 5.10. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 则不难看出 $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_{\bar{x}}$ 作为函子 $\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sets}$ 或者 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sets}$ 或者 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{AbGrps}$ 或者 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{AbGrps}$ 都是正合的. 如果你不放心, 请参考*Tag 03PT*.

定义 5.11. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 给定集合 E, 定义 $E^{\bar{x}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 为:

$$E^{\bar{x}}(U) := \bigoplus_{\mathrm{Hom}_X(\bar{x},U)} E.$$

注 5.12. 有几个简单的性质:

(i) 这个 $E^{\bar{x}}$ 在平展拓扑下一定是层, 其他景上面不一定;

(ii) 我们有伴随函子 $((-)_{\bar{x}}, (-)^{\bar{x}})$, 在预层范畴上这个伴随对任何景都对, 在层范畴上需要一定条件 (而小平展景显然满足), 若对这个有兴趣, 参考*Tag 00Y3*;

(iii) 对于几何点 $\bar{y}$, 除非 $\bar{y}$ 也在 $\bar{x}$ 对应的点上, 否则 $(E^{\bar{x}})_{\bar{y}} = 0$.

命题 5.13. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 对于 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 有 $\mathscr{P}_{\bar{x}} = \mathscr{P}^{\sharp}_{\bar{x}}$.

证明. 因为有伴随性, 对于任何集合 E, 我们有

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sets}}(\mathscr{P}_{\bar{x}}, E) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})}(\mathscr{P}, E^{\bar{x}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})}(\mathscr{P}^{\sharp}, E^{\bar{x}}) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sets}}(\mathscr{P}^{\sharp}_{\bar{x}}, E),$$

因此成立. □

对于结构层 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$, 它的茎有特殊的代数性质.

命题 5.14. *给定概形 X 和在 $x \in X$ 上的几何点 $\bar{x}$. 设 $\kappa(x) \subset \kappa(x)^{\text{sep}} \subset \kappa(\bar{x})$ 是可分代数闭包, 则有*

(i) 有同构 $(\mathscr{O}_{X,x})^{\text{sh}} \cong (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 前者为 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的严格 Hensel 化;

(ii) 设 $\mathfrak{m}_x$ 是 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的极大理想, 则 $\mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 是 $(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 的极大理想, 且满足

$$(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}/\mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}} \cong \kappa(x)^{\text{sep}};$$

(iii) 对任何首一多项式 $f \in (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}[T]$ 和任意 $\bar{f} \in \kappa(x)^{\text{sep}}[T]$ 的根 $\alpha_0 \in \kappa(x)^{\text{sep}}$ 使得 $\bar{f}'(\alpha_0) \neq 0$, 则存在 $\alpha \in (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 使得 $f(\alpha) = 0$ 且 $\alpha_0 = \bar{\alpha}$.

证明. 这些都是复杂的交换代数, 见Tag 04GE, Tag 04GP和04GW. 其中 (iii) 被称之为 Hensel 引理, 满足 (iii) 的环叫做 Hensel 局部环, 如果这个环的剩余类域可分代数闭, 则称之为严格 Hensel 局部环. 所以我们这里就是一个严格 Hensel 环. □

注 5.15. *我们之后将记 $\mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}} := (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 也不会有歧义.*

对于 Hensal 局部环, 我们还有如下常用的结论:

命题 5.16 (Hensel 引理)**.** *设 $(A, \mathfrak{m}, \kappa)$ 是 Hensal 局部环, 则*

(i) 任何有限 A-代数 S 都是在 R 上有限的局部环的乘积, 此时这些局部环依旧是 Hensal 局部环;

(ii) 如果平展 A-代数 B 满足 B 的极大理想 $\mathfrak{n}$ 卧于 $\mathfrak{m}$ 上使得 $\kappa \cong B/\mathfrak{n}$, 则存在同构 $\phi : B \cong A \times B'$ 使得 $\phi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m} \times B' \subset A \times B'$;

(iii) 我们有范畴等价:

$$\{\text{有限平展}A\text{-代数}\} \longleftrightarrow \{\text{有限平展}\kappa\text{-代数}\}, S \mapsto S/\mathfrak{m}S.$$

证明. 纯粹的交换代数, 参考Tag 04GG, Tag 04GH, Tag 04GK和Tag 03QH. □

5.3 常值层和局部常值层

定义 5.17. *给定概形 X.*

(i) 对于 $\mathscr{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$), 则 $\mathscr{F}$ 称为常值层如果存在集合 E(或者 Abel 群 G) 使得 $\mathscr{F} \cong (U \mapsto E)^\sharp =: \underline{E}_X$(或者 $\cong (U \mapsto G)^\sharp =: \underline{G}_X$);

(ii) 称 $\mathscr{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$) 是局部常值层, 如果存在覆盖 $\{U_i \to X\}$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是常值层;

(iii) 称 $\mathscr{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$) 是有限局部常值层, 如果 $\mathscr{F}$ 是局部常值层且取值的集合 (或 Abel 群) 是有限集合.

注 5.18. *对于 (i)(ii) 可以定义一般的 Λ-模的常值层/局部常值层.*

引理 5.19 (有限平展映射的平展局部分解)**.** *(i) 设 $f : X \to S$ 有限无分歧, 取 $s \in S$, 则存在平展邻域 $(U, u) \to (S, s)$ 和有限无交分解 $X_U = \coprod_j V_j$ 使得所有 $V_j \to U$ 均为闭浸入.*

(ii) 设 $f : X \to S$ 有限平展, 取 $s \in S$, 则存在平展邻域 $(U, u) \to (S, s)$ 和有限无交分解 $X_U = \coprod_j V_j$ 使得所有 $V_j \to U$ 均为同构.

证明. 首先, 有关各种映射的平展局部, 可参考Tag 024J. 二者究其本质都是拟有限态射的平展局部性质 (见Tag 02LM). 证明虽然不甚复杂, 但写于此意义也不大, 故这里我们略去证明, 证明参考Tag 04HJ和 Tag 04HN. □

命题 5.20. *给定概形 X, 则有范畴等价*

$$\{\text{有限平展映射}U\to X\}\cong\{\text{有限局部常值层}\},(U\to X)\mapsto\mathscr{F}=h_U.$$

证明. 根据引理5.19(ii), 不难看出 h_U 确实是有限局部常值层. 另一方面, 任取 $\mathscr{F}$ 是有限局部常值层, 则存在平展覆盖 $\{U_i\to X\}$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是常值层, 则可以被有限平展态射 $U_i\to X$ 表示 (设取值集合的基数是 κ, 若是诺特分离概形, 考虑注5.8, 则令 $Z_i=\coprod_{i=1}^{\kappa}U_i$, 故 $\mathscr{F}|_{U_i}=h_{Z_i}$). 根据仿射态射满足有效的忠实平坦下降 (fpqc), 我们可以得到存在 $Z\to X$ 使得 $h_Z\cong\mathscr{F}$. 而由于有限性和平展性都是 fpqc 局部的, 故 $Z\to X$ 仍然是有限平展映射. □

命题 5.21. *给定连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$.*

(i) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})\}\to\{\text{有限}\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\text{-集}\};$$

(ii) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\}\to\{\text{有限}\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\text{-模}\}.$$

证明. (i) 根据定理2.3(i) 和命题5.20, 得到结论; (ii) 即为 (i) 赋予加法结构. □

5.4 Abel 群预层和层构成的范畴

固定概形 X, 可以看出 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 一定是 Abel 范畴, 它里面的正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等皆为正常的定义方法. 我们主要考虑的是满子范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 它是加性范畴, 我们将要证明它为 Abel 范畴 (其正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等和一般拓扑空间上类似, 皆为层化).

命题 5.22. *给定概形 X 和范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的列*

$$0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0,$$

则下述命题等价:

(i) 列 $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ 在 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内 (函子性的) 正合;

(ii) 列 $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ 在 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内正合且 $\mathscr{F}\to\mathscr{F}''$ 满足对任意的 $U\in X_{\text{ét}}$ 和 $s\in\mathscr{F}''(U)$, 存在 $\{U_i\to U\}\in\mathrm{Cov}(U)$ 使得 $s|_{U_i}$ 在 $\mathscr{F}(U_i)\to\mathscr{F}''(U_i)$ 的像内;

(iii) 对所有几何点 $\bar{x}\to X$, 都有 $0\to\mathscr{F}'_{\bar{x}}\to\mathscr{F}_{\bar{x}}\to\mathscr{F}''_{\bar{x}}\to 0$ 正合.

证明. (ii) 推 (i), 平凡. (i) 推 (iii) 由于取茎是正合函子, 故也平凡.

(iii) 推 (ii), 先证明满射部分. 任取 $U\in X_{\text{ét}}$ 和几何点 $\bar{u}\to U$. 设 $\bar{x}:\bar{u}\to U\to X$ 也为几何点. 根据定义有 $\mathscr{F}_{\bar{u}}=\mathscr{F}_{\bar{x}}$, 故 $\mathscr{F}_{\bar{u}}\to\mathscr{F}''_{\bar{u}}$ 也是满射. 再由定义知道成立. 对于其他部分, 注意到 $s\in\mathscr{F}(U)$ 为零当且仅当 $s_{\bar{u}}=0$ 即可, 这也是定义. □

推论 5.23. *给定概形 X, 则范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 范畴.*

5.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列

类似于复几何里的正合列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \to 0$, 我们有如下正合列 (以此取逆极限来模拟):

定理 5.24 (Kummer 正合列)**.** *给定概形 X 和正整数 n 使得 n 在 X 内可逆 (不被任何剩余类域的特征整除), 则有 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列*

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_{n,X} \to \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X} \to 0.$$

证明. 显然 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 为 $\mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X}$ 的核. 故只需要证明满射. 取 $U = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的平展 X-概形, 任取 $a \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{m,X})$, 根据假设知典范映射 $V = \operatorname{Spec} A[t]/(t^n - a) \to U$ 是平展映射. 注意到对应的环同态是有限自由的, 故忠实平坦, 于是是满射. 因此 $V \to U$ 是平展覆盖, 根据5.22即可得到结论. □

定理 5.25 (Artin-Schreier 列)**.** *给定概形 X 和素数 p 使得在 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ 内 $p = 0$, 则有 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列*

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X \to \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \to 0.$$

证明. 类似于 Kummer 正合列, 注意到此时 $\operatorname{Spec} A[t]/(t^p - t - a) \to \operatorname{Spec} A$ 是平展覆盖即可. □

5.6 拟凝聚层

定义 5.26. *考虑景 $X_{\text{ét}}$ 上的 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$-模 $\mathscr{F}$ 称之为拟凝聚的如果任取 $U \in X_{\text{ét}}$, 存在 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ 使得*

$$\mathscr{F}|_{X_{\text{ét}}/U_i} \cong \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{k \in K} \mathscr{O}_{X,\text{ét}\,/U_i} \to \bigoplus_{l \in L} \mathscr{O}_{X,\text{ét}\,/U_i}\right).$$

其中 $X_{\text{ét}}/U_i$ 是局部景, 其中的对象皆为 $V \to U_i$, 覆盖皆为 U_i-映射.

注 5.27. *这个在所有景上面都可以定义.*

作为下降理论的应用, 我们有如下令人震惊的结论:

定理 5.28. *如下拟凝聚层范畴是范畴等价:*

$$\mathrm{Qcoh}(X_{\text{Zar}}) \to \mathrm{Qcoh}(X_{\text{ét}}), \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\text{ét}}.$$

证明. 这个是下降理论的直接应用, 需要用到纤维范畴 QCOH 然后可以证明其为有效的 fpqc 下降, 但这个的证明非常复杂 (参考 [11] 定理 4.23). 我们推荐感兴趣的读者阅读 [33] 命题 4.3.15. □

注 5.29. *作为推广我们可以考虑一些特殊的景, 也满足类似结论. 见 Tag 03OJ.*

6 层的一些函子

6.1 直像

定义 6.1. *考虑概形映射 $f: X \to Y$, 设 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$, 定义直像为*

$$f_*\mathscr{P}(U \to Y) = \mathscr{P}(U \times_Y X \to X).$$

命题 6.2. *概形映射 $f: X \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.*

(i) 必然有 $f_*\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$;

(ii) 对于 $g: Y \to Z$, 我们有 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;

(iii) 若视作函子 $f_*: \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$, 则左正合.

证明. 此乃定义, 略去. □

命题 6.3. *考虑概形映射 $f: X \to Y$ 和几何点 $\bar{y} = \operatorname{Spec} k \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.*

(i) 若 f 是闭浸入, 则

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \begin{cases} \{*\} & \text{当} \quad \bar{y} \notin X \\ \mathscr{F}_{\bar{y}} & \text{当} \quad \bar{y} \in X \end{cases}$$

其中 $\{*\}$ 指单点集;

(ii) 若 f 是开浸入, 若 $\bar{y} \in X$, 则 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \mathscr{F}_{\bar{y}}$;

(iii) 如果 f 是有限态射, 则

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \prod_{\bar{x}: \operatorname{Spec} k \to X, f(\bar{x}) = \bar{y}} \mathscr{F}_{\bar{x}}.$$

若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \bigoplus_{\bar{x}: \operatorname{Spec} k \to X, f(\bar{x}) = \bar{y}} \mathscr{F}_{\bar{x}}$.

证明. (ii) 是平凡的;(iii) 颇为麻烦, 需要用到严格 Hensel 环的性质, 我们略去, 参考Tag 03QP.

(i) 当 $\bar{y} \notin X$, 这是显然的. 下面考虑 $\bar{y} \in X$ 的情况. 考虑两个事实:

事实 1. 对任意两个平展态射 $U, U' \to Y$, 设 $h: U_X \to U'_X$ 是 X-态射, 则存在 $a: W \to U, b: W \to U'$ 使得 $a_X: W_X \to U_X$ 是同构且 $h = b_X \circ (a_X)^{-1}$.

事实 1 的证明: 设 $M = U \times_Y U'$ 和图像 $\Gamma_h \subset M_X$. 注意到 Γ_h 是平展映射 $\mathrm{pr}_{1,X}: M_X \to U_X$ 一个截面的像, 故是开的. 则存在开子概形 $W \subset M$ 使得 $W \cap M_X = \Gamma_h$. 故取 $a = \mathrm{pr}_1|_W, b = \mathrm{pr}_2|_W$ 即可.

事实 2. 对平展态射 $V \to X$, 存在一族平展态射 $U_i \to Y$ 和态射 $U_{i,X} \to V$ 使得 $\{U_{i,X} \to V\}$ 是 V 的是 Zariski 覆盖.

事实 2 的证明: 不妨设 Y, V 皆为仿射的, 则化为以下简单的交换代数: 假设环 R 和理想 $I \subset R$, 设 $R/I \to S'$ 平展, 则存在平展同态 $R \to S$ 使得 $S' \cong S/IS$ 是 R/I-代数同构. 这是因为平展同态总可以写成 $S' = (R/I)[x_1, ..., x_n]/(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)$ 其中 $\overline{\Delta} = \det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$ 在 S' 里可逆. 只需要提升成某些 $f_1, ..., f_n$ 且设

$$S = R[x_1, ..., x_n, x_{n+1}]/(f_1, ..., f_n, x_{n+1}\Delta - 1),$$

其中 $\Delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 即可.

回到原结论. 注意到 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} \mathscr{F}(U_X)$ 且 $\mathscr{F}_{\bar{y}} = \varinjlim_{(V,\bar{v})} \mathscr{F}(V)$, 故 $\{(U, \bar{u})\}$ 在 $\{(V, \bar{v})\}$ 内共尾, 则得证. □

6.2 逆像

定义 6.4. 考虑概形映射 $f : X \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 定义逆像为

$$f^{-1}\mathscr{F} = \left((U \to X) \mapsto \varinjlim_{U \to X \times_Y V} \mathscr{F}(V \to Y) \right)^{\sharp}.$$

命题 6.5. 考虑概形映射 $f : X \to Y$, 则

(i) 有伴随函子 (f^{-1}, f_*);

(ii) 函子 $f^{-1} : \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和 $f^{-1} : \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 正合;

(iii) 对几何点 $\bar{x} \to X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 设 $\bar{y} = \ \to X \to Y$, 则 $(f^{-1}\mathscr{F})_{\bar{x}} \cong \mathscr{F}_{\bar{y}}$;

(iv) 对 $g : Y \to Z$, 有 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;

(v) 对平展映射 $V \to Y$, 有 $f^{-1}h_V = h_{X \times_Y V}$.

证明. (i)(ii) 略去.(iv) 和 (v) 由伴随性和 Yoneda 引理显然. 考虑 (iii), 注意到

$$\begin{aligned}
(f^{-1}\mathscr{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(U,\bar{u})} (f^{-1}\mathscr{F})(U) \\
&= \varinjlim_{(U,\bar{u})} \varinjlim_{a : U \to X \times_Y V} \mathscr{F}(U) \\
&= \varinjlim_{(V, a \circ \bar{u})} \mathscr{F}(V) = \mathscr{F}_{\bar{y}}
\end{aligned}$$

即可. $\square$

命题 6.6 (基变换)**.** 考虑纤维积

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

其中 f 有限, 则 $f'_* \circ (g')^{-1} = g^{-1} \circ f_*$.

证明. 只需验证茎即可. 注意到纤维积, 对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 考虑几何点 $\bar{y}' : \operatorname{Spec} k \to Y'$, 我们有

$$\begin{aligned}
(f'_*(g')^{-1}(\mathscr{F}))_{\bar{y}'} &= \prod_{\bar{x}' : \operatorname{Spec} k \to X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} ((g')^{-1}(\mathscr{F}))_{\bar{x}'} \\
&= \prod_{\bar{x}' : \operatorname{Spec} k \to X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} \mathscr{F}_{g' \circ \bar{x}'} \\
&= \prod_{\bar{x} : \operatorname{Spec} k \to X, f \circ \bar{x} = g \circ \bar{y}'} \mathscr{F}_{\bar{x}} = (f_*\mathscr{F})_{g \circ \bar{y}'} = (g^{-1} f_* \mathscr{F})_{\bar{y}'}
\end{aligned}$$

得到结论. $\square$

6.3 零扩张函子 (下叹号函子)

定义 6.7. 考虑平展映射 $j: U \to X$, 定义 $j_!: \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 为

$$j_!\mathscr{F} = \left((V \mapsto X) \mapsto \bigoplus_{V \to U} \mathscr{F}(V \to U)\right)^\sharp.$$

命题 6.8. 对平展映射 $j: U \to X$, 有

(i) 有伴随函子 $(j_!, j^{-1})$;

(ii) 对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 和几何点 $\bar{x}: \operatorname{Spec} k \to X$ 我们有

$$(j_!\mathscr{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{\bar{u}:\operatorname{Spec} k \to U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathscr{F}_{\bar{u}},$$

特别的, 函子 $j_!$ 正合;

(iii) 若 j 有限平展, 则存在 $j_! \to j_*$ 使得对任何 $\mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 都同构;

(iv) 若 j 是开浸入, 则对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 有 $j^{-1}j_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F} \to j^{-1}j_!\mathscr{F}$ 是同构. 事实上 $j_!\mathscr{F}$ 是唯一一个使得限制在 U 上是 $\mathscr{F}$, 且在其他地方的茎是 0 的 *Abel* 群层.

证明. (i)(iv) 平凡, 略去.(iii) 只需要考虑平展局部, 用引理5.19(ii) 即可验证.

考虑 (ii), 映射为

$$\begin{aligned}(j_!\mathscr{F})_{\bar{x}} = \varinjlim_{(V,\bar{v})} (j_!\mathscr{F})(V) = \varinjlim_{(V,\bar{v})} \bigoplus_{\phi: V \to U} \mathscr{F}(\phi) \\ \to \bigoplus_{\bar{u}:\operatorname{Spec} k \to U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathscr{F}_{\bar{u}}.\end{aligned}$$

同构参考Tag 03S5. □

命题 6.9 (基变换)**.** *(i)* 设 $f: Y \to X$ 是概形映射且 $j: V \to X$ 平展, 考虑纤维积

$$\begin{tikzcd} Y \times_X V \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & V \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

则在 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层都有 $j'_! \circ (f')^{-1} = f^{-1} \circ j_!$;

(ii) 设 $f: X \to Y$ 是有限映射且 $j: V \to Y$ 开浸入, 且基变换之后 $g: U = X \times_Y V \to V$ 平展, 设 $j': U \to X$, 则在 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 内有 $f_* \circ j'_* = j_! \circ g_*$.

证明. (i) 考虑二者的右伴随函子, 然后因为直像和平展局部化交换即可得到结论;

(ii) 首先考虑 Y 的不在 U 内的几何点上的茎不难得知二者皆为零. 其次用命题6.8(iv) 和命题6.6, 得到同构

$$j^{-1}f_*j'_!\mathscr{F} = g_*(j')^{-1}j'_!\mathscr{F} = g_*\mathscr{F}.$$

再次用命题6.8(iv) 即可得到结论. □

命题 6.10. *对于概形 X 和闭子概形 $i: Z \to X$ 及其补 $j: U \to X$, 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有正合列*

$$0 \to j_!j^{-1}\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to i_*i^{-1}\mathscr{F} \to 0.$$

证明. 分情况不难根据定义得到取茎之后正合, 然后用命题5.22即可. □

7 平展上同调的定义和基本性质

7.1 定义

引理 7.1. *对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 存在内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 使得有单射 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}$.*

证明. 任取 $x \in X$ 和在其上的几何点 $i_x : \bar{x} \to X$, 取内射 Abel 群满足 $\mathscr{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow I(x)$. 则 $\mathscr{I}(x) := i_{x,*}I(x)$ 是内射的, 故取 $\mathscr{I} = \prod_{x\in X} \mathscr{I}(x)$ 即可得到 $\mathscr{F} \hookrightarrow \prod_{x\in X} \mathscr{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow \mathscr{I}$. □

定义 7.2. *对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 不难得知截面函子 $\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$ 左正合. 由引理7.1知有内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$, 则定义 X 上 $\mathscr{F}$ 的平展上同调为*

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) := R^i\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathscr{F}) = H^i\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathscr{I}^*).$$

和我们之前定义的上同调理论类似, 我们也有如下基本结果:

命题 7.3. *(i) 满足 $H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$;*

(ii) 若 $\mathscr{I}$ 内射, 则当 $i > 0$ 时 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{I}) = 0$;

(iii) 短正合列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 会诱导长正合列

$$0 \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}') \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}'') \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}') \to \cdots.$$

注 7.4. *(a) 若 $g: U \to X$ 平展, 则 $g^{-1} \circ \Gamma(U, -) = \Gamma(U, -)$, 故 $H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U) = H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F})$;*

(b) 对于 $f : X \to Y$, 因为有 $\mathscr{F} \to f_*f^{-1}\mathscr{F}$, 则诱导 $R\Gamma(Y, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, f^{-1}\mathscr{F})$, 故可以诱导映射 $H^i_{\text{ét}}(Y, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(X, f^{-1}\mathscr{F})$.

7.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

定义 7.5. *设 G 是拓扑群.*

(i) 一个 Abel 群 M(赋予离散拓扑) 称为 G-模, 如果有连续作用 $G \times M \to M$;

(ii) 设 Mod_G 是 G-模构成的范畴. 根据Tag 04JF, 范畴 Mod_G 有足够内射对象. 考虑左正合函子

$$\Gamma_G : \mathrm{Mod}_G \to \mathrm{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群 G 的 (连续) 上同调为 $H^i(G, M) = R^i\Gamma_G(M)$. 若 G 是 Galois 群则成为 Galois 上同调.

命题 7.6. 对于群 G, 考虑群环 $\mathbb{Z}[G]$, 那么有自然的范畴等价 $\mathrm{Mod}_G \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$. 设 $\mathbb{Z}$ 可以经过平凡 G 作用来作为 $\mathbb{Z}[G]$ 模, 则 $H^i(G, M) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

证明. 近乎平凡, 略去. □

定理 7.7 (Tate)**.** 设 M 是拓扑群并且赋予连续 G-作用. 考虑复形

$$C^*_{\mathrm{cont}}(G, M) : M \to \mathrm{Maps}_{\mathrm{cont}}(G, M) \to \mathrm{Maps}_{\mathrm{cont}}(G \times G, M) \to \cdots$$

其中边界算子为当 $n = 0$, 则 $m \mapsto (g \mapsto g(m) - m)$; 当 $n > 0$ 时定义为

$$\begin{aligned} d(f)(g_1, ..., g_{n+1}) = g_1(&f(g_2, ..., g_{n+1})) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f(g_1, ..., g_j g_{j+1}, ..., g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, ..., g_n). \end{aligned}$$

这样定义 *Tate* 连续上同调为 $H^i_{\mathrm{cont}}(G, M) := H^i(C^*_{\mathrm{cont}}(G, M))$. 则对于 $M \in \mathrm{Mod}_G$, 存在典范映射 $H^i(G, M) \to H^i_{\mathrm{cont}}(G, M)$. 并且当 G 是离散群或者射有限群, 则为同构 $H^i(G, M) \cong H^i_{\mathrm{cont}}(G, M)$.

证明. 映射 $H^i(G, M) \to H^i_{\mathrm{cont}}(G, M)$ 通过万有 δ-函子不难诱导. 证明见 [31] 第二章. □

7.3 点的上同调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上同调也是很复杂的.

引理 7.8. 设 $x = \mathrm{Spec}\, k$, 固定几何点 $\bar{x} = \mathrm{Spec}\, \Omega$. 取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(x_{\text{ét}})$, 则

$$\Gamma(x, \mathscr{F}) \cong (\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}.$$

证明. 根据命题5.20和命题5.5, 我们用 Yoneda 引理有

$$\Gamma(x, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})}(h_x, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)-集}(\{*\}, \mathscr{F}_{\bar{x}}) = (\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$$

得到结论. □

定理 7.9. 设 $x = \mathrm{Spec}\, k, \bar{x} = \mathrm{Spec}\, k^{\mathrm{sep}}$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(x_{\text{ét}})$, 则对任意 $i \geq 0$,

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^i(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), \mathscr{F}_{\bar{x}}).$$

证明. 根据引理, 我们得知 $\Gamma(x, \mathscr{F}) = \Gamma_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}(\mathscr{F}_{\bar{x}}) := (\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$, 故我们有

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = R^i\Gamma(x, \mathscr{F}) = R^i\Gamma_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}(\mathscr{F}_{\bar{x}}) = H^i(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), \mathscr{F}_{\bar{x}})$$

即可得到结论. □

注意到当 $x = \bar{x}$ 且当 $i > 0$ 时, 就有 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$, 这和几何上是一样的.

7.4 严格 Hensel 局部环的上同调

我们时常会使用严格 Hensel 局部环的谱的上同调消失的结论如下:

定理 7.10. *设 R 是严格 Hensel 局部环, 设 $X = \operatorname{Spec} R$ 和闭点 $\bar{x}$. 则对任何 $\mathscr{F} \in \operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有 $\Gamma(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}_{\bar{x}}$. 特别的, 函子 $\Gamma(X, -)$ 正合, 故对任何 $\mathscr{F} \in \operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和 $i > 0$ 都有 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

证明. 设平展邻域 $(U, \bar{u})$, 取 $\bar{u}$ 的的仿射邻域 $\operatorname{Spec} A$, 故 $R \to A$ 平展且 $\kappa(\bar{x}) = \kappa(\bar{u})$. 由命题5.16(ii) 得知作为 R-代数有 $A \cong R \times A'$ 且和 $\kappa(\bar{x}) = \kappa(\bar{u})$ 契合. 故我们有截面 $X \to \operatorname{Spec} A$. 因此平展邻域 $(X, \bar{x})$ 是共尾的, 故 $\Gamma(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}_{\bar{x}}$. 其他结论就平凡了. $\square$

7.5 平展上同调和极限一瞥

我们这里只给出叙述, 不给出证明, 详细细节参考Tag 03Q4.

定义 7.11. *设 I 是预序集, 考虑逆系统 $(X_i, f_{i'i})_I$. 一个在其上定义的层系统 $(\mathscr{F}_i, \varphi_{i'i})$ 为满足*

(i) 层 $\mathscr{F}_i \in \operatorname{Sh}(X_{i,\text{ét}})$;

(ii) 对 $i' \geq i$, 有 $\operatorname{Sh}(X_{i,\text{ét}})$ 内的映射 $\varphi_{i'i} : f_{i'i}^{-1}\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_{i'}$

使得 $\varphi_{i''i} = \varphi_{i''i'} \circ f_{i''i'}^{-1}\varphi_{i'i}$.

定理 7.12 (Tag 09YQ)**.** *考虑定向逆系统 $(X_i, f_{i'i})_I$ 使得 X_i 拟紧拟分离且 $f_{i'i}$ 仿射. 对于其上定义的层系统 $(\mathscr{F}_i, \varphi_{i'i})$, 假设 $f_i : X = \varprojlim X_i \to X_i$ 且 $\mathscr{F} := \varinjlim f_i^{-1}\mathscr{F}_i$, 则有*

$$\varinjlim H^i_{\text{ét}}(X_i, \mathscr{F}_i) \cong H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

注 7.13. *若只取层的极限, 则不需要转移映射仿射.*

7.6 平展上同调的拓扑不变性一瞥

定理 7.14 (平展上同调的拓扑不变性)**.** *设 $f : X_0 \to X$ 是万有同胚 (例如幂零理想层定义的闭浸入), 则*

(i) 小平展景 $X_{\text{ét}} \to (X_0)_{\text{ét}}, V \mapsto V \times_X X_0$ 是同构;

(ii) 平展意象 $\operatorname{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和 $\operatorname{Sh}((X_0)_{\text{ét}})$ 是同构;

(iii) 对任何 $\mathscr{F} \in \operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和任何 q 都有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_0, \mathscr{F}|_{X_0})$.

证明. (ii) 和 (iii) 由 (i) 可以得到. 而 (i) 比较复杂, 我们只给一瞥, 完整证明参考Tag 03SI. 事实上可以 (不太容易地) 约化到幂零理想层定义的闭浸入且是仿射局部的情况. 也就是说对于幂零理想 $I \subset A$, 有 $A_{\text{ét}} \cong (A/I)_{\text{ét}}$. 事实上对于平展 A/I-代数, 可以写为

$$A/I[x_1, ..., x_n]/(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)$$

且 $\det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$ 可逆, 取一个提升得到 $A[x_1, ..., x_n]/(f_1, ..., f_n)$, 现在考察 $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 是否可逆. 不难得知由于 I 幂零, 则 A/I 内可逆的元素在 A 上一定可逆. $\square$

7.7 支撑在闭集的上同调及性质

首先, 不难证明如下事实: 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 取截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 则存在开集 $W \subset U$ 使得

(i) W 是 U 内最大的开集使得 $s|_W = 0$;

(ii) 对任何几何点 $\bar{u} \to U$, 设 $\bar{s} = (U \to S) \circ \bar{u}$, 则

$$0 = (U, \bar{u}, s) \in \mathscr{F}_{\bar{s}} \Leftrightarrow \bar{u} \in W.$$

读者可以自己证明, 如果想当懒狗, 参考Tag 04FR.

定义 7.15. 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$.

(i) 层 $\mathscr{F}$ 的支集为点集 $\mathrm{supp}(\mathscr{F}) \ni s$ 使得对所有 *(一些)*s 上的几何点 $\bar{s}$ 都有 $\mathscr{F}_{\bar{s}} \neq 0$;

(ii) 截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 其支集 $\mathrm{supp}(s)$ 定义为闭集 $U \backslash W$.

注 7.16. 层的支集不一定是闭的, 但如果取值是环, 那一定是闭的, 因为这时相当于单位截面的支集.

定义 7.17. 对概形 X, 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 定义

$$\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) = \{s \in \mathscr{F}(X) : \mathrm{supp}(x) \subset Z\}.$$

定义支撑在 Z 的平展上同调为

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) := R^i\Gamma_Z(X, \mathscr{F}).$$

注 7.18. 对闭子概形 $i : Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 定义 $i^!\mathscr{F} := \ker(\mathscr{F} \to i_*i^{-1}\mathscr{F})$. 则 $\Gamma(Z, i^!\mathscr{F}) = \ker(\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U))$. 不难证明 $(i_*, i^!)$ 是伴随函子, 故 $i^!$ 左伴随, 而且由于 i_* 正合, 故 $i^!$ 保持内射性质. 因此 $\Gamma(Z, i^!(-))$ 左正合且诱导 $R^i\Gamma(Z, i^!(-)) = R^i\Gamma_Z(X, -) = H^i_{Z,\text{ét}}(X, -)$. 考虑层 $R^ri^!\mathscr{F}$ (有时写作 $\underline{H}^r_Z(X, \mathscr{F})$), 因为 $i^!$ 保持内射, 我们有谱序列

$$E_2^{p,q} := H^p(Z, R^ri^!\mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_Z(X, \mathscr{F}).$$

命题 7.19. 对概形 X, 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 设 $U = X \backslash Z$, 则有好三角:

$$R\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(U, \mathscr{F}) \to R\Gamma_Z(X, \mathscr{F})[1]$$

进而诱导出正合列:

$$\cdots \to H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \to H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to \cdots.$$

证明. 任取内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们断言 $\mathscr{I}(X) \to \mathscr{I}(U)$ 是满的. 设 $j : U \to X$, 注意到对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有

$$\mathrm{Hom}(j_!\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathscr{F}|_U) = \Gamma(U, \mathscr{F}),$$

因为 $\mathscr{I}$ 是内射的, 故只需证明 $j_!\underline{\mathbb{Z}}_U \to \underline{\mathbb{Z}}_X$ 是单射. 根据层化函子是正合的, 只需证明对平展映射 $V \to X$, 典范映射

$$\bigoplus_{V \to U} \underline{\mathbb{Z}}(U) \to \bigoplus_{V \to X} \underline{\mathbb{Z}}(U)$$

是单射, 而这是显然的, 故断言成立.

不难发现上述满射的核为 $\Gamma_Z(X,\mathscr{I})$, 因此立即得到好三角

$$R\Gamma_Z(X,\mathscr{F})\to R\Gamma(X,\mathscr{F})\to R\Gamma(U,\mathscr{F})\to R\Gamma_Z(X,\mathscr{F})[1].$$

而长正合列因此是显然的. □

定理 7.20 (切除)**.** *设 $f:X'\to X$ 平展和闭子概形 $Z'\subset X'$ 使得*

(i) 设 $Z:=f(Z')$ 是闭集且 $f|_{Z'}:Z'\cong Z$ 同构;

(ii) 有 $f(X'\backslash Z')\subset X\backslash Z$.

则对任意的 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有对任意 i 的同构

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^i_{Z',\text{ét}}(X',f^{-1}\mathscr{F}).$$

证明. 设 $U'=X'\backslash Z',U=X\backslash Z$, 考虑

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "\cong"] \\ U \arrow[r, "j"] & X & Z \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

得到

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma_Z(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Gamma(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U,\mathscr{F}) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \Gamma_{Z'}(X',f^{-1}\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(X',f^{-1}\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(U',f^{-1}\mathscr{F}) \end{tikzcd}$$

其中虚线为诱导出来的映射. 由于 f^{-1} 正合且和内射对象交换, 则只需证明诱导的

$$g:\Gamma_Z(X,\mathscr{F})\to\Gamma_{Z'}(X',f^{-1}\mathscr{F})$$

是同构. 注意到若 $s\in\ker g$, 则 s 在 $\Gamma(X',\mathscr{F})$ 和 $\Gamma(U,\mathscr{F})$ 是 0. 而 $\{X',U\}$ 是平展覆盖, 则 $s=0$, 故是单射. 另一方面, 取 $s'\in\Gamma_{Z'}(X',f^{-1}\mathscr{F})\subset\Gamma(X',f^{-1}\mathscr{F})$. 注意到 $s',0$ 在 U' 是 0; 另外 s' 限制 $X'\times_X X'\rightrightarrows X'$ 都是相等的, 因此可以粘合成 $s\in\Gamma(X,\mathscr{F})$, 故满射. □

推论 7.21. *对概形 X 和闭点 $x\in X$, 任取 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有*

$$H^i_{x,\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,x},\mathscr{F}).$$

证明. 用定理7.20和定理7.12即可. □

8 Čech 上同调和挠子

8.1 Čech 上同调

定义 8.1. *考虑概形 X 和一族平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$, 考虑 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 定义*

$$\check{C}^r(\mathfrak{U},\mathscr{P})=\prod_{(i_0,\dots,i_r)\in I^{r+1}}\mathscr{P}(U_{i_0}\times_X\cdots\times_X U_{i_r})$$

和映射 $d^r : \check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \to \check{C}^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$ 为

$$s = (s_{i_0,\dots,i_r}) \mapsto \left(\sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j (s_{i_0,\dots,i_{j-1},i_{j+1},\dots,i_{r+1}})|_{U_{i_0,\dots,i_{r+1}}} \right)_{i_0,\dots,i_{r+1}}.$$

复形 $\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$ 称为 *Čech* 复形, 其上同调

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) := H^i(\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P}))$$

称为 $\mathscr{P}$ 关于覆盖 $\mathfrak{U}$ 的 *Čech* 上同调.

注 8.2. 不难注意到 *Čech* 复形可以重新写成:

$$\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})} \left(\left(\bigoplus_{i_0 \in I} \mathbb{Z}_{U_{i_0}} \leftarrow \bigoplus_{(i_0,i_1) \in I^2} \mathbb{Z}_{U_{i_0} \times_X U_{i_1}} \leftarrow \cdots \right), \mathscr{P} \right).$$

而且直接 *(*大量*)* 计算会得到 Hom 里面的复形 $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{U}}^*$ 是正合的 *(*参考 *Tag 03AT)*.

例 8.3. 考虑覆盖 $\mathfrak{U} = \{Y \to X\}$ 使得 $Y \to X$ 是 *Galois* 覆叠 G. 对 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 假设其吧无交并映成积, 应用定理*7.7*则有 $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \cong H^r(G, \mathscr{P}(Y))$.

命题 8.4. 给定概形 X 和平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i \in I}$.

(i) 对任何内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 对 $i > 0$ 我们有 $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{I}) = 0$;

(ii) 在 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内 $\check{H}^i(\mathfrak{U}, -)$ 是 $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -)$ 的导出函子;

(iii) 若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$.

证明. (ii) 运用万有 δ 函子理论即可;(iii) 就是层的条件之一;(i) 注意到

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{I}) = H^i(\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{U}}^*, \mathscr{I}))$$

且 $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{U}}^*$ 正合和 $\mathscr{I}$ 内射即可. □

定义 8.5. 考虑概形 X 和一族平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i \in I}$. 这个覆叠的一个加细指覆盖 $\mathfrak{V} = \{V_j \to X\}_{j \in J}$ 满足对任意的 $V_j \to X$ 都存在分解 $V_j \to U_{\alpha(j)} \to X$. 这样会自然诱导一个 $\alpha^* : \check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \to \check{C}^*(\mathfrak{V}, \mathscr{P})$ 为 $(\alpha^r s)_{j_0,\dots,j_r} = s_{\alpha(j_0),\dots,\alpha(j_r)}|_{V_{j_0,\dots,j_r}}$. 因此诱导 $\rho(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) : \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \to \check{H}^i(\mathfrak{V}, \mathscr{P})$. 故而可以定义 *Čech* 上同调为

$$\check{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{P}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}).$$

命题 8.6. 给定概形 X.

(i) 对任何内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 对 $i > 0$ 我们有 $\check{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{I}) = 0$;

(ii) 若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $\check{H}^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$.

证明. (i) 注意到遗忘函子保持内射性质, 于是在 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内也满足; (ii) 由于对所有覆盖都满足, 因此余极限也满足. □

8.2 Čech-导出谱序列

类似于 Zariski 上同调, 平展上同调也有类似的 Čech-导出的比较结论.

引理 8.7. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F}\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 考虑预层 $\underline{H}^i(\mathscr{F}):U\mapsto H^i_{\text{ét}}(U,\mathscr{F}|_U)$. 考虑遗忘函子 $i:\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\to \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 我们有 $\underline{H}^r(-)=R^ri(-)$. 特别的 $\underline{H}^i(\mathscr{F})^\sharp=0$.*

证明. 考虑 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\xrightarrow{i}\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})\xrightarrow{\sharp}\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则取内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$ 我们有 $\underline{H}^r(\mathscr{F})=H^r(i(\mathscr{I}^*))$. 因此 $\underline{H}^r(-)=R^ri(-)$. □

推论 8.8. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F}\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 对 $r>0$, 任取 $s\in H^r_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$ 都存在平展覆盖 $\{U_i\to X\}$ 使得 s 在每个 $H^r_{\text{ét}}(U_i,\mathscr{F}|_{U_i})$ 内均为 0.*

证明. 这是引理8.7的直接推论. □

定理 8.9. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F}\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 考虑预层 $\underline{H}^i(\mathscr{F}):U\mapsto H^i_{\text{ét}}(U,\mathscr{F}|_U)$, 则有谱序列*

$$E_2^{p,q}=\check{H}^p_{\text{ét}}(X,\underline{H}^q(\mathscr{F}))\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

证明. 对 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\xrightarrow{i}\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})\xrightarrow{\check{H}^0_{\text{ét}}(X,-)}\mathrm{AbGrps}$, 因为 $\check{H}^0_{\text{ét}}(X,-)\circ i=\Gamma(X,-)$, 引用上述引理和 Grothendieck 谱序列, 我们得到结论. □

作为应用, 我们有如下比较结果:

命题 8.10. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F}\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 对于 $r=0,1$, 我们有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^r_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$.*

证明. 考虑谱序列 $E_2^{p,q}=\check{H}^p_{\text{ét}}(X,\underline{H}^q(\mathscr{F}))\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$. 根据推论8.8, 我们得知对 $s>0$ 有 $E_2^{0,q}=0$. 观察谱序列第二页:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \bullet & \bullet \\
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \bullet & \bullet \\
0 & 0 & E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & \bullet
\end{tikzcd}$$

即可得知对于 $r=0,1$, 有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^r_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$. □

注 8.11. *如果 X 拟紧且对任何有限子集都包含在某个仿射开集内, 则对任何 $\mathscr{F}\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和任何 r, 我们都有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^r_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$. 参考 [29] 内的 III.2.17.*

8.3 应用 I——Mayer-Vietoris 列

定理 8.12 (Mayer-Vietoris)**.** *设概形 $X = U \cup V$ 为开集的并, 给定 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们有正合列:*

$$\cdots \longrightarrow H^s_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \longrightarrow H^s_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \oplus H^s_{\text{ét}}(V, \mathscr{F}) \to H^s_{\text{ét}}(U \cap V, \mathscr{F}) \longrightarrow H^{s+1}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots.$$

证明. 设覆盖为 $\mathfrak{U} = \{U \to X, V \to X\}$. 根据 Čech 上同调定义, 我们有如下正合列:

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \longrightarrow H^s_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \oplus H^s_{\text{ét}}(V, \mathscr{F}) \to H^s_{\text{ét}}(U \cap V, \mathscr{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \longrightarrow 0.$$

另一方面, 考虑谱序列 $E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 注意到当 $r > 1$ 时有 $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) = 0$, 运用谱序列结论 [26] 命题 2.2.4 我们有如下正合列

$$0 \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \to H^{s+1}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^{s+1}(\mathscr{F})) \to 0.$$

综合两个正合列即可得到结论. □

注 8.13. *直接证明参考 Tag 0A50. 还有相对版本的 Mayer-Vietoris 列, 我们不再赘述, 见 Tag 0EYK.*

8.4 应用 II——拟凝聚层的上同调

接下来介绍一个意料之中的结果.

