平展上同调——几何人专用笔记

温尊

2023 年 3 月 19 日

目录

1 简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取 X 为 $\mathbb{C}$ 上的代数簇, 其解析化 X^{an} 可以对应奇异上同调 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{Z})$ 满足

(i) 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模;

(ii) 群 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{C})$ 有额外的结构;

(iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 我们会发现挠系数的上同调, 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 系数的上同调可以比较好的模拟奇异上同调. 但会发现 $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})=0$ 而 $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ 并不能很好的模拟奇异上同调, 另一方面我们发现如下结果:

定理 1.1 (Serre)**.** *不存在上同调理论 H^* 使得 (i) 具有函子性;(ii) 满足 Kunneth 公式;(iii) 对所有椭圆曲线 E 满足 $H^1(E)\cong\mathbb{Q}^2$.*

基本思路. 取 E 为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}$ 是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到 $\mathrm{End}(E)$ 作用在 E 上会诱导出 $\mathrm{End}(E)$ 在 $H^1(E)$, 进而诱导出代数同态 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}\to\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$. 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论. □

为了模拟在非挠系数下也可以模仿奇异上同调, 我们会定义类似的 ℓ-进上同调理论, 其中 ℓ 和特征 p 互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论) $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)=\varprojlim H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ 和 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_\ell)=H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$. 这样也可以得到比较好的模拟.

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点 $(X,\bar{x})$, 可以定义 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$ 为平展基本群, 其定义事实上是从代数拓扑里偷的, 运用了覆叠变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

猜想 1 (Weil 猜想)**.** *设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上 n 维光滑紧合几何整的簇, 设*

$$S_X(t)=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n}t^n\right),$$

则

(i) 函数 $S_X(t)$ 是有理函数, 即 $S_X(t)=\prod_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}S_i(t)$, 其中 S_i 是满足一定条件的整系数多项式;

(ii) 满足函数方程 $S_X(q^{-n}t^{-1})=\pm q^{nE/2}t^ES_X(t)$ 其中 E 是 X 欧拉示性数;

(iii) 所有零点和极点的绝对值为 $q^{j/2}$ 其中 $j\in\mathbb{Z}$;

(iv) 若 X 提升为代数整数环 $R\subset\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 Y, 则对于 $i=0,...,2n$, 流形 $Y(\mathbb{C})$ 的 Betti 数为 $S_i(t)$ 的次数 b_i.

最后结果. (i) 由 Dwork 运用 H^1 的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Gorthendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明. □

因此平展上同调是相当成功的上同调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点集拓扑) 就会被我略去. 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐Stacks project, 扶磊教授的书 [3] 和 Milne 的传世经典 [4], 我们也会多次引用里面的代数细节.

平展上同调学习的前置知识: 至少是经典代数几何教材 [2] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 最好懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好.

2 平展基本群

对于连通概形 X, 定义 $\mathrm{Fét}/X$ 为 X 上的有限平展态射构成的范畴, 而 $\mathrm{Ét}/X$ 为 X 上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点 $(X,\bar{x})$, 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}}:\mathrm{Fét}/X\to\mathrm{Sets},(\pi:Y\to X)\mapsto\mathrm{Hom}_X(\bar{x},Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆叠空间? 事实上不一定存在:

例 2.1. *考虑 $\mathbb{C}$ 上射影直线 $\mathbb{A}^1$, 存在有限平展映射 $\mathbb{A}^1\backslash\{0\}\to\mathbb{A}^1\backslash\{0\},x\mapsto x^n$, 那么注定没有像拓扑里的 $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 来表示万有覆盖!*

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [4] 也没证明. 而 [3] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X'=((X_i,f_i)_{i\in I},\phi_{ij}:X_j\to X_i,f_i=\phi_{ij}\circ f_j,f_i\in\mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\mathrm{Hom}(X',Y):=\varinjlim\mathrm{Hom}_X(X_i,Y)\to\mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y),\sigma\mapsto\sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取 X_i/X 为 Galois 覆盖, 也就是说 $\deg(X_i/X)=\#\mathrm{Aut}_X X_i$, 见 [4] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于 $\phi_{ij}:X_j\to X_i$ 可以诱导 $\mathrm{Aut}_X X_j\to\mathrm{Aut}_X X_i$ 如下: 注意到 $\mathrm{Aut}_X X_j\to\mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j),\sigma\mapsto\sigma(f_j)$ 是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [3] 第三节), 则通过 $F(X_j)\to F(X_i),\alpha\mapsto\phi_{ij}(\alpha)$ 即得到映射.

