

平展上同调和反常层基础

温尊

2023 年 3 月 21 日

目录

I 第一部分	3
1 平展上同调简介	3
2 平展基本群	4
3 景和层和层化	5
4 平展拓扑上的层	7
4.1 基本结果和例子	7
4.2 平展预层/层的茎	8
4.3 常值层和局部常值层	10
4.4 Abel 群预层和层构成的范畴	11
4.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列	11
4.6 拟凝聚层	11
5 层的一些函子	12
5.1 直像	12
5.2 逆像	13
5.3 零扩张函子 (下叹号函子)	14
6 平展上同调的定义和基本性质	15
6.1 定义	15
6.2 群上同调一瞥	15
6.3 点的上同调	16
6.4 支撑在闭集的上同调及性质	17
7 Čech 上同调和挠子	18
7.1 Čech 上同调	18
7.2 Čech-导出的比较	18
7.3 几个应用	18
7.4 拟凝聚层的上同调	18
7.5 挠子理论一瞥和应用	18

8 高阶直像	18
9 曲线的上同调——基础结果	18
10 可构建层和挠层	18
11 曲线上挠层的上同调	18
12 上同调维数	18
II 第二部分	19
13 反常层简介	19
14 一些同调代数	19
索引	20
参考文献	20

Part I

平展上同调基础理论

1 平展上同调简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取 X 为 \mathbb{C} 上的代数簇, 其解析化 X^{an} 可以对应奇异上同调 $H^i(X^{\text{an}}, \mathbb{Z})$ 满足

- (i) 是有限生成 \mathbb{Z} 模;
- (ii) 群 $H^i(X^{\text{an}}, \mathbb{C})$ 有额外的结构;
- (iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 我们会发现挠系数的上同调, 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 系数的上同调可以比较好的模拟奇异上同调. 但会发现 $H_{\text{ét}}^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathbb{Z}) = 0$ 而 $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 并不能很好的模拟奇异上同调, 另一方面我们发现如下结果:

定理 1.1 (Serre). 不存在上同调理论 H^* 使得 (i) 具有函子性; (ii) 满足 *Kunneth* 公式; (iii) 对所有椭圆曲线 E 满足 $H^1(E) \cong \mathbb{Q}^2$.

基本思路. 取 E 为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是 $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}$ 是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到 $\text{End}(E)$ 作用在 E 上会诱导出 $\text{End}(E)$ 在 $H^1(E)$, 进而诱导出代数同态 $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$. 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论. \square

为了模拟在非挠系数下也可以模仿奇异上同调, 我们会定义类似的 ℓ -进上同调理论, 其中 ℓ 和特征 p 互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论) $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_{\ell}) = \varprojlim H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})$ 和 $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_{\ell}) = H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_{\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$. 这样也可以得到比较好的模拟.

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点 (X, \bar{x}) , 可以定义 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ 为平展基本群, 其定义事实上是从代数拓扑里偷的, 运用了覆盖变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

猜想 1 (Weil 猜想). 设 X 是 \mathbb{F}_q 上 n 维光滑紧合几何整的簇, 设

$$S_X(t) = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n} t^n \right),$$

则

- (i) 函数 $S_X(t)$ 是有理函数, 即 $S_X(t) = \prod_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} S_i(t)$, 其中 S_i 是满足一定条件的整系数多项式;
- (ii) 满足函数方程 $S_X(q^{-n}t^{-1}) = \pm q^{nE/2} t^E S_X(t)$ 其中 E 是 X 欧拉示性数;
- (iii) 所有零点和极点的绝对值为 $q^{j/2}$ 其中 $j \in \mathbb{Z}$;
- (iv) 若 X 提升为代数整数环 $R \subset \mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 Y , 则对于 $i = 0, \dots, 2n$, 流形 $Y(\mathbb{C})$ 的 Betti 数为 $S_i(t)$ 的次数 b_i .

最后结果. (i) 由 Dwork 运用 H^1 的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Gorthendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明. \square

因此平展上调是相当成功的上调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点集拓扑) 就会被我略去. 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐 [9] 里的 Tag 0BQ6 和 Tag 03N1, 扶磊教授的书 [4] 和 Milne 的传世经典 [5], 我们也会多次引用里面的代数细节.

前置知识: 至少是经典代数几何教材 [3] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 还有基本的导出范畴. 最好懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好.

2 平展基本群

对于连通概形 X , 定义 $\mathbf{F\acute{e}t}/X$ 为 X 上的有限平展态射构成的范畴, 而 $\mathbf{\acute{E}t}/X$ 为 X 上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点 (X, \bar{x}) , 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}} : \mathbf{F\acute{e}t}/X \rightarrow \mathbf{Sets}, (\pi : Y \rightarrow X) \mapsto \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆盖空间? 事实上不一定存在:

例 2.1. 考虑 \mathbb{C} 上射影直线 \mathbb{A}^1 , 存在有限平展映射 $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$, 那么注定没有像拓扑里的 $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 来表示万有覆盖!