引理 8.14. *设 $X = \operatorname{Spec} A$ 仿射, 取拟凝聚层 $\mathscr{F}^{\text{ét}}$, 则对 $i > 0$ 都有 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}}) = 0$.*

证明. 我们用对 i 的归纳法.

先考虑 $i = 1$. 取 $\xi \in H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 将覆盖加细可以假设 U_i 仿射. 根据命题8.10得到其对应 $\eta' \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 设 $\mathfrak{V} = \{\sqcup_i U_i \to X\}$ 不难看出 $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 假设 $\mathfrak{V} = \{\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A\}$, 则复形 $\check{C}^*(\mathfrak{V}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$ 为

$$B \otimes_A M \to B \otimes_A B \otimes_A M \to B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A M \to \cdots.$$

故成立.

对于 $i > 1$, 取 $\xi \in H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}})$, 由推论8.8存在平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}$ 使得 $\eta|_{U_i} = 0$. 将覆盖加细可以假设 U_i 仿射. 注意到 $U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$ 皆为仿射, 考虑谱序列8.9

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

根据归纳假设知道对 $0 < q < p$ 都有 $E_2^{p,q} = 0$, 我们可以看出 ξ 必然来自 $\xi' \in \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 继续 $i = 1$ 情况的证明即可. □

定理 8.15 (平展-Zariski 的拟凝聚上同调比较定理)**.** *对概形 X 和拟凝聚层 $\mathscr{F}$, 对任何 $i \geq 0$ 我们都有*

$$H^i(X,\mathscr{F}) \cong H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}}).$$

证明. 我们只考虑概形 X 分离的情况 (一般情况可以由Tag 03F3和 Tag 03DW得到). 取 Zariski 开覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}$, 根据分离性,$U_{i_0}\times_X U_{i_1}\times_X\cdots\times_X U_{i_p}$ 皆为仿射. 则谱序列8.9除了第一行全是零. 故我们有

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{F}) = H^i(X,\mathscr{F})$$

即可得到结论. □

定理 8.16 (拟凝聚层)**.** *计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调.*

证明. 运用定理5.28和定理8.15即可. □

因此, 我们只需要计算不是拟凝聚层的平展上同调即可. 比如挠层, 这是我们一大目标之一.

8.5 挠子理论一瞥和应用

类似于概型理论里的挠子理论, 我们可以将其推广至小平展景.

定义 8.17. *对概形 X 和平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$. 取取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$, 设 $U_{i_0\cdots i_p}=U_{i_0}\times_X\cdots\times_X U_{i_p}$. 我们定义取值在 $\mathscr{G}$ 的 1-余链为 $g=(g_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ 使得 $g_{ij}\in\mathscr{G}(U_{ij})$ 满足*

$$g_{ij}|_{U_{ijk}}g_{jk}|_{U_{ijk}} = g_{ik}|_{U_{ijk}}.$$

两个 1-余链 g,g', 定义 $g\sim g'$ 使得存在 $(h_i)_{i\in I}$ 其中 $h_i\in\mathscr{G}(U_i)$ 满足

$$g'_{ij} = h_i|_{U_{ij}}g_{ij}(h_j|_{U_{ij}})^{-1}.$$

定义 $\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}):=\{g\}/\sim$.

注 8.18. *根据构造, 对于短正合列 $1\to\mathscr{G}'\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}''\to 1$, 我们有*

$$1\to\Gamma(X,\mathscr{G}')\to\Gamma(X,\mathscr{G})\to\Gamma(X,\mathscr{G}'')\to\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}')\to\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G})\to\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}'').$$

定义 8.19. *对概形 X 和取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$. 设 $\mathscr{S}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 存在右 $\mathscr{G}$-作用. 我们称 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{G}$-挠子如果满足*

(i) 存在平展覆盖 $\{U_i\to X\}$ 使得 $\mathscr{S}(U_i)\neq\emptyset$;

(ii) 对任意的平展映射 $U\to X$ 和 $s\in\Gamma(U,\mathscr{S})$, 映射 $\mathscr{G}|_U\to\mathscr{S}|_U, g\mapsto sg$ 是同构.

我们称 $\mathscr{S}$ 被 $\{U_i\to X\}$ 平凡化. 如果 $\mathscr{S}(X)\neq\emptyset$ 我们称 $\mathscr{S}$ 是平凡 $\mathscr{G}$-挠子.

这两个概念出现不是偶然, 事实上我们有如下结论:

定理 8.20. *对概形 X 和取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$. 我们有双射*

$$\{\text{被}\mathfrak{U}\text{平凡化的}\mathscr{G}\text{-挠子}\}/\cong\longleftrightarrow\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}).$$

证明. 我们阐述映射如何诱导. 给定被 $\mathfrak{U}$ 平凡化的 $\mathscr{G}$-挠子 $\mathscr{S}$. 对 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$, 给定 $s_i\in\mathscr{S}(U_i)$, 由于作用单可迁, 存在 $g_{ij}\in\mathscr{G}(U_{ij})$ 使得 $(s_i|_{U_{ij}})g_{ij}=s_j|_{U_{ij}}$. 则得到 $g=(g_{ij})_{I^2}$. 对另一组 s_i', 我们可以有 $s_i'=s_ih_i$, 故会得到 $g\sim g'$, 因此良定义. 有关这个证明因为没什么意思所以我们略去, 参考 [30] 命题 11.1. □

注 8.21. 如果 G 是有限常值群层且 X 连通, 则

$$\{G\text{-挠子}\}/\cong=\{Galois\ \text{群为}G\text{的}X\text{的}\ Galois\ \text{覆盖}\}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}),G).$$

定理 8.22 (向量丛和挠子)**.** 对概形 X 和秩 n 局部自由模构成的群 $\mathrm{Vect}^n_{\mathrm{Zar}}(X)$, 我们有

$$\mathrm{Vect}^n_{\mathrm{Zar}}(X)\cong\check{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathrm{GL}_{n,X})\cong\check{H}^1_{\mathrm{fppf}}(X,\mathrm{GL}_{n,X})\cong\check{H}^1_{\text{ét}}(X,\mathrm{GL}_{n,X}).$$

证明. 忽略, 参考 [30] 定理 11.4. □

推论 8.23. 我们有

$$H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})\cong\mathrm{Pic}(X).$$

证明. 注意到 $\mathbb{G}_{m,X}$ 交换, 根据命题8.10和定理8.22即得到结果. □

推论 8.24 (Hilbert 定理 90)**.** 对于有限 *Galois* 扩张 L/k, 有 $H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)=0$.

证明. 注意到

$$H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),(k^{\mathrm{sep}})^*)=\varinjlim_{\text{有限 Galois 覆盖}L/k}H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)$$

其中后者是 $L\subset L'$ 诱导 $H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)\hookrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(L'/k),(L')^*)$. 根据推论8.23和定理7.9得到当 $X=\operatorname{Spec}k$ 有 $H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})\cong H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),(k^{\mathrm{sep}})^*)$ 且

$$H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})\cong\mathrm{Pic}(\operatorname{Spec}k)=0$$

即可得到结论. □

9 高阶直像

9.1 基础性质

定义 9.1. 对概形态射 $f:X\to Y$ 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 因为 f_* 左正合, 故可以得到高阶直像 $R^if_*\mathscr{F}$.

命题 9.2. 对概形态射 $f:X\to Y$ 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有

$$R^if_*\mathscr{F}=\left(U\mapsto H^i_{\text{ét}}(U\times_Y X,\mathscr{F})\right)^\sharp.$$

证明. 定义函子 $f_*^{\text{pre}}:\text{PreAb}(X_{\text{ét}})\to\text{PreAb}(Y_{\text{ét}})$ 为 $\mathscr{P}\mapsto(U\mapsto\Gamma(U\times_Y X,\mathscr{P}))$. 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc}\text{PreAb}(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{f_*^{\text{pre}}} & \text{PreAb}(Y_{\text{ét}})\\ {\scriptstyle i}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sharp}\\ \text{Ab}(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{\quad f_*\quad} & \text{Ab}(Y_{\text{ét}})\end{array}$$

由于 $\sharp, f_*^{\text{pre}}$ 正合, 取内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$ 得到

$$R^r f_*\mathscr{F}=H^i(f_*\mathscr{I}^*)=H^r(\sharp\circ f_*^{\text{pre}}\circ i\mathscr{I}^*)=(f_*^{\text{pre}}H^r(i\mathscr{I}^*))^\sharp=(f_*^{\text{pre}}\underline{H}^r(\mathscr{F}))^\sharp$$

即可. □

推论 9.3. 对于几何点 $\bar{y}$, 我们有

$$(R^if_*\mathscr{F})_{\bar{y}}=\varinjlim_{(U,\bar{u})}H^i_{\text{ét}}(U\times_Y X,\mathscr{F}).$$

推论 9.4. 如果 f 拟紧拟分离, 我们有

$$(R^if_*\mathscr{F})_{\bar{y}}=H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}\times_Y X,\mathscr{F}).$$

证明. 根据定义, 上述命题还有定理7.12即可得到结论 (这个在导出范畴内也对, 参考Tag 03Q7). □

例 9.5. *参考 [30] 定理 12.4, 如果 X 是正规整概形, 考虑一般点 $f:\eta\to X$, 则有 $(R^if_*\mathscr{F})_\eta=H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\operatorname{Frac}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,x}\times_Y X,\mathscr{F})$.*

推论 9.6. 如果 $f:X\to Y$ 是有限映射, 则对 $\mathscr{F}\in\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有对于所有 $i>0$ 有 $R^if_*\mathscr{F}=0$.

证明. 这时我们有

$$(R^if_*\mathscr{F})_{\bar{y}}=\varinjlim_{(U,\bar{u})}H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}\times_Y X,\mathscr{F}).$$

由于 f 有限, 那么 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}\times_Y X$ 在 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}$ 上有限. 故 $\operatorname{Spec}A=\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}\times_Y X$. 根据命题5.16(i) 得到 $A\cong A_1\times\cdots\times A_r$ 为 Hensel 局部有限 $\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}$-代数. 故而 A_i 也是严格 Hensel 局部环. 此时 $\operatorname{Spec}A=\coprod_{i=1}^r\operatorname{Spec}A_i$, 运用定理7.10得到对 $i>0$ 有 $(R^if_*\mathscr{F})_{\bar{y}}=0$. □

9.2 Leray 谱序列

定理 9.7 (Leray 谱序列)**.** 对概形态射 $f:X\to Y$ 和 $\mathscr{F}\in\text{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有谱序列

$$E_2^{p,q}=H^p_{\text{ét}}(Y,R^qf_*\mathscr{F})\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

证明. 注意到 $\Gamma(X,-)\circ f_*=\Gamma(Y,-)$, 由于 f_* 保持内射, 根据 Grothendieck 谱序列得到

$$E_2^{p,q}=H^p_{\text{ét}}(Y,R^qf_*\mathscr{F})\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$$

即可. □

10 曲线的上同调 I——基础结果

我们已经知道, 计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调, 因此只需要考虑不是拟凝聚的情况. 眼下我们只能解决最简单的情况——代数闭域上光滑曲线的上同调, 我们主要关心的是它上面挠层的上同调. 本节我们讨论挠层里的基石——$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-系数的上同调, 求出这个我们根据有限生成 Abel 群就可以得到常值层的上同调, 之后的内容在后续章节阐述.

10.1 Brauer 群和 C_r 域一瞥

定义 10.1. *考虑所有域 k 上的 (有限维) 中心单代数构成的集合 CSA_k, 定义等价关系为 $A \sim B$ 当且仅当存在中心除环 D 使得 $A \cong \mathrm{Mat}_m(D), B \cong \mathrm{Mat}_n(D)$. 定义 Brauer 群为 $\mathrm{Br}(k) := \mathrm{CSA}_k / \sim$.*

注 10.2. *由定义,$\mathrm{Mat}_n(D) \sim D$.*

事实上根据 Wedderburn 定理, 域 k 上任何中心单代数都形如 $\mathrm{Mat}_n(D)$. 也就是说,$\mathrm{Br}(k)$ 给出了 k 上中心除环的分类! 结合代数理论告诉我们, 如果 A 是中心单代数, 那么 $A \otimes_k k^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_n(k^{\mathrm{sep}})$(参考 Tag 0753). 也就是说, 中心除环平展局部地是局部环, 而这一点能让我们使用 Galois 下降.

此外, 我们还能在一般的概形上定义中心单代数, 也就是所谓的 Azumaya 代数. 伽罗瓦上同调告诉我们 $\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), (k^{\mathrm{sep}})^*)$, 根据定理7.9, 我们有 $\mathrm{Br}(k) = H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{G}_m)$, 于是我们可以通过这个来定义一般概形的 Brauer 群.

定义 10.3. *域 K 称之为 C_r 的, 如果对任何 $0 < d^r < n$ 和任何 d 次齐次多项式 $f \in K[T_1, ..., T_n]$, 都存在不全是零的 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ 使得 $f(\alpha) = 0$.*

命题 10.4. *若 K 是 C_1 的, 则 $\mathrm{Br}(K) = 0$.*

证明. 不然, 考虑 K 上非平凡的有限维除环 D, 则 $D \otimes_K K^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_d(K^{\mathrm{sep}})$. 考虑行列式映射 $\det : D \otimes_K K^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_d(K^{\mathrm{sep}}) \to K^{\mathrm{sep}}$. 取 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$-不变元得到映射 $N : D \to K$. 因为 K 是 C_1 的, 若 $d > 1$, 则存在非零 $x \in D$ 使得 $N(x) = 0$. 这会推出 x 不可逆, 这不可能! □

定理 10.5 (Tsen 定理)**.** *代数闭域 k 上的 r 维代数簇 X 的函数域 $k(X)$ 是 C_r 的.*

证明. 不妨设 X 射影. 取 $f \in k(X)[T_1, ..., T_n]_d$ 使得 $0 < d^r < n$. 存在丰沛除子 H 使得 f 的系数在 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X(H))$ 内. 取 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ 且 $\alpha_i \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X(eH))$, 故 $f(\alpha) \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X((de + 1)H))$. 故 f 诱导映射

$$F : \Gamma(X, \mathscr{O}_X(eH))^{\oplus n} \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X((de + 1)H)).$$

根据渐进 Riemann Roch 定理得到

$$\begin{cases} n \dim_k \Gamma(X, \mathscr{O}_X(eH)) \sim Cne^r; \\ \dim_k \Gamma(X, \mathscr{O}_X((de + 1)H)) \sim C(de + 1)^r. \end{cases}$$

但 $d^r < n$, 故此时 F 必然有零点, 即 f 必然有非平凡解. □

我们还会使用 Serre 的如下定理:

定理 10.6 (Serre)**.** 假设对于 K, 若对所有的有限扩张 K'/K 都有 $\mathrm{Br}(K')=0$, 则对所有 $q\geq 1$ 都有

$$H^q(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K),(K^{\mathrm{sep}})^*)=0.$$

证明. 参考Tag 03R8. □

10.2 $\mathbb{G}_{m,X}$ 的上同调

定理 10.7 (基本正合列)**.** 设 X 是整正规概形, 设一般点嵌入为 $g:\eta\to X$ 和余一维点的嵌入 $i_z:z\to X$, 则有正合列:

$$0\to\mathbb{G}_{m,X}\to g_*\mathbb{G}_{m,\eta}\to\bigoplus_{\mathrm{codim}(z)=1}i_{z,*}\underline{\mathbb{Z}}.$$

如果 X 光滑, 则也右正合, 进而正合.

证明. 取平展映射 $\phi:U\to X$, 不妨设 $U=\mathrm{Spec}\,A$ 连通仿射. 则根据正规性, 这个列限制在 U_{Zar} 上正合:

$$0\to A^*\to K^*\xrightarrow{\oplus v_{\mathfrak{p}}}\bigoplus_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1}\mathbb{Z}.$$

故我们得到正合列

$$0\to\mathbb{G}_{m,X}\to g_*\mathbb{G}_{m,\eta}\to\bigoplus_{\mathrm{codim}(z)=1}i_{z,*}\underline{\mathbb{Z}}.$$

当 X 光滑, 因为此时 Weil 除子和 Cartier 除子重合, 因此局部主, 故而右正合. □

引理 10.8. 设 k 是代数闭域且 K/k 是超越度为 1 的域扩张, 则对 $r\geq 1$ 有

$$H^r_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,K,\mathbb{G}_m)=0.$$

证明. 根据定理7.9, 只需考虑 $H^q(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K),(K^{\mathrm{sep}})^*)$. 再根据定理10.6 我们只需证明对所有的有限扩张 K'/K 都有 $\mathrm{Br}(K')=0$. 设 $K'=\varinjlim K''$ 为在 k 上超越度为 1 的有限生成扩张, 故 $\mathrm{Br}(K')=\varinjlim\mathrm{Br}(K'')$. 于是只需考虑 k 上超越度为 1 的有限生成扩张. 根据 Tsen 定理10.5, 我们得知这样的域都是 C_1 的, 再根据命题10.4即可得到结论. □

定理 10.9. 设 X 是代数闭域 k 上的光滑射影曲线, 则

$$H^q_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})=\begin{cases}\Gamma(X,\mathscr{O}_X)^* & q=0,\\ \mathrm{Pic}(X) & q=1,\\ 0 & q\geq 2.\end{cases}$$

证明. 根据推论8.23, 只需要考虑 $q\geq 2$ 的情况.

- **步骤 1.** 对任何 $q\geq 1$, 考虑一般点嵌入 $j:\eta\to X$, 则 $R^qj_*\mathbb{G}_{m,\eta}=0$.

考虑茎即可. 考虑闭点 $\bar{x}\to X$, 取仿射邻域 $\mathrm{Spec}\,A$, 设 $K=\mathrm{Frac}(A)$, 则

$$(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}})\times_X\eta=\mathrm{Spec}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}}\otimes_A K),$$

其中后者是 DVR 的局部化. 由于现在极大理想生成元可逆, 故

$$\mathscr{O}_{X,\bar{x}}^{\mathrm{sh}} \otimes_A K = \mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{X,\bar{x}}^{\mathrm{sh}}) =: K_{\bar{x}}^{\mathrm{sh}}.$$

因此 $(R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{x}} = H_{\text{ét}}^q(\operatorname{Spec} K_{\bar{x}}^{\mathrm{sh}}, \mathbb{G}_m)$. 根据引理10.8 得到结论.

若一般点, 考虑几何点 $\bar{\eta}$, 则 $\mathscr{O}_{\bar{\eta}}^{\mathrm{sh}} = \kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}$, 故

$$\begin{aligned}
(R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{\eta}} &= H_{\text{ét}}^q(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}) \times_X \eta, \mathbb{G}_m) \\
&= H_{\text{ét}}^q(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}), \mathbb{G}_m) \\
&= H_{\text{ét}}^q(\mathrm{Gal}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}/\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}), (\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}})^*) = 0,
\end{aligned}$$

于是步骤 1 成立.

- **步骤 2.** 对任何 $q \geq 1$, 有 $H_{\text{ét}}^q(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$.

根据定理9.7得到

$$E_2^{p,q} = H_{\text{ét}}^p(Y, R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}).$$

再根据引理10.8得到当 $p+q \geq 1$ 时有 $H_{\text{ét}}^{p+q}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$. 取 $q = 0$ 再利用步骤 1 即可得到步骤 2.

- **步骤 3.** 对任何 $q \geq 1$ 和闭点嵌入 $i_x : x \to X$, 有 $H_{\text{ét}}^q\left(X, \bigoplus_{x\text{闭点}} i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}\right) = 0$.

只需证明对闭点嵌入 $i_x : x \to X$ 和 $q > 0$ 有 $H_{\text{ét}}^q(X, i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}) = 0$. 根据推论9.6和定理9.7得到 $H_{\text{ét}}^q(X, i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}) = H_{\text{ét}}^q(x, \underline{\mathbb{Z}})$. 由于代数闭, 步骤 3 成立.

- **步骤 4.** 完成证明.

根据步骤 2 和步骤 3 还有正合列10.7即可得到结论. □

10.3 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 的上同调

引理 10.10. *若概形 X 在基概形 $\operatorname{Spec} A$ 上, 其中 A 是严格 Hensel 局部环且 $n \in A^*$, 则 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \cong \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X$.*

证明. 因为 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} = \underline{\operatorname{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t]/(t^n - 1)$, 由于严格 Hensal, 多项式 $t^n - 1$ 会分裂. 故得到平凡的平展覆盖 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \to X$, 则 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \cong \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X$(参考 [27] 命题 7.2.2). □

定理 10.11. *设 X 是代数闭域 k 上的亏格 g 光滑射影曲线, 且 $n \in k^*$, 则*

$$H_{\text{ét}}^q(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_n(k) & q = 0, \\ \mathrm{Pic}^0(X)[n] & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \geq 3. \end{cases}$$

根据引理10.10我们有 $H_{\text{ét}}^q\left(X, \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 0, \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g} & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \geq 3. \end{cases}$

证明. 根据 Kummer 正合列5.24和定理10.9引出长正合列为:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_n(k) \arrow[r] & k^* \arrow[r, "(-)^n"] & k^* \arrow[dlll, rounded corners] \\
H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r, "(-)^n"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[dll, rounded corners] & \\
H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots . &
\end{tikzcd}
$$

故而当 $q \geq 3$ 时 $H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = 0$. 只需考虑 $q = 1, 2$. 由于代数闭, 映射 $(-)^n : k^* \to k^*$ 是满射, 因此对于 $(-)^n : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$, $H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \ker(-)^n$ 且 $H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \mathrm{coker}(-)^n$. 考虑交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] \arrow[d, "{[n]}"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "(-)^n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\times n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

根据 Abel 簇的知识我们知道 $[n]$ 是满射且 $\ker[n] = \mathrm{Pic}^0(X)[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g}$. 运用蛇引理即可得到结论. □

定理 10.12. 设 X 是代数闭域 k 上的仿射光滑曲线且 $n \in k^*$. 取光滑紧化 $X \subset X'$, 设 g 为 X' 亏格, 设 $r = \#(X' \backslash X)$, 则

$$
H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_n(k) & q = 0, \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+r-1} & q = 1, \\ 0 & q \geq 2. \end{cases}
$$

证明. 设 $X = X' \backslash \{x_1, ..., x_r\}$, 则 $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X)/R$ 其中 R 被 $\mathscr{O}_{X'}(x_i)$ 生成. 由于 R 非空, 则 $\mathrm{Pic}^0(X') \to \mathrm{Pic}(X)$ 是满射, 故 $\mathrm{Pic}(X)$ 可除, 因此不难得知 $H^0_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \boldsymbol{\mu}_n(k)$ 且当 $q \geq 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = 0$. 只需证明 $H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+r-1}$.

注意到我们有

$$
\begin{aligned}
&H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \{(\mathscr{L}, \alpha) : \mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X), \alpha : \mathscr{L}^{\otimes n} \cong \mathscr{O}_X\}/\cong \\
&= \frac{\{(\mathscr{L}', D, \alpha') : \mathscr{L}' \in \mathrm{Pic}^0(X), \mathrm{supp}(D) \subset \{x_1, ..., x_r\}, \alpha' : (\mathscr{L}')^{\otimes n} \cong \mathscr{O}_{X'}(D)\}}{\{(\mathscr{O}_{X'}(D), nD, 1^{\otimes n}) : \deg D = 0, \mathrm{supp}(D) \subset \{x_1, ..., x_r\}\}}.
\end{aligned}
$$

则有

$$
0 \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X', \boldsymbol{\mu}_{n,X'}) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus r} \xrightarrow{\sum} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0
$$

其中 f 为 $(\mathscr{L}', D = \sum a_i[x_i], \alpha') \mapsto (a_i)_{i=1}^r$. 运用定理10.11计算秩即可. □

10.4 支撑在点上的上同调

命题 10.13. 设 U 是代数闭域 k 上的光滑曲线且 $n \in k^*$. 取闭点 $x \in U$, 则

$$H^q_{x,\text{ét}}(U, \boldsymbol{\mu}_{n,U}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \neq 2. \end{cases}$$

证明. 由推论7.21得知 $H^i_{x,\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \cong H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathscr{F})$. 根据定理10.9得到当 $i > 0$ 时

$$H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m) = 0.$$

再根据命题7.19得到正合列

$$\cdots \longrightarrow H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x} \backslash \{x\}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^{i+1}_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \cdots.$$

得到对 $i \neq 1$ 有

$$H^{i-1}_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x} \backslash \{x\}, \mathbb{G}_m) \cong H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m).$$

由于 $\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x} \backslash \{x\} = \operatorname{Spec} K$, 根据引理10.8我们有当 $i \geq 1$ 时

$$H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x} \backslash \{x\}, \mathbb{G}_m) = 0.$$

故

$$H^1_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m) = \frac{H^0_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x} \backslash \{x\}, \mathbb{G}_m)}{H^0_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m)} \cong \mathbb{Z},$$

且当 $i \neq 1$ 时候有 $H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m) = 0$. 再根据 Kummer 正合列即可得到结论. □

11 可构建层和挠层

11.1 可构建层

定义 11.1. 设 X 是概形, 设 $\mathscr{F} \in \operatorname{Sh}(X_{\text{ét}})$ 称为可构建的, 如果任取仿射开集 $U \subset X$, 存在有限分解 $U = \coprod_i U_i$ 为可构建局部闭集使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限局部常值层.

注 11.2. 对 $\operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 也同理定义, 但对一般的 Λ-模层, 需定义 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限型的局部常值层.

命题 11.3. 设概形 X 是拟紧拟分离且 $\mathscr{F} \in \operatorname{Sh}(X_{\text{ét}})$(或 $\operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层, 这时需假设 Λ 诺特), 则 $\mathscr{F}$ 可构建当且仅当存在开覆盖 $X = \bigcup_i U_i$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 可构建当且仅当存在分解 $X = \bigcup_i U_i$ 可构建局部闭集使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限局部常值层.

证明. 纯粹的点集拓扑和层论, 参考Tag 095E. □

命题 11.4. *(i) 设* $f: X \to Y$ *是概形映射, 令* $\mathscr{F}\,\mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$*(或* $\mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$ *和* Λ*-模层, 其中* Λ *诺特) 是可构建的, 则* $f^{-1}\mathscr{F}$ *也是可构建的;*

(ii) 设 X *是概形, 则* $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ *内的可构建层关于有限极限和余极限封闭, 若为* $\mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$ *和* Λ*-模层 (其中* Λ *诺特), 则为弱 Serre 子范畴 (若* X *诺特, 则可为强 Serre 子范畴);*

(iii) 若 X *拟紧拟分离, 若* $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$*(或* Λ*-模层, 其中* Λ *诺特) 可构建, 则* $\mathrm{supp}(\mathscr{F})$ *也可构建.*

证明. 纯粹的点集拓扑和层论, 参考Tag 095G, Tag 03RZ,Tag 09YS 和Tag 098H. □

引理 11.5. *设* $j: U \to X$ *是拟紧拟分离概形间的平展映射, 则*

(i) 层 h_U *可构建;*

(ii) 对于有限 Abel 群 M*(或* Λ*-模, 其中* Λ *诺特), 层* $j_!\underline{M}_U$ *可构建.*

证明. 运用如下结论:

• **事实.** 若 $U \to X$ 是拟紧拟分离概形间的平展映射, 则存在有限分解 $X = \coprod_i X_i$ 为可构建局部闭集使得 $\pi_i : X_i \times_X U \to X_i$ 是有限平展映射.(参考Tag 03S0)

(i) 根据这个事实和命题5.20即可得到结论.

(ii) 运用命题6.9(i) 和命题6.8(iii) 可以得到

$$(j_!\underline{M}_U)|_{X_i} = \pi_{i,!}\underline{M} = \pi_{i,*}\underline{M}.$$

此时 π_i 有限平展, 则根据直像是平展局部的且引理5.19(ii), 因此 $\pi_{i,*}\underline{M}$ 必然是有限局部常值. □

命题 11.6. *设概形* X *拟紧拟分离. 若* $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$*(或* Λ*-模, 其中* Λ *诺特), 则* $\mathscr{F}$ *是可构建层的滤余极限.*

证明. 我们需要如下结论 (参考Tag 093C):

• **事实 1.** 任何 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 内的层都可以写成

$$\mathrm{Coequalizer}\left(\coprod_{j=1,\ldots,m} h_{V_j} \rightrightarrows \coprod_{i=1,\ldots,n} h_{U_i}\right)$$

其中 V_j, U_i 均为 $X_{\text{ét}}$ 内的拟紧拟分离元.

• **事实 2.** 任何 (Λ 诺特)Λ-模都可以写成

$$\mathrm{coker}\left(\coprod_{j=1,\ldots,m} j_{V_j,!}\underline{\Lambda}_{V_j} \longrightarrow \coprod_{i=1,\ldots,n} j_{U_i,!}\underline{\Lambda}_{U_i}\right)$$

其中 V_j, U_i 均为 $X_{\text{ét}}$ 内的拟紧拟分离元.

故根据命题11.4和引理11.5即可得到. □

11.2 挠层

定义 11.7. *设 X 是概形, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 如果任何 $\mathscr{F}(U)$ 是挠群, 则称其为挠层.*

命题 11.8. *若 $f : X \to Y$ 拟紧拟分离, 则若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则 $R^n f_* \mathscr{F}$ 也是挠层.*

证明. 注意到

$$R^n f_* \mathscr{F} = (U \mapsto H^n_{\text{ét}}(U \times_Y X, \mathscr{F}))^\sharp.$$

可以取仿射 V 使得 $X \times_Y V$ 是拟紧拟分离的 (因为 f 是如此). 因此只需要证明若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层且 X 拟紧拟分离, 则 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 是挠群. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_d \mathscr{F}[d]$ 其中 $\mathscr{F}[d]$ 是 d-挠元的部分, 根据定理7.12我们有

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_d H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}[d]).$$

而 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}[d])$ 也是 d-挠群, 故成立. □

命题 11.9. *若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则 $\mathscr{F}$ 是可构建层的滤余极限.*

证明. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_d \mathscr{F}[d]$ 其中 $\mathscr{F}[d]$ 是 d-挠元的部分, 视 $\mathscr{F}[d]$ 为 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-模. 根据命题11.6即可得到结论. □

注 11.10. *若 X 诺特, 任取 E 在特殊化下稳定, 如果挠层 $\mathscr{F}$ 在 E 上支撑, 那么其可以写为在 E 上支撑的可构建层的滤余极限. 这是因为命题11.4知道每个 $\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}$ 的像 $\mathscr{F}_i'$ 均为可构建, 则 $\mathscr{F} = \varinjlim \mathscr{F}_i'$. 其支集可构建且在 E 内, 则闭包也是如此.*

12 曲线的上同调 II——挠层的上同调

12.1 迹映射方法基础

考虑 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 内的函子. 对于平展映射 $f : Y \to X$, 有伴随对 $(f_!, f^{-1})$ 和 (f^{-1}, f_*). 因此得到映射 $\mathrm{id} \to f_* f^{-1}$ 和 $f_! f^{-1} \to \mathrm{id}$.

定义 12.1. *根据命题6.8(iii), 当 f 有限平展时 $f_* = f_!$, 因此有映射 $f_* f^{-1} \to \mathrm{id}$, 称之为迹映射.*

命题 12.2. *设 $f : Y \to X$ 有限平展, 则迹映射被如下性质所决定:*

(a) 和 X 上的平展局部化交换;

(b) 若 $Y = \coprod_{i=1}^d X$, 则迹映射是求和映射 $f_* f^{-1} \mathscr{F} = \mathscr{F}^{\oplus d} \to \mathscr{F}$.

证明. 根据引理5.19, 用 (a) 考虑平展局部上自然是 (b) 中的情况. □

命题 12.3 (迹映射方法)**.** *设 $f : Y \to X$ 处处满足 $\deg f = d$, 则不难看出 $\mathscr{F} \to f_* f^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 是乘 d 映射. 如果 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 满足乘 d 映射是同构, 则有单射*

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \hookrightarrow H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1} \mathscr{F}).$$

特别的, 如果 $H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1} \mathscr{F}) = 0$, 则 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.

证明. 注意到因为 f 有限, 则 $H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1} \mathscr{F}) = H^n_{\text{ét}}(X, f_* f^{-1} \mathscr{F})$. 乘 d 映射诱导

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1} \mathscr{F}) \to H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$$

是同构, 于是成立. □

12.2 挠层的上同调

定理 12.4. *设 X 是代数闭域 k 上的分离有限型一维概形且 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则*

(i) 对任何 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(ii) 若 X 仿射, 则对任何 $q > 1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(iii) 若 $p = \mathrm{char}(k) > 0$ 且 $\mathscr{F}$ 是 p-幂次挠层, 则对任何 $q > 1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(iv) 如果 $\mathscr{F}$ 是可构建层且和 $\mathrm{char}(k)$ 互素的挠层, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 有限;

(v) 如果 $\mathscr{F}$ 是可构建层且 X 紧合, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 有限;

(vi) 对任何代数闭扩张 K/k, 如果 $\mathscr{F}$ 是 $\mathrm{char}(k)$ 互素的挠层, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathscr{F}|_{X_K})$;

(vii) 对任何代数闭扩张 K/k, 如果 X 是紧合, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathscr{F}|_{X_K})$;

(viii) 对任何开集 $U \subset X$, 映射 $H^2_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^2_{\text{ét}}(U, \mathscr{F})$ 是满射.

参考Tag 03SB. 这是本节最重要的结论, 这些命题的证明事实上是殊途同归的, 我们只以 (i) 和 (iii) 在光滑的情况下来举例说明. 对于不光滑的情况, 取概形的既约结构, 因为是一个加厚所以不改变上同调. 然后取正规化, 我们总能得到一个交换图和一些函子运算的交换性. 最后, 把曲线分解成连通分支即可, 更多细节我们不在介绍.

这里按照惯例我们定义局部系为有限局部常值层, 记作 $\mathrm{Loc}(X)$(在第二部分——反常层处我们将假设 $\mathrm{Loc}(X)$ 另一个特殊的局部系). 我们首先证明如下结论:

定理 12.5. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层 (且挠部分在 k 中可逆), 则对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

引理 12.6. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且局部系 $\mathscr{F}$ 的挠部分在 k 中可逆, 则对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

证明. 设 ℓ 在 k 中可逆, 如果 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-层, 即对于每个平展开集 U, 层 $\mathscr{F}(U)$ 是 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 线性空间. 对于某个 k 中可逆的 d, 取 d 次平展覆叠 $\pi : U \to X$ 使得 $\mathscr{F}|_U$ 是常值层. 由于是线性空间上, 故乘 d 为同构, 根据命题12.3 和定理10.11, 我们得知对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.

一般地, 将 $\mathscr{F}$ 分解成 $\mathscr{F}_1 \oplus ... \oplus \mathscr{F}_r$, 其中 $\mathscr{F}_i$ 被 ℓ_i 的幂次消灭, $\mathscr{F}$ 被某个 ℓ 的幂次消灭. 最后, 记 $\mathscr{F}[\ell]$ 为 $\mathscr{F}$ 的 ℓ-挠部分, 考虑正合列 $0 \to \mathscr{F}[\ell] \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell] \to 0$, 然后归纳即可. □

引理 12.7. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且可构建层 $\mathscr{F}$ 的挠部分在 k 中可逆, 根据点集拓扑推导不难得知存在稠密开浸入 $j : U \to X$ 使得 $\mathscr{F}|_U \in \mathrm{Loc}(U)$. 考虑下面命题等价:*

(a) 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(b) 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, j_! j^{-1}\mathscr{F}) = 0$.

证明. 设 $Z = X \backslash U$ 和 $i : Z \to X$, 根据命题6.10有正合列

$$0 \to j_! j^{-1}\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to i_* i^{-1}\mathscr{F} \to 0.$$

注意到 $H^q_{\text{ét}}(X, i_* i^{-1}\mathscr{F}) = H^q_{\text{ét}}(Z, i^{-1}\mathscr{F})$ 且 Z 是代数闭域的谱的乘积, 因此诱导长正合列即可得到证明. □

*定理12.5*的证明. 根据命题11.9, 只需考虑可构建层的情况. 再根据引理12.7, 我们只需要证明: 对稠密开浸入 $j : U \to X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(U)$, 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, j_!\mathscr{F}) = 0$.

再次使用迹映射方法, 取合适的有限平展覆盖 $g : V \to U$, 只需考虑形如 $j_!g_*g^{-1}\mathscr{F}$ 的上同调且使得 $g^{-1}\mathscr{F}$ 是常值层. 由 Zariski 主定理, 有分解

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "b"] & \\ V \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "g"'] & & X \\ & U \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

为开浸入 a 和有限态射 b 的复合. 不难验证得到 $j_!g_* = b_*a_!$, 只需要证明对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(Y, a_!\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}) = 0$, 其中 ℓ 在 k 里可逆. 只需要考虑 $a_!a^{-1}\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$, 根据引理12.7和引理12.6. □

再考虑如下:

定理 12.8. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线, 设 $p = \mathrm{char}(k) > 0$ 且 $\mathscr{F}$ 是 p-幂次挠层, 则对任何 $q > 1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

引理 12.9. *设 k 是一个特征 p 代数闭域, 设 V 是有限维 k-线性空间. 设线性映射 $F : V \to V$ 是加性的且 $F(ax) = a^pF(x)$. 那么 $F - \mathrm{id} : V \to V$ 是满射.*

证明. 交换代数, 参考Tag 0A3L. □

命题 12.10. *设 X/k 是 d 维紧合概形, 那么对于 $q > d$, 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$.*

证明. 考虑 Artin-Schreier 正合列定理5.25:

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X \to \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \to 0.$$

诱导长正合列为

$$\cdots \to H^d_{\text{ét}}(X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{F \text{id}} H^d_{\text{ét}}(X, \mathscr{O}_X) \to H^{d+1}_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) \to 0 \to \cdots.$$

其中根据定理8.15和 Grothendieck 消灭定理得知当 $q > d$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{O}_X) = 0$, 因此之后的项是 0. 因此当 $q > d + 1$ 时 $H^q_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$. 再根据引理12.9得到 $H^{d+1}_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$, 于是得到结果. □

*定理12.8*的证明. 类似定理12.5的证明, 化归到局部系, 然后再到可构建层即可, 略去. □

事实上定理12.4的某些可以减弱至可分闭域:

命题 12.11 (参考Tag 0A5E)**.** *设 K/k 是可分闭域的扩张, 设 X 在 $\mathrm{Spec}\, k$ 上紧合且维数不大于 1, 则对挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathscr{F}|_{X_K})$.*

13 上同调维数 I——一般情况

定义 13.1. *对于概形 X, 定义其 (平展) 上同调维数为*

$$\mathrm{cd}(X) := \min\{d : \text{对于所有挠 } Abel \text{ 层}\mathscr{F}\text{都有当}q > d\text{时有}H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0\}$$

或者 $\mathrm{cd}(X) = \infty$.

引理 13.2 (Tate)**.** *设 L/K 是域扩张, 那么 $\mathrm{cd}(L) \le \mathrm{cd}(K) + \mathrm{trdeg}(L/K)$.*

证明. 首先断言: 若 X 是 K 上的一维代数概形, 则 $\mathrm{cd}(X) \le \mathrm{cd}(K) + 1$. 对 $f : X \to \operatorname{Spec} K$ 和挠层 $\mathscr{F}$ 用 Leray 谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} K, R^q f_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

注意到对于几何点 $\bar{x} : \operatorname{Spec} \bar{K} \to \operatorname{Spec} K$, 由推论9.4 有 $(R^q f_* \mathscr{F})_{\bar{x}} = H^q(X_{\bar{K}}, \mathscr{F})$. 当 $q > 1$ 时由定理12.4知为 0. 分析谱序列得到断言成立.

回到引理本身. 若 $\mathrm{trdeg}(L/K) = \infty$ 则显然成立. 当超越度有限时, 根据归纳法不妨设 $\mathrm{trdeg}(L/K) = 1$. 设 $L = \varinjlim_i A_i$ 是一些有限生成 K 代数的滤余极限, 这些 A_i 的维数都不超过 1. 再利用断言和定理7.12即可得到结论. □

定理 13.3. *设 X 是代数闭域 k 上的代数簇, 则 $\mathrm{cd}(X) \le 2 \dim X$.*

证明. 固定一个挠层 $\mathscr{F}$, 用归纳法.

- **步骤 1.** 对一般点含入 $j : \eta \to X$, 划归到形如 $j_* \mathscr{F}$ 的情况.

注意到映射 $\mathscr{F} \to j_* j^{-1} \mathscr{F}$ 诱导同构 $(\mathscr{F})_\eta \cong (j_* j^{-1} \mathscr{F})_\eta$. 其核和余核都是支撑在维数更小的闭子概形上的层. 根据归纳假设只需要证明 $j_* \mathscr{F}$ 的情况.