定义 2.1. *对于连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 考虑上述构造, 定义平展基本群为*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})=\varprojlim\mathrm{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

定理 2.2. *考虑连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$.*

(i) 函子 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$ 诱导出 $\mathrm{Fét}/X$ 到有限 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$-集的等价;

(ii) 取第二个几何点 $\bar{x}'$, 我们有 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}\cong\mathfrak{F}_{\bar{x}'}$ 进而诱导 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\cong\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}')$, 并且和 (i) 契合;

(iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考Tag 0BND. □

例 2.2. *(i) 对一个点 $X=\mathrm{Spec}(k)$ 和几何点 Ω, 由定义知道 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\Omega)=\mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$;*

(ii) 考虑 $\mathbb{C}$ 上的 $X=\mathbb{A}^1\backslash\{0\}$, 则考虑 $x\mapsto x^n$ 得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})=\varprojlim\mathrm{Aut}_X X_i=\varprojlim\boldsymbol{\mu}_n(k)\cong\widehat{\mathbb{Z}}\cong\prod_\ell\mathbb{Z}_\ell;$$

(iii) 考虑代数闭域上的 $X=\mathbb{P}^1$, 由 *Riemann-Hurwitz* 公式不难得到 X 只有平凡的平展覆叠, 故 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})=1$. 归纳可以得到 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^n,\bar{x})=1$;

(iv) 事实上我们对 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^1,\bar{x})$ 都一无所知, 其中 k 是正特征域 (根据 *Artin-Scheier* 列, 起码不是平凡的群);

(v) 对于正规簇 X, 考虑一般点上的几何点 $\bar{x}$, 假设

$$L=\bigcup\left\{\text{几何点内的有限可分扩张}K/K(X):X\text{在}K\text{内的正规化到}X\text{平展}\right\},$$

则 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\cong\mathrm{Gal}(L/K(X))$, 参考 *[3]* 命题 *3.3.6*.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

定理 2.3 (Riemann 存在定理)**.** 设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形, 则由范畴等价 $(\mathrm{F\acute{e}t}/X)\to(\mathrm{FTopCov}/X^{\mathrm{an}})$. 特别的有 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\cong\pi_1\widehat{(X^{\mathrm{an}},x)}$, 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [1] 的定理 XII.5.1. □

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形的平展基本群了.

注 2.4 (算术和数论人的最爱)**.** *(i)* 对于 X 为 k 上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 *[3]* 命题 *3.3.7*):

$$1\to\pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\mathrm{sep}}},\bar{x})\to\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\to\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)\to 1;$$

(ii) 对于 $X=\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1\backslash\{0,1,\infty\}$, 运用正合列得到

$$1\to\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}},\bar{x})\to\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\to\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}/\mathbb{Q})\to 1.$$

嵌入 $\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}\hookrightarrow\mathbb{C}$ 可以得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}},\bar{x})\cong\langle a,b,\widehat{c|abc}=1\rangle.$$

而群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{al}}/\mathbb{Q})$ 则十分复杂, 如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 (摘自 *J. Milne* 的讲义 *[5]*).

3 景和层的基本定义

本质就是推广拓扑空间的定义.