- **步骤 2.** $R^q j_* \mathscr{F}$ 支撑在维数 $\dim X - q$ 的子簇上.

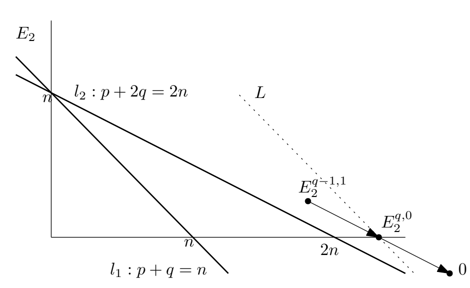
对于 X 的任何不可约闭子簇 Z, 设 Z 的一般点为 ξ, 然后选择一个几何点 $\bar{\xi} \to \xi \to Z$. 注意到由推论9.4得到 $(R^q j_* \mathscr{F})_{\bar{\xi}} = H^q(\mathrm{Frac}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\bar{\xi}}), \mathscr{F})$. 由于 $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\bar{\xi}})/\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{\bar{\xi}})$ 是代数扩张 (因为其为有限扩张的极限), 注意到

$$\mathrm{trdeg}(\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{\bar{\xi}})/k) = \dim X - \dim Z,$$

根据引理13.2得知成立.

- **步骤 3.** 完成证明.

考虑 Leray 谱序列 $E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(X, R^q j_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta, \mathscr{F})$ 如图 ($n = \dim X$):



根据归纳, 当 $p > 2(n - q)$ 且 $q > 0$ 时 $E_2^{p,q} = 0$; 由引理13.2知当 $p + q > n$ 时 $H^{p+q}(\eta, \mathscr{F}) = 0$. 故在图中 l_1 右方区域均收敛至 0, 在 l_2 右方的区域均为零. 于是考虑当 $p > 2 \dim X$ 时有 $E_2^{p-1,1} = 0$, 故 $E_2^{p,0} = E_\infty^{p,0}$. 在虚线 L 上全部收敛至 0, 因此 $E_2^{p,0} = 0$, 则证明完毕. □

14 基变换定理

14.1 经典拓扑里的紧合基变换

定义 14.1. 连续映射 $f : X \to S$ 称为紧合的如果 f 是万有闭的且 $\Delta : X \to X \times_S X$ 是闭映射. 如果 f 紧合当且仅当紧集的逆像仍然是紧的, 我们称 f 是拟紧合 *(更多的参考Tag 005M)*.

引理 14.2. 设 $f : X \to Y$ 是紧合映射, 则对于任何 X 上的层 $\mathscr{F}$ 和点 $y \in Y$ 都有

$$(Rf_*\mathscr{F})_y \cong R\Gamma(X_y, \mathscr{F}|_{X_y}),$$

其中 $X_y = f^{-1}(y)$.

证明. 我们需要如下结论 (参考Tag 09V3):
• 设 Z 是空间 X 的紧子集使得任何两个 Z 内的点都有 X 内的不交开邻域包含它们, 则对层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X)$ 都有 $\varinjlim_{U \supset Z} H^r(U, \mathscr{F}) \cong H^r(Z, \mathscr{F}|_Z)$.

回到引理本身. 取内射预解用伴随性不难得到映射 $(Rf_*\mathscr{F})_y \to R\Gamma(X_y, \mathscr{F}|_{X_y})$. 取内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$, 由于 $\mathscr{I}^*|_{X_y}$ 是 $\Gamma(X_y, -)$-零调的, 故 $R\Gamma(X_y, \mathscr{F}|_{X_y})$ 可被 $\Gamma(X_y, \mathscr{I}^*|_{X_y})$ 表示, 故只需证明同构

$$\varinjlim_{V} \mathscr{I}^*(f^{-1}(V)) \cong \Gamma(X_y, \mathscr{I}^*|_{X_y}).$$

注意到如果 $X_y \subset U$ 是开邻域, 由于 f 闭, 则设 $V = Y \backslash f(X \backslash U)$ 就得到 $f^{-1}(V) \subset U$, 进而此系统共尾, 因此根据上述结论即可得到结论. □

定理 14.3 (拓扑紧合基变换)**.** 设 $f : X \to Y$ 是紧合的映射, 设 $g : Y' \to Y$ 是连续映射, 考虑纤维积

$$\begin{tikzcd} X' := X \times_Y Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

则对层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X)$ 都有 $g^{-1}(Rf_*\mathscr{F}) \cong Rf'_*((g')^{-1}\mathscr{F})$.

证明. 取内射预解用伴随性不难得到所述映射, 故只需在茎上证明同构即可. 取 $y' \in Y$ 在 $y \in Y$ 上, 根据引理14.2得到同构

$$(Rf'_*((g')^{-1}\mathscr{F}))_{y'} = R\Gamma((f')^{-1}(y'), (g')^{-1}\mathscr{F}|_{(f')^{-1}(y')})$$

和

$$(Rf_*\mathscr{F})_y = R\Gamma(f^{-1}(y), \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)})$$

于是同构是显然的, 故成立. □

14.2 紧合基变换的叙述和证明

但平展上同调的紧合基变换类比没有这么容易.

引理 14.4. *对概形的紧合映射 $f: X \to S$ 和几何点 $\bar{s} \to S$, 对任意的 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 都有双射*

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{s}} \to \Gamma(X_{\bar{s}}, \mathscr{F}_{\bar{s}}).$$

证明. 这个需要 Hensel 对的一些结果, 见Tag 0A3T. □

引理 14.5. *设 ℓ 是任一素数且 A 是严格 Hensel 局部环, 设 $X \to \mathrm{Spec}(A)$ 紧合, 那么对于挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有*

$$H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_0, \mathscr{F}|_{X_0}),$$

其中 X_0 是特殊纤维.

证明. 这个结论颇为复杂, 直接证明需要 Artin 逼近等技术, 我们略去. 读者可以用紧合基变换来推出它 (其实和紧合基变换等价). 而 [35] 内只证明了 $\mathbb{F}_\ell$-模层且 $X = \mathbb{P}^1_A$ 的情况 (我们也只需要这个条件), 我们简述一下这种情况: 取 $\mathbb{F}_\ell$-模内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$, 可以证明 $\mathscr{I}^*|_{X_0}$ 是 $\mathscr{F}|_{X_0}$ 的右 $H^0_{\text{ét}}(X_0, -)$-零调的 (参考Tag 0A5H), 于是 $H^q_{\text{ét}}(X_0, \mathscr{F}|_{X_0})$ 可以由 $H^0_{\text{ét}}(X_0, \mathscr{F}|_{X_0})$ 得到, 再由引理14.4即可得到结论. □

注 14.6. *在复几何里有一个给予动机的类比 (证明见 [38] 定理 9.3):*
• *Ehresmann 定理. 设 $f: \mathcal{X} \to (B, 0)$ 是微分流形之间的紧合浸没, 其中 B 是可缩的流形且 0 是其上的一个基点. 则存在微分同胚 $T: \mathcal{X} \cong \mathcal{X}_0 \times B$ 使得对投影 $p: \mathcal{X}_0 \times B \to B$ 满足 $p \circ T = f$. 因此在此种情况下有同伦等价 $\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}_0$, 因此有相同的上同调.*

定理 14.7 (紧合基变换)**.** *设 $f: X \to Y$ 是概形间的紧合映射, 对任何概形映射 $g: Y' \to Y$ 和纤维积*

$$\begin{tikzcd} X' := X \times_Y Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

对任何挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 都有同构

$$g^{-1}Rf_*\mathscr{F} \longrightarrow Rf'_*(g')^{-1}\mathscr{F}.$$

证明. 我们需要如下几个步骤来得到证明.
• **步骤 1.** 先证明不导出的情况对任意的 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 成立.

映射不难由伴随性给出, 同构只需要在茎上验证, 根据引理14.4即可得到结论.
• **步骤 2.** 研究几个基变换的重要关系.

为了方便, 如果对任何 $S' \to S$ 和基变换 $X \times_S S'$ 和挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都满足定理的结论, 我们就称 $f: X \to S$ 和上同调的基变换交换. 则我们有如下结论:
•• (a) 紧合映射 $f: X \to Y$ 和上同调的基变换交换当且仅当对任何素数 ℓ 和内射 $\mathbb{F}_\ell$-模层 $\mathscr{I} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和任何 $Y' \to Y$ 和定理的基变换 $X \times_Y Y'$, 对任何 $q > 0$ 都有层 $R^q f'_*(g')^{-1}\mathscr{I} = 0$.

这个不太困难, 首先设 $\mathscr{F}=\varinjlim \mathscr{F}[n]$, 根据定理7.12不难得出高阶直像和滤余极限交换, 而逆像本来就交换, 因此只需要假设 $\mathscr{F}$ 被某个 n 零化. 取素数 $\ell | n$, 考虑

$$0 \to \mathscr{F}[\ell] \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell] \to 0,$$

运用 5-引理, 只需对 $\mathscr{F}[\ell], \mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell]$ 证明即可. 不断重复这一步骤, 则不妨设 $\mathscr{F}$ 被某个素数 ℓ 零化. 取 $\mathbb{F}_\ell$-模内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$, 只需证明对 $\mathscr{I}^*$ 运用步骤 1 即可.

•• (b) 若 $f: X \to Y$ 有限, 则其和上同调的基变换交换.

这个基本上平凡, 运用 (a) 和推论9.6即可得到结果.

•• (c) 对紧合映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$, 若 f, g 都和上同调的基变换交换, 则 $g \circ f$ 也是如此;

•• (d) 对紧合映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$, 若 $f, g \circ f$ 都和上同调的基变换交换且 f 是满射, 则 g 也是如此.

(b)(c) 证明类似, 运用相对 Leray 谱序列即可, 参考Tag 0A4C 和Tag 0A4D, 我们略去.

• **步骤 3.** 将问题划归到 (相对) 射影空间.

根据命题9.2, 我们可以考虑 Zariski 局部, 于是不妨设 Y 仿射. 由 Chow 引理得到如下交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & X'' \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f''"] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

其中 π 是 (H-) 射影满射且 f'' 是紧合映射. 根据步骤 2 的 (b), 则 i 和上同调的基变换交换. 如果我们证明了对形如 $\mathbb{P}^n_S \to S$ 的映射也和上同调的基变换交换, 那么根据步骤 2 的 (c) 得到 f'', π 和上同调的基变换交换, 再根据步骤 2 的 (d), 我们就得到了 f 和上同调的基变换交换. 因此问题划归到了形如 $\mathbb{P}^n_S \to S$ 的映射.

• **步骤 4.** 将问题划归到 (相对) 射影直线.

注意到对于 $n > 0$, 有有限满射

$$\mathbb{P}^1_S \times_S \cdots \times_S \mathbb{P}^1_S \to \mathbb{P}^n_S$$

为 $((x_1 : y_1), (x_2 : y_2), \ldots, (x_n : y_n)) \mapsto (F_0 : \ldots : F_n)$, 其中 F_i 是 x_i, y_i 的整系数多项式满足

$$\prod_i (x_i t + y_i) = F_0 t^n + F_1 t^{n-1} + \ldots + F_n.$$

因此根据步骤 2 的 (c) 和 (d) 只需要考虑 $\mathbb{P}^1_S \to S$ 的情况.

• **步骤 5.** 完成证明.

对任何 $g: T \to S$ 和 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{F}_\ell$ 模层 (根据步骤 2 的 (a) 的证明, 只需考虑这种情况), 观察交换图

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1_T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & \mathbb{P}^1_S \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

只需要在茎上验证. 首先注意到对几何点 $\bar{s}' \to S$, 根据引理14.5和推论9.4我们有

$$(R^q f_* \mathscr{F})_{\bar{s}'} = H^q(\mathbb{P}^1_{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}'}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}'}}}) = H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(s')^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(s')^{\mathrm{sep}}}}).$$

因此考虑几何点 $\bar{t} \to T$, 设 $\bar{s} = g(\bar{t})$, 考虑映射 $g^{-1}R^q f_* \mathscr{F} \to R^q f'_*(g')^{-1}\mathscr{F}$ 的茎为

$$H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(s)^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(s)^{\mathrm{sep}}}}) \to H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(t)^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(t)^{\mathrm{sep}}}}).$$

根据命题12.11即可得到结论. □

注 14.8. *对挠上同调的 $\mathscr{F} \in D^+(X_{\text{ét}})$ 也对, 根据一般的紧合基变换和一个谱序列 (Tag 015J) 即可得到.*

14.3 紧合基变换的应用

命题 14.9 (相对上同调维数)**.** *若紧合概形映射 $f : X \to Y$ 满足纤维维数 $\leq n$, 则对所有挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有当 $q > 2n$ 时 $R^q f_* \mathscr{F} = 0$.*

证明. 当 $n = 0$ 时, 因为紧合且拟有限, 则 f 有限, 故命题由推论9.6得到.

当 $n > 0$ 时, 只需要证明茎为零即可. 对几何点映射运用紧合基变换14.7和上同调维数的结果13.3即可得到结论. □

引理 14.10. *设概形 X 拟紧拟分离, 设 $\mathscr{E} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 且 $A \in \mathrm{AbGrps}$, 则*

$$R\Gamma(X, \mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \underline{A}) = R\Gamma(X, \mathscr{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} A.$$

证明. 更一般的情况考虑Tag 0F0E. 参照上述 Tag 里的证明, 可以不妨设 A 是平坦 $\mathbb{Z}$-模. 因此只需证明当 A 是平坦 $\mathbb{Z}$-模时有 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \underline{A}) = H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} A$. 根据一个有趣的代数结论, 即平坦模都可以写成有限自由模的滤余极限 (Lazard 定理, 参考Tag 058G), 故而不妨设 A 是有限自由 $\mathbb{Z}$-模, 而此时结论显然成立. □

命题 14.11. *假设 $f : X \to Y$ 紧合, 对任何挠层 $\mathscr{E} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和层 $\mathscr{G} \in \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$ (对 $D^+(X_{\text{ét}})$ 内挠上同调的 $\mathscr{E}$ 和 $D^+(Y_{\text{ét}})$ 内的 $\mathscr{G}$ 也行), 我们有*

$$Rf_* \mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathscr{G} = Rf_*(\mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} f^{-1}\mathscr{G}).$$

证明. 更一般的情况考虑Tag 0F0F. 映射不难由伴随性给出, 因此只需要在茎上验证. 首先注意到

$$(\mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} f^{-1}\mathscr{G}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = (\mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}} (f^{-1}\mathscr{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = 0,$$

则满足紧合基变换的条件, 因此运用定理14.7和引理14.10即可. □

注 14.12. *对挠环 Λ 和 $\mathscr{E} \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和 $\mathscr{G} \in D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ 也对, 参考 Tag 0F0G.*

14.4 经典拓扑里的光滑基变换

定义 14.13. 我们称拓扑空间间的连续映射 $f: X \to Y$ 是光滑的, 如果对任何 $x \in X$, 存在其开邻域同胚于 $U \times [0,1]^n$, 其中 U 是 $f(x)$ 的开邻域.

定理 14.14 (拓扑的光滑基变换)**.** 对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(X)$ 和纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_S S' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

如果 g 光滑, 则有 $g^{-1}R^i f_* \mathscr{F} \cong R^i f'_*(g')^{-1}\mathscr{F}$.

证明. 映射类似于拓扑紧合基变换, 由于高阶直像可以是上同调群的层化, 我们只需证明

$$H^i(X \times [0,1]^n, (g')^{-1}\mathscr{F}) \cong H^i(X, \mathscr{F}).$$

因为有同伦等价 $X \times [0,1]^n \simeq X$, 如果局部系的上同调在同伦等价下不变, 我们就得到结论.

我们只需证明若 $h_0, h_1 : Y' \rightrightarrows Y$ 是同伦的映射, 那么会诱导相同的 $H^i(Y, \underline{A}) \to H^i(Y', \underline{A})$, 其中 $\underline{A}$ 是常值 Abel 群层. 设同伦为 $F : [0,1] \times Y' \to Y$ 使得 $F|_{0\times Y} = f_0, F|_{1\times Y} = f_1$. 取 $j_t : Y' \to Y' \times [0,1]$ 为 $y' \mapsto (t, y')$, 则有 $f_0 = F \circ j_0, f_1 = F \circ j_1$, 因此只需证明对任何 $t \in [0,1]$, 映射 j_t 都诱导相同的 $H^i(Y' \times [0,1], \underline{A}) \to H^i(Y', \underline{A})$. 考虑 $\pi : [0,1] \times Y' \to Y'$ 为自然投影, 则有 $\pi \circ j_t = \mathrm{id}_{Y'}$, 因此只需要考虑 π 诱导上同调群同构.

根据 Leray 谱序列有 $E_2^{p,q} = H^p(Y', R^q\pi_*\underline{A}) \Rightarrow H^{p+q}([0,1] \times Y', \underline{A})$. 根据拓扑的紧合基变换14.3得到对任意的 $y' \in Y'$ 有自然同构 $R^i\pi_*(\underline{A})_{y'} \cong H^i([0,1], \underline{A})$. 由层上同调-奇异上同调比较定理19.1得知当 $i > 0$ 时有

$$H^i([0,1], \underline{A}) \cong H^i_{\mathrm{sing}}([0,1], A) = 0.$$

故有典范同构 $\underline{A} \cong \pi_*\underline{A}$ 且当 $i > 0$ 有 $R^i\pi_*\underline{A} = 0$. 因此 Leray 谱序列退化, 故而所有边界映射

$$H^p(Y', \pi_*\underline{A}) \to H^p([0,1] \times Y', \underline{A})$$

是同构. 最后, 不难验证得到此映射即为:

$$H^p(Y', \pi_*\underline{A}) \to H^p([0,1] \times Y', \pi^{-1}\pi_*\underline{A}) \to H^p([0,1] \times Y', \underline{A}),$$

故而因为 $\pi^*\underline{A} \to \pi^{-1}\pi_*\underline{A} \to \underline{A}$ 是单位, 故边界映射和 $\underline{A} \cong \pi_*\underline{A}$ 诱导的同构即为 π 诱导的映射. □

14.5 光滑基变换一瞥

定理 14.15 (光滑基变换)**.** 对概形映射 $f: X \to S$ 和挠群 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 使得挠阶数在 S 内可逆. 对于纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_S S' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

其中 $S' = \varprojlim_\lambda S_\lambda$ 为光滑 S 概形 S_λ 构成的拟系统满足转移映射 $S_{\lambda'} \to S_\lambda$ 是仿射的, 因此有典范同构

$$g^{-1}R^i f_* \mathscr{F} \cong R^i f'_*(g')^{-1}\mathscr{F}.$$

这个定理的证明非常之复杂, 需要用到太多的技术和技巧, 想学的读者请参考笔记 (smooth-base-change) 或者 Tag 0EYQ. 这个也对任何 $E \in D^+(X_{\text{ét}})$ 满足 $H^q(E)$ 是的茎的挠系数在 S 可逆的复形都成立.

14.6 紧合-光滑基变换及有限性定理

定理 14.16 (紧合-光滑基变换)**.** *设 $f: X \to Y$ 紧合且光滑, 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(X)$ 满足挠阶数在 Y 内可逆, 则有 $R^i f_* \mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(Y)$.*

定理 14.17 (有限性定理)**.** *设 $f: X \to Y$ 紧合, 则对任何可构建层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有 $R^i f_* \mathscr{F}$ 可构建.*

14.7 特化和余特化映射

这里我们给这些映射一个简要介绍和构造. 参考Tag 0GJ2, Tag 0GJM和Tag 0GJT.

定义 14.18 (局部零调)**.** *设 $f: X \to S$ 是概形映射, 取几何点 $\bar{x} \to X$ 和 $\bar{s} = f(\bar{x})$. 取几何点 $\bar{t} \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{S,\bar{s}}$, 我们有交换图:*

$$\begin{tikzcd}
F_{\bar{x},\bar{t}} := \bar{t} \times_{\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{S,\bar{s}}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\bar{t} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{S,\bar{s}} \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

我们称 $F_{\bar{x},\bar{t}}$ 是 f 在 $\bar{x}$ 的 vanishing cycle. 取 $K \in D(X_{\text{ét}})$, 根据定理7.12得到 $K_{\bar{x}} = R\Gamma(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}}, K)$, 故得到映射

$$\alpha_{K,\bar{x},\bar{t}} : K_{\bar{x}} \to R\Gamma(F_{\bar{x},\bar{t}}, K).$$

我们称 f 在 $\bar{x}$ 关于 K 局部零调, 如果 $\alpha_{K,\bar{x},\bar{t}}$ 是同构.

定义 14.19. *设 $f: X \to S$ 是概形映射, 取几何点 $\bar{x} \to X$ 和 $\bar{s} = f(\bar{x})$. 取几何点 $\bar{t} \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{S,\bar{s}}$ 和 $K \in D^+(X_{\text{ét}})$. 假设 f 关于 K 局部零调. 考虑*

$$\begin{tikzcd}
X_{\bar{t}} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "q"'] & X \times_S \operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{S,\bar{s}} \arrow[d, "p"] & X_{\bar{s}} \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "r"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

伴随性给出 $\beta_{K,\bar{s},\bar{t}}: p^{-1}K \to Rh_*(q^{-1}K)$. 可以证明此时 $i^{-1}\beta_{K,\bar{s},\bar{t}}$ 是同构 *(见 Tag 0GJU)*, 故我们有余特化映射

$$\begin{aligned}\mathrm{cosp}: R\Gamma(X_{\bar{t}}, q^{-1}K) &= R\Gamma(X \times_S \operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}}, Rh_*(q^{-1}K)) \\ &\xrightarrow{i^{-1}} R\Gamma(X_{\bar{s}}, i^{-1}Rh_*(q^{-1}K)) \\ &\xrightarrow{(i^{-1}\beta_{K,\bar{s},\bar{t}})^{-1}} R\Gamma(X_{\bar{s}}, i^{-1}p^{-1}K) \\ &= R\Gamma(X_{\bar{s}}, r^{-1}K).\end{aligned}$$

定义 14.20. 取几何点 $\bar{s} = f(\bar{x})$ 和 $\bar{t} \to \operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}}$, 取 $K \in D^+(X_{\text{ét}})$. 则显然可以诱导特化映射 $\mathrm{sp}: K_{\bar{s}} \to K_{\bar{t}}$.

命题 14.21. 设 $f: X \to S$ 是概形映射, 取几何点 $\bar{x} \to X$ 和 $\bar{s} = f(\bar{x})$. 取几何点 $\bar{t} \to \operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}}$ 和 $K \in D^+(X_{\text{ét}})$. 假设 f 关于 K 局部零调且拟紧拟分离.

(i) 有交换图

$$\begin{array}{ccc}(Rf_*K)_{\bar{s}} & \longrightarrow & R\Gamma(X_{\bar{s}}, K) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{sp}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{cosp}} \\ (Rf_*K)_{\bar{t}} & \longrightarrow & R\Gamma(X_{\bar{t}}, K)\end{array}$$

(ii) 若 f 紧合且 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$, 则上图映射 sp 和 cosp 皆为同构.

证明. 证明见Tag 0GJT. □

注 14.22. 命题*33.6*证明了光滑情况下用光滑基变换得到局部零调性, 于是紧合且光滑会得到特化和余特化同构, 这个会用到证明定理*14.16*. 当然这里有循环论证嫌疑 (因为很多都是从局部零调证明光滑基变换的), 但 *[35]* 未使用局部零调来证明光滑基变换, 因此不存在这个嫌疑. 这个侧面得到局部零调和光滑基变换的等价性, 直接证明都十分困难.

15 上同调维数 II——仿射情况

定理 15.1. 设 X 是代数闭域 k 上的仿射簇, 则 $\mathrm{cd}(X) \le \dim X$.

证明. 固定挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 对维数做归纳法.

当 $\dim X = 0$, 则为有限映射, 因此根据 Leray 谱序列和推论9.6即可. 当 $\dim X = 1$ 时即为定理12.4. 假设 $d = \dim X > 1$ 使得定理当 $< d$ 时均成立, 要证明对 X 成立.

• **步骤 1.** 约化到证明 $\mathbb{A}^d_k$ 的情况.

根据 Noether 正规化得到有限映射 $\delta: X \to \mathbb{A}^d_k$, 根据推论9.6和 Leray 谱序列得到 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = H^i_{\text{ét}}(\mathbb{A}^d_k, \delta_*\mathscr{F})$, 再根据命题11.8得知 $\delta_*\mathscr{F}$ 依旧是挠层, 故只需对 $\mathbb{A}^d_k$ 证明.

• **步骤 2.** 首先讨论两种情况, 为后续做铺垫.

•• 设 $j: X \to Y$ 是开浸入且满足补集是某个有效 Cartier 除子 D 的支集, 对 $q > 0$, 层 $R^qj_*\mathscr{F}$ 在 D 上支撑, 断言当 $a := \mathrm{trdeg}(\kappa(y)/k) > d - q$ 时有 $(R^qj_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = 0$.

取定义 D 的局部函数 $f \in \mathscr{O}_{Y,y}$, 根据推论9.4有

$$(R^qj_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y} \times_Y X, \mathscr{F}) = H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}[1/f], \mathscr{F}).$$

根据一个代数结论 (参考Tag 0F0U) 有 $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}[1/f]$ 是域 $k(t_1,...,t_a)^{\mathrm{sep}}(x)$ 上的 $(d-a-1)$-维有限型代数的滤余极限, 再根据引理13.2和归纳假设即可.

•• 设 Z 是 k 上光滑 $d-1$ 维, 设 E_a 为满足 $\operatorname{trdeg}(\kappa(z)/k) \leq a$ 的集合, 不难得知其在特殊化下稳定. 若 $\mathscr{G}\,\mathrm{Ab}(Z_{\text{ét}})$ 是支撑在 E_a 上的挠层, 则当 $b > a$ 时 $H^b_{\text{ét}}(Z,\mathscr{G}) = 0$.

根据注11.10可以得到 $\mathscr{G} = \varinjlim \mathscr{G}_i$ 在 E_a 上支撑, 根据归纳假设以及定理7.12即可.

• **步骤 3.** 完成证明.

考虑典范分解

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^d_k \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^1_k \times_k \mathbb{A}^{d-1}_k \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbb{A}^{d-1}_k & \end{tikzcd}$$

其中 j 是开浸入且满足补集是某个有效 Cartier 除子 D 的支集. 考虑谱序列

$$E_2^{p,q} = R^p g_* R^q j_* \mathscr{F} \Rightarrow R^{p+q} f_* \mathscr{F}.$$

由于 $R^q j_* \mathscr{F}$ 在 D 上支撑且 $g|_D$ 是同构, 故当 $p > 0, q > 0$ 时 $E_2^{p,q} = 0$. 根据步骤 2 知当 $q > d$ 时 $R^q j_* \mathscr{F} = 0$. 由于 g 是紧合且相对维数是 1, 根据命题14.9得到当 $p > 2$ 时有 $E_2^{p,q} = 0$.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \\
g_* R^d f_* \mathscr{F} & 0 & 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
g_* R^1 f_* \mathscr{F} & 0 & 0 & 0 & \\
g_* f_* \mathscr{F} & R^1 g_* f_* \mathscr{F} & R^2 g_* f_* \mathscr{F} & 0 & \cdots
\end{array}$$

故当 $q > 2$ 有 $R^q f_* \mathscr{F} = g_* R^q j_* \mathscr{F}$. 根据步骤 2 第 1 条得知当 $q > 2$ 有 $\operatorname{supp} R^q f_* \mathscr{F} \subset E_{d-q} \subset \mathbb{A}^{d-1}_k$. 根据步骤 2 第 2 条得知当 $p > d-q$ 且 $q > 2$ 时有

$$H^p_{\text{ét}}(\mathbb{A}^{d-1}_k, R^q f_* \mathscr{F}) = 0.$$

由推论9.4有一般点的茎 $(R^2 f_* \mathscr{F})_{\bar{\eta}} = H^2(\mathbb{A}^1_{\bar{\eta}}, \mathscr{F}) = 0$, 再用步骤 2 第 2 条得知当 $p > d-2$ 时有

$$H^p_{\text{ét}}(\mathbb{A}^{d-1}_k, R^2 f_* \mathscr{F}) = 0.$$

再用归纳假设得到当 $p > d-1$ 且 $q > 2 = 0, 1$ 时有

$$H^p_{\text{ét}}(\mathbb{A}^{d-1}_k, R^q f_* \mathscr{F}) = 0.$$

综合上述结论, 考虑谱序列 $H^p_{\text{ét}}(\mathbb{A}^{d-1}_k, R^q f_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\mathbb{A}^{d-1}_k, \mathscr{F})$ 即可. □

注 15.2. *事实上对于一般的域 K 和其上的有限型仿射概形 X, 都有*

$$\operatorname{cd}(X) \leq \dim(X) + \operatorname{cd}(K)$$

(证明基本类似, 略去). 甚至更有推广 (Artin 消灭定理): 若 $f : X \to Y$ 是域 K 上有限型仿射映射, 若挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 支撑在满足 $\operatorname{trdeg}(\kappa(x)/K) \leq a$ 的区域上, 则 $R^q f_* \mathscr{F}$ 支撑在满足 $\operatorname{trdeg}(\kappa(x)/K) \leq a - q$ 的区域上 (参考 Tag 0F0X).

16 紧支上同调

16.1 分离有限型映射的下叹号函子

我们通常需要如下紧化作为基础:

定理 16.1 (Nagata 紧化)**.** *设概形 S 拟紧拟分离且 $f : X \to S$ 分离有限型, 则存在如下分解:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

其中 j 概形论稠密的开浸入且 $\bar{f}$ 是紧合的.

证明. 异常复杂, 现代证明见 [6]. □

定义 16.2. *设 $f : X \to Y$ 分离有限型, 对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 定义*

$$(f_!\mathscr{F})(U) := \{s \in (f_*\mathscr{F})(U) : \mathrm{supp}(s)\text{在}S\text{上紧合}\}.$$

命题 16.3. *设 $f : X \to Y$ 分离有限型, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$.*

(i) 当 f 还是平展的, 则 $f_!$ 是零扩张函子;

(ii) 若 f 紧合, 则 $f_!\mathscr{F} = f_*\mathscr{F}$;

(iii) 取一个 Nagata 紧化 $f = \bar{f} \circ j$, 则 $f_! \cong \bar{f}_* \circ j_!$.

证明. (i) 这个是比较繁琐的, 首先要说明分离平展的时候零扩张可以单射到直像 (参考Tag 0F4L), 其次要证明二者相同 (参考Tag 0F4Y);

(ii) 是平凡的;(iii) 不难构造出单射 $f_!(j^{-1}j_!\mathscr{F}) \to \bar{f}_*j_!\mathscr{F}$ (比如Tag 0F53). 根据推论6.8(iii), 只需说明满射即可, 但这是平凡的. □

16.2 紧支高阶直像

定义 16.4 (紧支高阶直像)**.** *设概形 S 拟紧拟分离且 $f : X \to S$ 分离有限型, 定义*

$$\begin{aligned} R^q f_! &:= R^q \bar{f}_* \circ j_! : \mathrm{Ab}_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}), \\ Rf_! &:= R\bar{f}_* \circ j_! : D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}) \to D^+_{\mathrm{tor}}(S_{\text{ét}}), \\ Rf_! &:= R\bar{f}_* \circ j_! : D(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to D(S_{\text{ét}}, \Lambda), \end{aligned}$$

其中 $f = \bar{f} \circ j$ 是 Nagata 紧化且 tor 指具有挠上同调的范畴且 Λ 是挠环.

注 16.5. 下述 $D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$ 均可换成 $D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, 其中 Λ 是环.

命题 16.6. *设概形 S 拟紧拟分离且 $f : X \to S$ 分离有限型有*

(i) 紧支高阶直像 $R^*f_!$ 和 $Rf_!$ 定义和 Nagata 紧化选取无关;

(ii) 设 $f' : X' \to X$ 也是分离有限型, 则有典范同构 $Rf_! \circ Rf'_! \cong R(f \circ f')_!$, 故有 Leray 谱序列 $E_2^{p,q} := R^p f_! R^q f'_! \mathscr{F} \Rightarrow R^{p+q}(f \circ f')_! \mathscr{F}$;

(iii) 对于拟紧拟分离概形的纤维积

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

有 $g^{-1} \circ Rf_! \cong Rf'_! \circ (g')^{-1}$;

(iv) 设 $Z \to X$ 是闭子概形, 补为 U. 设 $f_Z : Z \to S, f_U : U \to S$ 是结构映射, 则有好三角

$$Rf_{U,!}(K|_U) \to Rf_! K \to Rf_{Z,!}(K|_Z) \to Rf_{U,!}(K|_U)[1],$$

其中 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$ 或 $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 其中 Λ 是挠环. 因此有长正合列

$$\cdots \to R^i f_{U,!}(\mathscr{F}|_U) \to R^i f_! \mathscr{F} \to R^i f_{Z,!}(\mathscr{F}|_Z) \to \cdots;$$

(v) 若 $X = U \cup V$ 为拟紧开集的并, 设 $a : U \to S, b : V \to S$ 和 $c : U \cap V \to S$. 对于 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$ 或 $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 其中 Λ 是挠环, 则有好三角

$$Rc_!(K|_{U\cap V}) \to Ra_!(K|_U) \oplus Rb_!(K|_V) \to Rf_! K \to Rc_!(K|_{U\cap V})[1];$$

(vi) 短正合列可以诱导 $R^* f_!$ 的长正合列.

证明. (i)(ii)(iii) 颇为复杂, 我们参且略去, 参考Tag 0F7I, Tag 0F7J和Tag 0F7L; (vi) 是平凡的, 只需注意到对开浸入, 下叹号正合, 然后直接引高阶直像的长正合列即可; (iv)(v) 虽然不太困难, 但我懒得写了, 大致是先对不导出的版本给出短正合列, 然后得到好三角, 见Tag 0GKN和Tag 0GKP. 注意 (iv) 为 MV-序列, 而 (v) 为命题6.10的导出版本. □

命题 16.7. 设 $f : X \to Y$ 是拟紧拟分离概形间的分离有限型映射, 设 Λ 是挠环.

(i) 设 $K_i \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$, 若存在 a 使得对 $n < a$ 有 $H^n(K_i) = 0$, 则

$$Rf_! \left(\bigoplus_i K_i \right) = \bigoplus_i Rf_! K_i;$$

(ii) 函子 $Rf_! := R\bar{f}_* \circ j_! : D(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和直和交换;

(iii) 若 $E \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和 $K \in D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, 则有

$$Rf_! E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} K = Rf_!(E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} f^{-1} K).$$

证明. (i)(ii) 只需要对开浸入和紧合映射分别考虑即可. 开浸入因为是逆像的左伴随, 故一定和直和交换. 对于紧合映射, 当为挠环的模层时, 首先不难得知其纤维维数有界, 故根据命题14.9知道其相对上同调维数有限. (i) 是容易的, 取内射预解即可; 对 (ii) 需要取 K-内射的, 然后根据相对上同调维数有限, 运用滤余极限和导出推出交换等等, 细节略去, 参考Tag 0F11;

(iii) 根据 Nagata 紧化分解成开浸入 j 和紧合映射 $\bar{f}$, 而此投影公式对 j 成立是根据取 K 的 K-平坦预解和直接计算而来, 参见Tag 0E8I. 而对 $\bar{f}$ 只需运用一般版本的命题14.11即可, 需要用命题14.9知道其相对上同调维数有限, 细节略去. □

16.3 紧支上同调

定义 16.8. 设 X 是域 k 上的分离有限型概形, 设 Λ 是环, 取 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 或 $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 其中 Λ 是挠环, 则定义

$$R\Gamma_c(X, K) := R\Gamma(\operatorname{Spec} k, Rf_! K), \quad H^n_{c,\text{ét}}(X, K) := H^n(R\Gamma_c(X, K)),$$

其中 $f : X \to \operatorname{Spec} k$ 是结构映射.

命题 16.9. 设 $f : X \to Y$ 是分离有限型映射且 Y 拟紧拟分离, 取 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 或 $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 其中 Λ 是挠环. 取几何点 $\bar{y} \to Y$, 我们有

$$(Rf_! K)_{\bar{y}} = R\Gamma_c(X_{\bar{y}}, K|_{X_{\bar{y}}}).$$

证明. 这根据定义和命题16.6(iii) 即可得到. □

定理 16.10. 设 $f : X \to S$ 是分离有限型映射且 S 拟紧拟分离, 取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则对 $i > 2\sup_{s \in S} \dim X_s$ 都有 $R^i f_! \mathscr{F} = 0$. 若 S 诺特, 则如果 $\mathscr{F}$ 可构建, 则 $R^i f_! \mathscr{F}$ 可构建. 特别的, 若 $S = \operatorname{Spec} k$ 是可分闭域, 则 $H^i_{c,\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 是有限群且当 $i > 2 \dim X$ 时为零.

证明. 参考 [12] 第一章 8.8, 8.10. □

命题 16.11. 设 U 是代数闭域 k 上的亏格 g 光滑连通曲线, 设 n 在 k 内可逆, 则

$$H^q_{c,\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_n) = \begin{cases} 0 & q = 0, q > 2, \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g + \#Z - 1} & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q \geq 2. \end{cases}$$

其中 Z 是紧化后多出的点.

证明. 取紧化 X, 设 $Z = X \backslash U$ 和 $i : Z \to X, j : U \to X$. 由命题6.10得到

$$0 \to j_! j^{-1} \boldsymbol{\mu}_n \to \boldsymbol{\mu}_n \to i_* i^{-1} \boldsymbol{\mu}_n \to 0.$$

得到长正合列

$$\cdots \to H^r_{c,\text{ét}}(U, \boldsymbol{\mu}_n) \to H^r_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_n) \to H^r_{\text{ét}}(Z, i^{-1} \boldsymbol{\mu}_n) \to \cdots.$$

当 $r > 0$ 时 $H^r_{\text{ét}}(Z, i^{-1} \boldsymbol{\mu}_n) = 0$, 因此 $H^2_{c,\text{ét}}(U, \boldsymbol{\mu}_n) \cong H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 其余不难得出. □

注 16.12. 可假设 k 可分闭域, 证明类似.

17 平展上同调的 Künneth 公式

17.1 一般的 Künneth 公式

考虑纤维积

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "c"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

对于 $E \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和 $K \in D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$(无界导出范畴可以定义这些函子, 细节我们略去, 读者可以自行脑补成有界的), 注意到有典范映射

$$\begin{aligned} & c^{-1}(Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_*K) \\ & = p^{-1}f^{-1}Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}g^{-1}Rg_*K \\ & \to p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K \end{aligned}$$

再取伴随即可得到映射

$$Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_*K \to Rc_*(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K).$$

定理 17.1 (Künneth 公式)**.** *考虑上述纤维积, 若 Λ 挠环且 f, g 紧合, 则有*

$$Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_*K \cong Rc_*(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K).$$

证明. 我们根据投影公式和紧合基变换得到

$$\begin{aligned} & Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_*K \\ & = Rf_*(E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda f^{-1}Rg_*K) \\ & = Rf_*(E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rp_*q^{-1}K) \\ & = Rf_*(Rp_*(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K)) \\ & = Rc_*(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K), \end{aligned}$$

得到结论. □

注 17.2 (杯积)**.** 考虑

$$f^{-1}(Rf_*F \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rf_*L) = f^{-1}Rf_*F \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda f^{-1}Rf_*L \to F \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda L,$$

伴随性得到

$$Rf_*F \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rf_*L \to Rf_*(F \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda L),$$

称为杯积. 用此和 $Rf_*E \to Rc_*p^{-1}E$ 和 $Rg_*K \to Rc_*q^{-1}K$ 也可构造 *Künneth* 公式.

17.2 紧支的 Künneth 公式

定理 17.3. 考虑拟紧拟分离概形的纤维积

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "c"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

其中 f, g 为分离有限型映射. 设挠环 Λ 和 $E \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和 $K \in D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, 我们有

$$Rf_! E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rg_! * K \cong Rc_!(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} q^{-1}K).$$

证明. 根据命题16.6(iii) 和命题16.7(ii) 得到

$$\begin{aligned} & Rf_! E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rg_! K \\ & = Rf_!(E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} f^{-1}Rg_! K) \\ & = Rf_!(E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rp_! q^{-1}K) \\ & = Rf_!(Rp_!(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} q^{-1}K)) \\ & = Rc_!(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} q^{-1}K), \end{aligned}$$

得到结论. □

推论 17.4. 对于上述纤维积, 设挠环 Λ 和 Λ 模 $\mathscr{E}$ 以及 $\mathscr{F}$, 则可以构造 *Künneth* 映射

$$\bigoplus_{p+q=n} R^p f_! \mathscr{E} \otimes_{\Lambda} R^q g_! \mathscr{F} \to R^n c_!(p^{-1}\mathscr{E} \otimes_{\Lambda} q^{-1}\mathscr{F}).$$

若 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 其中有一个有 Λ-平坦的茎, 则 *Künneth* 映射即为如下谱序列从 $E_2^{0,n}$ 起的边际映射:

$$E_2^{r,s} = \bigoplus_{\alpha+\beta=s} \mathscr{T}or^{\Lambda}_{-r}(R^{\alpha} f_! \mathscr{E}, R^{\beta} g_! \mathscr{F}) \Rightarrow R^{r+s} c_!(p^{-1}\mathscr{E} \otimes_{\Lambda} q^{-1}\mathscr{F}).$$

证明. 注意到 Künneth 映射不难经过 Nagata 紧化来定义. 考虑高阶 Tor 谱序列

$$E_2^{r,s} = \bigoplus_{\alpha+\beta=s} \mathscr{T}or^{\Lambda}_{-r}(R^{\alpha} f_! \mathscr{E}, R^{\beta} g_! \mathscr{F}) \Rightarrow H^{r+s}(Rf_! \mathscr{E}[0] \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rg_! \mathscr{F}[0]),$$

设 α 是上述谱序列从 $E_2^{0,n}$ 起的边际映射, 考虑复合

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{p+q=n} R^p f_! \mathscr{E} \otimes_{\Lambda} R^q g_! \mathscr{F} \arrow[r, "\alpha"] & H^{r+s}(Rf_! \mathscr{E}[0] \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rg_! \mathscr{F}[0]) \arrow[d, "{\cong, \kappa}"] \\ R^n c_!(p^{-1}\mathscr{E} \otimes_{\Lambda} q^{-1}\mathscr{F}) & H^{r+s}(Rc_!(p^{-1}\mathscr{E}[0] \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} q^{-1}\mathscr{F}[0])) \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

其中同构 κ 由定理17.3给出. 由于 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 其中有一个有 Λ-平坦的茎, 则 β 也是同构, 故只需验证 $\beta \circ \kappa \circ \alpha$ 是 Künneth 映射. 只需经过基变换直和考虑紧支上同调的情况, 我们忽略这个无聊的验证. □

18 ℓ-进上同调和有限性定理一瞥

我们来定义非挠层的上同调!

定义 18.1. *设 X 是概形且 ℓ 是 (异于概形点剩余类域特征的) 素数, 定义 ℓ-进上同调为 $\mathbb{Z}_\ell$-模*

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) := \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}).$$

可以扩展到 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) := H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

引理 18.2. *设 $M = \varprojlim_n M_n$ 其中 M_n 是有限 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, 则 M 为有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$-模当且仅当 $M/\ell M$ 有限.*

证明. 如果 M 为有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$-模则显然 $M/\ell M$ 有限. 反之假设 $M/\ell M$ 有限, 要证明 M 为有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$-模. 我们断言典范映射 $\gamma : M \to \widehat{M} := \varprojlim_n M/\ell^n M$ 是同构.

因为 $\ell^n M$ 在 Hausdorff 空间 M 内紧, 故闭集. 而 $\gamma(M)$ 在 $\widehat{M}$ 内稠密且为紧集的像, 故 γ 是满射, 因此只需要证明 γ 是单的. 注意到 $\ker\gamma = \bigcap_{n=0}^{\infty} \ell^n M$, 故单射是显然的, 因此断言成立.

去连续 $\mathbb{Z}_\ell$-线性满射 $\mathbb{Z}_\ell^{\oplus r} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{\oplus r} \twoheadrightarrow M/\ell M$, 根据 Nakayama 引理不难提升到满射

$$\mathbb{Z}_\ell^{\oplus r} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^{\oplus r} \twoheadrightarrow M/\ell^n M.$$

故类似断言证明的拓扑叙述得到连续满射 $\mathbb{Z}_\ell^{\oplus r} \twoheadrightarrow \widehat{M}$, 因此成立. □

定理 18.3 (有限性定理)**.** *设 X 是可分闭域 k 上的紧合概形, 则对于任何 i 都有 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 是有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$-模.*

证明. 根据上述引理, 只需证明有正合列

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\ell} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

考虑图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \ell\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \ell\uparrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \ell^{n-1}\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} & & & &
\end{array}$$

为两个短正合列. 我们记上下的短正合列为 (1) 而左右走向的正合列为 (2). 首先注意到 $\varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, \ell^{n-1}\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) = 0$(因为转移映射全是 0), 根据短正合列 (1) 得到

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \cong \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, \ell^{n-1}\ell\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}).$$

再根据正合列 (2) 得到

$$\cdots \to H^i_{\text{ét}}(X, \ell\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\ell} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to \cdots.$$

取极限即可 (不难验证, 见 [27] 引理 10.1.3). □

19 比较定理

19.1 常值层上同调/经典 de Rham 上同调-奇异比较定理

定理 19.1 (常值层-奇异上同调比较)**.** *设 X 是局部可缩拓扑空间, 则对任何交换环 G 都有典范同构*

$$H^i_{\text{sing}}(X,G)\cong H^i(X,\underline{G}).$$

证明. (摘自 [38] 定理 4.47) 定义层

$$\mathscr{C}^q_{\text{sing}}:=\Big(U\mapsto C^q_{\text{sing}}(U,G)\Big)^\sharp$$

及自然的映射 $\partial:\mathscr{C}^q_{\text{sing}}\to\mathscr{C}^{q+1}_{\text{sing}}$.

• **步骤 1.** 证明有预解 $0\to\underline{G}\to\mathscr{C}^*_{\text{sing}}$.

这是因为 X 局部可缩, 则 $\mathscr{C}^*_{\text{sing}}$ 在非零指标处正合. 又因为 X 局部道路连通, 则若 U 可缩, 对 $f\in C^q_{\text{sing}}(U,G)$ 有道路 α 连接任意两个点 $x,y\in U$, 故 $0=\partial f(\alpha)=f(\partial\alpha)=f(x)-f(y)$, 故局部常值, 则

$$\ker(\partial:\mathscr{C}^0_{\text{sing}}\to\mathscr{C}^1_{\text{sing}})\cong\underline{G},$$

因此成立.

• **步骤 2.** 此预解 $0\to\underline{G}\to\mathscr{C}^*_{\text{sing}}$ 关于 $\Gamma(X,-)$ 零调.

不难验证预层 $\Big(U\mapsto C^q_{\text{sing}}(U,G)\Big)$ 是松弛的, 而且我们断言

$$\Gamma(U,\mathscr{C}^q_{\text{sing}})\cong C^q_{\text{sing}}(U,G)/C^q_{\text{sing}}(U,G)_0,$$

其中 $C^q_{\text{sing}}(U,G)_0\subset C^q_{\text{sing}}(U,G)$ 由这样的 α 构成: 满足存在 U 的开覆盖 $\mathfrak{V}$ 使得对所有的 $V\in\mathfrak{V}$ 都有 $\alpha|_{C^q_{\text{sing}}(V,G)}=0$. 事实上构造同态 $C^q_{\text{sing}}(U,G)\to\Gamma(U,\mathscr{C}^q_{\text{sing}})$ 为 $f\mapsto f^\sharp$. 事实上根据定义不难得到同态的核为 $C^q_{\text{sing}}(U,G)_0$. 满射也不难, 取 $g\in\Gamma(U,\mathscr{C}^q_{\text{sing}})$, 存在开覆盖 $\{U_i\}$ 和 $g_i\in C^q_{\text{sing}}(U_i,G)$ 使得 $g|_{U_i}=g_i$. 定义

$$g':=\alpha\mapsto\begin{cases} g_i(\alpha) & \text{Im}\alpha\subset U_i,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

即可得到结果, 因此成立.

• **步骤 3.** 完成证明.

根据步骤 2 得到 $H^q(X,\underline{G})=H^q\Gamma(X,\mathscr{C}^*_{\text{sing}})$. 因此只需证明

$$\Gamma(U,\mathscr{C}^*_{\text{sing}})=C^*_{\text{sing}}(U,G)/C^*_{\text{sing}}(U,G)_0\sim_{\text{qis}}C^*_{\text{sing}}(U,G)$$

即可. 这是纯代数拓扑的, 对 X 的开覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\}$, 定义复形 $C^{\mathfrak{U}}_*(X,G)$ 为

$$C^{\mathfrak{U}}_q(X,G)=\{\sigma:\Delta^q\to X:\text{Im}\sigma\subset\text{某个}U_i\}.$$

根据 [19] 第 178 页的结论, 我们有链同伦 $C^{\mathfrak{U}}_*(X,G)\sim_{\text{ChainHomotopy}}C_{*,\text{sing}}(X,G)$, 因此取对偶得到同伦

$$\pi_{\mathfrak{U}}:C^*_{\text{sing}}(X,G)\sim_{\text{ChainHomotopy}}C^{\mathfrak{U},*}_{\text{sing}}(X,G).$$

故有正合列 $0\to\ker\pi_{\mathfrak{U}}\to C^*_{\text{sing}}(X,G)\to C^{\mathfrak{U},*}_{\text{sing}}(X,G)\to 0$, 其中 $\ker\pi_{\mathfrak{U}}$ 零调. 对覆盖取余极限得到结论. □

定理 19.2 (经典 de Rham-奇异上同调比较). *对流形 M 和复流形 X, 我们有*

$$H^i_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \cong H^i_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R}), \quad H^i_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C}) \cong H^i_{\mathrm{sing}}(X,\mathbb{C}).$$

证明. 只需证明 $H^i_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \cong H^i_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R})$ 即可. 首先我们需要如下比较定理:

• **步骤 0. 光滑奇异上同调比较.**(参考 [28] 定理 18.7) 定义光滑奇异单形为 $\sigma : \Delta^p \to M$ 满足在每个点都有光滑扩展, 定义出光滑奇异上同调群 $H^p_{\mathrm{sm}}(M,\mathbb{R})$ 且有自然同构

$$H^p_{\mathrm{sm}}(M,\mathbb{R}) \cong H^p(M,\mathbb{R}).$$

回到命题. 定义同态 (de Rham 同态) 为

$$\gamma_k : H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R}) \to H^p_{\mathrm{sm}}(M,\mathbb{R}) \cong H^p(M,\mathbb{R}), [\omega] \mapsto \left([c] \mapsto \int_c \omega \right).$$

根据 Stokes 定理不难得知同态良定义. 接下来的证明都是经典的 MV-讨论, 为了方便我们称满足 γ_k 皆为同构的空间称为 de Rham 空间, 称一个开覆盖为 de Rham 覆盖, 如果其每一个元素都是 de Rham 的且有限交也是 de Rham 的.

• **步骤 1.** 欧氏空间内的凸开子集都是 de Rham 空间.

平凡, 略去讨论.

• **步骤 2.** 若 M 有有限的 de Rham 覆盖, 则 M 也是 de Rham 空间.

标准的 MV-讨论, 简述如下 (不会的读者请复习代数拓扑): 先对两个空间的覆盖证明. 列出两种上同调的 MV 序列, 不难证明交换性. 根据 5 引理即可得到证明. 对于一般情况对覆盖的空间个数归纳即可.

• **步骤 3.** 若 M 有 de Rham 覆盖构成的基, 则 M 也是 de Rham 空间.

假设 M 有 de Rham 空间构成的基 $\mathfrak{M}$, 考虑光滑函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 满足对任何 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $f^{-1}((-\infty, c])$ 是紧集 (存在性参考 [28] 命题 2.2.8). 定义

$$A_m := \{q \in M : m \leq f(q) \leq m+1\}, A'_m := \{q \in M : m - 1/2 < f(q) < m + 3/2\}.$$

取 $\mathfrak{M}$ 内元素覆盖 A_m 且在 A'_m 内, 因为 A_m 紧, 故可取有限覆盖. 设 B_m 是这些元素的并, 根据步骤 2 得知 B_m 是 de Rham 的. 注意到 $B_m \subset A'_m$ 且当 $l = m-1, m$ 或 $m+1$ 时 $B_m \cap B_l \neq \emptyset$, 设

$$U = \bigcup_{m=2a+1, a\in\mathbb{Z}} B_m, V = \bigcup_{m=2a, a\in\mathbb{Z}} B_m,$$

则由于其都为 de Rham 空间的无交并, 因此也是 de Rham 的. 而 $U \cap V = \coprod_{m\in\mathbb{Z}} B_m \cap B_{m+1}$, 因此也 de Rham 的. 再次运用 MV-讨论得到结论.

• **步骤 4.** 所有 $\mathbb{R}^n$ 的开子集都是 de Rham 空间, 因此所有光滑流形也是.

运用步骤 3 和步骤 1 可以得到所有 $\mathbb{R}^n$ 的开子集都是 de Rham 空间, 而所有光滑流形都有 $\mathbb{R}^n$ 的开子集组成的基, 再次根据步骤 3 得到结论. □

19.2 GAGA 一瞥

基本定义

GAGA(Géométrie algébrique et géométrie analytique) 是横跨复几何和代数几何的桥梁, 是非常重要的结论之一. 最初的 GAGA 来源于 J.P.Serre 的奠基性论文 [36](后世有一本很基础的书 [32] 讲这个), 他解决了复射影簇的情况. 而我们聚焦的是著作 [18] 里的推广版本, 其推广到了一般的紧合 $\mathbb{C}$ 概形上. 事实上 GAGA 也早已有了更多的发展, 例如刚性几何里的刚性 GAGA, 还有代数叠上的 GAGA 等. 这里我们参考 Yan Zhao 的笔记来对 GAGA 做一个简单的介绍, 大部分定理也不给出证明.

定义 19.3. *对开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 和其上的全纯函数 $f_1, ..., f_k$, 设其定义的凝聚理想为 $\mathscr{I}$. 定义仿射解析空间 $(X, \mathscr{O}_X^{\mathrm{Hol}})$ 为*

$$X = \{y \in U : f_1(y) = \cdots = f_k(y) = 0\} \subset U$$

和 $i^{-1}\mathscr{O}_U^{\mathrm{Hol}}/\mathscr{I}$, 其中 $i : X \to U$.

一个解析空间 $(X, \mathscr{O}_X^{\mathrm{Hol}})$ 为局部环层空间使得 X 是 Hausdorff 的且存在开覆盖使得局部上同构于仿射解析空间.

注 19.4. *对于正则函数层 $\mathscr{O}_X^{\mathrm{Reg}} \subset \mathscr{O}_X^{\mathrm{Hol}}$, 可以证明 $\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Reg}} \to \mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Hol}}$ 忠实平坦且有同构 $\widehat{\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Reg}}} \to \widehat{\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Hol}}}$, 见 [36]. 进而得到 $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Hol}}$ 忠实平坦.*

定义 19.5. *给定 $\mathbb{C}$ 上的局部有限型概形 X 和其有理点空间 $(X(\mathbb{C}), \mathscr{O}_X|_{X(\mathbb{C})})$, 若局部上为 $U = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/I$, 定义 $X(\mathbb{C})$ 局部上赋予拓扑为 $\mathbb{C}^n$ 的子空间拓扑且为 I 内元素的零点, 记为 X^{an}, 设局部上 $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}}|_{U^{\mathrm{an}}} := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}^{\mathrm{Hol}}/I\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}^{\mathrm{Hol}}$, 从而得到解析化 $(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}})$.*

因此我们有典范映射 $\phi_X : X \to X^{\mathrm{an}}$ 为 $X^{\mathrm{an}} \to X(\mathbb{C}) \subset X$ 且层映射为 $\phi^{-1}\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}}$ 为 $f \mapsto f \circ \phi_X$.

命题 19.6. *给定 $\mathbb{C}$ 上的局部有限型概形 X, 考虑函子*

$$\Phi_X : \mathrm{AnSp} \to \mathrm{Sets}, \mathcal{X} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X)$$

其中后者为局部环层空间的映射. 则 Φ_X 被 X^{an} 表示.

证明思路. 不妨设 X 仿射, 注意到:

(i) 若 $X \subset Y$ 是开子概形且 Y 满足该性质, 则 X 也满足;

(ii) 若 $X \subset Y$ 是闭子概形且 Y 满足该性质, 则 X 也满足;

(iii) 有 $(X \times Y)^{\mathrm{an}} \cong X^{\mathrm{an}} \times Y^{\mathrm{an}}$.

回到命题. 故不妨设 $X = \mathbb{A}^1$, 注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, \mathbb{A}^1) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x], \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{Hol}})) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x\}, \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{Hol}})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}),\end{aligned}$$

即可. □

推论 19.7. *对复局部有限型概形映射 $f : X \to Y$ 而言, 可以唯一提升为 $f^{\mathrm{an}} : X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ 满足 $f \circ \phi_X = \phi_Y \circ f^{\mathrm{an}}$. 另外我们还有 $(X \times_Z Y)^{\mathrm{an}} \cong X^{\mathrm{an}} \times_{Z^{\mathrm{an}}} Y^{\mathrm{an}}$.*

注 19.8. *事实上大部分 X 和 f 本身的性质都可以遗传到 X^{an} 和 f^{an} 上, 参考 [18]. 例如平展对应局部同构, 光滑对应光滑. 事实上还有 $\mathrm{Hom}_S(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}, Y^{\mathrm{an}})$.*

定义 19.9. *对于 $\phi_X : X^{\mathrm{an}} \to X$ 和凝聚层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, 定义其解析化为*

$$\mathscr{F}^{\mathrm{an}} := \phi_X^* \mathscr{F} = \phi_X^{-1} \mathscr{F} \otimes_{\phi_X^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}}.$$

因此得到函子 $\phi_X^* : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}}), \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$.

注 19.10. *(i) 有伴随函子 $(\phi_X^*, \phi_{X,*})$;*

(ii) 函子 ϕ_X^* 是正合, 忠实且保守的. 正合性不难由 ϕ_X^{-1} 正合且 $\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Reg}} \to \mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Hol}}$ 平坦得到. 忠实性由 $X(\mathbb{C}) \subset X$ 稠密且 $\phi_X^{-1}\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}}$ 忠实平坦得到, 保守性根据忠实性和平坦性得到.

主要定理

首先给出一些构造. 考虑图表

$$\begin{tikzcd} X^{\mathrm{an}} \arrow[r, "f^{\mathrm{an}}"] \arrow[d, "\phi_X"'] & Y^{\mathrm{an}} \arrow[d, "\phi_Y"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

任取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, 由 ϕ_Y^* 正合, 我们有

$$\begin{aligned} (Rf_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} &= \phi_Y^* Rf_* \mathscr{F} \to \phi_Y^* Rf_* \phi_{X,*} \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \\ &\to \phi_Y^* R(f \circ \phi_X)_* \mathscr{F}^{\mathrm{an}} = \phi_Y^* R(\phi_Y \circ f^{\mathrm{an}})_* \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \\ &= R(\phi_Y^* \circ \phi_Y \circ f^{\mathrm{an}})_* \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \to Rf_*^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}, \end{aligned}$$

故得到

$$\theta^i : (R^i f_* \mathscr{F})^{\mathrm{an}} \to R^i f_*^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

定理 19.11 (GAGA 第一定理)**.** *设 $f : X \to Y$ 是局部有限型 $\mathbb{C}$-概形间的紧合映射, 任取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ 和 $i \geq 0$ 都有*

$$\theta^i : (R^i f_* \mathscr{F})^{\mathrm{an}} \cong R^i f_*^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

证明思路. 对于一般情况需要用 lemme de dévissage 和 Chow 引理, 我们略去, 参考 [18] 定理 XII.4.2. 我们只给出射影的证明. 首先闭浸入的情况不难验证茎得到, 故假设 $X = \mathbb{P}_Y^n$. 不难证明 $\mathscr{F} = \mathscr{O}(n)$ 的情况 (先 $\mathscr{O}_X$, 再归纳法证明 $\mathscr{O}(n)$). 对一般的 $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, 不难得知存在正合列

$$0 \to \mathscr{G} \to \bigoplus \mathscr{O}_X(n_i) \to \mathscr{F} \to 0.$$

然后用凝聚层的秩归纳, 再用长正合列即可. □

定理 19.12 (GAGA 第二定理)**.** *设 X 是紧合 $\mathbb{C}$ 概形和典范映射 $\phi_X : X \to X^{\mathrm{an}}$, 则函子*

$$\phi_X^* : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}}), \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$$

是范畴等价.

证明. 我们只证明满忠实的, 本质满性比较复杂, 参考 [18] 定理 XII.4.4. 根据定理19.11, 对任何 $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathrm{Coh}(X)$ 都有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong H^0(X, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \\
&\cong H^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})^{\mathrm{an}}) \\
&\cong H^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}^{\mathrm{Hol}}_{X^{\mathrm{an}}}}(\mathscr{F}^{\mathrm{an}}, \mathscr{G}^{\mathrm{an}})) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}^{\mathrm{Hol}}_{X^{\mathrm{an}}}}(\mathscr{F}^{\mathrm{an}}, \mathscr{G}^{\mathrm{an}})
\end{aligned}$$

其中最后一个等式因为凝聚性和 $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}^{\mathrm{Hol}}_{X,x}$ 平坦. □

推论 19.13 (推广 Chow 定理)**.** *若 X 是分离局部有限型 $\mathbb{C}$ 概形, 则 X^{an} 的任何闭解析子空间都是 X 闭子概形的解析化.*

证明. 由于是局部的, 不妨设其有限型, 根据 Nagata 紧化不妨设其紧合. 然后根据定理19.12即可得到凝聚理想的对应. □

19.3 平展-奇异比较定理

设 $(X^{\mathrm{an}})_{\text{ét}}$ 是解析空间间的局部同构构成的景, 对应意象为 $\text{Ét}(X^{\mathrm{an}})$. 类似于 GAGA 我们定义函子 $\phi_{X,*} : \text{Ét}(X^{\mathrm{an}}) \to \text{Ét}(X)$ 和 $\phi_X^* : \text{Ét}(X) \to \text{Ét}(X^{\mathrm{an}})$ 如下.

定义 $\phi_{X,*} : \mathscr{G} \mapsto (U' \mapsto \mathscr{G}((U')^{\mathrm{an}}))$ 和

$$\phi_X^* : \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{an}} := \big(U \mapsto \varinjlim \mathscr{F}(U' \to X)\big)^\sharp,$$

其中余极限取自如下交换图:

$$\begin{array}{ccc}
U & \longrightarrow & U' \\
\downarrow & & \downarrow \\
X^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\phi_X} & X
\end{array}$$

其中 $U \to X^{\mathrm{an}}$ 平展且 $U' \to X$ 局部同构. 不难验证有伴随性 $(\phi_X^*, \phi_{X,*})$ 且 ϕ_X^* 正合.

考虑代数 $\mathbb{C}$ 概形和交换图

$$\begin{array}{ccc}
X^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\phi_X} & X \\
\downarrow{\scriptstyle f^{\mathrm{an}}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
S^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\phi_S} & S
\end{array}$$

任取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和 $V \in X_{\text{ét}}$ 得到 $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}^{\mathrm{an}}(V^{\mathrm{an}})$. 对平展映射 $U \to S$ 取 $V = f^{-1}(U)$ 得到 $f_*\mathscr{F} \to \phi_{S,*}(f^{\mathrm{an}}_{\text{ét},*}\mathscr{F}^{\mathrm{an}})$, 根据伴随性得到 $(f_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \to f^{\mathrm{an}}_{\text{ét},*}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$. 根据 ϕ_X^* 正合, 不难诱导

$$(Rf_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \to R_{\text{ét}} f^{\mathrm{an}}_* \mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

若 f 分离有限型, 同理诱导

$$(Rf_!\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \to R_{\text{ét}} f_!^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

定理 19.14. *设 $f: X \to S$ 是代数 $\mathbb{C}$ 概形间的分离有限型映射, 则有:*

(i) 对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$, 都有

$$(Rf_!\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \cong R_{\text{ét}} f_!^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \cong R f_!^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}};$$

(ii) 对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}_{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}})$, 都有

$$(Rf_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \cong R_{\text{ét}} f_*^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \cong R f_*^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

证明. (i)(ii) 的前一个同构略去, 参考 [17]XVI.4 和 [12]I.11.6. 后一个同构是因为局部同构根据反函数定理得知存在开覆盖是其加细, 因此成立. □

推论 19.15 (平展-奇异比较定理)**.** *对于代数 $\mathbb{C}$ 概形 X 和有限 Abel 群 G, 我们有*

$$H^i_{\text{ét}}(X, \underline{G}) \cong H^i_{\mathrm{sing}}(X^{\mathrm{an}}, G), \quad H^i_{c,\text{ét}}(X, \underline{G}) \cong H^i_{c,\mathrm{sing}}(X^{\mathrm{an}}, G).$$

证明. 根据定理19.14和定理19.1即可得到结论. □

19.4 其他比较定理

定义 19.16 (代数 de Rham 上同调)**.** *设 $f: X \to S$ 是概形映射, 考虑 de Rham 复形 $\Omega^*_{X/S}$ 为 $\Omega^q_{X/S} = \bigwedge^q \Omega_{X/S}$ 且微分映射为局部定义成*

$$d: b_0 db_1 \wedge \cdots \wedge db_q \mapsto ab_0 \wedge db_1 \wedge \cdots \wedge db_q.$$

定义 X 在 S 上的代数 de Rham 上同调为

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/S) := H^i(R\Gamma(X, \Omega^*_{X/S})).$$

定理 19.17 (经典-代数 de Rham 比较)**.** *若 X 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑紧合簇, 则*

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \cong H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}).$$

证明. 此时 X^{an} 是紧复流形, 根据 Poincaré 引理知有预解 $0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \Omega^*_{X^{\mathrm{an}}}$. 因此

$$H^i(X^{\mathrm{an}}, \underline{\mathbb{C}}) = R^i\Gamma(X^{\mathrm{an}}, \Omega^*_{X^{\mathrm{an}}}).$$

根据 GAGA 得到

$$R^i\Gamma(X^{\mathrm{an}}, \Omega^*_{X^{\mathrm{an}}}) = R^i\Gamma(X, \Omega^*_X) = H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}).$$

由于再根据定理19.2和定理19.1得到

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = H^i_{\mathrm{sing}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = H^i(X^{\mathrm{an}}, \underline{\mathbb{C}}) = H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}),$$

即可得到结论. □

20 上同调纯性和 Gysin 序列

20.1 光滑对

定义 20.1. 对概形 S, 定义光滑 S-对 (Z,X) 为光滑 S-概形间的闭嵌入. 一般考虑如下图表:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "h"'] & X \arrow[d, "f"] & U \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

其中 i 是闭浸入且 $j : U := X\backslash Z \to X$ 是开浸入. 称光滑 S-对 (Z,X) 是余维数 c 的, 如果对任何 $s \in S$ 都有纤维 Z_s 在 X_s 里纯余维数 c.

光滑 S-对之间的态射 $\phi : (Z',X') \to (Z,X)$ 定义为 S-映射 $\phi : X' \to X$ 且满足 $Z' = Z \times_X X'$.

注 20.2. 对于余维数 c 的光滑 S-对 (Z,X) 和任意 $z \in Z$, 存在开邻域 $z \in V \subset X$ 使得有平展映射

$$V \xrightarrow{\text{ét}} \mathbb{A}^m_S = \underline{\mathrm{Spec}}_S \mathscr{O}_S[T_1,...,T_m]$$

使得 $Z \cap V$ 为 $\underline{\mathrm{Spec}}_S \mathscr{O}_S[T_1,...,T_m]/(T_{m-c+1},...,T_m)$ 的逆像. 因此局部上可以平展地写成标准光滑 S-对 $(\mathbb{A}^{m-c}_S, \mathbb{A}^m_S)$.

20.2 上同调纯性和 Gysin 序列 I——一般情况

考虑一般的光滑对如下图

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "h"'] & X \arrow[d, "f"] & U \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

其中 i 是闭浸入且 $j : U := X\backslash Z \to X$ 是开浸入.

定理 20.3 (上同调纯性)**.** 对于余维数 c 的光滑 S-对 (Z,X), 则对任何局部常值挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有 *(注 7.18)*:

$$R^r i^! \mathscr{F} = \begin{cases} i^{-1}\mathscr{F}, & i = 2c; \\ 0, & i \neq 2c. \end{cases}$$

等价的, 我们有 $\mathscr{F} \cong j_* j^{-1}\mathscr{F}$, 当 $r \neq 0, 2c-1$ 时有 $R^r j_* j^{-1}\mathscr{F} = 0$ 且

$$i^{-1} R^{2c-1} j_* j^{-1} \mathscr{F} = i^{-1}\mathscr{F}.$$

简要证明. 等价性不难根据正合列

$$\cdots \to \mathscr{E}xt^i_X(i_* i^{-1}\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{F}) \to \mathscr{E}xt^i_X(\underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{F}) \to \mathscr{E}xt^i_X(j_! j^* \underline{\mathbb{Z}}, \mathscr{F}) \to \cdots$$

得到. 于是只需要证明某一个即可.

• **步骤 1.** 先考虑 $c=1$ 的情况, 划归到 $X=\mathbb{P}^1_S$ 且 Z 为无穷远点且 $\mathscr{F}=\Lambda:=\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

因为定理是平展局部的, 不妨设 (Z,X) 为标准光滑 S-对 $(\mathbb{A}^{m-1}_S,\mathbb{A}^m_S)$, 将 S 替换为 $\mathbb{A}^{m-1}_S$, 故不妨设 $X=\mathbb{A}^1_S=\underline{\mathrm{Spec}\mathscr{O}_S[T]}$ 且 $Z=V(T)$. 根据定理7.20, 不难得到可以假设 $X=\mathbb{P}^1_S$ 且 Z 为无穷远点. 显然可以不妨设 $\mathscr{F}=\Lambda:=\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

• **步骤 2.** 证明 $c=1$ 的情况.

这里需要几个在光滑基变换里有用的概念 (n-零调等), 我们略去. 参考 [29] 定理 VI.5.1. 我们可以得到 $g_*\Lambda=\Lambda$ 且当 $k>0$ 时 $R^kg_*\Lambda=0$. 而且当 $i>0$ 时 $\mathrm{supp}(R^ij_*\Lambda)\subset Z$ 且 $\Lambda=j_*j^{-1}\Lambda$. 因此对 Leray 谱序列

$$E_2^{i,j}:=R^if_*R^jj_*\Lambda\Rightarrow R^{i+j}g_*\Lambda$$

得到 $E_2^{i,0}=R^if_*\Lambda$ 且当 $i>0,j>0$ 时 $E_2^{i,j}=0$. 因此谱序列得到当 $i>0$ 时

$$f_*j_*\Lambda=\Lambda, E^{0,i}=R^{i+1}f_*\Lambda.$$

根据定理14.16得知 $R^{i+1}f_*\Lambda$ 也局部常值且茎为 $H^{i+1}_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_k,\Lambda)$. 根据定理10.11得到当 $i\neq-1,1$ 时 $H^{i+1}_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_k,\Lambda)=0$. 因此得到 $c=1$ 的证明.

• **步骤 3.** 证明一般情况.

只需归纳法, 平展局部下余维数 c 的光滑 S-对 (Z,X) 可以嵌入如下

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

其中 (Z,Y) 和 (Y,X) 分别是余维数 $c-1$ 和 1 的光滑 S-对, 运用谱序列 $R^iu^!R^jv^!\mathscr{F}\Rightarrow R^{i+j}i^!\mathscr{F}$ 不难得到结论. □

注 20.4. 若 $\mathscr{F}$ 是 $\Lambda:=\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$-模且 n 在 X 内可逆, 对任何平展映射 $V\to X$ 和 $s\in\mathscr{F}(V)$ 会诱导 $\Lambda\to\mathscr{F}|_V$, 进而得到 $H^{2c}_{Z\times_XV,\text{ét}}(V,\Lambda)\to H^{2c}_{Z\times_XV,\text{ét}}(V,\mathscr{F}|_V)$, 故得到

$$\mathscr{F}\to\mathscr{H}om_X(R^{2c}i^!\Lambda,R^{2c}i^!\mathscr{F}).$$

类似于定理的证明, 不难证明这是同构! 假设 $T_{Z/X}:=R^{2c}i^!\Lambda\cong\Lambda$, 故局部自由, 则我们有典范的同构

$$i^{-1}\mathscr{F}\otimes T_{Z/X}\cong R^{2c}i^!\mathscr{F}.$$

推论 20.5 (Gysin 序列)**.** 对于余维数 c 的光滑 S-对 (Z,X), 若 $\mathscr{F}$ 是 $\Lambda:=\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$-模且 n 在 X 内可逆, 则当 $0\le j\le 2c-2$ 时有 $R^jf_*\mathscr{F}\cong R^jg_*(\mathscr{F}|U)$, 且有正合列

$$0\to R^{2c-1}f_*\mathscr{F}\to R^{2c-1}g_*(\mathscr{F}|_U)\to h_*(i^{-1}\mathscr{F}\otimes T_{Z/X})\to R^{2c}f_*\mathscr{F}\to\cdots$$

$$\cdots\to R^{j-1}g_*(\mathscr{F}|_U)\to R^{j-2c}h_*(i^{-1}\mathscr{F}\otimes T_{Z/X})\to R^jf_*\mathscr{F}\to\cdots.$$

证明. 由 $i^{-1}\mathscr{F}\otimes T_{Z/X}\cong R^{2c}i^!\mathscr{F}$ 得到

$$H^j_{\text{ét}}(Z,i^{-1}\mathscr{F}\otimes T_{Z/X})\cong H^j_{\text{ét}}(Z,R^{2c}i^!\mathscr{F}).$$

根据上同调纯性得到当 $j \neq 2c$ 时 $R^j i^! \mathscr{F} = 0$, 故谱序列得到

$$H^j_{\text{ét}}(Z, R^{2c} i^! \mathscr{F}) \cong H^{j+2c}_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

根据命题7.19得到

$$\cdots \to H^{j-2c}_{\text{ét}}(Z, i^{-1}\mathscr{F} \otimes T_{Z/X}) \to H^j_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^j_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \to \cdots.$$

替换 S 为平展 S-概形即可得到相对版本的结论. □

20.3 基本类

在本节假设 $S = \operatorname{Spec} k$ 且 k 可分闭域且 n 和 $\operatorname{char}(k)$ 互素, 概形均为 S 上的光滑概形, 层 $\mathscr{F}$ 均为 $\Lambda := \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$-模. 依旧考虑余 c 维光滑对如下图

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "h"'] & X \arrow[d, "f"] & U \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

其中 i 是闭浸入且 $j : U := X \backslash Z \to X$ 是开浸入. 根据上同调纯性和谱序列得到

$$H^i_{\text{ét}}(Z, R^{2c} i^! \mathscr{F}) \cong H^{2c+i}_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

取 $i = 0$ 得到 $\Gamma(Z, R^{2c} i^! \mathscr{F}) \cong H^{2c}_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 定义 $\Lambda(r) := \boldsymbol{\mu}_n \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\mu}_n$, 则我们事实上可以取 $s_{Z/X} \in \Gamma(Z, R^{2c} i^! \Lambda(c))$ 使得其诱导同构 $\Lambda \to H^{2c}_{Z,\text{ét}}(X, \Lambda(c))$, 我们称其为基本类.

定理 20.6. *余 c 维光滑对上存在唯一 $(Z, X) \mapsto s_{Z/X}$, 其中*

$$s_{Z/X} \in \Gamma(Z, R^{2c} i^! \Lambda(c)),$$

使得

(a) 基本类 $s_{Z/X}$ 生成 $\Gamma(Z, R^{2c} i^! \Lambda(c))$;
(b) 若考虑光滑 S-对之间的态射 $\phi : (Z', X') \to (Z, X)$, 则 $\phi^* s_{Z/X} = s_{Z'/X'}$;
(c) 若有

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \arrow[dl, "u"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

其中 (Z, Y), (Y, X) 和 (Z, X) 分别是余维数 a, b, c 的光滑 S-对, 则 $s_{Z/Y} \otimes s_{Y/X} = s_{Z/X}$ 且满足如下典范同构:

$$\text{谱序列诱导同构} \Rightarrow H^{2a}_{Z,\text{ét}}(Y, R^{2b} u^! \Lambda(c)) \cong H^{2c}_{Z,\text{ét}}(X, \Lambda(c));$$
$$\text{自由诱导同构} \Rightarrow H^{2a}_{Z,\text{ét}}(Y, R^{2b} u^! \Lambda(c)) \cong H^{2a}_{Z,\text{ét}}(Y, \Lambda(a)) \otimes H^{2b}_{Y,\text{ét}}(X, \Lambda(b)).$$

证明. 忽略, 证明参考 [29] 定理 VI.6.1. □

推论 20.7. *考虑余 c 维光滑对 (Z, X), 则 $T_{Z/X} := R^{2c} i^! \Lambda$ 典范同构于 $\Lambda(-c)$.*

证明. 将定理20.6(c) 的第一个同构两边张量 $\Lambda(-c)$ 即可. □

20.4 上同调纯性和 Gysin 序列 II——特殊情况

固定可分闭域 k, 设 $S = \operatorname{Spec} k$, 设 $\Lambda := \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ 且 n 都可逆.

定理 20.8 (上同调纯性). *考虑余 c 维光滑对 (Z, X), 则对于局部常值 Λ-模 $\mathscr{F}$ 有*

$$R^r i^! \mathscr{F} = \begin{cases} i^{-1}\mathscr{F}(-c), & i = 2c; \\ 0, & i \neq 2c. \end{cases}$$

因此谱序列得到对任何 $r \geq 0$ 都有典范同构 $H^{r-2c}_{\text{ét}}(Z, \mathscr{F}(-c)) \cong H^r_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F})$.

证明. 根据定理20.3和推论20.7即可. □

推论 20.9 (Gysin 序列和 Gysin 映射). *考虑余 c 维光滑对 (Z, X), 则对于局部常值 Λ-模 $\mathscr{F}$ 有当 $0 \leq j \leq 2c-2$ 时有 $H^j_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^j_{\text{ét}}(U, \mathscr{F})$, 且有正合列*

$$0 \to H^{2c-1}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^{2c-1}_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U) \to H^0(Z, i^{-1}\mathscr{F}(-c)) \to H^{2c}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^{j-2c}_{\text{ét}}(Z, i^{-1}\mathscr{F}(-c)) \to H^j_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^j_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U) \to \cdots.$$

我们称 $i_* : H^j_{\text{ét}}(Z, i^{-1}\mathscr{F}(-c)) \to H^{j+2c}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 为 Gysin 映射.

证明. 根据推论20.5和推论20.7即可. □

例 20.10. *固定代数闭域 k 且 n 在 k 内可逆.*

(i) 计算 $\mathbb{A}^m_k$ 的上同调. 根据 Kummer 列诱导长正合列和 $\operatorname{Pic}(\mathbb{A}^1) = 0$ 不难得到当 $r > 0$ 时 $H^r_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_k, \boldsymbol{\mu}_n) = 0$. 根据 Künneth 公式17.1得到当 $r > 0$ 时 $H^r_{\text{ét}}(\mathbb{A}^m_k, \Lambda) = 0$.

(ii) 计算 $\mathbb{P}^m_k$ 的上同调. 对 $(\mathbb{P}^{m-1}_k, \mathbb{P}^m_k)$ 用 Gysin 序列和归纳法不难得到

$$H^r_{\text{ét}}(\mathbb{P}^m_k, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda(-r/2), & r\text{为偶数且} \leq 2m, \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

21 链映射

我们假设本节读者会一些基本的相交理论, 例如 [13] 的前几章. 这一节我们均假设是代数闭域 k 上的光滑簇 (当然其闭子概形不假设光滑性). 依旧假设 $\Lambda = \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ 其中 n 在 k 内可逆.

21.1 半纯性和链映射

假设 $H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda) := \bigoplus_r H^{2r}_{\text{ét}}(X, \Lambda(r))$, 考虑杯积17.2不难得到

$$H^r_{\text{ét}}(X, \Lambda(\lambda)) \otimes H^s_{\text{ét}}(X, \Lambda(\mu)) \xrightarrow{-\cup-} H^{r+s}_{\text{ét}}(X, \Lambda(\lambda + \mu)).$$

因此得到反交换的分次环 $H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)$. 我们的最终目的是要定义同态 $\mathrm{cl}_X : \mathrm{CH}^*(X) \to H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)$.

首先考虑光滑余 r 维子簇 $Z \in C^r(X)$, 考虑 Gysin 映射

$$i_* : \Lambda = H^0_{\text{ét}}(Z, \Lambda) \to H^{2r}_{\text{ét}}(X, \Lambda(r)),$$

定义 $\mathrm{cl}_X(Z) := i_*(1_Z) \in H^{2r}_{\text{ét}}(X, \Lambda(r))$. 现在我们要考虑不见得光滑的情况. 为此需要如下结论:

引理 21.1 (半纯性)**.** 设 Z 是 X 的任意余维数 r 的闭子簇, 则对任何 $i < 2r$ 都有

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X,\Lambda) = 0.$$

证明. 若 Z 光滑, 若 $i < 2r$ 则根据上同调纯性20.8得到

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X,\Lambda) = H^{i-2r}_{\text{ét}}(Z,\Lambda(-r)) = 0.$$

对一般的 Z, 我们对 Z 维数做归纳. 当 $\dim Z = 0$, 则因为光滑则成立. 考虑 Z 是余维数 r 的, 取 $Y := Z_{\text{sing}}$, 则 $\dim Y < \dim Z$. 根据命题7.19的类似结论不难得到正合列

$$\cdots \to H^i_{Y,\text{ét}}(X,\Lambda) \to H^i_{Z,\text{ét}}(X,\Lambda) \to H^i_{Z\backslash Y,\text{ét}}(X\backslash Y,\Lambda) \to \cdots.$$

运用归纳法和 $Z\backslash Y$ 光滑性即可得到结论. □

通过这个结论和证明内的正合列, 我们得到同构 $H^{2r}_{Z,\text{ét}}(X,\Lambda) \cong H^{2r}_{Z\backslash Y,\text{ét}}(X\backslash Y,\Lambda)$. 因此构造 $\text{cl}_X(Z)$ 为 1_Z 在复合

$$\begin{aligned}\Lambda &\cong H^0_{\text{ét}}(Z\backslash Y,\Lambda) \cong H^{2r}_{Z\backslash Y,\text{ét}}(X\backslash Y,\Lambda(r)) \\ &\cong H^{2r}_{Z,\text{ét}}(X,\Lambda(r)) \to H^{2r}_{\text{ét}}(X,\Lambda(r))\end{aligned}$$

下的像. 因此得到

$$\text{cl}^r_X : C^r(X) \to H^{2r}_{\text{ét}}(X,\Lambda).$$

其中 $r = 1$ 情况即为 Kummer 列诱导的情况.

注 21.2. 根据基本类的构造, 不难得知 *Gysin* 映射即为基本类诱导的同构的复合

$$\Lambda \xrightarrow{s_{Z\backslash Y/X\backslash Y}} H^{2r}_{Z\backslash Y,\text{ét}}(X\backslash Y,\Lambda(r)) \cong H^{2r}_{Z,\text{ét}}(X,\Lambda(r)) \to H^{2r}_{\text{ét}}(X,\Lambda(r)).$$

因此可以定义 $\text{cl}^r_X(Z)$ 为 $s_{Z\backslash Y/X\backslash Y}$ 在上述映射的像.