定义 3.1 (Grothendieck 拓扑和景)**.** 设 $\mathcal{C}$ 是范畴, 一个 $\mathcal{C}$ 上的 *Grothendieck* 拓扑由集合 $\{\{U_i\to U\}_{i\in I}\}=\mathrm{Cov}(U)$ 组成, 其中 U 是任意对象, 满足

(i) 若 $V\to X$ 是同构, 则 $\{V\to X\}\in\mathrm{Cov}(X)$;

(ii) 若 $\{X_i\to X\}_{i\in I}\in\mathrm{Cov}(X)$ 且 $Y\to X$ 是任意态射, 则纤维积 $X_i\times_X Y$ 存在且

$$\{X_i\times_X Y\to Y\}_{i\in I}\in\mathrm{Cov}(Y);$$

(iii) 若 $\{X_i\to X\}_{i\in I}\in\mathrm{Cov}(X)$ 且对任意 $i\in I$ 都给定 $\{V_{ij}\to X_i\}_{j\in J_i}$, 则

$$\{V_{ij}\to X_i\to X\}_{i\in I,j\in J_i}\in\mathrm{Cov}(X).$$

范畴 $\mathcal{C}$ 和其上的 *Grothendieck* 拓扑称为景.

例 3.1 (小 Zariski 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\mathrm{Op}(X)$ 由开子概形构成, 态射是包含关系. 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{Zar}.

例 3.2 (大 Zariski 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 为开浸入且 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{ZAR}.

例 3.3 (小平展景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\mathrm{\acute{E}t}/X$, 不难证明里面的态射都是平展的, 所以我们不假设条件. $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$.

例 3.4 (大平展景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平展且 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\mathrm{\acute{E}t}}$.

例 3.5 (fppf 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平坦和局部有限表现, 且 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 X_{fppf}.

定义 3.2. *景 $\mathcal{C}$ 上的预层为函子 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$;*

定义 3.3. *给定景 $\mathcal{C}$ 和其上的预层 F.*

(i) 预层 F 称之为分离的, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$, 诱导态射 $F(U) \to \prod_{i\in I} F(U_i)$ 是单射;

(ii) 预层 F 称为层, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$, 我们有如下等化子:

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被 $U_i \times_U U_j \to U_i$ 和 $U_i \times_U U_j \to U_j$ 诱导.

定义 3.4. *一个范畴称为 Grothendieck 意象 (Topos) 如果其等价于某个景上的层范畴.*

4 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景 $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$. 记 $\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$ 是集合取值的平展层范畴, 而 $\mathrm{Ab}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$ 是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为 $\mathrm{PreSh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$ 和 $\mathrm{PreAb}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$.

4.1 基本结果和例子

命题 4.1. *固定概形 X, 对于 $\mathscr{F} \in \mathrm{PreSh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$. 若 $\mathscr{F}$ 在限制到 Zariski 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖 $V \to U$ 满足层条件, 则 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$.*

证明. 详细细节参考 [4] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 Zariski 开覆盖上的条件会给出: 对于概形 $V = \coprod_i V_i$, 我们有 $\mathscr{F}(V) = \prod_i \mathscr{F}(V_i)$. 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖 $\coprod_i U_i \to U$ 满足等化子条件, 那么 $\{U_i \to U\}$ 也满足等化子条件 (因为 $\coprod_i U_i \times_U \coprod_j U_j = \coprod_{i,j} U_i \times_U U_j$). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 也满足等化子条件, 其中 I 有限且 U_i 仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去. □

例 4.1. *给定概形 X.*

(i) 结构层: 定义 $\mathscr{O}_{X,\mathrm{\acute{e}t}}$ 为 $\mathscr{O}_{X,\mathrm{\acute{e}t}}(U) := \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$. 我们断言 $\mathscr{O}_{X,\mathrm{\acute{e}t}} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$. 运用4.1, 这其实就是环的忠实平坦下降: 设环同态 $f : A \to B$ 忠实平坦, 则有正合列:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b \mapsto 1\otimes b - b\otimes 1} B \otimes_A B$$

证明颇为经典, 分成三步:*(a)* 证明如果 f 有一个截面, 则命题成立;*(b)* 证明如果存在另一个忠实平坦同态 $A \to A'$ 使得命题对 $A' \to A' \otimes_A B$ 成立, 则也对 $A \to B$ 成立;*(c)* 发现 $B \to B \otimes_A B, b \mapsto b \otimes 1$ 存在截面 $b \otimes b' \mapsto bb'$;

(ii) 由概形表示的层: 取定 Z 为 X-概形, 定义其为 $h_Z := \mathrm{Hom}_X(-, Z)$. 事实上通过 *(i)* 的正合列也容易得到 $h_Z \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$;

(iii) 拟凝聚层: 考虑 $\mathscr{M} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{Zar}})$ 是拟凝聚的, 定义 $\mathscr{M}^{\text{ét}}(\phi : U \to X) := \Gamma(U, \phi^*\mathscr{M})$. 运用*4.1*和更一般的正合列: 环同态 $f : A \to B$ 忠实平坦且 M 为 A-模, 则有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

即可得到 $\mathscr{M}^{\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.