命题 21.3. *(i)* 设 $f : Y \to X$ 是光滑簇之间的映射, 对于代数链 $Z \in C^r(X)$, 若任何 Z 的素链的逆像整概形, 则 $\text{cl}_Y(f^*Z) = f^{-1}\text{cl}_X(Z)$;

(ii) 若 $i : Z \to X$ 是光滑簇之间的闭浸入, 考虑 *Gysin* 映射 $i_* : H^{2s}_{\text{ét}}(Z,\Lambda(s)) \to H^{2s+2r}_{\text{ét}}(X,\Lambda(s+r))$, 则对 $W \in C^s(Z)$ 有 $i_*\text{cl}_Z(W) = \text{cl}_X(W)$;

(iii) 对任何 $W \in C^*(X), Z \in C^*(Y)$, 设投影为 p, q, 则有

$$\text{cl}_{X\times Y}(W \times Z) = p^{-1}\text{cl}_X(W) \cup q^{-1}\text{cl}_Y(Z);$$

(iv) 对任何 $W, Z \in C^*(X)$ 满足其中素链两两横截相交, 则

$$\text{cl}_X(W \cdot Z) = \text{cl}_X(W) \cup \text{cl}_X(Z).$$

证明. 不难证明, 参考 [29] 命题 9.2 – 9.5. □

21.2 Chern 类和 Chow 环

接下来介绍一种定义上同调类里的 Chern 类的方法.

命题 21.4. *设 $\mathscr{E}$ 是在 X_{Zar} 上秩 $m+1$ 局部自由层, 考虑对应的 (Grothendieck-) 射影丛 $\pi:\mathbb{P}(\mathscr{E})\to X$. 设 $\xi=\mathrm{cl}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}(\mathscr{O}(1))\in H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}(\mathscr{E}),\Lambda(1))$, 则 π^* 诱导出 $H^*_{\text{ét}}(\mathbb{P}(\mathscr{E}),\Lambda)$ 同构于基为 $1,\xi,...,\xi^m$ 的自由 $H^*_{\text{ét}}(X,\Lambda)$-模.*

证明. 忽略, 参考 [29] 命题 VI.10.1, 而 Chow 环的版本参考 [13]. □

因此存在唯一的 $c_r(\mathscr{E})\in H^{2r}_{\text{ét}}(X,\Lambda(r))$ 使得

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{m+1} c_r(\mathscr{E})\xi^{m+1-r}=0, \\ c_0(\mathscr{E})=0. \end{cases}$$

我们称 $c_r(\mathscr{E})$ 为 $\mathscr{E}$ 第 r 个 Chern 类. 而 $c(\mathscr{E}):=\sum_i c_i(\mathscr{E})$ 称为全 Chern 类, 类似的 $c_t(\mathscr{E}):=\sum_i c_i(\mathscr{E})t^i$ 称为 Chern 多项式.

命题 21.5 (Grothendieck)**.** *Chern 类有如下性质:*

(i) 若 $\pi:Y\to X$ 是光滑簇之间的映射且 $\mathscr{E}$ 是 X 向量丛, 则

$$c_r(\pi^{-1}\mathscr{E})=\pi^{-1}(c_r(\mathscr{E}));$$

(ii) 若 $\mathscr{L}$ 是 X 上线丛, 则 $c_1(\mathscr{L})$ 为 $\mathscr{L}$ 在 Kummer 列诱导的

$$\mathrm{Pic}(X)\to H^2_{\text{ét}}(X,\Lambda(1))$$

下的像;

(iii) 若 $0\to\mathscr{E}'\to\mathscr{E}\to\mathscr{E}''\to 0$ 是向量丛正合列, 则有

$$c_t(\mathscr{E})=c_t(\mathscr{E}')c_t(\mathscr{E}'').$$

证明. 参考文章 [16]. □

考虑 Grothendieck 群 $K_0(X)$, 因为 X 光滑, 故任何凝聚层都有有些长的局部自由预解, 因此有良定义的映射

$$\gamma':C^*(X)\to K_0(X),\sum_i Z_i\mapsto\sum_i[\mathscr{O}_{Z_i}].$$

考虑 $K_0(X)$ 的典范滤过为 $\cdots\subset F^rK_0X\subset F^{r-1}K_0X\subset\cdots$ 其中 F^iK_0X 为被支撑在余维数 $\geq i$ 的凝聚层生成的子群 (可以证明被 $\mathscr{O}_Z$ 生成, 其中 Z 余维数不小于 i). 定义

$$\mathrm{gr}^r K_0X:=F^rK_0X/F^{r+1}K_0X,\mathrm{gr}\,K_0X:=\bigoplus_r\mathrm{gr}^r K_0X.$$

给集合 $\mathrm{gr}\,K_0X$ 群结构为

$$[\mathscr{M}]\cdot[\mathscr{N}]:=\sum_r(-1)^r[\mathscr{T}or_r^{\mathscr{O}}(\mathscr{M},\mathscr{N})].$$

注意到 $\gamma':C^*(X)\to K_0(X)$ 保持滤过结构, 因此有 (满射)$\gamma'':C^*(X)\to\mathrm{gr}\,K_0X$.

命题 21.6. *同态* $\gamma'' : C^*(X) \to \operatorname{gr} K_0 X$ *保持有理等价不变, 故存在*

$$\gamma : \mathrm{CH}^*(X) \to \operatorname{gr} K_0 X.$$

证明. 因为只需考虑 $X \times \mathbb{P}^1$ 的子簇到 $\mathbb{P}^1$ 的支配映射, 故不妨设 X 就是那个子簇且有支配映射 $f : X \to \mathbb{P}^1$. 设 $D_0 = f^{-1}(0), D_\infty = f^{-1}(\infty)$, 我们有

$$0 \to f^*\mathscr{O}(-1) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{D_i} \to 0.$$

因此在 $K_0(X)$ 内 $[\mathscr{O}_{D_0}] = [\mathscr{O}_{D_\infty}]$, 由于 f 平坦则维数没问题, 故成立. □

接下来考虑 $\gamma : \mathrm{CH}^*(X) \to \operatorname{gr} K_0 X$ 是否是环同态.

引理 21.7 (Serre)**.** *若 $A, B \subset X$ 是光滑簇 X 的真相交 (交概形分支的余维数是二者之和), 若 $Z \subset A \cap B$ 是不可约分支, 则二者在 Z 的相交数为*

$$i(Z; A, B; X) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \mathrm{length}_{\mathscr{O}_{A\cap B, Z}} \left(\mathrm{Tor}_i^{\mathscr{O}_{X,Z}}(\mathscr{O}_{A,Z}, \mathscr{O}_{B,Z}) \right).$$

证明. 参考 [37]. □

根据此引理则得到满的环同态

$$\gamma : \mathrm{CH}^*(X) \to \operatorname{gr} K_0 X.$$

定义 Chern 特征标 $\mathrm{ch} : K_0(X) \to H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 被如下特性决定:

- ch 是环同态;
- 对 $f : Y \to X$ 有 $\mathrm{ch} \circ f^* = f^* \circ \mathrm{ch}$;
- 对线丛 $\mathscr{L}$ 有 $\mathrm{ch}[\mathscr{L}] = \exp(c_1(\mathscr{L}))$.

注 21.8. *根据 Chern root, 不难得知这个是常规相交理论内的 Chern 特征标的扩展. 若 f 紧合, 可能会研究其和 f_* 的交换关系, 这就会得到著名的 Grothendieck-Riemann-Roch 定理: $\mathrm{ch}(f_*\mathscr{E})\mathrm{td}(T_Y) = f_*(\mathrm{ch}(\mathscr{E})\mathrm{td}(T_X))$.*

事实上这会诱导 $\mathrm{ch} : \operatorname{gr} K_0 X \to H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)$, 但这不是环同态, 我们重新考虑 $H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)'$ 为定义乘法结构为

$$x_r \cdot x_s := \frac{-(r+s-1)!}{(r-1)!(s-1)!} x_r \cup x_s.$$

则可以证明得到环同态 $\mathrm{ch} : \operatorname{gr} K_0 X \to H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)'$.

若 $(2\dim X - 1)!$ 在 Λ 内可逆, 则可以诱导 $H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)' \to H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 为 $x_r \mapsto x_r/(-1)^{r-1}(r-1)!$ 为同构. 给出复合

$$\mathrm{cl}_X : \mathrm{CH}^* \xrightarrow{\gamma} \operatorname{gr} K_0 X \xrightarrow{\mathrm{ch}} H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda)' \to H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda).$$

定理 21.9. *此时的 cl_X 和之前定义的相同.*

证明. 正确证明过于复杂, 错误证明可参考 [29] 命题 VI.10.6. □

若取 $\Lambda = \underline{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}}$ 其中 ℓ 是素数且在 k 内可逆. 若 $\ell \geq 2\dim X$ 有 $\mathrm{CH}^*(X) \to \bigoplus_r H^{2r}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(r))$. 若张量 $\mathbb{Q}$, 则恒定有 $\mathrm{CH}^*(X) \to \bigoplus_r H^{2r}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell(r))$.

22 Poincaré 对偶

22.1 拓扑的 Poincaré 对偶

首先介绍最简单的微分流形上经典 de Rham 上同调的 Poincaré 对偶.

定理 22.1 (de Rham 上同调的 Poincaré 对偶)**.** *设 n 维可定向流形 M 上有有限的好覆盖, 考虑双线性型*

$$\int : H^q_{\mathrm{dR}}(M) \times H^{n-q}_{c,\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta,$$

如果这个双线性型是非退化的, 且上同调群都是维数有限, 就可以得到

$$H^q_{\mathrm{dR}}(M) \cong (H^{n-q}_{c,\mathrm{dR}}(M))^*.$$

.

注 22.2. *这个可以由经典的 MV-讨论来解决, 参考 [5] 第五节. 事实上经过对流形的拓扑更精细的研究, 对于任何 n 维可定向流形, 都有 $H^q_{\mathrm{dR}}(M) \cong (H^{n-q}_{c,\mathrm{dR}}(M))^*$, 但注意到这样的话上同调群维数不一定有限, 那么也就 $H^q_{c,\mathrm{dR}}(M) \ncong (H^{n-q}_{\mathrm{dR}}(M))^*$. 这样的例子事实上很好举, 假设 $M = \coprod_{i=1}^{\infty} M_i$, 其中 M_i 均为有好覆盖的 n 维可定向流形. 那么 $H^q_{\mathrm{dR}}(M) = \prod_i H^q_{\mathrm{dR}}(M_i)$ 且 $H^q_{c,\mathrm{dR}}(M) = \bigoplus_i H^q_{c,\mathrm{dR}}(M_i)$, 那么确实就有*

$$(H^{n-q}_{c,\mathrm{dR}}(M))^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_i H^{n-q}_{c,\mathrm{dR}}(M_i), \mathbb{R}\right) = \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^{n-q}_{c,\mathrm{dR}}(M_i), \mathbb{R}) = H^q_{\mathrm{dR}}(M),$$

但反过来自然不一定行.

对于一般代数拓扑上, 我们也有如下 Poincaré 对偶.

定理 22.3. *对 R-可定向 n 维流形 M, 紧支奇异上同调定义为*

$$H^q_{c,\mathrm{sing}}(M;R) := \varinjlim_K H^q_{\mathrm{sing}}(M, M\backslash K; R),$$

其中 K 紧. 则基本类的帽积诱导同构

$$H^p_{c,\mathrm{sing}}(M;R) \cong H_{n-p,\mathrm{sing}}(M;R).$$

证明. 依旧是 MV-讨论, 但交换性比较复杂, 参考 [21] 第 3.3 节. □

注 22.4. *不妨考虑 $\mathbb{R}$-系数. 对于可定向拓扑 d-流形 M, 考虑定向层作为局部系 $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$. 则其在 $x \in M$ 上的纤维是 $H^d(M, M\backslash x; \mathbb{R}) = H^{d-1}(S^{d-1}; \mathbb{R})$ 非典范的同构于 $\mathbb{R}$. 则有典范映射 $\int : H^d_c(M, \mathbb{O}_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{R}$ 定义出完美对*

$$H^i(M;\mathbb{R}) \times H^{d-i}_c(M; \mathbb{O}_{\mathbb{R}}) \to \mathbb{R}.$$

因为定向的选取相当于一个同构 $\mathbb{O}_{\mathbb{R}} \cong \underline{\mathbb{R}}$, 我们又得到上面的 Poincaré 对偶.

22.2 迹映射

对相对维数 d 的分离有限型 (或 S-可紧化的) 光滑映射 $f : X \to Y$ 且 Y 拟紧拟分离 (默认满足), 对在 S 内可逆的 n, 只考虑 $\mathscr{F}$ 为 $\Lambda := \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$-模. 定义 $f^!\mathscr{F} := f^{-1}\mathscr{F}(d)[2d]$, 我们目标是构造迹映射

$$\mathrm{tr}_{X/Y}(\mathscr{F}) : Rf_!f^!\mathscr{F} \to \mathscr{F}.$$

引理 22.5. *对相对维数 d 的光滑 S-可紧化的映射 $f : X \to Y$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, 则 $Rf_!f^!\mathscr{F} \in D^{[-2d,0]}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

证明. 根据定理16.10即可得到. □

定理 22.6. *对相对维数 d 的光滑 S-可紧化的映射 $f : X \to Y$, 存在唯一的迹映射 $\mathrm{tr}'_{X/Y}(\mathscr{F}) : R^{2d}f_!f^{-1}\mathscr{F}(d) \to \mathscr{F}$, 其中 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ 任取, 满足如下性质:*

(i) 若 k 是可分闭域且 $X = \mathbb{A}^1_k, Y = \mathrm{Spec}\,k, \mathscr{F} := \Lambda$, 则 $\mathrm{tr}'_{X/Y}(\mathscr{F})$ 即为16.11;

(ii) 若 f 平展 (则 $f^! = f^{-1}$), 则 $\mathrm{tr}'_{X/Y}(\mathscr{F})$ 即为伴随得到的映射;

(iii) 映射 $\mathrm{tr}'_{X/Y}(\mathscr{F})$ 对 $\mathscr{F}$ 有函子性;

(iv) 映射 $\mathrm{tr}'_{X/Y}(\mathscr{F})$ 和基变换相容;

(v) 映射 $\mathrm{tr}'_{X/Y}(\mathscr{F})$ 和映射复合相容 (谱序列诱导).

除此之外, 这些决定的迹映射满足如下性质:

(a) 若 f 的几何纤维均非空连通, 则 $\mathrm{tr}'_{X/Y}$ 是同构;

(b) 若 $Y = \mathrm{Spec}\,k$ 且 k 代数闭, 且 X 为光滑曲线 $\mathscr{F} = \Lambda$, 则 $\mathrm{tr}'_{X/Y}(\mathscr{F})$ 即为16.11;

(c) 映射 $\mathrm{tr}'_{X/Y}(\mathscr{F})$ 和不同的 n 相容.

简要证明. 分为如下步骤:

• **步骤 1.** 只需考虑 Zariski 局部且 $\mathscr{F} = \Lambda$.

由于拟紧拟分离, 只需要考虑有限覆盖, 因此归纳法只考虑两个覆盖的情况. 根据命题16.6(iv), 不难得知只需考虑 Zariski 局部. 对于 $\mathscr{F}$, 根据命题16.7(iii) 得到

$$R^{2d}f_!(\Lambda(d) \otimes f^{-1}\mathscr{F}) \cong R^{2d}f_!(\Lambda(d)) \otimes \mathscr{F},$$

于是只需证明 $\mathscr{F} = \Lambda$ 的情况.

• **步骤 2.** 平展映射的情况.

即为伴随性诱导的映射, 故成立.

• **步骤 3.** 划归到 $f : \mathbb{A}^1_Y \to Y$ 的情况.

在 Zariski 局部下有 $X \to \mathbb{A}^d_Y \to Y$, 根据步骤 1 和 2 以及性质的后两条, 只需要考虑 $\mathbb{A}^d_Y \to Y$. 再有最后一条, 只需要考虑 $f : \mathbb{A}^1_Y \to Y$ 的情况.

• **步骤 4.** 定义 $f : \mathbb{A}^1_Y \to Y$ 的情况并验证良定义性.

考虑紧化

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1_Y \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^1_Y \arrow[d, "f'"] & \mathbb{P}^0_Y \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

于是 $R^1 f_! \Lambda = R^1 f'_*(j_! \Lambda)$. 考虑 $0 \to j_! j^{-1}\Lambda \to \Lambda \to i_* i^{-1}\Lambda \to 0$ 和 $R^1 f'_*(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}_Y$, 即可得到 $R^2 f_! \Lambda = R^2 f'_* \Lambda = \Lambda_Y$. 良定义忽略. □

定义 22.7. 对相对维数 d 的光滑 S-可紧化的映射 $f: X \to Y$, 定义迹映射为

$$\mathrm{tr}_{X/Y}\,\mathscr{F} : Rf_! f^! \mathscr{F} \to \tau_{\geq 2d} Rf_! f^! \mathscr{F} = R^{2d} f_! f^! \mathscr{F}[-2d] \to \mathscr{F}.$$

引理 22.8. 对相对维数 d 的光滑 S-可紧化的映射 $f: X \to Y$ 和 $H \in D^-(X_{\text{ét}}, \Lambda), K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, 有典范映射

$$a : Rf_* R\mathscr{H}om(H, K) \to R\mathscr{H}om(Rf_! H, Rf_! K).$$

证明. 考虑紧化

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[dl, "f'"] \\ S & \end{tikzcd}$$

取内射预解 $j_! H \to \mathscr{I}^*, j_! K \to \mathscr{J}^*$, 不难得知 $j^{-1}\mathscr{J}^*$ 也是 K 的内射预解 (命题6.8(iv)), 故有

$$\begin{aligned} j_* R\mathscr{H}om(H, K) &= j_* \mathscr{H}om(H, j^{-1}\mathscr{J}^*) \\ &= \mathscr{H}om(j_! H, \mathscr{J}^*) = \mathscr{H}om(\mathscr{I}^*, \mathscr{J}^*). \end{aligned}$$

作用 Rf'_* 即可得到

$$\begin{aligned} &Rf'_* j_* R\mathscr{H}om(H, K) = Rf'_* \mathscr{H}om(\mathscr{I}^*, \mathscr{J}^*) \\ &\to \mathscr{H}om(Rf'_* \mathscr{I}^*, Rf'_* \mathscr{J}^*) = R\mathscr{H}om(Rf_! H, Rf_! K). \end{aligned}$$

故得到 $Rf_* R\mathscr{H}om(H, K) \to R\mathscr{H}om(Rf_! H, Rf_! K)$. □

定理 22.9 (Grothendieck)**.** 对相对维数 d 的光滑 S-可紧化的映射 $f: X \to Y$, 取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}, \Lambda), \mathscr{G} \in \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, 则典范映射

$$Rf_* R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, f^! \mathscr{G}) \xrightarrow{a} R\mathscr{H}om(Rf_! \mathscr{F}, Rf_! f^! \mathscr{G}) \xrightarrow{\mathrm{tr}_{X/Y}} R\mathscr{H}om(Rf_! \mathscr{F}, \mathscr{G})$$

是同构.

证明. 非常复杂, 读者可以参考 [27] 第八章或 [17] 的第 XVIII 章或 [9]. 更多评注见定理34.1处. □

22.3 Poincaré 对偶及其应用

定理 22.10 (Poincaré 对偶)**.** 设 X 是可分闭域 k 上纯 d 维光滑可紧化概形, 对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 有典范同构

$$\mathrm{Ext}^{2d-q}_\Lambda(\mathscr{F}, \Lambda(d)) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(H^q_{c,\text{ét}}(X, \mathscr{F}), \Lambda).$$

若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(X, \Lambda)$, 则有同构

$$H^{2d-q}(X, \mathscr{H}om_\Lambda(\mathscr{F}, \Lambda(d))) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(H^q_{c,\text{ét}}(X, \mathscr{F}), \Lambda).$$

证明. 设 $f: X \to \operatorname{Spec} k$. 注意到 $\operatorname{Hom}_\Lambda(\mathscr{F}, f^{-1}\Lambda(d)[2d-i]) = \operatorname{Ext}^{2d-i}_\Lambda(\mathscr{F}, \Lambda(d))$ 且由于 Λ 是内射 Λ-模 (Baer 判别法), 我们有

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(Rf_!\mathscr{F}, \Lambda[-i]) = \operatorname{Ext}^{-i}_\Lambda(R\Gamma_c(X, \mathscr{F}), \Lambda) = \operatorname{Hom}_\Lambda(H^i_{c,\text{ét}}(X, \mathscr{F}), \Lambda).$$

根据定理22.9即可得到结论.

若 $\mathscr{F} \in \operatorname{Loc}(X, \Lambda)$, 只需证明 $H^{2d-q}(X, \mathscr{H}om_\Lambda(\mathscr{F}, \Lambda(d))) \cong \operatorname{Ext}^{2d-q}_\Lambda(\mathscr{F}, \Lambda(d))$. 根据谱序列我们得知只需证明当 $q \geq 1$ 时 $\mathscr{E}xt^q_\Lambda(\mathscr{F}, \Lambda) = 0$. 这由 Λ 是内射 Λ-模, 且问题平展局部, 局部系可以假设为常值层, 然后有自由 Λ-模预解即可. □

推论 22.11 (弱 Lefschetz 定理)**.** *设可分闭域 k 且 $X \subset \mathbb{P}^N_k$ 是闭子概形且 $H \subset \mathbb{P}^N_k$ 是超平面. 设 $X\backslash H$ 光滑, 则对任何 $\mathscr{F} \in \operatorname{Ab}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 满足 $\mathscr{F}|_{X\backslash H} \in \operatorname{Loc}_{\text{cons}}(X\backslash H, \Lambda)$, 则典范映射*

$$H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^q_{\text{ét}}(X \cap H, \mathscr{F}|_{X\cap H})$$

当 $q < \dim X - 1$ 时是双射; 当当 $q = \dim X - 1$ 时是单射.

证明. 根据注15.2可知当 $q > \dim X$ 时 $H^q(X\backslash H, \mathscr{H}om_\Lambda(\mathscr{F}, \Lambda(d))) = 0$. 由于 Λ 是内射 Λ-模且层在此处可构建, 故自身和二次对偶同构, 因此再由定理22.10 得到当 $q < \dim X$ 时 $H^q_{c,\text{ét}}(X\backslash H, \mathscr{F}) = 0$. 再根据命题16.6(iv) 即可. □

注 22.12. *复几何也有弱 Lefschetz 定理: 对 n 维紧 Kähler 流形 X, 设 $Y \subset X$ 为光滑超曲面使得 $\mathscr{O}(Y)$ 丰沛 (或正性, 根据 Kodaira 嵌入定理), 则典范限制映射*

$$H^k(X, \mathbb{C}) \to H^k(Y, \mathbb{C})$$

在 $k \leq n-2$ 时为双射, 在 $k = n-1$ 时为单射.

这个最标准的证明就是先用 Hodge 分解定理将其转化为 $H^q(X, \Omega^p_X) \to H^q(Y, \Omega^p_Y)$ 的情况, 然后注意到 $\mathscr{O}_X(-Y)$ 和 $\mathscr{O}_Y(Y)$ 会诱导有两个正合列, 之后用 Serre 对偶和 Kodaira-Nakano 消灭定理得到某个上同调为零, 然后考虑之前 $\mathscr{O}_X(-Y)$ 诱导短正合列引出的长正合列, 就可以看到 $H^q(X, \Omega^p_X) \to H^q(Y, \Omega^p_X|_Y)$ 有定理描述的样子, 之后考虑自然映射 $H^q(Y, \Omega^p_X|_Y) \to H^q(Y, \Omega^p_Y)$, 这个事实上先考虑映射的核和余核为 $\Omega^{p-1}_Y(-Y)$ 的元素, 然后用 $\mathscr{O}_Y(Y)$ 诱导短正合列引出的长正合列, 之后操作和之前类似, 这样就证明了定理. 细节参考 [23] 命题 5.2.6.

神奇的是, 这个定理有一个 Morse 理论的证明, 线丛 $\mathscr{O}(Y)$ 存在整体截面 s 满足诱导除子为 $z(s) = Y$, 这个很容易做到. 考虑线丛上的度量为 $\frac{i}{2\pi}R^{\mathscr{O}(Y)} = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log|s|^{-2}$, 那么考虑 $\phi: X \to [-\infty, \infty)$ 为 $\phi(x) = \log|s|^2$, 注意到 $\phi^{-1}(-\infty) = Y$, 我们将其视作一个 Morse 函数, 可以发现 $\operatorname{Hess}\phi$ 的负特征值个数至少是 n, 这说明 x 增大时, 是从 Y 粘至少 n 维胞腔, 这就得到纯粹拓扑上的解释. 细节参考 [15] 第 158 页.

例 22.13. *(i) 设 $X \subset \mathbb{P}^{m+1}_k$ 是光滑超曲面且 k 代数闭. 设 $U = \mathbb{P}^{m+1}_k\backslash X$, 则当 $q > m+1$ 时 $H^q_{\text{ét}}(U, \Lambda) = 0$. 由 Gysin 序列得到映射*

$$H^q_{\text{ét}}(X, \Lambda) \to H^{q+2}_{\text{ét}}(\mathbb{P}^{m+1}_k, \Lambda)$$

在 $q > m$ 时是同构, 在 $q = m$ 时是满射 (设核为 K). 故得到 $q > m$ 时

$$H^q_{\text{ét}}(X, \Lambda) \cong H^q_{\text{ét}}(\mathbb{P}^m_k, \Lambda), \quad H^m_{\text{ét}}(X, \Lambda) \cong H^m_{\text{ét}}(\mathbb{P}^m_k, \Lambda) \oplus K.$$

由 *Poincaré* 对偶*22.10*得到当 $q < m$ 时候 $H^q_{c,\text{ét}}(X, \Lambda) \cong H^{2m-q}_{\text{ét}}(X, \Lambda(m))$, 因此有

$$H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda) \cong H^*_{\text{ét}}(\mathbb{P}^m_k, \Lambda) \oplus K;$$

(ii) 若 $X \subset \mathbb{P}^N_k$ 是 m 维光滑完全交且 k 代数闭, 类似的也可以得到

$$H^*_{\text{ét}}(X, \Lambda) \cong H^*_{\text{ét}}(\mathbb{P}^m_k, \Lambda) \oplus K;$$

(iii) 设 X 是连通光滑的射影空间的闭子簇, 根据 *Bertini* 定理知有光滑列

$$X = X_m \supset X_{m-1} \supset \cdots \supset X_1,$$

其中后者为前者的超平面截面. 根据 *Gysin* 序列得到

$$H^1_{\text{ét}}(X_1, \Lambda) \twoheadrightarrow H^3_{\text{ét}}(X_2, \Lambda(1)) \cong \cdots \cong H^{2m-1}_{\text{ét}}(X_x, \Lambda(m-1)).$$

根据 *Poincaré* 对偶*22.10*得到 $H^1_{\text{ét}}(X, \Lambda(1)) \hookrightarrow H^1_{\text{ét}}(X_1, \Lambda(1))$, 即

$$\text{Pic}(X)[n] \hookrightarrow \text{Pic}(X_1)[n].$$

代数闭域上 *Abel* 簇的挠点 *Zariski* 稠密, 因此诱导单射

$$\underline{\text{Pic}}^0(X) \hookrightarrow \text{Jac}(X_1).$$

因此代数闭域上光滑簇 X 的 *Picard* 簇一定是一个一般位置曲线的 *Jacobi* 簇的子簇.

23 迹公式

23.1 Frobenius 映射

引理 23.1. 设 X 是概形且 $g: X \to X$ 是自同态, 若对所有的平展映射 $\phi: U \to X$ 都存在关于 U 有函子性的同构

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\phi"'] & & U \times_{\phi, X, g} X \arrow[dl, "\text{pr}_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

则 g 诱导对所有层所有平展上同调的单位映射 *(identity)*.

证明. 这就是定义而已, 平凡. $\square$

定理 23.2 (Baffling 定理)**.** 设 X 是特征 p 域上的概形, 绝对 *Frobenius* 映射 F_X 诱导所有上同调的平凡同构 *(identity)*.

证明. 由引理23.1知只需验证上述引理的条件. 对于下图

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrd, bend left, "F_U"] \arrow[rd, dashed, "f"] \arrow[rdd, bend right, "\phi"'] & & \\
& U \times_{\phi,X,F_X} X \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & U \arrow[d, "\phi"] \\
& X \arrow[r, "F_X"] & X
\end{tikzcd}$$

不难得到 f 平展且万有同胚, 故同构. □

定义 23.3. 设 $k = \mathbb{F}_q$ 其中 $q = p^f$, 其中 $p = \mathrm{char}(k)$, 对 k 上的概形 X 定义几何 *Frobenius* 映射 $\pi_X : X \to X$ 即为 F_X^f. 基变换到 $\bar{k}$ 时也写作 π_X.

引理 23.4. 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$, 我们有典范同构 $\pi_X^{-1}\mathscr{F} \cong \mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F} \cong \pi_{X,*}\mathscr{F}$.

证明. 类似上述定理的证明以及定义即可证明. □

下面假设 $k = \mathbb{F}_q$ 其中 $q = p^f$, 其中 $p = \mathrm{char}(k)$ 和代数闭包 $\bar{k}$ 及绝对 Galois 群 $G_k := \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. 考虑 k 上有限型概形 X. 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 任取 $\sigma \in G_k$, 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
X_{\bar{k}} \arrow[rr, "\mathrm{Spec}\,\sigma \times \mathrm{id}_X"] \arrow[rd] & & X_{\bar{k}} \arrow[ld] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

任取 $\xi \in H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}})$, 定义作用为

$$\sigma \cdot \xi = (\mathrm{Spec}\,\sigma \times \mathrm{id}_X)^* \xi \in H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, (\mathrm{Spec}\,\sigma \times \mathrm{id}_X)^{-1}\mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}}).$$

根据交换性得到 $H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, (\mathrm{Spec}\,\sigma \times \mathrm{id}_X)^{-1}\mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}}) = H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}})$, 因此后者被赋予了左 G_k-模结构.

引理 23.5. 在上述情况下, 设 $\alpha : X \to \mathrm{Spec}\,k$ 是结构映射, 注意到 $(R^j\alpha_*\mathscr{F})_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}}$ 由自然的 G_k 作用, 根据推论*9.4*得到 $(R^j\alpha_*\mathscr{F})_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}} \cong H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}})$. 则此同构也是 G_k 模同构.*(*对挠层和 $(R^j\alpha_!\mathscr{F})_{\mathrm{Spec}\,\bar{k}}$ 及 $H^j_{c,\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}})$ 也对*)*

证明. 平凡, 自行验证. □

定义 23.6. 定义算术 *Frobenius* 映射为 G_k 内的 $\mathrm{frob}_k : \bar{k} \to \bar{k}, x \mapsto x^q$.

定理 23.7. 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则对任何 $j \geq 0$, 映射 frob_k 在 $H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}})$ 的作用和下述作用 π_X^* 的逆相同*:*

$$H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}}) \to H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, (\pi_X^{-1}\mathscr{F})|_{X_{\bar{k}}}) \cong H^j_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathscr{F}|_{X_{\bar{k}}})$$

其中最后一个等号因为 $\pi_X^{-1}\mathscr{F} \cong \mathscr{F}$.

证明. 注意到 $X_{\bar{k}} \xrightarrow{\mathrm{Spec}\,\mathrm{frob}_k} X_{\bar{k}} \xrightarrow{\pi_X} X_{\bar{k}}$ 复合即为 $F^f_{X_{\bar{k}}}$, 故根据 Baffling 定理23.2即可. □

定义 23.8. 设 $x \in X(k)$ 和相应几何点 $\bar{x} : \mathrm{Spec}\,\bar{k} \to X$, 考虑 frob_k^{-1} 作用为 $\pi_x : \mathscr{F}_{\bar{x}} \to \mathscr{F}_{\bar{x}}$, 我们还称之为几何 *Frobenius*.

23.2 非交换环上的迹

我们在此阐述如果定义非交换环上的模的自同态的迹. 固定基数和 p 互素的有限环 Λ, 则定义 $\Lambda^{\natural} = \Lambda/(ab - ba, ...)$. 此时 $\Lambda^{\natural}$ 不见得是环.

例 23.9. *设 G 是有限群, 考虑环 $(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})[G]$, 有*

$$(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})[G]^{\natural} = \bigoplus_{G\text{的共轭类}} \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}.$$

定义 23.10. *(i) 对自由模 $\Lambda^{\oplus m}$, 定义 $\mathrm{Tr} : \mathrm{End}_{\Lambda}(\Lambda^{\oplus m}) \to \Lambda^{\natural}$ 为矩阵对角线之和;*

(ii) 对有限投射 Λ-模 P 和其自同态 ϕ, 考虑 P 是自由模的直和项, 也就是说有

$$P \xrightarrow{a} \Lambda^{\oplus n} \xrightarrow{b} P$$

满足 $b \circ a = \mathrm{id}_P$ 且 $\Lambda^{\oplus n} = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(b)$. 定义 $\mathrm{Tr}(\phi) = \mathrm{Tr}(a\phi b)$.

23.3 滤过导出范畴

关于滤过导出范畴的细节参考Tag 05QI的有关章节.

定义 23.11. *设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴.*

(i) 设 $\mathrm{Fil}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 内滤过元 (A, F) 构成的 (加性) 范畴, 其中 F 代表滤过

$$A \supset \cdots \supset F^n A \supset F^{n+1} A \supset \cdots 0;$$

(ii) 定义 $\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A})$ 是 $\mathrm{Fil}(\mathcal{A})$ 的包含有限滤过的满子 (加性) 范畴;

(iii) 我们称 $I \in \mathrm{Fil}^f(\mathcal{A})$ 是内射的 (投射的), 如果对所有 p, 对象

$$\mathrm{gr}^p I = \mathrm{gr}^p_F I = F^p I / F^{p+1} I$$

在 $\mathcal{A}$ 内是内射 (投射) 的;

(iv) 有复形范畴 $\mathrm{Comp}(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A})) \supset \mathrm{Comp}^+(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A}))$ 和同伦范畴 $K(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A})) \supset K^+(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A}))$;

(v) 在 $\mathrm{Comp}(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A}))$ 内的映射 $\alpha : K^* \to L^*$ 称之为拟同构, 如果对所有 p 都有 $\mathrm{gr}^p(\alpha)$ 是拟同构;

(vi) 定义 $DF(\mathcal{A})$ 和 $DF^+(\mathcal{A})$ 是 $K(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A}))$ 和 $K^+(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A}))$ 逆转所有拟同构.

注 23.12. 若 $\mathcal{A}$ 足够内射, 则设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A})$ 包含内射元的满子范畴, 则有 $DF^+(\mathcal{A}) \cong K^+(\mathcal{I})$; 若 $\mathcal{A}$ 足够投射, 则设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathrm{Fil}^f(\mathcal{A})$ 包含投射元的满子范畴, 则有 $DF^-(\mathcal{A}) \cong K^-(\mathcal{P})$.

定义 23.13. *(i) 设 $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是左正合函子且 $\mathcal{A}$ 足够内射, 定义*

$$RT : DF^+(\mathcal{A}) \to DF^+(\mathcal{B})$$

使得如下图交换 (注23.12):

$$\begin{tikzcd} DF^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "RT"] & DF^+(\mathcal{B}) \\ K^+(\mathcal{I}) \arrow[u] \arrow[r, "T"] & K^+(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{B})) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

称之为滤过右导出函子;

(ii) 设 $T:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是右正合函子且 $\mathcal{A}$ 足够投射, 定义

$$LT: DF^-(\mathcal{A})\to DF^-(\mathcal{B})$$

使得如下图交换 *(注23.12)*:

$$\begin{array}{ccc} DF^-(\mathcal{A}) & \xrightarrow{LG} & DF^-(\mathcal{B}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ K^-(\mathcal{P}) & \xrightarrow{G} & K^-(\mathrm{Fil}^f(\mathcal{B})) \end{array}$$

称之为滤过左导出函子.

命题 23.14. 在上述情况下, 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} DF^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RT} & DF^+(\mathcal{B}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}^p} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}^p} \\ D^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RT} & D^+(\mathcal{B}) \end{array}$$

证明. 忽略. □

注 23.15. 对 $K^*\in DF^+(\mathcal{B})$, 有谱序列

$$E_1^{p,q}=H^{p+q}(\mathrm{gr}^p K^*)\Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{ForgetFilt}(K^*)).$$

23.4 完美复形和迹

设 Λ 是可能不交换的环, 设 Mod_Λ 是左 Λ-模范畴, 设 $K(\Lambda)$ 和 $D(\Lambda)$ 分别是其同伦范畴和导出范畴.

定义 23.16. 设 $K_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ 是对象为有限投射 Λ-模构成的有界复形, 对象为复形映射商去同伦等价的范畴. 故函子 $K_{\mathrm{perf}}(\Lambda)\to D(\Lambda)$ 是满忠实的, 设 $D_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ 是其像. 我们称 $D(\Lambda)$ 内元素是完美的, 如果它在 $D_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ 里面.

命题 23.17 (完美复形的性质)**.** *(i)* 若 Λ 左诺特的, 则 $K\in D(\Lambda)$ 完美当且仅当其有限 Tor-维数且同调群皆为有限 Λ-模;

(ii) 设 X 是域 k 上的射影曲线, 取 Λ 有限且 $K\in D_{\mathrm{cons}}(X,\Lambda)$, 则

$$R\Gamma(X_{\bar{k}},K)\in D_{\mathrm{perf}}(\Lambda).$$

证明. (i) 见Tag 0658.

(ii) 就是验证 (i) 里面的条件. 事实上同调群皆为有限 Λ-模很简单: 考虑谱序列

$$H^i(X_{\bar{k}},\underline{H}^j(K))\Rightarrow H^{i+j}(R\Gamma(X_{\bar{k}},K)),$$

根据上同调维数的结论得知其为有界复形, 再根据定理12.4知道前者皆为有限, 故而后者也是如此. 考虑 Tor-维数, 由投影公式和相同的谱序列即可证明. □

注 23.18. 我们称 $K \in D(\Lambda)$ 有有限 Tor-维数, 如果存在 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得对任何右 Λ-模 N 使得对任何 $i \notin [a, b]$ 都有 $H^i(N \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} K) = 0$.

命题 23.19. 设 $K \in D_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ 且 $f \in \mathrm{End}_{D(\Lambda)}(K)$, 则 $\mathrm{Tr}(f) \in \Lambda^{\natural}$ 良定义.

证明. 任取有限投射复形 P^* 使得存在导出范畴内的同构 $\alpha : P^* \to K$, 则 $\alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$ 对应 $f^* : P^* \to P^*$ 在同伦意义下良定. 设

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(f^i : P^i \to P^i) \in \Lambda^{\natural}.$$

需要验证这个定义不依赖于 f^* 的选取, 且不依赖于 P^*, α 的选取. 这是纯粹的计算验证, 我们略去, 参考Tag 03TI. □

下面考虑滤过的情况.

定义 23.20. 称 $(M, F) \in \mathrm{Fil}^f(\mathrm{Mod}_{\Lambda})$ 为滤过有限投射的如果对所有的 p 都有 $\mathrm{gr}^p_F(M)$ 有限投射. 考虑同伦范畴 $KF_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ 为 $\mathrm{Fil}^f(\mathrm{Mod}_{\Lambda})$ 内滤过投射对象构成的有界复形范畴, 我们有

$$\begin{array}{ccc} KF(\Lambda) & \longleftarrow & KF_{\mathrm{perf}}(\Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ DF(\Lambda) & \longleftarrow & DF_{\mathrm{perf}}(\Lambda) \end{array}$$

其中满忠实性和之前类似, 得到 $DF_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$.

命题 23.21. 设 $K \in DF_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ 且 $f \in \mathrm{End}_{DF}(K)$, 则

$$\mathrm{Tr}(f|_K) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{gr}^p K}).$$

证明. 略去. □

23.5 射影曲线的 Lefschetz 数

定义 23.22. 设 Λ 是有限环且 X 是有限域 k 上的射影曲线, 设 $K \in D_{\mathrm{cons}}(X, \Lambda)$.

(a) 设 $c_K : \pi_X^{-1} K \to K$, 则 $c_K|_{X_{\bar{k}}}$ 会诱导完美复形 $R\Gamma(X_{\bar{k}}, K|_{X_{\bar{k}}})$ 上的作用 π_X^*, 定义整体 *Lefschetz* 数为 $\mathrm{Tr}(\pi_X^*|_{R\Gamma(X_{\bar{k}}, K|_{X_{\bar{k}}})}) \in \Lambda^{\natural}$;

(b) 对任何几何点 $\bar{x}$, 有完美复形 $K_{\bar{x}}$. 考虑在 $K_{\bar{x}}$ 上的作用 π_X, 我们定义局部 *Lefschetz* 数为 $\sum_{x \in X(k)} \mathrm{Tr}(\pi_x|_{K_{\bar{x}}}) \in \Lambda^{\natural}$.

定理 23.23 (Weil 不动点定理)**.** 设 C 是代数闭域 k 上的光滑射影曲线, 设 $\phi : C \to C$ 为不是恒等映射的 k-自同态. 设 $J(C) := \underline{\mathrm{Pic}}^0_{C/k}$ 是 C 的 *Jacobian*. 设 ϕ 诱导 $\phi^* : J(C) \to J(C)$, 则

$$\int_{C \times C} \Delta \cdot \Gamma_{\phi} = 1 - \mathrm{Tr}(\phi^*) + \deg \phi.$$

证明. 首先陈述一些关于光滑曲线及其 Jacobian 的事实:

考虑 $C \times C$ 的两个投影 p_1, p_2, 则

$$\mathrm{Pic}(C \times C) = p_1^*(\mathrm{Pic}(C)) \oplus p_2^*(\mathrm{Pic}(C)) \oplus R,$$

其中 $R = \{[Z] \in \mathrm{Pic}(C \times C) : Z|_{C \times \{c_0\}} \sim_{\mathrm{rat}} 0, Z|_{\{c_0\} \times C} \sim_{\mathrm{rat}} 0\}$. 我们有如下典范同构:

$$R \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}(J(C))$$
$$Z \longmapsto (\mathscr{O}_C(D) \mapsto (p_1|_Z)_*(p_2|_Z)^* D)$$

设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(C \times C)$ 是前后对换, 则有如下对应:

$\mathrm{End}(J(C))$	R
α, β 的复合	$p_{13,*}(p_{12}^*\alpha \circ p_{23}^*\beta)$
id_J	$\Delta_C - C \times \{c_0\} - \{c_0\} \times C$
ϕ^*	$\Gamma_\phi - C \times \{\phi(c_0)\} - \sum_{\phi(c)=c_0} \{c\} \times C$
迹 $\alpha, \beta \mapsto \mathrm{Tr}(\alpha\beta)$	$\alpha, \beta \mapsto -\int_{C \times C} \alpha \cdot \sigma^*\beta$
Rosati 对合 $\alpha \mapsto \alpha^\dagger$	$\alpha \mapsto \sigma^*\alpha$
Rosati 正定 $\mathrm{Tr}(\alpha\alpha^\dagger) > 0$	Hodge 指标定理 $-\int_{C \times C} \alpha \cdot \sigma^*\alpha > 0.$

下面开始证明. 注意到

$$\begin{aligned}\int_{C \times C} \Delta \cdot \Gamma_\phi &= \int_{C \times C} \Gamma_\phi \cdot (\Delta_C - C \times \{c_0\} - \{c_0\} \times C) \\ &\quad + \int_{C \times C} \Gamma_\phi \cdot (C \times \{c_0\} + \{c_0\} \times C) \\ &= 1 + \deg\phi + \int_{C \times C} \Gamma_\phi \cdot (\Delta_C - C \times \{c_0\} - \{c_0\} \times C).\end{aligned}$$

且得知 R 和丰沛除子 $C \times \{c_0\} + \{c_0\} \times C$ 垂直, 那么根据 Nakai-Moishezon 定理和上述对应得到

$$\begin{aligned}&\int_{C \times C} \Gamma_\phi \cdot (\Delta_C - C \times \{c_0\} - \{c_0\} \times C) \\ &= \int_{C \times C} \left(\Gamma_\phi - C \times \{\phi(c_0)\} - \sum_{\phi(c)=c_0} \{c\} \times C\right) \\ &\cdot (\Delta_C - C \times \{c_0\} - \{c_0\} \times C) = -\mathrm{Tr}(\phi^* \circ \mathrm{id}_{J(C)}).\end{aligned}$$

因此得到结论. $\square$

23.6 Grothendieck-Lefschetz 迹公式

定理 23.24 (Grothendieck-Lefschetz 迹公式)**.** 设 Λ 是有限环且 X 是有限域 k 上的代数簇, 设 $K \in D_{\mathrm{perf}}(X, \Lambda)$, 且 Λ 基数在 k 可逆, 则

$$\mathrm{Tr}(\pi_X^*|_{R\Gamma_c(X_{\bar{k}}, K|_{X_{\bar{k}}})}) = \sum_{x \in X(k)} \mathrm{Tr}(\pi_x|_{K_{\bar{x}}}) \in \Lambda^\natural.$$

证明. 最终是要化归到曲线的情况. 我们只给出思路, 不给证明:

(1) 设 $X = Y \sqcup U$ 其中 Y 是闭集而 U 是其补集, 证明对 U, Y 对, 则对 X 也对;

(2) 设 $f : X \to S$ 是映射且对 S 和 f 的纤维都对, 则对 X 也对. □

因此只需要证明如下曲线的情况:

定理 23.25. 设 Λ 是有限环且 X 是有限域 k 上的分离有限型维数 ≤ 1 的概形, 设 $K \in D_{\mathrm{cons}}(X, \Lambda)$, 且 Λ 基数在 k 可逆, 则

$$\mathrm{Tr}(\pi_X^*|_{R\Gamma_c(X_{\bar{k}}, K|_{X_{\bar{k}}})}) = \sum_{x \in X(k)} \mathrm{Tr}(\pi_x|_{K_{\bar{x}}}) \in \Lambda^\natural.$$

证明. 设 $T'(X, K) := \sum_{x \in X(k)} \mathrm{Tr}(\pi_x|_{K_{\bar{x}}}) \in \Lambda^\natural$ 且 $T''(X, K) := \mathrm{Tr}(\pi_X^*|_{R\Gamma_c(X_{\bar{k}}, K|_{X_{\bar{k}}})})$.

• **步骤 1.** 设 $j : U \hookrightarrow X$ 开浸入且 $i : Y = X \backslash U \hookrightarrow X$ 是闭浸入, 则 $T''(X, K) = T''(U, j^{-1}K) + T''(Y, i^{-1}K)$ 且 $T'(X, K) = T'(U, j^{-1}K) + T'(Y, i^{-1}K)$.

这个对 T' 是平凡的. 对 T'' 考虑正合列 $0 \to j_! j^{-1}K \to K \to i_* i^{-1}K \to 0$ 给出 K 的一个滤过, 于是得到 $K' \in DF(X, \Lambda)$. 其 $\mathrm{gr}^i K'$ 为 $j_! j^{-1}K, i_* i^{-1}K \in D_{\mathrm{cons}}(X, \Lambda)$, 根据滤过导出范畴不难得知 $R\Gamma_c(X_{\bar{k}}, K) \in DF_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$, 根据命题23.21和 T'' 定义即可得到结论.

• **步骤 2.** 证明当 $\dim X = 0$ 时候定理成立.

注意到此时

$$R\Gamma_c(X_{\bar{k}}, K) = R\Gamma(X_{\bar{k}}, K) = \Gamma(X_{\bar{k}}, K) = \bigoplus_{\bar{x} \in X_{\bar{k}}} K_{\bar{x}}.$$

注意到 $\pi_X : X_{\bar{k}} \to X_{\bar{k}}$ 的不动点为卧在有理点上的点, 故

$$\mathrm{Tr}(\pi_X^*|_{R\Gamma_c(X_{\bar{k}}, K|_{X_{\bar{k}}})}) = \sum_{x \in X(k)} \mathrm{Tr}(\pi_x|_{K_{\bar{x}}}),$$

因此成立.

• **步骤 3.** 划归到只需要证明 $T'(U, \mathscr{F}) = T''(U, \mathscr{F})$, 其中 U 是 k 上光滑不可约仿射曲线且 $U(k) = \emptyset$, 且 $\mathscr{F}$ 是 U 上的有限局部常值 Λ-模且茎为有限投射 Λ-模, 并且 Λ 被可逆素数 ℓ 的某幂次零化.

由步骤 1,2, 我们可以考虑去掉任意的有限个闭点的情况. 因此我们去掉所有的有理点和所以曲线的奇点. 而 Λ 是根据其准素分解而来.

现在考虑

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} \\ U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

其中 $f : V \to U$ 有限平展 Galois 覆叠, 且水平的映射为射影完备化. 考虑 $G := \mathrm{Gal}(V/U)$, 假设 $f^{-1}\mathscr{F} = \underline{M}$, 其中 $M = \Gamma(V, f^{-1}\mathscr{F})$ 为 $\Lambda[G]$-模, 且在 Λ 上有限投射.
- **步骤 4.** 对于自然的 G 作用在 $f_*f^{-1}\mathscr{F}$ 且迹映射 $f_*f^{-1}\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 诱导同构

$$(f_*f^{-1}\mathscr{F}) \otimes_{\Lambda[G]} \Lambda = (f_*f^{-1}\mathscr{F})_G \cong \mathscr{F}.$$

- **步骤 5.** 对 $n \gg 0$, 设 $A = \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, 有 $f_*f^{-1}\mathscr{F} \cong (f_*\underline{A}) \otimes_{\underline{A}} \underline{M}$ 和对角 G-作用.
- **步骤 6.** 有典范同构 $((f_*\underline{A}) \otimes_{\underline{A}} \underline{M}) \otimes_{\Lambda[G]} \Lambda \cong \mathscr{F}$.
- **步骤 7.** 有和 π_U^* 作用契合的典范同构

$$R\Gamma_c(U_{\bar{k}}, \mathscr{F}) = (R\Gamma_c(U_{\bar{k}}, f_*\underline{A}) \otimes_A^{\mathbb{L}} M) \otimes_{\Lambda[G]}^{\mathbb{L}} \Lambda.$$

- **步骤 8.** 只需证明 $\mathrm{Tr}_A^{Z_g}((g, \pi_U^*)|_{R\Gamma_c(U_{\bar{k}}, f_*\underline{A})}) \in A$ 映射到 Λ 是 0 其中 $g \in G$.
- **步骤 9.** 只需证明在 A 内我们有 $\mathrm{Tr}_A((g^{-1}\pi_V)^*|_{R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, A)}) = 0$.

步骤 4–6 是直接的, 而步骤 7–9 需要一些古怪的代数结论, 我们略去, 更多细节参考Tag 03U4 和Tag 03UF, 或者 Conrad 讨论班笔记 L20.
- **步骤 10.** 证明在 A 内我们有 $\mathrm{Tr}_A((g^{-1}\pi_V)^*|_{R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, A)}) = 0$.

根据加性我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_A((g^{-1}\pi_V)^*|_{R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, A)}) + \mathrm{Tr}_A((g^{-1}\pi_Y)^*|_{R\Gamma_c((Y\setminus V)_{\bar{k}}, A)})\\ &= \mathrm{Tr}_A((g^{-1}\pi_Y)^*|_{R\Gamma_c(Y_{\bar{k}}, A)}).\end{aligned}$$

后者根据 Weil 不动点定理23.23知为 $g^{-1}\pi_Y$ 在 $Y_{\bar{k}}$ 的不动点; 而根据步骤 2 得知 $\mathrm{Tr}_A((g^{-1}\pi_Y)^*|_{R\Gamma_c((Y\setminus V)_{\bar{k}}, A)})$ 是 $g^{-1}\pi_Y$ 在 $(Y\setminus V)_{\bar{k}}$ 的不动点. 因此我们要求的

$$\mathrm{Tr}_A((g^{-1}\pi_V)^*|_{R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, A)})$$

即为 $g^{-1}\pi_Y$ 在 $V_{\bar{k}}$ 的不动点. 这根据 U 无有理点即可得到是 0. □

24 Weil 上同调理论一瞥

我们均考虑域 k 上的光滑射影簇, $\mathrm{SmProj}(k)$ 指光滑射影簇范畴. 本节我们主要参考 [13] 和 [34].

24.1 Weil 上同调理论和同调等价

设 F 是特征零的域且 GrVect_F 是有限维分次 F-线性空间.

定义 24.1. *一个 Weil 上同调理论为一个函子*

$$H : \mathrm{SmProj}(k)^{op} \to \mathrm{GrVect}_F$$

满足如下公理:

(1) 存在杯积 $\cup : H(X) \times H(X) \to H(X)$ 且满足对 $a \in H^i(X), b \in H^j(X)$ 有

$$b \cup a = (-1)^{ij} a \cup b;$$

(2) 存在 Poincaré 对偶:
有迹同构 $\mathrm{tr}: H^{2d}(X_d) \cong F$ 使得有完美对

$$H^i(X_d) \times H^{2d-i}(X) \xrightarrow{\cup} H^{2d}(X_d) \xrightarrow{\mathrm{tr},\cong} F;$$

(3) 满足 Künneth 公式: 有如下分次同构

$$H(X) \otimes H(Y) \xrightarrow{p_1^* \otimes p_2^*} H(X \times Y);$$

(4) 存在链映射 $\mathrm{cl}_X : \mathrm{CH}^i(X) \to H^{2i}(X)$ 使得

- 对 $\mathrm{SmProj}(k)$ 内的 $f: X \to Y$ 有 $f^* \circ \mathrm{cl}_Y = \mathrm{cl}_X \circ f^*$ 和 $f_* \circ \mathrm{cl}_X = \mathrm{cl}_Y \circ f_*$;
- 有 $\mathrm{cl}_X(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{cl}_X(\alpha) \cup \mathrm{cl}_X(\beta)$;
- 对点 p, 有 $\mathrm{tr} \circ \mathrm{cl}_p = \deg := \int_p$.

(5) 弱 Lefschetz 定理满足: 设光滑超平面截面 $i: Y_{d-1} \hookrightarrow X_d$, 则 $i^*: H^i(X) \to H^i(Y)$ 在 $i < d-1$ 时是同构, 在 $i = d-1$ 时是单射;

(6) 硬 Lefschetz 定理满足: Lefschetz 算子 $L(\alpha) = \alpha \cup \mathrm{cl}_X(Y)$ 诱导同构

$$L^{d-i}: H^{d-i}(X) \cong H^{d+i}(X), 0 \le i \le d.$$

例 24.2. 设 k 特征零且 $k \subset \mathbb{C}$, 则可以取:
(i) Betti 上同调, 即 $H_B^i(X) := H^i_{\mathrm{sing}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$(或 $\mathbb{C}$ 系数);
(ii) 经典 de Rham 上同调 $H^i_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}; \mathbb{C})$;
(iii) 代数 de Rham 上同调 $H^i_{\mathrm{dR}}(X)$.
这些都是 *Weil* 上同调理论. 首先 *(i)* 即为经典代数拓扑里的内容, 而 *(ii)(iii)* 都可以根据比较定理给出.

例 24.3. 对域 k 上的簇 X, 任取可逆素数 ℓ, 得到 ℓ-进上同调 $H^i_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$. 这个上同调理论是 *Weil* 上同调理论是非常不平凡的结论. 事实上我们笔记的大部分都在证明这个事实, 当然最后一个, 硬 *Lefschetz* 定理我们还没有证明, 但这个定理是这里面最复杂的定理, 我也懒得去证明, 参考 *[10]*.

例 24.4. 若 k 完美, 晶体上同调 $H^i_{\mathrm{crys}}(X/W(k)) \otimes K$ 是 *Weil* 上同调理论, 其中 K 是 *Witt* 环 $W(k)$ 的分式域.

定义 24.5. 对于某个 *Weil* 上同调理论 H, 定义 $Z \in C^*(X)$ 同调等价为零, 即 $Z \sim_{\mathrm{hom}} 0$, 如果 $\mathrm{cl}_X(Z) = 0$. 记 $Z^i_{\mathrm{hom}}(X) \subset C^i(X)$ 是同调等价为零的子群. 这个是依赖于 *Weil* 上同调理论的选取的.

24.2 其他等价及 Néron-Severi 群

定义 24.6. 设 X 是 d 维射影簇, 定义映射

$$\mathrm{CH}^r(X) \times \mathrm{CH}^{d-r}(X) \to \mathrm{CH}^d(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}.$$

我们称 $Z \in \mathrm{CH}^r(X)$ 数值平凡, 即 $Z \sim_{\mathrm{num}} 0$ 如果对任何余维数是 $d-r$ 的代数链 Y 都有 $Z \cdot Y = 0$. 记 $Z^r_{\mathrm{num}}(X) \subset C^r(X)$ 是数值平凡的子群, 定义 $N^r(X) := \mathrm{CH}^r(X)/Z^r_{\mathrm{num}}(X)$, 当 $r = 1$ 时称为 *Néron-Severi* 群.

定理 24.7. *对射影簇 X, 群 $N^i(X)$ 有限生成. 事实上设 $B^i(X) := N^i(X) \otimes \mathbb{Q}$, 则*

$$\dim_{\mathbb{Q}} B^i(X) \leq b_{2i} := \dim H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) < \infty.$$

证明. 由定理18.3知可以取 $Y_1, ..., Y_n \in \mathrm{CH}^{d-i}(X)$ 使得其在 $H^{2d-2i}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell(d-i))$ 的像称为 $\mathbb{Q}_\ell$-线性空间 $\mathrm{cl}_X(\mathrm{CH}^{d-i}(X))$ 的一组基. 显然 $n \leq b_{2d-2i} = b_{2i}$. 考虑线性映射

$$\lambda : \mathrm{CH}^i(X) \to \mathbb{Z}^m, \beta \mapsto \left(\int_X \beta \cdot \alpha_1, ..., \int_X \beta \cdot \alpha_m \right).$$

我们断言 $\ker \lambda = Z^i_{\text{num}}(X)$. 显然 $Z^i_{\text{num}}(X) \subset \ker \lambda$ 是平凡的. 反之, 设 $\alpha \in \mathrm{CH}^{d-i}(X)$ 和 $\mathrm{cl}_X(\alpha) = \sum \nu_j \mathrm{cl}_X(\alpha_j)$, 其中 $\nu_j \in \mathbb{Q}_\ell$. 则有

$$\begin{aligned}\int_X \beta \cdot \alpha &= \mathrm{tr}(\mathrm{cl}_X(\alpha) \cup \mathrm{cl}_X(\beta)) \\ &= \sum_j \nu_j \, \mathrm{tr}(\mathrm{cl}_X(\alpha_j) \cup \mathrm{cl}_X(\beta)) \\ &= \sum_j \nu_j \int_X \beta \cdot \alpha_j.\end{aligned}$$

因此若 $\beta \in \ker \lambda$, 则得到 β 必然数值等价为零, 因此断言成立. 根据断言得到单射 $B^i(X) \hookrightarrow \mathbb{Q}^m$. 于是得到结论. □

定义 24.8. *(i) 记 $Z^i_{\text{rat}}(X) \subset C^i(X)$ 为有理等价于 0 的子群;*

(ii) 我们称 $Z \in C^i(X)$ 代数等价, 即 $Z \sim_{\text{alg}} 0$, 如果存在光滑不可约曲线 C 和 $W \in C^i(C \times X)$ 和 $a, b \in C$ 使得 $W(a) = 0, W(b) = Z$. 记 $Z^i_{\text{alg}}(X)$ 为代数等价于 0 的子群, 记 $\mathrm{CH}^i_{\text{alg}}(X) := Z^i_{\text{alg}}/Z^i_{\text{rat}}(X)$;

(iii) 我们称 $Z \in C^i(X)$ 粉碎幂零 (smash-nilpotent) 等价为零, 即 $Z \sim_{\otimes} 0$, 如果存在正整数 n 使得 $\prod^n X \sim_{\text{rat}} 0$. 记 $Z^i_{\otimes}(X)$ 为粉碎幂零等价于 0 的子群.

命题 24.9. *(i) 我们有 $Z^i_{\otimes}(X) \subset Z^i_{\text{hom}}(X)$ 且*

$$Z^i_{\text{rat}}(X) \subset Z^i_{\text{alg}}(X) \subset Z^i_{\text{hom}}(X) \subset Z^i_{\text{num}}(X);$$

(ii)(Voevodsky-Voisin) 张量 $\mathbb{Q}$ 之后有

$$Z^i_{\text{rat}}(X)_{\mathbb{Q}} \subset Z^i_{\text{alg}}(X)_{\mathbb{Q}} \subset Z^i_{\otimes}(X)_{\mathbb{Q}} \subset Z^i_{\text{hom}}(X)_{\mathbb{Q}} \subset Z^i_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}}.$$

命题 24.10. *(i) 不甚困难, 参考 [13] 命题 19.1.1 和 [34] 引理 1.2.18;*

(ii) 比较复杂, 完整证明参考 [34] 附录 B.

24.3 Grothendieck 标准猜想一瞥

有关 motive 和 Grothendieck 标准猜想的入门介绍参考 [34], 事实上这本小书也是我学习平展上同调的动机之一. 这里我们只参观一下何为 Grothendieck 标准猜想, 它有哪些神奇之处? 这里均假设 k 是代数闭域且 X 是光滑射影簇.

事实上标准猜想包含一系列猜想, 这些猜想不是相互独立的, 它们之间有一些关系, 而当 $k=\mathbb{C}$ 时这些猜想都可以被 Hodge 猜想所得到. 而如果这些猜想成立的话, 那可以推出存在一个由 motive 得到的万有上同调理论, 而且可以推出 Weil 猜想 (当然已经被 Deligne 绕过了标准猜想而证明).

固定一个 F-系数的 Weil 上同调理论 $H(X)$, 其中 F 是特征零的域, 例如 $\mathbb{Q},\mathbb{Q}_\ell$ 等, 对于 $\mathrm{cl}_X:\mathrm{CH}^i(X)_\mathbb{Q}\to H^{2i}(X)$, 我们称 cl_X 的像是代数的.

同调–数值猜想

猜想 2 (同调–数值猜想 $D(X)$)**.** *我们有* $Z^i_{\mathrm{hom}}(X)=Z^i_{\mathrm{num}}(X)$.

这个猜想告诉我们如果成立的话, 那么同调等价和 Weil 上同调选取无关. 任意特征下这个已经在 $i=1$ 被证明 (Matsusaka); 零特征下 $i=2$, 曲线和 Abel 簇的情况被证明. 而这个猜想显然被下述猜想所推出:

猜想 3 (Voevodsky 猜想)**.** *我们有* $Z^i_{\otimes}(X)=Z^i_{\mathrm{num}}(X)$.

Künneth 猜想

考虑对角 $\Delta(X)\subset X\times X$, 考虑

$$\mathrm{cl}_{X\times X}(\Delta(X))\in H^{2d}(X\times X)=\bigoplus_{i=0}^{2d}H^{2d-i}(X)\otimes H^i(X).$$

取其分支 (Künneth 分支) 为 $\Delta_i^{\mathrm{topo}}\in H^{2d-i}(X)\otimes H^i(X)$.

猜想 4 (Künneth 猜想 $C(X)$)**.** *其 Künneth 分支* Δ_i^{topo} *是代数的.*

这个猜想对有仿射分层的代数簇成立, 对曲线, 曲面和 Abel 簇也成立. 用 Weil 猜想的证明可以推出来有限域上的都成立 (Katz-Messing). 当 $k=\mathbb{C}$, 这个显然是 Hodge 猜想的推论.

Lefschetz 型猜想

Weil 上同调理论给出 Lefschetz 算子 $L(\alpha)=\alpha\cup\mathrm{cl}_X(Y)$ 诱导同构

$$L^{d-i}:H^{d-i}(X)\cong H^{d+i}(X),0\le i\le d.$$

可以证明存在唯一的 $\Lambda:H^i(X)\to H^{i-2}(X)$ 满足一定的交换性 (就是说它接近 L 的逆, 参考 [34] 第 36 页). 将 Λ 看作 $H^*(X)^\vee\otimes H^*(X)$ 的元素, 根据 Poincaré 对偶和 Künneth 公式得到

$$H^*(X)^\vee\otimes H^*(X)\cong H^*(X)\otimes H^*(X)\subset H^*(X\times X).$$

定义拓扑对应为 Λ 在 $H^*(X\times X)$ 里的像.

猜想 5 (Lefschetz 型猜想 $B(X)$)**.** *拓扑对应* Λ *是代数的.*

若 $k=\mathbb{C}$, 则注意到 Λ 是 Hodge 类, 故这个猜想也是 Hodge 猜想的推论. 这个猜想对射影空间, Grassmannian 和曲线都平凡. 曲面情况是 Grothendieck-Kleiman 给出. 而 Abel 簇的情况被 Lieberman-Kleiman 给出.

Kleiman 的一系列结论给出 $B(X)$ 和定义 Lefschetz 算子的嵌入无关, 且 $B(X)$ 可以推出 $C(X)$. 也可以推出如下猜想:

猜想 6 (猜想 $A(X,L)$)**.** 考虑交换图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Imcl}_X^i \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Imcl}_X^{d-i} \arrow[d, hook] \\ H^{2i}(X) \arrow[r, "{L^{d-2i},\cong}"'] & H^{2d-2i}(X) \end{tikzcd}$$

则单射 f 是同构.

Hodge 型猜想

我们知道当 $i\le d$ 时 $L^{d-i}(X)$ 是同构, 但 L^{d-i+1} 就不一定, 我们记 $P^i(X):=\ker L^{d-i+1}$ 为第 i 个原初 (primitive) 上同调. 记 $A^i_{\mathrm{prim}}(X)=\mathrm{Imcl}^i_X\cap P^{2i}(X)$.

猜想 7 (Hodge 型猜想 $\mathrm{Hdg}(x)$)**.** 设 $i\le d/2$, 考虑配对

$$A^i_{\mathrm{prim}}(X)\times A^i_{\mathrm{prim}}(X)\to\mathbb{Q},(x,y)\mapsto(-1)^i\operatorname{tr}\circ(L^{d-2i}(x)\cup y),$$

则这个配对是正定的.

当特征零时, 根据 Lefschetz 准则, 这个由比较定理和 Riemann-Hodge 双线性型给出. 对任意特征的, 这个对曲面是对的.

25 平展上同调的一些应用 I——其他代数簇的计算

25.1 带奇点曲线的上同调

命题 25.1. 设 X 是代数闭域 k 上的射影曲线, 有一个结点 x, 设 n 可逆, 则

$$H^q_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q=0,\\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+1} & q=1,\\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q=2,\\ 0 & q\ge 3.\end{cases}$$

证明. 取正规化 $f:X^\nu\to X$, 我们有短正合列 $0\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to Q\to 0$. 不难得知 $H^0_{\text{ét}}(X,Q)=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 且当 $i>0$ 时候 $H^i_{\text{ét}}(X,Q)=0$. 于是因为 f 有限, 引长正合列得到

$$\begin{aligned}0\to H^0_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})&\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\xrightarrow{f}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ \to H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})&\to H^1_{\text{ét}}(X^\nu,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to 0\\ \to H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})&\to H^2_{\text{ét}}(X^\nu,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to 0.\end{aligned}$$

不难得知 $H^0_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 且 $f=0$, 故 $H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+1}$. 而 $H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 也不难看出. □

注 25.2. 可以推广至 n 个一般奇点的情况, 略去.

25.2 爆破的平展上同调

命题 25.3. 设 X 是概形, 而 $Z\subset X$ 是有限型拟凝聚理想层定义的闭子概形. 考虑爆破:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "c"] & \mathrm{Bl}_Z X \arrow[d, "b"] \\ Z \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

则对任何 $K\in D^+_{\text{tor}}(X_{\text{ét}})$ 都有好三角

$$K\to Ri_*(K|_Z)\oplus Rb_*(b^{-1}K)\to Rc_*(K|_E)\to K[1].$$

证明. 设 $K=\mathscr{F}^*$. 由于 i_* 正合, 得到 $Ri_*(K|_Z)=i_*(\mathscr{F}^*|_Z)$. 取内射预解 $b^{-1}\mathscr{F}^*\to\mathscr{I}^*$, 不难得知 $b_*\mathscr{I}^*\simeq Rb_*(b^{-1}K)$. 根据紧合基变换得到 $\pi_*(\mathscr{I}^*|_E)=(b_*\mathscr{I}^*)|_Z\simeq R\pi_*(K|_E)$. 因此 $Ri_*(K|_Z)\oplus Rb_*(b^{-1}K)\to Rc_*(K|_E)$ 即为

$$i_*(\mathscr{F}^*|_Z)\oplus b_*(\mathscr{I}^*)\to i_*(b_*(\mathscr{I}^*)|_Z).$$

考虑伴随 $\mathscr{F}^*\to b_*\mathscr{I}^*$ 和 $\mathscr{F}^*\to i_*(\mathscr{F}^*|_Z)$, 进而得到

$$\mathscr{F}^*\to i_*(\mathscr{F}^*|_Z)\oplus b_*\mathscr{I}^*.$$

只需要证明这个映射拟同构于上面那个的核. 只需要考虑茎, 对点在 Z 的内外分别计算即可, 这个十分简单, 我们略去. □

推论 25.4. 设 X 是概形, 而 $Z\subset X$ 是有限型拟凝聚理想层定义的闭子概形. 考虑爆破:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "c"] & \mathrm{Bl}_Z X \arrow[d, "b"] \\ Z \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

则对任何 $K\in D^+_{\text{tor}}(X_{\text{ét}})$ 都有长正合列

$$\cdots\to H^p_{\text{ét}}(X,K)\to H^p_{\text{ét}}(\mathrm{Bl}_Z X,b^{-1}K)\to H^p_{\text{ét}}(Z,K|_Z)\to H^{p+1}_{\text{ét}}(X,K)\to\cdots.$$

证明. 根据命题25.3, 直接取 $R\Gamma$ 和上同调即可. □

26 平展上同调的一些应用 II——Abel 簇相关

26.1 Abel 簇的平展上同调

定理 26.1. *设 A 为域 k 上的阿贝尔簇而 ℓ 是一个与特征互素的素数. 那么*
(i) 有同构 $\bigwedge^r H^1_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell) \cong H^r_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell)$;
(ii) 考虑 Tate 模 $T_\ell A := \varprojlim A[\ell^n]$, 有同构 $H^1_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell) \cong (T_\ell A)^\vee$.

注 26.2. *复的情况下, 根据 GAGA 得知此对应为复环面, 而其奇异上同调环也是这样的结构, 细节参考 [21] 例 3.11.*

考虑 Kummer 正合列 $0 \to \boldsymbol{\mu}_{\ell^n} \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0$. 考虑自由群 $N(A) := \operatorname{Pic}(A)/\operatorname{Pic}^0(A)$, 正合列诱导出

$$0 \to N(A)/\ell^n N(A) \to H^2_{\text{ét}}(A,\boldsymbol{\mu}_{\ell^n}) \to H^2_{\text{ét}}(A,\mathbb{G}_m)[\ell^n].$$

取逆极限得到

$$0 \to N(A)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^2_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell) \to T_\ell H^2_{\text{ét}}(A,\mathbb{G}_m).$$

因为 $H^2_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell) = \bigwedge^2 H^1_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell) = \bigwedge^2 (T_\ell A)^\vee$, 故 $H^2_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell)$ 内元素可以看作反对称双线性型 $T_\ell A \times T_\ell A \to \mathbb{Z}_\ell$(即为 Weil 配对). 而映射 $N(A)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^2_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell)$ 也可以由 Weil 配对给出, 略去讨论.

26.2 Abel 簇和 Jacobi 簇

引理 26.3. *(i) Abel 簇之间的映射有 Tate 模决定;*
(ii) 对光滑射影曲线 C 及其 Jacobi 簇 J, 有 $H^1_{\text{ét}}(J,\mathbb{Z}_\ell) \cong H^1_{\text{ét}}(C,\mathbb{Z}_\ell)$.

证明. (i) 略去;
(ii) 注意到对任何代数簇都有 $H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \operatorname{Pic}(X)[n]$, 且 $C \to J$ 诱导同构 $\operatorname{Pic}^0(J) \cong \operatorname{Pic}^0(C)$, 因此得到同构 $H^1_{\text{ét}}(J,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \cong H^1_{\text{ét}}(C,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$. 取极限即可. □

定理 26.4. *设 A 为阿贝尔簇, 那么存在其上光滑曲线 C 的 Jacobi 簇 J 使得有一个满射 $J \to A$, 即所有 Abel 簇都是 Jacobi 簇的商.*

证明. 取嵌入 $A \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, 根据多次 Bertini 定理会截出光滑曲线 $C \subset A$. 根据 Gysin 序列得到满射

$$H^1_{\text{ét}}(C,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^{2g-1}_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}(g-1)).$$

再根据 Poincaré 对偶得到单射 $H^1_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell) \hookrightarrow H^1_{\text{ét}}(C,\mathbb{Z}_\ell)$. 由引理 (ii) 得到 $H^1_{\text{ét}}(J,\mathbb{Z}_\ell) \cong H^1_{\text{ét}}(C,\mathbb{Z}_\ell)$ 且 $H^1_{\text{ét}}(J,\mathbb{Z}_\ell) \cong (T_\ell J)^\vee$ 和 $H^1_{\text{ét}}(A,\mathbb{Z}_\ell) \cong (T_\ell A)^\vee$. 因此得到满射 $T_\ell J \twoheadrightarrow T_\ell A$. 根据引理 (i) 得到满射 $J \to A$. □

26.3 Mordell-Weil 定理一瞥

用一些代数数论和平展上同调知识可以证明:

定理 26.5 (弱 Mordell-Weil 定理)**.** *设 A 是整体域 K 上的一个阿贝尔簇, 设 n 在 K 内可逆, 那么 $A(K)/nA(K)$ 是有限的.*

再用 Weil 的高度配对以及完全初等的泛函分析可以得到:

定理 26.6 (Mordell-Weil 定理)**.** 设 A 是整体域 K 上的一个阿贝尔簇, 那么 $A(K)$ 是有限生成的.

这些证明可以参考笔记 MW.

27 平展上同调的一些应用 III——相关大定理和猜想一瞥

27.1 Mordell 猜想和 Grothendieck 截面猜想

Mordell 猜想是比较著名的算术定理之一, 由 Faltings 在上世纪八十年代证明, 他断言了数域上一般型曲线一定有有限个有理点.

定理 27.1 (Mordell 猜想, Faltings 定理)**.** 数域 k 上亏格不小于 2 的光滑紧合曲线 X 满足有理点个数 $\#X(k) < \infty$.

猜想 8 (Grothendieck 截面猜想)**.** 考虑 $\mathbb{Q}$ 的有限生成域扩张 k 上的亏格不小于 2 的光滑射影几何整曲线 X. 考虑注*2.4*, 固定几何点 $\bar{x}$, 任取有理点 $a \in X(k)$ 会诱导 $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) \to \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{a})$. 取 $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(X; \bar{x}, \bar{a})$, 其诱导

$$s_a : \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) \to \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{a}) \overset{\gamma^{-1}\cdot(-)\cdot\gamma}{\longrightarrow} \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}).$$

这样会给出正合列 $1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \to \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) \to 1$ 的一个截面. 于是得知不同 γ 的选取会相差 $\pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \bar{x})$-共轭, 因此得到

$$\mathscr{S}_{X/k} := \{\text{该正合列的截面}\}/\pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \bar{x})\text{-共轭}.$$

其对应 $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$-等变的 $\pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \bar{x})$-挠子群 $H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \bar{x}))$. 那么这样定义的射有限 *Kummer* 同态

$$\kappa : X(k) \to \mathscr{S}_{X/k} = H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\mathrm{sep}}}, \bar{x})), a \mapsto s_a$$

是双射.

这个猜想 (截止到现在) 还没有被证明, 这是 Grothendieck 的远 Abel 几何的一部分, 而远 Abel 几何的目的就是考虑平展基本群足够不交换的时候 (比如亏格不小于 2), 能否用平展局部群来重构这个代数簇, 这也导致了这个方向很困难也很伟大.

27.2 p 进 Hodge 理论

定理 27.2 (Faltings)**.** 设 K 是 p 进域, 对任何光滑紧合 K-概形 X 都有在 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$ 的典范同构

$$\mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong \bigoplus_q (\mathbb{C}_K(-q) \otimes_K H^{n-q}(X, \Omega^q_{X/K}))$$

其中 $\mathbb{C}_K(-q) = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(-q), G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

这里只是参观一下这个 p 进几何里非常著名的结论, 这事实上是复 Hodge 理论里 Hodge 分解的类比: 若 X 是紧 Kähler 流形, 则有 $H^n(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \Omega^q_X)$. 复的情况就是 Hodge 定理和调和形式分解的直接推论, 而 p 进的情况显然要复杂很多.

Part II
反常层基础

28 反常层简介

重新回顾一下经典 Poincaré 对偶和 Deligne 的经典结果, 这里我们考虑解析拓扑:

定理 28.1 (经典 Poincaré 对偶)**.** *设 X 是 n 维光滑复射影簇, 则杯积诱导出完美对:*

$$H^q_{\text{sing}}(M,\mathbb{Q})\times H^{2n-q}_{\text{sing}}(M,\mathbb{Q})\to H^{2n}_{\text{sing}}(M,\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}.$$

定理 28.2 (Deligne)**.** *设 $f:X\to Y$ 是复代数簇间的光滑射影映射, 则 Leray 谱序列*

$$E_2^{p,q}=H^p(Y,R^qf_*\underline{\mathbb{Q}})\Rightarrow H^{p+q}(X,\underline{\mathbb{Q}})$$

退化. 每个 $R^qf_*\underline{\mathbb{Q}}$ 的纤维的自同构群都在基本群的作用下半单.

我们想对奇异代数簇也有相同的结果, 但遗憾的是如果什么都不改动的话这是不对的:

例 28.3. *考虑 $X=\mathbb{P}^1\vee\mathbb{P}^1$, 则 $H_0(X,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ 和 $H_1(X,\mathbb{Q})=0$ 且 $H_2(X,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$, 因此不满足 Poincaré 对偶.*

例 28.4. *设 X 是光滑射影有理曲面, 设 $E\hookrightarrow X$ 是椭圆曲线使得存在收缩 $f:X\to Y$ 将 E 缩掉. 在此种情况下可以验证 Leray 谱序列不退化.*

因此我们得想办法改变一下这些上同调群来满足这些性质. 事实上我们将要构造反常层范畴 $\mathrm{Perv}(X)\subset D^b(X,\mathbb{Q})$ 和 $\underline{\mathrm{IC}}_X\in\mathrm{Perv}(X)$, 得到 $\mathrm{IH}_*(X)=H^{-*}(X,\underline{\mathrm{IC}}_X)$ (相交同调) 使得奇异的情况也可以满足上述两个定理 (甚至更推广, 即 BBDG 分解). 在此简介里我们构造一个纯拓扑的对象来一瞥相交同调如何弥补这两个定理.

设 X 是紧合复代数簇 (一般情况需要很复杂的伪流形理论, 我们略去), 维数是复 n 维. 固定闭集的分层 $X=X_n\supset X_{n-1}\supset\cdots\supset X_0$ 满足 $\dim X_i\leq i$ 且 $X_i\backslash X_{i-1}$ 是光滑且维数 i(或是空集) 的. 以下均为 $\mathbb{Q}$-系数.

定义 28.5. *(i) 我们称 $\xi\in C^i(X)$ 是被允许的如果对所有的 $c\geq 0$ 我们有*

$$\dim(|\xi|\cap X_{n-c})\leq i-2c+c-1=i-c-1.$$

注意到 $i-2c$ 是横截的维数, 而我们允许更多的维数 $c-1$, 这部分称之为反常的;

(ii) 定义 $\mathrm{IC}_i(X)=\{\xi\in C_i(X):\xi在C_i(X)被允许, 且d\xi在C_{i-1}(X)被允许\}$. 这样给出复形 $\mathrm{IC}_*(X)\subset C_*(X)$ 和同调群 $\mathrm{IH}_i(X)=H_i(\mathrm{IC}_i(X))$.

注 28.6. *(a) 群 $\mathrm{IH}_i(X)$ 和分层的选取无关 (Goresky-Macpherson);*

(b) 群 $\mathrm{IH}_i(X)$ 不是同伦不变量.

接下来我们用之前的例子来看这个定义是否满足要求:

例 28.7. *(i) 若 X 光滑, 只需选取 $X = X_n, X_i = \emptyset, i < n$ 即可;*

(ii) 考虑 $X = \mathbb{P}^1 \vee \mathbb{P}^1$, 结点为 $x \in X$, 考虑分层 $X = X_1 \supset X_0 = \{x\}$. 注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{IC}_0(X) &= \{\xi \in C_0(X) : x \notin \xi\} = C_0(X \backslash \{x\}) \\
\mathrm{IC}_0(X) &= \{\xi \in C_1(X) : x \notin \xi\} = C_1(X \backslash \{x\}) \\
\mathrm{IC}_0(X) &= \{\xi \in C_2(X) : x \notin d\xi\} = C_1(X \backslash \{x\}).
\end{aligned}$$

因此得到 $\mathrm{IH}_0(X) = H_0(X \backslash \{x\})$ 且 $\mathrm{IH}_1(X) = 0, \mathrm{IH}_2(X) = H_2(X)$, 因此满足 Poincaré 对偶!

这部分笔记会把一开始的一些范畴论和同调代数里过于容易的证明略去, 使得笔记更加的清晰明了. 笔记参考的是 B. Bhatt 的课程讲义 [3], 我们只对反常层这一概念一瞥, 而非像第一部分平展上同调那样详细考虑, 有关详细的内容请参考其他书, 例如拓扑向的 [14], 表示论向的 [22] 还有平展上同调和 Weil 猜想向的 [25](我们更接近这个).

29 Grothendieck Abel 范畴

定义 29.1 (Grothendieck Abel 范畴)**.** *设 $\mathscr{A}$ 是一个 Abel 范畴, 称之为 Grothendieck Abel 范畴如果满足:*

(i) $\mathscr{A}$ 存在无限直和;

(ii) $\mathscr{A}$ 上的滤余极限都正合;

(iii) 存在 $X \in \mathscr{A}$ (生成元) 使得对任何 $Y \in \mathscr{A}$ 都有 $X^{\oplus I} \twoheadrightarrow Y$.

例 29.2. *(i) 范畴 Mod_R 和 $\mathrm{Qcoh}(X)$ 都是 Grothendieck Abel 范畴 (Gabber);*

(ii) 拓扑空间 X 上的 $\mathrm{Ab}(X)$ 一定是 Grothendieck Abel 范畴, 例如定义

$$F = \bigoplus_{j: U \hookrightarrow X} j_! \mathbb{Z}$$

即为生成元.

定理 29.3 (Grothendieck)**.** *若 $\mathscr{A}$ 是 Grothendieck Abel 范畴, 则 $\mathscr{A}$ 足够内射, 且内射预解有函子性.*

证明. 参考 [24] 第 9.6 节. □

30 t-结构基础

30.1 t-结构基本定义和例子

给定三角范畴 $\mathscr{D}$.

定义 30.1. *设 $\mathscr{D}$ 的两个满子范畴 $\mathscr{D}^{\le 0}, \mathscr{D}^{\ge 0}$, 我们称对 $(\mathscr{D}^{\le 0}, \mathscr{D}^{\ge 0})$ 给了一个 $\mathscr{D}$ 上的 t 结构, 如果满足*

(a) 设 $\mathscr{D}^{\le n} := \mathscr{D}^{\le 0}[-n], \mathscr{D}^{\ge n} := \mathscr{D}^{\ge 0}[-n]$, 则 $\mathscr{D}^{\le -1} \subset \mathscr{D}^{\le 0}, \mathscr{D}^{\ge 1} \subset \mathscr{D}^{\ge 0}$;

(b) 有 $\mathrm{Hom}(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 1}) = 0$;

(c) 任取 $X \in \mathscr{D}$, 存在 $Y \in \mathscr{D}^{\geq 0}$ 和 $Z \in \mathscr{D}^{\geq 1}$ 满足有好三角:

$$Y \to X \to Z \to Y[1].$$

设 $\mathscr{D}^{\heartsuit} = \mathscr{D}^{\leq 0} \cap \mathscr{D}^{\geq 0}$ 为 t-结构的中心 *(heart/core)*. 如果 $\bigcap_n \mathscr{D}^{\geq n} = \bigcap_n \mathscr{D}^{\leq n} = 0$ 我们称 t-结构非退化.