命题 4.2.

4.2 茎和摩天大楼层

4.3 常值层和局部常值层

4.4 Abel 群预层和层构成的范畴

4.5 层化

5 关于层的一些函子

6 平展上同调的定义和基本性质

6.1 定义

6.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

定义 6.1. 设 G 是拓扑群.

(i) 一个 *Abel* 群 M*(*赋予离散拓扑*)* 称为 G-模, 如果有连续作用 $G \times M \to M$;

(ii) 设 Mod_G 是 G-模构成的范畴. 根据*Tag 04JF*, 范畴 Mod_G 有足够内射对象. 考虑左正合函子

$$\Gamma_G : \mathrm{Mod}_G \to \mathrm{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群 G 的 *(*连续*)* 上同调为 $H^i(G, M) = R^i\Gamma_G(M)$. 若 G 是 *Galois* 群则成为 *Galois* 上同调.

命题 6.2. 对于群 G, 考虑群环 $\mathbb{Z}[G]$, 那么有自然的范畴等价 $\mathrm{Mod}_G \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$. 设 $\mathbb{Z}$ 可以经过平凡 G 作用来作为 $\mathbb{Z}[G]$ 模, 则 $H^i(G, M) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

证明. 近乎平凡, 略去. □

定理 6.3 (Tate)**.** 设 M 是拓扑群并且赋予连续 G-作用. 考虑复形

$$C^*_{\text{cont}}(G, M) : M \to \mathrm{Maps}_{\text{cont}}(G, M) \to \mathrm{Maps}_{\text{cont}}(G \times G, M) \to \cdots$$

其中边界算子为当 $n=0$, 则 $m\mapsto(g\mapsto g(m)-m)$; 当 $n>0$ 时定义为

$$
\begin{aligned}
d(f)(g_1,...,g_{n+1}) = g_1(f(g_2,...,g_{n+1})) \\
&+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(g_1,...,g_jg_{j+1},...,g_{n+1}) \\
&+(-1)^{n+1}f(g_1,...,g_n).
\end{aligned}
$$

这样定义 *Tate* 连续上同调为 $H^i_{\mathrm{cont}}(G,M):=H^i(C^*_{\mathrm{cont}}(G,M))$. 则对于 $M\in\mathrm{Mod}_G$, 存在典范映射 $H^i(G,M)\to H^i_{\mathrm{cont}}(G,M)$. 并且当 G 是离散群或者射有限群, 则为同构 $H^i(G,M)\cong H^i_{\mathrm{cont}}(G,M)$.

证明. 映射 $H^i(G,M)\to H^i_{\mathrm{cont}}(G,M)$ 通过万有 δ-函子不难诱导. 证明见 [6] 第二章. □

6.3 点的上同调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上同调也是很复杂的.

引理 6.4. 设 $x=\operatorname{Spec}k$, 固定几何点 $\bar{x}=\operatorname{Spec}\Omega$. 取 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(x_{\text{ét}})$, 则

$$\Gamma(x,\mathscr{F})\cong(\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}.$$

证明. □

7 Čech 上同调和挠子

8 高阶直像

9 曲线的上同调——基础结果

10 可构建层和挠层

11 曲线上挠层的上同调

12 上同调维数

索引

参考文献

[1] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer-Verlag, 1971.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

[3] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version*. World Scientific, 2015.

[4] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton university press, 1980.

[5] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013. Available at www.jmilne.org/math/.

[6] James S. Milne. Class field theory, 2020. Available at www.jmilne.org/math/.