例 30.2. *(i)* 给定任意三角范畴 $\mathscr{D}$, 可以给出平凡 t-结构 $\mathscr{D}^{\leq 0} = \mathscr{D}, \mathscr{D}^{\geq 0} = 0$;

(ii) 给定 *Abel* 范畴, 考虑导出范畴 $\mathscr{D} := D(\mathscr{A})$, 设

$$\mathscr{D}^{\leq 0} = \{K \in \mathscr{D} : H^i(K) = 0, i > 0\};$$
$$\mathscr{D}^{\geq 0} = \{K \in \mathscr{D} : H^i(K) = 0, i < 0\}.$$

不难验证 t-结构的第一条显然成立. 第三条只需考虑如下截断带来的好三角 (甚至是短正合列):

$$\tau^{\leq 0}(X) \to X \to \tau^{\geq 1}(X) \to \tau^{\leq 0}(X)[1].$$

第二条如下: 考虑 $K \in \mathscr{D}^{\leq 0}, L \in \mathscr{D}^{\geq 1}$, 取 $f : K \to L$ 及其表示为:

$$\begin{tikzcd}
 & \tau^{\leq 0}K' \arrow[dl, "{\alpha,\mathrm{qis}}"'] \arrow[d, dashed, "{\beta,\mathrm{qis}}"] \arrow[dr, "g"] & \\
K & K' \arrow[l, "\mathrm{qis}"] \arrow[r] & L
\end{tikzcd}$$

其中我们将 K' 代替为 $\tau^{\leq 0}K'$. 注意到 $g = 0$, 故 $f = 0$. 于是得到 t-结构.

因此 t-结构是导出范畴的某一方面的推广, 在下一节我们会更加看到这样的性质.

30.2 t-结构上的典范函子

引理 30.3. 设 $\mathscr{D}$ 是三角范畴, 对 $i \in \{1, 2\}$, 考虑两个好三角

$$X \to Y \to Z \xrightarrow{d_i} X[1],$$

若 $\mathrm{Hom}(X[1], Z) = 0$, 则 $d_1 = d_2$.

证明. 只需考虑如下图表:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & Z \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "c"] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r, "d_2"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

其中 c 根据三角范畴公理得到. 不难追图得知 $\mathrm{id}_Z = c$, 因此得知. □

命题 30.4. *设 $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ 是三角范畴 $\mathscr{D}$ 上的 t-结构.*

(i) 含入 $\mathscr{D}^{\leq n} \to \mathscr{D}$ 存在右伴随 $\tau^{\leq n} : \mathscr{D} \to \mathscr{D}^{\leq n}$, 由典范映射 $\tau^{\leq n}(X) \to X$ 给出;

(ii) 含入 $\mathscr{D}^{\geq n} \to \mathscr{D}$ 存在左伴随 $\tau^{\geq n} : \mathscr{D} \to \mathscr{D}^{\geq n}$, 由典范映射 $X \to \tau^{\geq n}(X)$ 给出;

(iii) 对任何 $X \in \mathscr{D}$, 存在唯一 $\delta : \tau^{\geq n+1}(X) \to \tau^{\leq n}(X)[1]$ 使得有好三角

$$\tau^{\leq n}(X) \to X \to \tau^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{\delta} \tau^{\leq n}(X)[1]$$

(通常称之为标准三角) 且 δ 有函子性.

证明. 平移 n 位不妨设 $n = 0$, 根据 t-结构公理 (c) 即可得到 (i)(ii). 而 (iii) 再次使用 t-结构公理 (c), 唯一性由引理30.3和 t-结构公理 (b) 得到. □

推论 30.5. *关于 $\tau^{\leq n}, \tau^{\geq n}$ 有如下性质:*

(i) 我们有 $\tau^{\leq n}(X[m]) = (\tau^{\leq n+m}(X))[m]$ 和 $\tau^{\geq n}(X[m]) = (\tau^{\geq n+m}(X))[m]$;

(ii) $X \in \mathscr{D}^{\leq n}$ 当且仅当 $\tau^{\leq n}(X) \cong X$ 当且仅当 $\tau^{>n}(X) = 0$, 而 $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$ 当且仅当 $\tau^{\geq n}(X) \cong X$ 当且仅当 $\tau^{<n}(X) = 0$;

(iii) 对好三角 $X \to Y \to Z \to X[1]$, 若 $X, Z \in \mathscr{D}^{\leq n}$, 则 $Y \in \mathscr{D}^{\leq n}$; 若 $X, Z \in \mathscr{D}^{\geq n}$, 则 $Y \in \mathscr{D}^{\geq n}$;

(iv) 若 $a < b$, 则 $\tau^{\leq a} \circ \tau^{\leq b} = \tau^{\leq a} = \tau^{\leq b} \circ \tau^{\leq a}$ 且 $\tau^{\leq a} \circ \tau^{\geq b} = 0 = \tau^{\geq b} \circ \tau^{\leq a}$, 且 $\tau^{\geq a} \circ \tau^{\geq b} = \tau^{\geq b} = \tau^{\geq b} \circ \tau^{\geq a}$;

(v) 对任何 $a, b \in \mathbb{Z}$ 都有典范同构 $\tau^{\leq a} \circ \tau^{\geq b} \cong \tau^{\geq b} \circ \tau^{\leq a}$.

证明. (i)(ii)(iv) 皆为定义和伴随性得到,(iii) 也很容易验证, 此处略去. 而 (v) 则需要八面体公理, 略去细节参考 [22] 命题 8.1.8. □

30.3 中心 $\mathscr{D}^{\heartsuit}$ 的性质

固定三角范畴 $\mathscr{D}$. 我们会看到更多的和导出范畴类似的性质.

定义 30.6. *定义 $H^0 : \mathscr{D} \to \mathscr{D}^{\heartsuit}$ 为 $X \mapsto (\tau^{\leq 0} \circ \tau^{\geq 0})(X)$ 和 $H^n(-) := H^0((-)[n])$.*

引理 30.7. *(i) 对任何 $X \in \mathscr{D}$, 都有好三角*

$$H^n(X)[-n] \to \tau^{\geq n}(X) \to \tau^{\geq n+1}(X) \to H^n(X)[-n+1],$$

特别的, 若 $X \in \mathscr{D}^{\geq a}$, 则 $X \in \mathscr{D}^{\geq n}$ 当且仅当对所有的 $i < n$ 都有 $H^i(X) = 0$;

(ii) 若有好三角 $X \to Y \to Z \to X[1]$, 若 $X, Z \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$, 则 $Y \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$.

证明. (i) 只需要对 $\tau^{\geq n}(X)$ 运用标准好三角即可;

(ii) 用两次推论30.5(iii) 即可. □

注 30.8. *对于 (ii), 若 $X, Y \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$, 则 Z 不一定. 参考如下好三角:*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{Z}[1].$$

定理 30.9. *$\mathscr{D}^{\heartsuit}$ 是 Abel 范畴.*

证明. 加性根据30.5(iii) 得到. 现在取 $X, Y \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$ 和 $f : X \to Y$. 取好三角

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1].$$

不难得知 $Z \in \mathscr{D}^{\leq 0} \cap \mathscr{D}^{\geq -1}$.

• **断言 1.** 复合 $Y \to Z \to H^0(Z)$ 是 f 的余核, 而 $H^{-1}(Z) \to Z[-1] \to X$ 是 f 的核.

固定 $W \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$, 对好三角取 $\mathrm{Hom}(-, W)$ 得到正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(H^0(Z), W) \to \mathrm{Hom}(Y, W) \to \mathrm{Hom}(Z, W),$$

根据定义得知 $Y \to Z \to H^0(Z)$ 是 f 的余核, 对偶的得到 $H^{-1}(Z) \to Z[-1] \to X$ 是 f 的核.

• **断言 2.** 我们有 $\mathrm{coim}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$.

对典范映射 $\alpha : Y \to \mathrm{coker}(f), \beta : \ker f \to X$ 我们有 $\mathrm{coim}(f) = \mathrm{coker}\beta = \mathrm{cone}(\beta)$, 类似的我们也有 $\mathrm{Im}(f) = \ker \alpha = \mathrm{cone}(\alpha)[-1]$, 故我们只需要证明 $\mathrm{cone}(\beta) \cong \mathrm{cone}(\alpha)[-1]$. 根据八面体公理得到如下行列均正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
H^{-1}(Z) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & \mathrm{cone}(\beta) \arrow[d] \\
Z[-1] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
H^0(Z)[-1] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Q
\end{tikzcd}$$

不难看出所有元素都在 $\mathscr{D}^{\heartsuit}$ 内. 最下面一行得到 $Q \cong H^0(Z)$, 不难得到 $Y \to Q$ 和 $Y \to H^0(Z)$ 相同, 那么根据最右面的列即可得到结论. □

注 30.10. *事实上 t-结构的中心也唯一确定了 t-结构本身: 这是因为中心会确定函子 H^0, 经过平移会得到 t-结构.*

推论 30.11. *设 $X, Y, Z \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$, 则 $0 \to X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z \to 0$ 正合当且仅当存在唯一好三角 $X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z \to X[1]$.*

证明. $\Leftarrow$ 是因为 $\ker a = H^0(Z) = Z, \mathrm{coker} a = H^{-1}(Z) = 0$;

$\Rightarrow$. 注意到 a 单射当且仅当 $\ker a = 0$ 当且仅当 $H^{-1}(\mathrm{cone}(a)) = 0$ 当且仅当有

$$\mathrm{cone}(a) \cong H^0(\mathrm{cone}(a)) = \mathrm{coker} a = Z.$$

故 $\mathrm{cone}(a)$ 是 $X \to Y$ 的好三角的一部分且限制在非零同调处, 因此有好三角 $X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z \to X[1]$. 唯一性根据引理30.3给出. □

推论 30.12. *设 $X, Z \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$, 则*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}^{\heartsuit}}(Z, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Z, X[1]) =: \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}}(Z, X).$$

此处前者是指扩张之意而非导出函子.

证明. 取 $(0 \to Y \to Y \to Z \to 0) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}^\heartsuit}(Z, X)$, 由上述推论得到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Z, X[1])$ 元素; 反之取 $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Z, X[1])$, 补齐得到好三角

$$Z \xrightarrow{\delta} X[1] \to \mathrm{cone}(\delta) \to Z[1].$$

进而得到好三角 $X \to \mathrm{cone}(\delta)[-1] \to Z \xrightarrow{\delta} X[1]$. 由于 $X, Z \in \mathscr{D}^\heartsuit$, 故根据引理30.7(ii) 得到 $\mathrm{cone}(\delta)[-1] \in \mathscr{D}^\heartsuit$, 故再根据上述推论即可得到结果. □

注 30.13. *(i) 一般来说 $D(\mathscr{D}^\heartsuit) \neq \mathscr{D}$, 但 Beilinson 证明了反常层和可构建层情况下 $D(\mathscr{D}^\heartsuit) \cong \mathscr{D}$, 因此我们考虑的情况比较好;*

(ii) 这个推论对高阶的 Ext 不成立. 例如 $X = S^2$, 取 $\mathscr{D} := D_{\mathrm{Loc}}(X)$ 是上同调为局部常值的子范畴. 可以得知对于典范的 $\mathscr{D}^{\leq 0}$ 和 $\mathscr{D}^{\geq 0}$ 定义了一个 t-结构. 则 $\mathscr{D}^\heartsuit \cong \mathrm{Loc}(X)$. 因为 $\pi_1(X) = 0$, 故同构于 Abel 群范畴 (monodromy 表示). 故我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{D}^\heartsuit}(\underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Z}}) &= \mathrm{Ext}^2_{\mathrm{Ab}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0,\\
\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{D}}(\underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Z}}) &= H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

因此不对;

(iii) 更多的, 是否 $\mathscr{D}^\heartsuit \hookrightarrow \mathscr{D}$ 会延拓成正合函子 $D^b(\mathscr{D}^\heartsuit) \to \mathscr{D}$? 在一般情况下这个我们是未知的, 但如果赋予更多结构的话我们有肯定的情况: Beilinson 证明了纤维导出范畴的情况; Lurie 证明了 ∞-范畴的情况. 鉴于这个是纯同调代数的, 我们略去证明. 反常 t-结构的情况参考 Beilinson 基本引理.

定理 30.14. *函子 $H^0 : \mathscr{D} \to \mathscr{D}^\heartsuit$ 是上同调函子.*

简要证明. 在 $\mathscr{D}$ 中取定好三角 $X \to Y \to Z \to X[1]$, 只需证明 $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z)$ 是正合的. 我们忽略掉追图的细节, 只给出主要图表, 细节参考 [22] 命题 8.1.11.

- **步骤 1.** 若 $X, Y, Z \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, 则 $0 \to H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z)$ 是正合的.

任取 $A \in \mathscr{D}^\heartsuit$, 对 $X \to Y \to Z \to X[1]$ 运用 $\mathrm{Hom}(A, -)$ 引出长正合列为

$$0 = \mathrm{Hom}(A, Z[1]) \to \mathrm{Hom}(A, H^0(X)) \to \mathrm{Hom}(A, H^0(Y)) \to \mathrm{Hom}(A, H^0(Z)),$$

根据 Yoneda 引理即可.

- **步骤 2.** 若 $Z \in \mathscr{D}^{\geq 0}$, 则 $0 \to H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z)$ 是正合的; 若 $X \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, 则 $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z) \to 0$ 是正合的.

只考虑第一种, 第二个是对偶的. 首先根据 t-结构公理 (b) 得到 $\tau^{<0}(X) = \tau^{<0}(Y)$, 根据八面体公理得到

$$\begin{tikzcd}
\tau^{<0}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \tau^{<0}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
\tau^{\geq 0}(X) \arrow[r] & \tau^{\geq 0}(Y) \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

其中行列均为好三角. 对最底下一行用步骤 1 即可.

- **步骤 3.** 完成一般情况的证明.

继续用八面体公理得到

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq 0}(X) \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
\tau^{>0}(X) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Q
\end{tikzcd}$$

因此 $Q \cong (\tau^{>0}(X))[1]$. 然后对其中某些行/列用步骤 2 即可. □

定义 30.15. 设 $F : \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_2$ 是三角函子, 设 $(\mathscr{D}_1^{\leq 0}, \mathscr{D}_1^{\geq 0})$ 和 $(\mathscr{D}_2^{\leq 0}, \mathscr{D}_2^{\geq 0})$ 是其上的 t-结构.

(a) 我们称 F 是 t-左正合的如果 $F(\mathscr{D}_1^{\geq 0}) \subset \mathscr{D}_2^{\geq 0}$;

(b) 我们称 F 是 t-右正合的如果 $F(\mathscr{D}_1^{\leq 0}) \subset \mathscr{D}_2^{\leq 0}$;

(c) 我们称 F 是 t-正合的如果其 t-左正合且 t-右正合.

设 ${}^pF := H^0 \circ F \circ \iota : \mathscr{D}_1^{\heartsuit} \to \mathscr{D}_2^{\heartsuit}$.

例 30.16. 例如 *Abel* 范畴间 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 左正合函子, 则 $RF : D(\mathscr{A}) \to D(\mathscr{B})$ 是 t-左正合的.

30.4 挠对定义 t-结构

一个三角范畴上可能有很多 t-结构, 下面的结论我们可以感受得到.

定义 30.17. 设 $\mathscr{A}$ 是 *Abel* 范畴, 对于满子范畴 $T, F \subset \mathscr{A}$, 我们称 $\alpha = (T, F)$ 是一个挠对, 如果满足:

(a) $T, F \subset \mathscr{A}$ 是加性满子范畴;

(b) $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$;

(c) 对所有 $X \in \mathscr{A}$ 都存在 $Y \in T, Z \in F$ 使得 $0 \to Y \to X \to Z \to 0$ 正合.

定义 30.18. 设 $\mathscr{A}$ 是 *Abel* 范畴且 $\mathscr{D} := D(\mathscr{A})$ 是其导出范畴, 取 $\alpha = (T, F)$ 是一个挠对, 定义

$$\begin{aligned}
{}^{\alpha}\mathscr{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathscr{D} : \text{对所有} i > 0 \text{都有} H^i(K) = 0, H^0(K) \in T\}, \\
{}^{\alpha}\mathscr{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathscr{D} : \text{对所有} i < -1 \text{都有} H^i(K) = 0, H^{-1}(K) \in F\}.
\end{aligned}$$

例如 $T = \mathscr{D}, F = 0$, 考虑一般的 $\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0}$ 即可.

命题 30.19. 设 $\mathscr{A}$ 是 *Abel* 范畴且 $\mathscr{D} := D(\mathscr{A})$ 是其导出范畴, 取 $\alpha = (T, F)$ 是一个挠对, 则 $({}^{\alpha}\mathscr{D}^{\leq 0}, {}^{\alpha}\mathscr{D}^{\geq 0})$ 是其上的一个 t-结构. 则中心为

$${}^{\alpha}\mathscr{D}^{\heartsuit} := \{K \in \mathscr{D} : \text{对所有} i \neq 0, -1 \text{都有} H^i(K) = 0, H^0(K) \in T, H^{-1}(K) \in F\}$$

是个 *Abel* 范畴.

证明. 我们忽略这个证明, 参考笔记Math731断言 9.3. □

例 30.20. 设 $\mathscr{A} := \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^1)$, 任取 $S \subset \mathbb{P}^1$. 设 T 是支撑在 S 上的元素, 而 F 是所有截面都不在 S 上支撑的元素. 不难得知 $\alpha = (T, F)$ 是一个挠对. 因此上述构造可以得到很多 t-结构.

31 t-结构的粘合

在一般拓扑或者平展上同调里面我们通常会考虑 $U \overset{j}{\hookrightarrow} X \overset{i}{\hookleftarrow} Z$, 其中 U 开且 Z 闭. 会考虑函子 $j_*, j_!, j^{-1} = j^!, i_* = i_!, i^{-1}, i^!$ 及其关系. 我们通常想将 $D(Z), D(U)$ 上的 t 结构粘合得到 $D(X)$ 上的 t-结构. 现在我们将这个结构抽象出来, 可以在平展上同调甚至几乎数学里使用. 这部分源自论文 [1, BBD], 值得一提的是其新版本 [2, BBDG] 增加了 Gabber 的名字, 这是因为原始文章 [1, BBD] 一开始就声称: Il avait d'abord été prévu que O. Gabber soit coauteur du présent article. Il a préféré s'en abstenir pour ne pas être coresponsable des erreurs ou imprécisions qui s'y trouvent. 简要来说就是 Gabber 最初被认为是合著者, 但其更希望没有提到他的名字, 这样就不会对文章的错误负责.

► **基础设置.** 设 $\mathscr{D}, \mathscr{D}_U, \mathscr{D}_F$ 是三角范畴, 且有两个三角函子

$$\mathscr{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathscr{D} \xrightarrow{j^{-1}} \mathscr{D}_U.$$

设 $i_! = i_*, j^! = j^{-1}$. 我们称这些为粘合设置, 如果满足如下公理:

- (R1) i_* 有左伴随 i^{-1} 和右伴随 $i^!$;
- (R2) j^{-1} 有左伴随 $j_!$ 和右伴随 j_*;
- (R3) $j^{-1}i_* = 0 (\Rightarrow i^{-1}j_! = i^!j_* = 0)$;
- (R4) 对任何 $K \in \mathscr{D}$ 都有 δ, δ' 满足如下好三角:

$$j_!j^{-1}K \to K \to i_*i^{-1}K \xrightarrow{\delta} j_!j^{-1}K[1],$$
$$i_*i^!K \to K \to j_*j^{-1}K \xrightarrow{\delta'} i_*i^!K[1].$$

  注意到根据引理30.3和 (R3) 得知此时 δ, δ' 是唯一的;

- (R5) $j_!, j_*, i_*$ 是满忠实函子. 因此根据 (R1)(R2) 得到同构:

$$i^{-1}i_* \cong \mathrm{id} \cong i^!i_*, \quad j^{-1}j_* \cong \mathrm{id} \cong j^{-1}j_!.$$

注 31.1. *(a)* $(i_*\mathscr{D}_F, j^{-1}\mathscr{D}_U)$ *和* $(j_!\mathscr{D}_U, i_*\mathscr{D}_F)$ *都是* t*-结构. 这可以根据 (R3)(R4) 得到* t*-结构. 注意到* t*-结构的中心是* 0*;*

(b) 因此我们有

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_F \arrow[r, "i_*"] & \mathscr{D} \arrow[l, bend right, "i^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^{-1}"] & \mathscr{D}_U \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

是三条 Verdier 商的正合列.

定理 31.2. *设* $\mathscr{D}, \mathscr{D}_U, \mathscr{D}_F$ *是三角范畴和一套粘合设置 (如上讨论), 假设有* t*-结构* $(\mathscr{D}_U^{\le 0}, \mathscr{D}_U^{\ge 0})$ *和* $(\mathscr{D}_F^{\le 0}, \mathscr{D}_F^{\ge 0})$*. 定义*

$$\mathscr{D}^{\le 0} := \{K \in \mathscr{D} : j^{-1}K \in \mathscr{D}_U^{\le 0}, i^{-1}K \in \mathscr{D}_F^{\le 0}\};$$
$$\mathscr{D}^{\ge 0} := \{K \in \mathscr{D} : j^{-1}K \in \mathscr{D}_U^{\ge 0}, i^!K \in \mathscr{D}_F^{\ge 0}\}.$$

则 $(\mathscr{D}^{\le 0}, \mathscr{D}^{\ge 0})$ *赋予一个* t*-结构.*

证明. 证明略去, 因为 Bhargav 声称自己也不知道他们怎么来的, 那我也不太想知道了. 参考 [1] 定理 1.4.10, 我们只算一个例子如下. $\square$

例 31.3. 设 $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \vee \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 赋予复拓扑, 结点为 x, 定义 $Z = \{x\}, U = X \backslash Z$. 考虑 $\mathscr{D}_F := D(Z) = D(\mathrm{Ab})$ 赋予标准 t-结构且 $\mathscr{D}_U := D(U)$ 赋予 $(D^{\leq -1}(U), D^{\geq -1}(U))$. 因此我们得到 $\mathscr{D} := D(X)$ 上的 t-结构为

$$\mathscr{D}^{\leq 0} := \{K \in D(X) : j^{-1}K \in D^{\leq -1}(U), i^{-1}K \in D^{\leq 0}(Z)\};$$
$$\mathscr{D}^{\geq 0} := \{K \in D(X) : j^{-1}K \in D^{\geq -1}(U), i^{!}K \in D^{\geq 0}(Z)\}.$$

我们断言:

(a) $j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$;

(b) $\underline{\mathbb{Z}}[1] \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$;

(c) $j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] \to \underline{\mathbb{Z}}[1]$ 在 $\mathscr{D}^{\heartsuit}$ 满射.

证明. (a) 在此种情况下 $j^{-1}Rj_* \cong \mathrm{id}$, 我们有好三角

$$j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] = j_!j^{-1}Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1] \to Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1] \to i_*i^{-1}Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1] \to (j_!\underline{\mathbb{Z}}[1])[1].$$

注意到 $i^{-1}Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1] = \mathrm{hocolim}_{V \ni x} R\Gamma(V \backslash \{x\}, \underline{\mathbb{Z}}[1]) = R\Gamma(S^1 \sqcup S^1, \underline{\mathbb{Z}}[1]) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}[1] \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, 故我们有好三角 $j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] \to Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1] \to i_*(\underline{\mathbb{Z}}^{\oplus 2}[1] \oplus \underline{\mathbb{Z}}^{\oplus 2}) \to (j_!\underline{\mathbb{Z}}[1])[1]$. 则我们有

$$i^!j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] = i^!i_*(\underline{\mathbb{Z}}^{\oplus 2}[1] \oplus \underline{\mathbb{Z}}^{\oplus 2})[-1] = \underline{\mathbb{Z}}^{\oplus 2} \oplus \underline{\mathbb{Z}}^{\oplus 2}[-1] \in D^{\geq 0}(Z).$$

同理作用 j^{-1} 得到 $j^{-1}j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] = \underline{\mathbb{Z}}[1] \in D^{\geq -1}(U)$, 故 $j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] \in \mathscr{D}^{\geq 0}$. 同理作用 i^{-1} 得到 $j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$.

(b) 好三角 $i_*i^!\underline{\mathbb{Z}}[1] \to \underline{\mathbb{Z}}[1] \to Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1] \to$ 取茎得到好三角

$$i^!\underline{\mathbb{Z}}[1] \to \mathbb{Z}[1] \to Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1] \to \mathbb{Z}^{\oplus 2}[1] \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 2} \to .$$

诱导上同调长正合列给出 $H^{-1}(i^!\underline{\mathbb{Z}}[1]) = 0, H^0(i^!\underline{\mathbb{Z}}[1]) = \mathbb{Z}, H^1(i^!\underline{\mathbb{Z}}[1]) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$. 类似的也可以得到 $j^{-1}\underline{\mathbb{Z}}[1]$ 的情况, 最终得到

$$i^!\underline{\mathbb{Z}}[1] = \underline{\mathbb{Z}}[0] \oplus \underline{\mathbb{Z}}^{\oplus 2}[-1] \in D^{\geq 0}(Z), \quad j^{-1}\underline{\mathbb{Z}}[1] = \underline{\mathbb{Z}}[1] \in D^{\geq -1}(U).$$

另一方面也类似, 因此得到 $\underline{\mathbb{Z}}[1] \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$;

(c) 注意到有好三角 $j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] \to \underline{\mathbb{Z}}[1] \to i_*\underline{\mathbb{Z}}[1] \to$, 作用新的 t-结构的 H^0(记为 ${}^pH^0$) 再根据 (a)(b) 得到

$$\cdots \to {}^pH^0(j_!\underline{\mathbb{Z}}[1]) = j_!\underline{\mathbb{Z}}[1] \to {}^pH^0(\underline{\mathbb{Z}}[1]) = \underline{\mathbb{Z}}[1] \to {}^pH^0(i_*\underline{\mathbb{Z}}[1]) \to \cdots.$$

只需证明 ${}^pH^0(i_*\underline{\mathbb{Z}}[1]) = 0$. 显然 i_* 是 t-正合的, 则

$${}^pH^0(i_*\underline{\mathbb{Z}}[1]) = i_*{}^pH^0(\underline{\mathbb{Z}}[1]) = 0,$$

因此成立. $\square$

注 31.4. 这是 *Beilinson* 基本引理的一个特例. 此外这里的相交上同调复形是 $\mathbb{Z}[1]$, 这就是为什么我们计算这个.

32 Goresky-Macpherson 扩张和单对象

考虑上一节的粘合 t-结构. 设 $\mathscr{D}, \mathscr{D}_U, \mathscr{D}_F$ 是三角范畴和一套粘合设置, 假设有 t-结构 $(\mathscr{D}_U^{\leq 0}, \mathscr{D}_U^{\geq 0})$ 和 $(\mathscr{D}_F^{\leq 0}, \mathscr{D}_F^{\geq 0})$. 定义

$$\mathscr{D}^{\leq 0} := \{K \in \mathscr{D} : j^{-1}K \in \mathscr{D}_U^{\leq 0}, i^{-1}K \in \mathscr{D}_F^{\leq 0}\};$$
$$\mathscr{D}^{\geq 0} := \{K \in \mathscr{D} : j^{-1}K \in \mathscr{D}_U^{\geq 0}, i^{!}K \in \mathscr{D}_F^{\geq 0}\}.$$

则得到 t-结构 $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$. 对 $j_!, j_*, i_*, \ldots$ 定义出中心间的反常函子 ${}^p j_!, {}^p j_*, {}^p i_*, \ldots$ 如下:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_U^{\heartsuit} & \xrightarrow{{}^p j_!} & \mathscr{D}^{\heartsuit} \\ \downarrow & & \uparrow {}^p H^0 \\ \mathscr{D}_U & \xrightarrow{j_!} & \mathscr{D} \end{array}$$

(只定义一个, 其他类似).

32.1 一些正合性质

命题 32.1. *如上假设, 我们有:*

(i) j^{-1}, i_* 是 t-正合的;

(ii) $j_!, i^{-1}$ 是 t-右正合的, 且 $j_*, i^!$ 是 t-左正合的;

(iii) 对 $({}^p j_!, {}^p j^{-1}), ({}^p j^{-1}, {}^p j_*)$ 是 $\mathscr{D}_U^{\heartsuit}$ 和 $\mathscr{D}^{\heartsuit}$ 间的伴随对;

(iv) 对 $({}^p i^{-1}, {}^p i_*), ({}^p i_*, {}^p i^!)$ 是 $\mathscr{D}_F^{\heartsuit}$ 和 $\mathscr{D}^{\heartsuit}$ 间的伴随对;

(v) 我们有 ${}^p j^{-1} \circ {}^p i_* = 0$(伴随性给出 ${}^p i^{-1} \circ {}^p j_! = {}^p i^! \circ {}^p j_* = 0$);

(vi) 对任何 $A \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$ 我们有正合列

$$0 \to {}^p i_* H^{-1}(i^{-1}A) \to {}^p j_! {}^p j^{-1} A \to {}^p i_* {}^p i^{-1} A \to 0,$$
$$0 \to {}^p i_* {}^p i^! A \to A \to {}^p j_* {}^p j^{-1} A \to {}^p i_* H^1(i^! A) \to 0;$$

(vii) 函子 ${}^p i_*, {}^p j_*, {}^p j_!$ 是满忠实函子;

(viii) 函子 ${}^p i_* : \mathscr{D}_F^{\heartsuit} \to \mathscr{D}^{\heartsuit}$ 诱导等价 $\mathscr{D}_F^{\heartsuit} \cong \overline{\mathscr{D}_F^{\heartsuit}} = \{A \in \mathscr{D}^{\heartsuit} : {}^p j^{-1} A = 0\}$;

(ix) 函子 ${}^p j^{-1} : \mathscr{D}^{\heartsuit} \to \mathscr{D}_U^{\heartsuit}$ 诱导等价 $\mathscr{D}^{\heartsuit} / \overline{\mathscr{D}_F^{\heartsuit}} \cong \mathscr{D}_U^{\heartsuit}$.

证明. 无聊的同调代数罢了, 参考 [1] 第 1.4 节命题 1.4.16 之后的内容. □

32.2 Goresky-Macpherson 扩张

设 $\mathscr{D}, \mathscr{D}_U, \mathscr{D}_F$ 是三角范畴和一套粘合设置, 假设有 t-结构 $(\mathscr{D}_F^{\leq 0}, \mathscr{D}_F^{\geq 0})$.

定义 32.2. 我们称 $Y \in \mathscr{D}_U$ 的一个扩张是指 $X \in \mathscr{D}$ 使得 $j^{-1}X = Y$.

例 32.3. 取 $X = j_! Y$ 或者 $j_* Y$ 知道扩张总是存在的.

命题 32.4. *对任意的 $Y \in \mathscr{D}_U$ 和 $p \in \mathbb{Z}$ 都存在唯一的扩张 $X \in \mathscr{D}$ 满足*

$$i^{-1}X \in \mathscr{D}_F^{\leq p-1}, i^! X \in \mathscr{D}_F^{\geq p+1}.$$

证明. 考虑退化 t-结构 $(\mathscr{D}_U, 0)$ 和 $(\mathscr{D}_F^{\leq 0}, \mathscr{D}_F^{\geq 0})$ 粘合得到新的 $\mathscr{D}$ 的 t-结构. 则其继承了截断 ${}^F\tau^{\leq i}: \mathscr{D} \to \mathscr{D}$(只对 $\mathscr{D}_F$ 内的管用):

$$\mathscr{D}^{\leq 0} := \{K \in \mathscr{D} : i^{-1}K \in \mathscr{D}_F^{\leq 0}\};$$
$$\mathscr{D}^{\geq 0} := \{K \in \mathscr{D} : j^{-1}K = 0, i^!K \in \mathscr{D}_F^{\geq 0}\}.$$

- **断言.** 函子 i^{-1} 对此 t-结构正合.

  断言的证明. 只需证明 $i^{-1}(\mathscr{D}^{\geq 0}) \subset \mathscr{D}_F^{\geq 0}$. 对任意 $X \in \mathscr{D}$ 考虑好三角 ${}^F\tau^{<0}X \to X \to {}^F\tau^{\geq 0}X$ 得到如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
j_!j^{-1F}\tau^{<0}X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & j_!j^{-1}X \arrow[r] \arrow[d] & j_!j^{-1F}\tau^{\geq 0}X = 0 \arrow[d] \\
{}^F\tau^{<0}X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & {}^F\tau^{\geq 0}X \arrow[d, "\cong"] \\
i_*i^{-1F}\tau^{<0}X \arrow[r] & i_*i^{-1}X \arrow[r] & i_*i^{-1F}\tau^{\geq 0}X
\end{tikzcd}$$

  其中 $j_!j^{-1F}\tau^{\geq 0}X = 0$ 是因为 $\mathscr{D}_U^{\geq 0} = 0$ 且不难验证 j^{-1} 对此 t-结构正合. 因此有 $i^{!F}\tau^{\geq 0}X \cong i^!i_*i^{-1F}\tau^{\geq 0}X = i^{-1F}\tau^{\geq 0}X$, 因此根据命题32.1(ii) 得到 $i^!$ 是 t-左正合的, 于是得到断言. □

回到原结论的证明. 考虑 Y 的任意扩张 X, 考虑 $i_*i^!X \to X \to j_*j^{-1}X$ 作用 i^{-1} 并旋转一次得到好三角

$$i^{-1}X \to i^{-1}j_*Y \to i^!X[1]$$

进而得到结论条件当且仅当 $i^{-1}X \cong \tau^{\leq p-1}(i^{-1}j_*Y)$. 我们假设 $X = {}^F\tau^{\leq p-1}(j_*Y)$, 首先根据 j^{-1} 是 t-正合的, 则 $j^{-1}X = {}^U\tau^{\leq p-1}(j^{-1}j_*Y) = Y$, 故 X 是 Y 的一个扩张. 再根据断言得到 $i^{-1}X \cong \tau^{\leq p-1}(i^{-1}j_*Y)$, 因此存在性成立. 唯一性略去. □

现在考虑有 t-结构 $(\mathscr{D}_U^{\leq 0}, \mathscr{D}_U^{\geq 0})$ 和 $(\mathscr{D}_F^{\leq 0}, \mathscr{D}_F^{\geq 0})$. 取粘合

$$\mathscr{D}^{\leq 0} := \{K \in \mathscr{D} : j^{-1}K \in \mathscr{D}_U^{\leq 0}, i^{-1}K \in \mathscr{D}_F^{\leq 0}\};$$
$$\mathscr{D}^{\geq 0} := \{K \in \mathscr{D} : j^{-1}K \in \mathscr{D}_U^{\geq 0}, i^!K \in \mathscr{D}_F^{\geq 0}\}.$$

得到 t-结构 $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$.

对任何 $B \in \mathscr{D}_U$, 考虑由于伴随诱导同构 $B \cong j^{-1}j_!B$, 因此有 $j^*j_!B \to B$ 同构. 伴随性再次给出典范映射 $j_!B \to j_*B$. 故我们会诱导出如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
j_!B \arrow[r] \arrow[d] & j_*B \\
{}^pj_!B \arrow[r] & {}^pj_*B \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

定义 32.5. 定义 *Goresky-Macpherson* 扩张 *(*或称 *Intermediate extension)* 为

$$j_{!*}(B) := \mathrm{Im}({}^pj_!B \to {}^pj_*B) \in \mathscr{D}^{\heartsuit}.$$

命题 32.6. *对任何 $B \in \mathscr{D}_U$ 都有 Goresky-Macpherson 扩张 $j_{!*}(B)$ 是唯一的扩张 $X \in \mathscr{D}$ 满足*

$$i^{-1}X \in \mathscr{D}_F^{\leq -1}, i^!X \in \mathscr{D}_F^{\geq 1}.$$

此时扩张是指因为 ${}^pj^{-1} \circ {}^pj_! = {}^pj^{-1} \circ {}^pj_* = \mathrm{id}$.

证明. 只证明 $i^{-1}j_{!*}(B) \in \mathscr{D}_F^{\leq -1}$. 注意到满射 ${}^pj_!B \twoheadrightarrow j_{!*}(B)$, 作用 ${}^pi^{-1}$ 得到 ${}^pi^{-1}{}^pj_!B \twoheadrightarrow {}^pi^{-1}j_{!*}(B)$. 而由于 ${}^pi^{-1}{}^pj_!B = 0$ 且注意到 i^{-1} 是 t-右正合的且 $j_{!*}(B) \in \mathscr{D}^{\leq 0}$, 我们有

$$0 = {}^pi^{-1}j_{!*}B = {}^pH^0(i^{-1}j_{!*}(B)) = \tau^{\geq 0}(i^{-1}j_{!*}(B)).$$

因此 $i^{-1}j_{!*}(B) \in \mathscr{D}_F^{\leq -1}$. □

推论 32.7. *对任何 $B \in \mathscr{D}_U$ 都有 Goresky-Macpherson 扩张 $j_{!*}(B)$ 是唯一的扩张 $X \in \mathscr{D}$ 满足其在 $\overline{\mathscr{D}_F^{\heartsuit}}$ 无平凡的子对象和商.*

证明. 根据伴随性可以证明对任何 $X \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$ 都有 $X \twoheadrightarrow {}^pi_*i^{-1}X$ 是 $\overline{\mathscr{D}_F^{\heartsuit}}$ 内最大的商; 都有 ${}^pi_*i^!X \hookrightarrow X$ 是 $\overline{\mathscr{D}_F^{\heartsuit}}$ 内最大的子对象. 根据上述引理得到 ${}^pi^{-1}j_{!*}(B) = 0$, 因此满足结论条件. 唯一性略去. □

32.3 单对象

命题 32.8. *所有 $\mathscr{D}^{\heartsuit}$ 内的单对象皆形如:*
(a) $j_{!*}S_U$ 其中 S_U 是 $\mathscr{D}_U^{\heartsuit}$ 的单对象;
(b) ${}^pi_*S_F$ 其中 S_F 是 $\mathscr{D}_F^{\heartsuit}$ 的单对象.

证明. 设 $S \in \mathscr{D}^{\heartsuit}$ 单对象, 若 ${}^pi^{-1}S \neq 0$, 则有商 $S \twoheadrightarrow {}^pi_*{}^pi^{-1}S$, 因此 $S \cong {}^pi_*{}^pi^{-1}S$. 同理若 ${}^pi^!S \neq 0$, 则有 $S \cong {}^pi_*{}^pi^!S$. 因此只需要假设 ${}^pi^{-1}S = {}^pi^!S = 0$, 根据推论32.7得到 $S \cong j_{!*}j^{-1}S$. 此外需要验证若 S 是单对象, 则 ${}^pi^{-1}S, {}^pi^!S$ 和 $j^{-1}S$ 都是单对象. 前二者是平凡的, 我们只验证 $j^{-1}S$: 假设有 $j^{-1}S \twoheadrightarrow Q$ 非平凡, 因为 ${}^pj_!$ 是右正合的, 我们有

$$\begin{tikzcd}
{}^pj_!j^{-1}S \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & {}^pj_!Q \arrow[d, two heads] \\
S = j_{!*}j^{-1}S \arrow[r, two heads] & j_{!*}Q
\end{tikzcd}$$

由于 $j_{!*}Q$ 是 Q 的扩张, 因此不为零, 这和 S 单性矛盾. □

注 32.9. *若 $B \in \mathscr{D}_U^{\heartsuit}$ 是单对象, 则 $j_{!*}B$ 也是单对象. 证明略去, 参考 [3] 注 12.6.*

32.4 Deligne 公式的特殊情况

命题 32.10. *设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的 d 维代数簇且有孤立的奇点 $x \in X$. 设 $Z = \{x\}, U = X \backslash Z$. 考虑 t-结构 $(D^{\leq -d}(U), D^{\geq -d}(U))$ 和 $(D^{\leq 0}(Z), D^{\geq 0}(Z))$ 粘合得到 $D(X)$ 上的 t-结构. 则有*

$$j_{!*}(\mathbb{Z}[d]) = \tau^{\leq -1}(Rj_*\mathbb{Z}[d]).$$

证明. 设 $K=j_{!*}\underline{\mathbb{Z}}[d]$, 根据命题32.6只需证明 $i^{-1}K\in D^{\leq -1}(Z)$ 且 $i^!K\in D^{\geq 1}(Z)$. 考虑好三角

$$K\to Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[d]\to \tau^{\geq 0}Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[d].$$

(i) 作用 i^{-1} 得到 $i^{-1}K\to i^{-1}Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[d]\to \tau^{\geq 0}i^{-1}Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[d]$, 故 $i^{-1}K\in D^{\leq -1}(Z)$;

(ii) 作用 $i^!$ 得到 $i^!K\to i^!Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[d]=0\to i^!\tau^{\geq 0}Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[d]$, 故

$$i^!K\cong i^!\left(i^!\tau^{\geq 0}Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[d]\right)[-1].$$

由 $i^!$ 左正合得到 $i^!K\in D^{\geq 1}(Z)$. $\square$

例 32.11. 设 $X=\mathbb{P}^1\vee\mathbb{P}^1$ 和结点 $x\in X$, 我们有

$$j_{!*}(\underline{\mathbb{Z}}[1])=\tau^{\leq -1}(Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1])=(j_*\underline{\mathbb{Z}})[1].$$

我们将要说明 $R\Gamma(X,j_{!*}(\underline{\mathbb{Z}}[1]))$ 和相交同调行为类似, 即其满足 *Poincaré* 对偶: 考虑好三角

$$j_{!*}\underline{\mathbb{Z}}[1]=j_*\underline{\mathbb{Z}}\to Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1]\to R^1j_*\underline{\mathbb{Z}}[1]=i_*(\underline{\mathbb{Z}}\oplus\underline{\mathbb{Z}}).$$

作用 $R\Gamma$ 得到

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma(X,j_{!*}\underline{\mathbb{Z}}[1]) \arrow[r] & R\Gamma(X,Rj_*\underline{\mathbb{Z}}[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & R\Gamma(X,i_*\underline{\mathbb{Z}}\oplus\underline{\mathbb{Z}}) \arrow[d, equal] \\
& R\Gamma(X\backslash\{x\},\underline{\mathbb{Z}}[1]) \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}^{\oplus 2} \\
& R\Gamma(\mathbb{A}^1\sqcup\mathbb{A}^1,\underline{\mathbb{Z}}[1]) \arrow[d, equal] & \\
& \mathbb{Z}^{\oplus 2}[1] &
\end{tikzcd}$$

则得到 $R\Gamma(X,j_{!*}(\underline{\mathbb{Z}}[1]))=\mathbb{Z}[1]\oplus\mathbb{Z}[-1]$, 故满足 *Poincaré* 对偶.

33 平展上同调的注记

33.1 局部系和可构建层

不同于第一部分 (平展上同调基础), 在此第二部分我们将采用如下定义:

定义 33.1. 设 A 是有限环, 而 X 是概形.

(a) 定义局部系为 $\mathrm{Loc}_A(X)$ 由满足存在平展覆盖 $X'\to X$ 使得 $\mathscr{E}_{X'}\cong\underline{A}^{\oplus n}$ 的平展 A-模 $\mathscr{E}$ 构成, 即此为平展向量丛. 定义秩 n 的子范畴为 $\mathrm{Loc}_A^n(X)$;

(b) 可构建层 $\mathrm{cons}_A(X)$ 也将假设成局部闭集上是在新的 $\mathrm{Loc}_A(X_i)$ 内;

(c) 定义 $D^b_{\mathrm{cons}}(X,A)$ 和 $D^b_{\mathrm{Loc}}(X,A)$ 为二者的有界平展层复形的导出范畴

注 33.2. *(i)* 不难得到 $\mathrm{Loc}_A^n(X) \to \{\mathrm{GL}_n(A)\text{-}torsor\}$ 为

$$\mathscr{E} \mapsto \mathrm{Frame}(\mathscr{E}) := \underline{\mathrm{Isom}}_A(\underline{A}^{\oplus n}, \mathscr{E})$$

是范畴等价;

(ii) 取 $\mathscr{F} \in \mathrm{cons}_A(X)$, 则 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}_A(X)$ 当且仅当对任何几何点特化 $x' \rightsquigarrow x$ 会诱导 $\mathscr{F}_{x'} \cong \mathscr{F}_x$.

我们有如下常用的结论, 其中些许已经证明过了:

命题 33.3. 设 X 是概形且 A 是有限环.

(i) $D^b_{\mathrm{cons}}(X, A)$ 是 $D(X_{\text{ét}}, A)$ 内最小的三角子范畴使得其包含 $k_!L$ 其中 $k : Z \to X$ 局部闭且 $L \in \mathrm{Loc}_A(X)$;

(ii) $$D^b_{\mathrm{cons}}(X, A) := \left\{ K \in D(X_{\text{ét}}, A) \middle| \begin{array}{l} \text{存在局部闭分解} X = \coprod_i X_i \text{使得} \\ K|_{X_i} \in D^b_{\mathrm{Loc}}(X, A) \end{array} \right\};$$

(iii)(Folklore) $D^b_{\mathrm{cons}}(X, A)$ 是 $D(X_{\text{ét}}, A)$ 内所有紧对象组成的子范畴;

(iv)(Folklore) $D(X_{\text{ét}}, A)$ 是紧生成的;

(v)(Gabber) 设 $f : X \to Y$ 是诺特拟优等概形间的有限型映射, 则 f 有有限上同调维数且若 $\#(A)$ 在 Y 内可逆, 则 Rf_* 保持 D^b_{cons};

(vi)(Deligne 一般基变换) 设 $f : X \to Y$ 是诺特概形间的有限型映射使得 $\#(A)$ 在 Y 内可逆. 固定 $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, A)$, 存在稠密开集 $U \subset Y$ 使得对所有满足 $g(Y') \subset U$ 的纤维积

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

都有 $g^{-1}Rf_*K \cong Rf'_*(g')^{-1}K$;

(vii) 若 $f : X \to Y$ 有限, 则 Rf_* 保持可构建层;

(viii) 若 $f : X \to Y$ 有限平展且 Y 连通, 则 $f_*\underline{A} \in \mathrm{Loc}_A(X)$;

(ix) 设 X 是诺特拟优等概形, 设 $K, L \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, A)$, 则 $R\mathscr{H}om(K, L) \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, A)$.

证明. (i)-(viii) 证明忽略. 注意 (iii) 和 (iv) 可以参考 [4] 而 (viii) 即为光滑基变换罢了. 我们来简证 (ix). 首先我们可以约化到 $K = j_!\underline{A}$, 其中 $j : U \to X$ 平展. 其次注意到 (Verdier 对偶的特例): 任取另一个平展映射 $k : V \to X$, 考虑

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & V \arrow[d, "k"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

根据命题6.9(i) 我们有

$$\begin{aligned} R\Gamma(V, R\mathscr{H}om(j_!\underline{A}, L)) &= R\,\mathrm{Hom}(k^{-1}j_!\underline{A}, k^{-1}L) \\ &\cong R\,\mathrm{Hom}(h_!i^{-1}\underline{A}, k^{-1}L) = R\,\mathrm{Hom}(h_!\underline{A}, k^{-1}L) \\ &\cong R\Gamma(U \times_X V, h^{-1}k^{-1}L) \cong R\Gamma(U \times_X V, j^{-1}L) \\ &\cong R\Gamma(V, Rj_*j^{-1}L), \end{aligned}$$

则 $R\mathscr{H}om(j_!\underline{A}, L) \cong Rj_*j^{-1}L$, 根据 (v) 得到结论. $\square$

例 33.4. *对于椭圆曲线的 2-分歧覆盖 $f: E \to \mathbb{P}^1$ 根据 Riemann-Hurwitz 不难得到其在四个点分歧. 则 $f_*\underline{A}$ 在非分歧点处是二阶局部系, 在分歧点处是一阶局部系.*

33.2 Nearby cycles 和 vanishing cycles

定义 33.5. *设 S 是严格 Hensel 局部 DVR(例如 $\mathbb{C}[[t]], \mathbb{Z}_p$). 取闭点 $s \to S$ 和几何一般点 $t \to S$. 设 $f: X \to S$ 是有限型态射, 则考虑*

$$\begin{tikzcd} X_{\bar{t}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_{\bar{t}}"] & X \arrow[d, "f"] & X_s \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "f_s"] \\ \bar{t} \arrow[r, "\bar{j}"] & S & s \arrow[l, hook', "i"'] \end{tikzcd}$$

任取 $K \in D(X)$, 考虑典范映射 $\mathrm{can}: i^{-1}K \to i^{-1}R\bar{j}_*\bar{j}^{-1}K$.

(i) 定义 nearby cycle 函子 $\psi_f: D(X) \to D(X_s)$ 为 $K \mapsto i^{-1}R\bar{j}_*\bar{j}^{-1}K$;

(ii) 定义 vanishing cycle 函子 $\phi_f: D(X) \to D(X_s)$ 为 $K \mapsto \mathrm{cone}(\mathrm{can})$.

命题 33.6. *设 S 是严格 Hensel 局部 DVR(例如 $\mathbb{C}[[t]], \mathbb{Z}_p$). 取闭点 $s \to S$ 和几何一般点 $t \to S$. 设 $f: X \to S$ 是有限型态射, 则考虑*

$$\begin{tikzcd} X_{\bar{t}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_{\bar{t}}"] & X \arrow[d, "f"] & X_s \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "f_s"] \\ \bar{t} \arrow[r, "\bar{j}"] & S & s \arrow[l, hook', "i"'] \end{tikzcd}$$

任取 $K \in D(X)$, 考虑典范映射 $\mathrm{can}: i^{-1}K \to i^{-1}R\bar{j}_*\bar{j}^{-1}K$.

(i) 有好三角 $i^{-1}K \to \psi_f(K) \to \phi_f(K) \to i^{-1}K[1]$;

(ii) 我们有 $(\psi_f K)_{\bar{x}} = R\Gamma(\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_{\bar{x}}^{\mathrm{sh}} \times_s \bar{t}, K)$;

(iii) 若 f 紧合且 $\phi_f K = 0$, 则余特化函子是同构;

(iv) 若 f 光滑且 $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}}, A)$ 且 $\#A$ 在 S 内可逆, 则 $\phi_f K = 0$.

证明. (i) 平凡,(ii) 根据推论9.4得到. (iii) 根据紧合基变换我们有

$$\begin{tikzcd} R\Gamma(X_s, i^{-1}K) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{cosp}"'] & R\Gamma(X_s, \psi_f K) \arrow[d, equal] \\ & R\Gamma(X_{\bar{t}}, \bar{j}^{-1}K) \end{tikzcd}$$

再根据 (i) 即可得到结论. 关于 (iv), 可以约化到 $K = \underline{A}$ 的情况. 根据光滑基变换得到

$$f^{-1}R\bar{j}_*\underline{A} \cong R\bar{j}_*f_{\bar{t}}^{-1}\underline{A} \cong R\bar{j}_*\underline{A}.$$

由 $i^{-1}R\bar{j}_*\underline{A}\cong\underline{A}$, 我们得到

$$\begin{tikzcd}
 & i^{-1}f^{-1}R\bar{j}_*\underline{A} \arrow[dl, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\cong"] & \\
f_s^{-1}i^{-1}R\bar{j}_*\underline{A} \arrow[d, "\cong"] & \psi_f(\underline{A}) & i^{-1}R\bar{j}_*\underline{A} \arrow[d, equal] \\
f_s^{-1}\underline{A} \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, equal] & & \underline{A} \arrow[ul, "\mathrm{cosp}"']
\end{tikzcd}$$

故得到结论. □

34 Verdier 对偶

34.1 Verdier 对偶及其评注

定理 34.1 (Verdier 对偶)**.** *设 $f:X\to Y$ 是诺特拟优等概形间的分离映射, 设 A 局部有限且剩余类域的特征可逆, 则存在 $f^!:D^b_{\mathrm{cons}}(Y_{\text{ét}},A)\to D^b_{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}},A)$ 满足对任何 $K\in D^b_{\mathrm{cons}}(Y_{\text{ét}},A)$ 和 $L\in D^b_{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}},A)$ 都有*

$$R\mathscr{H}om(Rf_!K,L)\cong Rf_*R\mathscr{H}om(K,f^!L).$$

简要说明. 运用 K-内射预解, 考虑层复形:

$$((j:U\to X)\mapsto R\operatorname{Hom}((f\circ j)_!\underline{A},L))^\sharp,$$

这样定义了 $f^!L\in D(X_{\text{ét}},A)$, 但困难的是证明 $f^!L\in D^b_{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}},A)$, 这也是用到拟优等概形这样条件的地方. □

事实上在最一般的情况下, 即 $f:X\to Y$ 仅是拟紧拟分离概形间的分离有限型映射, 考虑 A 是挠环, 则考虑 Brown 表示的结论:

事实.(参考Tag 0F5Y) 设 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck Abel 范畴且 $\mathcal{D}$ 是某个三角范畴. 设 $F:D(\mathcal{A})\to\mathcal{D}$ 是和直和交换的三角函子, 则 F 存在三角右伴随函子.

那么根据命题16.7得知满足这个条件, 故存在 $Rf_!:D(X_{\text{ét}},A)\to D(Y_{\text{ét}},A)$ 的右伴随 $f^!$ 满足对任何 $K\in D(Y_{\text{ét}},A)$ 和 $L\in D(X_{\text{ét}},A)$ 都有

$$R\mathscr{H}om(Rf_!K,L)\cong Rf_*R\mathscr{H}om(K,f^!L).$$

所以 Poincaré 对偶22.9给出了 $f^!$ 在光滑分离的时候长什么样, 而 Verdier 对偶34.1给出了此时保持 $D^b_{\mathrm{cons}}((-)_{\text{ét}},A)$, 这些都是其证明困难之处. 而紧合情况下的 Grothendieck 对偶也是 Brown 表示的结论, 这是 Amnon Neeman 的工作, 大幅简化了 Grothendieck, Harshorne, Deligne 和 Verdier 的方法. 所以伴随存在性从来就不是难点, 难点是伴随函子的长相或者保持何种性质.

注 34.2. *在最一般的情况下函子 $f^!$ 在平展时为 f^{-1}, 在闭浸入时和原来相同.*

34.2 对偶复形

设 $k = k^{\mathrm{sep}}$ 且 $A = \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ 其中 $\ell \in k^*$.

定义 34.3. 设 X 是 k 上的代数簇.

(i) 设 $f : X \to \operatorname{Spec} k$ 是结构映射, 定义对偶复形 $\mathcal{D}_X := f^!\underline{A}$;

(ii) 若 $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(Y_{\text{ét}}, A)$, 定义 $\mathcal{D}_X(K) := R\mathscr{H}om(K, \mathcal{D}_X)$.

命题 34.4. 考虑 k 上的簇.

(i) 对 $g : X \to Y$, 我们有 $g^!\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}_X$;

(ii) 对 $g : X \to Y$ 和 $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(Y_{\text{ét}}, A)$, $L \in D^b_{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}}, A)$ 我们有 $\mathcal{D}_Y(g_!K) = g_*\mathcal{D}_X(K)$ 和 $\mathcal{D}_Y(g_*K) = g_!\mathcal{D}_X(K)$ 和 $g^{-1}\mathcal{D}_Y(L) = \mathcal{D}_X(g^!L)$ 和 $g^!\mathcal{D}_Y(L) = \mathcal{D}_X(g^{-1}L)$;

(iii) 对 $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(Y_{\text{ét}}, A)$ 有典范同构 $K \cong \mathcal{D}_X \circ \mathcal{D}_X(K)$.

35 代数簇上的反常层

只考虑 $k = \bar{k}$ 上的代数簇, 且取素数 $\ell \in k^*$. 我们此处通常考虑 $D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$, 而对于 $D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Q}_\ell) = \left(\varprojlim_n D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n)\right)[\frac{1}{\ell}]$ 和 $D^b_{\mathrm{cons}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的构造以及精细的内容请参考 [25] 附录 A 和正文前几章.

注 35.1. 注意对 $D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n), n \geq 2$, 其不保持 $\tau^{\leq n}$. 例如 $X = \operatorname{Spec} k$, 则

$$D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n) = D_{\mathrm{perf}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n).$$

考虑 $K = (\mathbb{Z}/\ell^n \xrightarrow{\ell} \mathbb{Z}/\ell^n)$, 则 $H^0(K) = \mathbb{Z}/\ell \notin D_{\mathrm{perf}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$.

定义 35.2. 设 X 是 k 上的代数簇, 定义 $D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ 的反常 t-结构为

$$\begin{aligned}
{}^pD^{\leq 0} &= \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell) : K\text{半反常}\} \\
&= \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell) : \text{对任何}i\text{有}\dim\operatorname{supp}(H^i(K)) \leq -i\}; \\
{}^pD^{\geq 0} &= \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell) : \mathcal{D}_X K\text{半反常}\} \\
&= \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell) : \text{对任何}i\text{有}\dim\operatorname{supp}(H^i(\mathcal{D}_X K)) \leq -i\};
\end{aligned}$$

定义 $\operatorname{Perv}(X) = {}^pD^\heartsuit := {}^pD^{\leq 0} \cap {}^pD^{\geq 0}$.

注 35.3. 我们先为证明其为 t-结构做一些铺垫.

例 35.4. *(i)* 若 $X = \operatorname{Spec} k$, 则反常 t-结构即为寻常的 t-结构;

(ii) 若 X 是曲线则不然, 例如 $K = \mathbb{Z}/\ell[0]$, 则显然 $K = \mathbb{Z}/\ell[0] \notin {}^pD^{\leq 0}$;

(iii) 设 X 是光滑曲线, 考虑 $j : U := X \setminus \{x\} \to X$, 则有 $K := j_*\mathbb{Z}/\ell[1] \in \operatorname{Perv}(X)$. 首先可以证明 $H^0(K)$ 支撑在 x 上且 $H^{-1}(K)$ 在所有 X 上支撑, 故 $K \in {}^pD^{\leq 0}$; 另一方面我们有 $\mathcal{D}_X(K) = j_!\mathcal{D}_U(\mathbb{Z}/\ell[1])$, 而且

$$\mathcal{D}_U(\mathbb{Z}/\ell[1]) = R\mathscr{H}om_U(\mathbb{Z}/\ell[1], \mathbb{Z}/\ell(1)[2]) = \mathbb{Z}/\ell(1)[1],$$

因此 $\mathcal{D}_X(K) = j_!(\mathbb{Z}/\ell(1)[1])$, 因此不难得到 $K \in {}^pD^{\geq 0}$, 进而 $K \in \operatorname{Perv}(X)$.

命题 35.5. *(i) 我们有* ${}^pD^{\leq 0} \subset D^{\leq 0}$, *对偶情况不对;*

(ii) 对任何 $n > 0$ *都有* ${}^pD^{\leq 0}[n] \subset {}^pD^{\leq 0}$*;*

(iii) 对 $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ *存在* $n, m \gg 0$ *都有* $K[n] \in {}^pD^{\leq 0}$ *且* $K[-m] \in {}^pD^{\geq 0}$*. 换句话说就是对* $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ *存在* $n, m \gg 0$ *都有* $K \in {}^pD^{\leq n} \cap {}^pD^{\geq -m}$*, 也就是反常* t*-结构总是有界的.*

证明. 只是定义的直接推论, 略去证明. □

35.1 平滑 (Lisse) 复形

定义 35.6. *设* X *是代数簇, 定义过* $D^b_{\mathrm{Loc}}(X, \mathbb{Z}/\ell) = \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell) : H^i(K) \in \mathrm{Loc}_{\mathbb{Z}/\ell}(X)\}$*, 我们称* $K \in D^b_{\mathrm{Loc}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ *是平滑 (Lisse) 复形.*

命题 35.7. *设* X *是代数簇.*

(i) 若 $K \in D^b_{\mathrm{Loc}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$*, 则* $K^\vee := R\mathscr{H}om(K, \mathbb{Z}/\ell) \in D^b_{\mathrm{Loc}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$*;*

(ii) 若 X *是光滑* d *维且* $K \in D^b_{\mathrm{Loc}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$*, 则* $\mathcal{D}_X(K) \in D^b_{\mathrm{Loc}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ *且*

$$H^i(\mathcal{D}_X(K)) \cong H^{-i-2d}(K)^\vee(d).$$

证明. (i) 根据平展下降这是平凡的;

(ii) 根据 Poincaré 对偶此时 $\mathcal{D}_X = \mathbb{Z}/\ell(d)[2d]$, 计算即可. □

命题 35.8. *若* X *是光滑* d *维代数簇且* $K \in D^b_{\mathrm{Loc}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$*, 则*

(i) $K \in {}^pD^{\leq 0}(X)$ *当且仅当对所有的* $i > -d$ *都有* $H^i(K) = 0$*;*

(ii) $K \in {}^pD^{\geq 0}(X)$ *当且仅当对所有的* $i < -d$ *都有* $H^i(K) = 0$*;*

(iii) $K \in \mathrm{Perv}(X)$ *当且仅当对所有的* $i \neq -d$ *都有* $H^i(K) = 0$*.*

证明. (i) 注意到对任何 $K \in D^b_{\mathrm{Loc}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$ 都有 $\dim \mathrm{supp}(H^i(K)) \leq d$, 因此成立;

(ii) 此时 $\mathcal{D}_X K = K^\vee(d)[2d]$, 而且 $H^i(\mathcal{D}_X K) = H^{-i-2d}(K)^\vee(d)$, 且注意到 $K \in {}^pD^{\geq 0}(X)$ 当且仅当 $\mathcal{D}_X K \in {}^pD^{\leq 0}(X)$, 再根据 (i) 即可得到.

(iii) 就是 (i) 和 (ii) 的推论. □

35.2 BBD——反常 t-结构的验证

引理 35.9. *固定* $j : U \to X$ *是开集而* $i : Z \to X$ *是其补, 设* $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$*.*

(i) $K \in {}^pD^{\leq 0}(X)$ *当且仅当* $j^{-1}K \in {}^pD^{\leq 0}(U)$ *且* $i^{-1}K \in {}^pD^{\leq 0}(Z)$*;*

(ii) $K \in {}^pD^{\geq 0}(X)$ *当且仅当* $j^! K = j^{-1}K \in {}^pD^{\geq 0}(U)$ *且* $i^! K \in {}^pD^{\geq 0}(Z)$*.*

证明. (i) 由于 i^{-1}, j^{-1} 正合, 故

$$\dim \mathrm{supp}(H^i(K)) = \max(\dim \mathrm{supp}(H^i(i^{-1}K)), \dim \mathrm{supp}(H^i(j^{-1}K))),$$

因此成立;

(ii) 考虑命题34.4(ii) 再运用 (i) 即可. □

推论 35.10. *固定* $j : U \to X$ *是开集而* $i : Z \to X$ *是其补, 设* $K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X, \mathbb{Z}/\ell)$*. 设* U *是光滑* d *维的且* $K|_U \in D^b_{\mathrm{Loc}}(U, \mathbb{Z}/\ell)$*, 则有*

(i) $K \in {}^pD^{\leq 0}(X)$ *当且仅当* $K|_U \in D^{b, \leq -d}_{\mathrm{Loc}}(U, \mathbb{Z}/\ell)$ *且* $i^{-1}K \in {}^pD^{\leq 0}(Z)$*;*

(ii) $K \in {}^pD^{\geq 0}(X)$ *当且仅当* $K|_U \in D^{b, \geq -d}_{\mathrm{Loc}}(U, \mathbb{Z}/\ell)$ *且* $i^! K \in {}^pD^{\geq 0}(Z)$*.*

证明. 根据命题35.8和引理35.9即可得到结论. $\square$

定理 35.11 (BBD)**.** *设 X 是 k 上的代数簇, 考虑 $D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell)$ 的子范畴:*

$$\begin{aligned}
{}^pD^{\le 0}(X) &= \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell) : K\text{半反常}\} \\
&= \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell) : \text{对任何}i\text{有}\dim\operatorname{supp}(H^i(K)) \le -i\}; \\
{}^pD^{\ge 0}(X) &= \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell) : \mathcal{D}_X K\text{半反常}\} \\
&= \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell) : \text{对任何}i\text{有}\dim\operatorname{supp}(H^i(\mathcal{D}_X K)) \le -i\};
\end{aligned}$$

则这是一个 t-结构, 称为反常 t-结构.

简要证明. 对维数做归纳法. 当 $\dim X = 0$ 时, 这个是平凡的. 下面考虑高维 $\dim X = d$ 情况.

固定 $j : U \to X$ 是开集而 $i : Z \to X$ 是其补且设 U 是光滑的. 考虑正合列

$$\begin{tikzcd}
D^b_{\mathrm{cons}}(Z,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r, "i_*"] & D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r, "j^{-1}"] & D^b_{\mathrm{cons}}(U,\mathbb{Z}/\ell) \\
D^b_{\mathrm{cons}}(Z,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & D(X,U) \arrow[r] \arrow[u] & D^b_{\mathrm{Loc}}(U,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

其中 $D(X,U) = \{K \in D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell) : K|_U \in D^b_{\mathrm{Loc}}(U,\mathbb{Z}/\ell)\}$. 首先由于 U 光滑, 根据推论35.10得到

$$\begin{aligned}
{}^pD^{\le 0}(U) \cap D^b_{\mathrm{Loc}}(U,\mathbb{Z}/\ell) = D^{b,\le -d}_{\mathrm{Loc}}(U,\mathbb{Z}/\ell) \\
{}^pD^{\ge 0}(U) \cap D^b_{\mathrm{Loc}}(U,\mathbb{Z}/\ell) = D^{b,\ge -d}_{\mathrm{Loc}}(U,\mathbb{Z}/\ell)
\end{aligned}$$

给了 $D^b_{\mathrm{Loc}}(U,\mathbb{Z}/\ell)$ 上 t 结构, 根据归纳法 ${}^pD^{\le 0}(Z), {}^pD^{\ge 0}(Z)$ 给了 $D^b_{\mathrm{cons}}(Z,\mathbb{Z}/\ell)$ 的 t 结构. 于是粘合给出了 $D(X,U)$ 的 t-结构为

$$({}^pD^{\le 0}(X) \cap D(X,U), {}^pD^{\ge 0}(X) \cap D(X,U)).$$

注意到 $D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell) = \bigcup_U D(X,U)$, 因此得证. $\square$

35.3 Goresky-Macpherson 扩张

考虑代数簇 X 的开闭分解 $j : U \to X, i : Z \to X$, 我们知道 U 和 Z 上的反常 t-结构粘合会得到 X 上的反常 t-结构, 根据之前在粘合里讨论的结论, 我们迁移到这里得到如下系列结论:

- **正合性:** j^{-1}, i_* 是 t-正合的, $j_!, i^{-1}$ 是 t-右正合的且 $j_*, i^!$ 是 t-左正合的;
- **伴随性:** 伴随列 $({}^pH^0(j_!), {}^pH^0(j^{-1}) = j^{-1}, {}^pH^0(j_*))$ 和 $({}^pH^0(i^{-1}), {}^pH^0(i_*) = i_*, {}^pH^0(i^!))$;
- **标准好三角:** 若 $K \in \mathrm{Perv}(X)$ 则有

- $0 \to i_* {}^pH^0(i^! K) \to K \to {}^pH^0(j_* j^{-1} K)$, 其中 $i_* {}^pH^0(i^! K)$ 是 K 最大的支在 Z 上的非平凡子对象;
- ${}^pH^0(j_! j^{-1} K) \to K \to i_* {}^pH^0(i^{-1} K) \to 0$, 其中 $i_* {}^pH^0(i^{-1} K)$ 是 K 最大的支在 Z 上的非平凡商对象.

- **Goresky-Macpherson 扩张:** $j_{!*} : \mathrm{Perv}(U) \to \mathrm{Perv}(X)$ 可以由如下决定:
  - $j_{!*} A = \mathrm{Im}({}^pH^0(j_! A), {}^pH^0(j_* A))$;
  - $j_{!*} A$ 是 A 的唯一的使得无非平凡子对象和商对象的扩张;
  - $j_{!*} A$ 是 A 的唯一的使得 ${}^pH^0(i^! K) = {}^pH^0(i^{-1} K) = 0$ 的扩张 K;
  - $j_{!*} A$ 是 A 的唯一的使得 $i^! K \in {}^pD^{\geq 1}(Z)$ 且 $i^{-1} K \in {}^pD^{\leq -1}(Z)$ 的扩张 K.

引理 35.12. *我们有* $\mathcal{D}_X(j_{!*} A) = j_{!*} \mathcal{D}_U(A)$.

证明. 根据$j_{!*} A$ 是 A 的唯一的使得 $i^! K \in {}^pD^{\geq 1}(Z)$ 且 $i^{-1} K \in {}^pD^{\leq -1}(Z)$ 的扩张 K! 这个等价条件, 不难验证引理成立. □

引理 35.13. *设 X 是维数 $d \geq 1$ 的光滑簇, 设 $L \in \mathrm{Loc}(X)$, 则对于开浸入 $j : U \to X$ 都有 $L[d] \cong j_{!*} j^{-1} L[d]$.*

证明. 设 Z 是其补且 $\dim Z = d' < d$, 则 $i^{-1} L[d] = (i^{-1} L[d'])[d - d']$. 因为 $i^{-1} L[d'] \in {}^pD^{\leq 0}(Z)$, 故 $i^{-1} L[d] \in {}^pD^{\leq -1}(Z)$. 根据 X 光滑, 我们类似的有 $i^! L[d] \in {}^pD^{\geq 1}(Z)$. 因此根据上面最后一条判断方式得到结论. □

定义 35.14. *设 X 是维数 d 的簇, 定义 $\mathrm{IC}_X := j_{!*}(\mathbb{Z}/\ell[d])$ 其中 $j : U \to X$ 使得 U 光滑.*

注 35.15. *故 $\mathcal{D}(\mathrm{IC}_X) = \mathrm{IC}_X$. 则 $R\Gamma(X, \mathrm{IC}_X)$ 就是相交同调.*

35.4 单对象

事实上之前已经得到如下结论:

命题 35.16. *考虑代数簇 X 的开闭分解 $j : U \to X, i : Z \to X$, 则所有 $\mathrm{Perv}(X)$ 内的单对象皆形如:*
(a) $j_{!*} S_U$ 其中 $S_U \in \mathrm{Perv}(U)$ 的单对象;
(b) $i_* S_F$ 其中 $S_F \in \mathrm{Perv}(Z)$ 的单对象.

事实上我们还可以证明如下结论:

命题 35.17. *(i) 若 X 是维数 d 的光滑簇且 $L \in \mathrm{Loc}(X)$ 是不可约的, 则 $L[d] \in \mathrm{Perv}(X)$ 也是单的 (这个对可构建层不对);*
(ii) 若 X 是维数 d 的簇且 $A \in \mathrm{Perv}(X)$, 则 A 是单的当且仅当 $A = i_* j_{!*}(L[d])$, 其中 $j : U \to X$ 是开浸入且 $i : Y \to X$ 是不可约闭集且 U 是光滑的且 $L \in \mathrm{Loc}(U)$ 不可约.

证明. 忽略, 参考 [3] 引理 19.7 和推论 19.9. □

35.5 反常层范畴的有限性

定理 35.18. *范畴* $\mathrm{Perv}(X)$ *既是 artin 的也是诺特的, 也就是说对所有的* $A \in \mathrm{Perv}(X)$ *都是有限长的.*

证明. 我们对维数归纳. 固定 $A \in \mathrm{Perv}(X)$ 且选取 $j : U \subset X$ 开集使得 $B : A|_U = L[d]$ 其中 $L \in \mathrm{Loc}(U)$. 考虑其补 $i : Z \to X$, 有好三角

$$0 \to i_* {}^pH^0(i^! A) \to A \to {}^pH^0(j_* B).$$

根据归纳法只需证明 ${}^pH^0(j_* B)$ 是有限长的.
- **事实.** 函子 $j_{!*}$ 保持有限长性质.

  - *证明.* 主要是使用命题35.16(i) 得到 $j_{!*}$ 保持单性, 故考虑短正合列

    $$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

    设 $j_{!*}A, j_{!*}C$ 是有限长的, 只需证明 $j_{!*}B$ 是有限长的. 考虑

    $$\begin{tikzcd} & j_{!*}(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & j_{!*}(B) \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & j_{!*}(C) \arrow[d, hook] \\ 0 \arrow[r] & {}^pH^0(j_*A) \arrow[r] & {}^pH^0(j_*B) \arrow[r] & {}^pH^0(j_*C) \end{tikzcd}$$

    其中第一行未必正合, 但第二行正合. 此时 f 是单射, 设 $K = \ker g$, 则有 $j_{!*}A \subset K \subset j_{!*}B$. 注意到有 $j_{!*}B/K \subset j_{!*}C$, 且 $K/j_{!*}A$ 支撑在 $X \backslash U$ 上, 则归纳法得到二者均有限长, 故得证. □

回到原证明. 考虑正合列 $0 \to j_{!*}B \to {}^pH^0(j_*B) \to i_*C \to 0$, 其中 $C \in \mathrm{Perv}(Z)$. 因此得证. □

36 BBDG 分解一瞥

定理 36.1 (BBD(G))**.** *设* $f : X \to Y$ *是代数簇间的紧合映射, 我们有*

$$Rf_*(\mathrm{IC}_X) \cong \bigoplus_i \mathrm{IC}_{Z_i}(L_i)[n_i],$$

其中 $Z_i \subset Y$ *闭且* L_i *是* Z_i*(光滑) 开集上的单局部系.*

我们略去证明, 特殊情况的证明参考 [7] 和 [8], 一般情况参考 [1] 和 [2].

37 Beilinson 基本引理一瞥

引理 37.1. *设* $f : X \to Y$ *是代数簇间的仿射映射, 考虑反常* t*-结构.*
(i) f_* *是右* t*-正合的且* $f_!$ *是左* t*-正合的;*
(ii) 若 f *拟有限, 则* $f_*, f_!$ *都是* t*-正合的.*

证明. (i) 追谱序列即可, 也可以由 Artin 消灭定理15.2得到, 略去;

(ii) 考虑 Zariski 主定理4.4得到 f 的分解 $X \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{g} Y$ 其中 j 是稠密开浸入且 g 是有限映射. 故由于 g 紧合, 则 $g_* = g_!$ 且根据 (i) 是 t-正合的. 另外由于 f 仿射, 则 j 自然仿射, 故 (i) 得到 j_* 是右 t-正合的且 $j_!$ 是左 t-正合的. 由于之前提到的正合性我们得到 j_* 是左 t-正合的且 $j_!$ 是右 t-正合的, 因此二者均 t-正合. 故这对 f 也成立. □

注 37.2. *运用这个可以证明若 X 是 d 维局部完全交, 则 $\mathbb{Z}/\ell[d] \in \mathrm{Perv}(X)$, 参考 [3] 例 20.7.*

37.1 Beilinson 基本引理和 Nori 基本引理

定理 37.3 (Beilinson 基本引理 (BBL))**.** *设 $f : X \to Y$ 是代数簇间的仿射映射, 设 $M \in \mathrm{Perv}(X)$, 则存在 $j : U \to X$ 为稠密仿射开浸入使得对 $N := j_! j^{-1} M$ 有 $N \to M$ 在 $\mathrm{Perv}(X)$ 内满且对所有 $i \neq 0$ 都有 ${}^pH^i(f_*N) = 0$.*

注 37.4. *若 k 是无限域, 我们甚至可以取 $U = X \backslash H$ 其中 H 是超平面截面 (考虑 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k$).*

定理 37.5 (Nori 基本引理 (NBL))**.** *设 X 是 d 维仿射簇且 $F \in \mathrm{cons}(X)$, 则存在 $j : U \to X$ 仿射开集使得对任何 $i \neq d$ 都有 $H^i_{\text{ét}}(X, j_! j^{-1} F) = 0$.*

注 37.6. *Nori 给出特征 0 情况的两个证明, 一个利用解析拓扑, 一个利用奇点消解. 事实上比较容易从 Beilinson 基本引理推出 Nori 基本引理, 进而得到任意特征的证明. 参考 [3] 推论 21.4 之后的一小段.*

而 Nori 基本引理可以给出类似胞腔分解的东西如下:

推论 37.7. *设 X 是 d 维仿射簇, 则存在闭集的滤过*

$$\emptyset = Y_{-1} \subset Y_0 \subset \cdots Y_d = X,$$

满足:

(i) $\dim Y_j = j$;

(ii) 对 $Y_{k-1} \overset{i_k}{\hookrightarrow} Y_k \overset{j_k}{\hookleftarrow} U_k = Y_k \backslash Y_{k-1}$ 都有当 $i \neq k$ 时 $H^i_{\text{ét}}(Y_k, j_{k,!}\mathbb{Z}/\ell) = 0$;

(iii) 考虑映射

$$\begin{tikzcd}
H^k_{\text{ét}}(Y_k, j_{k,!}\mathbb{Z}/\ell) \arrow[rr, "d_k"] \arrow[dr, "F"'] & & H^{k+1}_{\text{ét}}(Y_{k+1}, j_{k+1,!}\mathbb{Z}/\ell) \\
& H^k_{\text{ét}}(Y_k, \mathbb{Z}/\ell) \arrow[ur, "B"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 F 是忘却映射且 B 是 $j_{k+1,!}\mathbb{Z}/\ell \to \mathbb{Z}/\ell \to i_{k+1,*}\mathbb{Z}/\ell$ 诱导的态射. 则 $R\Gamma(X, \mathbb{Z}/\ell)$ 同构于复形

$$H^0_{\text{ét}}(Y_0, \mathbb{Z}/\ell) \xrightarrow{d_0} H^1_{\text{ét}}(Y_1, j_{1,!}\mathbb{Z}/\ell) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{d-1}} H^d_{\text{ét}}(Y_d, j_{d,!}\mathbb{Z}/\ell).$$

注 37.8. 证明见 *[3]* 第 *74* 页. 这个推论给出了 $R\Gamma(X,\mathbb{Z}/\ell)$ 的具体计算, 而对于 $\mathbb{C}$ 上的簇,*Nori* 给出 *Nori motive:* $X \mapsto R\Gamma(X^{\mathrm{an}},\mathbb{Q})$ 得到

$$\{复代数簇\} \to D(\mathrm{MHS}),$$

其中 MHS 是混合 *Hodge* 结构; 而对于任意域 k, 可以考虑 $\mathbb{Q}_\ell$-系数的得到 $X \mapsto R\Gamma_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 为

$$\{k上的代数簇\} \to D(\mathrm{FD}(\mathbb{Q}_\ell,\mathrm{Gal}(\bar{k},k))),$$

其中 $\mathrm{FD}(\mathbb{Q}_\ell,\mathrm{Gal}(\bar{k},k))$ 是 $\mathrm{Gal}(\bar{k},k)$ 的有限维 $\mathbb{Q}_\ell$ 表示. 对于 p-进数域也有类似的, 我们略去.

37.2 Beilinson 定理

运用 Beilinson 基本引理 (BBL) 可以得到如下定理:

定理 37.9 (Beilinson)**.** 设 X 是簇, 典范函子 $\mathrm{can}_X : \mathrm{Perv}(X) \to D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell)$ 存在自然延拓的正合函子 $\widetilde{\mathrm{can}}_X : D^b(\mathrm{Perv}(X)) \to D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell)$ 满足*:*

(i) 函子 $\widetilde{\mathrm{can}}_X : D^b(\mathrm{Perv}(X)) \to D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell)$ 是范畴等价*;*

(ii) 函子 $\widetilde{\mathrm{can}}_X$ 和仿射映射的推出契合*:*

- 若 $f : X \to Y$ 是仿射映射, 则右 t-正合函子 ${}^pH^0(f_*)$ 有左导出函子 $L^pH^0(f_*)$ 满足交换图*:*

$$\begin{CD} D^b(\mathrm{Perv}(X)) @>{\widetilde{\mathrm{can}}_X}>> D^b_{\mathrm{cons}}(X,\mathbb{Z}/\ell) \\ @V{L^pH^0(f_*)}VV @VV{f_*}V \\ D^b(\mathrm{Perv}(Y)) @>{\widetilde{\mathrm{can}}_Y}>> D^b_{\mathrm{cons}}(Y,\mathbb{Z}/\ell) \end{CD}$$

(iii) 而 *(ii)* 结论对 $f_!$ 也对.

注 37.10. 一个自然的问题就是若 $\mathscr{D}$ 是三角 dg-范畴赋予一个 t-结构, 则是否有 $D^b(\mathscr{D}^\heartsuit) \to \mathscr{D}$? *Lurie* 的 *Higher Algebra* 证明了如果存在足够内射或投射对象则可以得到上述结果, 但注意反常层范畴并没有足够内射.

参考文献

[1] Alexander A. Beilinson, Joseph Bernstein, and Pierre Deligne. Faisceaux pervers. *Soc. Math. France*, 100, 1982.

[2] Alexander A. Beilinson, Joseph Bernstein, Pierre Deligne, and Ofer Gabber. Faisceaux pervers (re-printed version). *Soc. Math. France*, 100, 2018.

[3] Bhargav Bhatt and Takumi Murayama. *Perverse Sheaves.* notes at https://www.math.purdue.edu/ murayama/MATH731.pdf, 2015.

[4] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. The pro-étale topology for schemes. *Preprint*, 2013.

[5] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, 1982.

[6] Brian Conrad. Deligne's notes on nagata compactifications. *Journal of the Ramanujan Mathematical Society*, 22(3), 2007.

[7] Pierre Deligne. Théorème de lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. *Pub. Math. IHES*, 1968.

[8] Pierre Deligne. Théorie de hodge, ii. *Pub. Math. IHES*, 1971.

[9] Pierre Deligne. *Cohomologie Étale (SGA 4-1/2).* Springer, 1977.

[10] Pierre Deligne. La conjecture de weil. ii. *Pub. Math. IHES*, 52, 1980.

[11] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained.* AMS, 2005.

[12] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale Cohomology and the Weil Conjecture.* Springer Berlin, Heidelberg, 1988.

[13] William Fulton. *Intersection Theory, 2nd version.* Springer, 1998.

[14] Laurentiu G. Maxim. *Intersection Homology & Perverse Sheaves.* Springer Cham, 2019.

[15] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley, 1978.

[16] Alexander Grothendieck. La théorie des classes de chern. *Bull. Soc. Math. France*, 86, 1958.

[17] Alexander Grothendieck, Micheal Artin, and J.-L. Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas (SGA 4). Tome 2.* Springer-Verlag, 1972.

[18] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1).* Springer-Verlag, 1971.

[19] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology.* Springer, 1966.

[20] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

[21] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[22] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi, and Toshiyuki Tanisaki. *D-Modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory.* Birkhäuser Boston, MA, 2007.

[23] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry, An Introduction.* Springer, 2005.

[24] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and Sheaves.* Springer Berlin, Heidelberg, 2006.

[25] Reinhardt Kiehl and Rainer Weissauer. *Weil Conjectures, Perverse Sheaves and ℓ-adic Fourier Transform.* Springer Berlin, Heidelberg, 2001.

[26] Fu Lei. *Algebraic geometry.* TsingHua and Springer, 2006.

[27] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version.* World Scientific, 2015.

[28] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer New York, NY, 2012.

[29] James S. Milne. *Étale Cohomology.* Princeton university press, 1980.

[30] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013.

[31] James S. Milne. Class field theory, 2020.

[32] Amnon Neeman. *Algebraic and Analytic Geometry.* Cambridge University Press, 2007.

[33] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks.* AMS, 2016.

[34] Jacob P. Murre, Jan Nagel, and Chris A. M. Peters. *Lectures on the Theory of Pure Motives.* AMS, 2013.

[35] Stacks project collaborators. The stacks project, 2023.

[36] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Annales de l'Institut Fourier*, 6, 1956.

[37] Jean-Pierre Serre. *Local Algebra.* Springer, 2000.

[38] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I.* Cambridge University Press, 2002.