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [5] 也没证明. 而 [4] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X' = ((X_i, f_i)_{i \in I}, \phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i, f_i = \phi_{ij} \circ f_j, f_i \in \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\mathrm{Hom}(X', Y) := \varinjlim \mathrm{Hom}_X(X_i, Y) \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y), \sigma \mapsto \sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取 X_i/X 为 Galois 覆盖, 也就是说 $\deg(X_i/X) = \#\mathrm{Aut}_X X_i$, 见 [5] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于 $\phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ 可以诱导 $\mathrm{Aut}_X X_j \rightarrow \mathrm{Aut}_X X_i$ 如下: 注意到 $\mathrm{Aut}_X X_j \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j), \sigma \mapsto \sigma(f_j)$ 是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [4] 第三节), 则通过 $F(X_j) \rightarrow F(X_i), \alpha \mapsto \phi_{ij}(\alpha)$ 即得到映射.

定义 2.1. 对于连通概形 X 和几何点 \bar{x} , 考虑上述构造, 定义平展基本群为

$$\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

定理 2.2. 考虑连通概形 X 和几何点 \bar{x} .

- (i) 函子 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$ 诱导出 $\mathbf{F\acute{e}t}/X$ 到有限 $\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x})$ -集的等价;
- (ii) 取第二个几何点 \bar{x}' , 我们有 $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \cong \mathfrak{F}_{\bar{x}'}$ 进而诱导 $\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}) \cong \pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}')$, 并且和 (i) 契合;
- (iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考 Tag 0BND. \square

例 2.2. (i) 对一个点 $X = \text{Spec}(k)$ 和几何点 Ω , 由定义知道 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \Omega) = \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$;

(ii) 考虑 \mathbb{C} 上的 $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, 则考虑 $x \mapsto x^n$ 得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \text{Aut}_X X_i = \varprojlim \mu_n(k) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{\ell} \mathbb{Z}_{\ell};$$

(iii) 考虑代数闭域上的 $X = \mathbb{P}^1$, 由 *Riemann-Hurwitz* 公式不难得到 X 只有平凡的平展覆盖, 故 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = 1$. 归纳可以得到 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^n, \bar{x}) = 1$;

(iv) 事实上我们对 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^1, \bar{x})$ 都一无所知, 其中 k 是正特征域 (根据 *Artin-Schreier* 列, 起码不是平凡的群);

(v) 对于正规簇 X , 考虑一般点上的几何点 \bar{x} , 假设

$$L = \bigcup \{ \text{几何点内的有限可分扩张 } K/K(X) : X \text{ 在 } K \text{ 内的正规化到 } X \text{ 平展} \},$$

则 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \cong \text{Gal}(L/K(X))$, 参考 [4] 命题 3.3.6.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

定理 2.3 (Riemann 存在定理). 设 X 是 \mathbb{C} 上的有限型概形, 则由范畴等价 $(\text{Fét}/X) \rightarrow (\text{FTopCov}/X^{\text{an}})$. 特别的有 $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \cong \pi_1(\widehat{X^{\text{an}}}, x)$, 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [2] 的定理 XII.5.1. \square

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多 \mathbb{C} 上的有限型概形的平展基本群了.

注 2.4 (算术和数论人的最爱). (i) 对于 X 为 k 上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 [4] 命题 3.3.7):

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\text{sep}}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \rightarrow 1;$$

(ii) 对于 $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, 运用正合列得到

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1.$$

嵌入 $\mathbb{Q}^{\text{al}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 可以得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}}, \bar{x}) \cong \langle a, b, c | \widehat{abc} = 1 \rangle.$$

而群 $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q})$ 则十分复杂, 如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 (摘自 *J. Milne* 的讲义 [6]).

3 景和层和层化

本质就是推广拓扑空间的定义.

定义 3.1 (Grothendieck 拓扑和景). 设 \mathcal{C} 是范畴, 一个 \mathcal{C} 上的 *Grothendieck* 拓扑由集合 $\{\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}\} = \text{Cov}(U)$ 组成, 其中 U 是任意对象, 满足

(i) 若 $V \rightarrow X$ 是同构, 则 $\{V \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$;

(ii) 若 $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ 且 $Y \rightarrow X$ 是任意态射, 则纤维积 $X_i \times_X Y$ 存在且

$$\{X_i \times_X Y \rightarrow Y\}_{i \in I} \in \text{Cov}(Y);$$

(iii) 若 $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ 且对任意 $i \in I$ 都给定 $\{V_{ij} \rightarrow X_i\}_{j \in J_i}$, 则

$$\{V_{ij} \rightarrow X_i \rightarrow X\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(X).$$

范畴 \mathcal{C} 和其上的 *Grothendieck* 拓扑称为景.

例 3.1 (小 Zariski 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\text{Op}(X)$ 由开子概形构成, 态射是包含关系. 则 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{Zar} .

例 3.2 (大 Zariski 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X , 则 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \rightarrow U$ 为开浸入且 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{ZAR} .

例 3.3 (小平展景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\text{Ét}/X$, 不难证明里面的态射都是平展的, 所以我们不假设条件. $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\text{ét}}$.

例 3.4 (大平展景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X , 则 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \rightarrow U$ 平展且 $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\text{Ét}}$.

例 3.5 (fppf 景). 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X , 则 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 为覆盖如果 $U_i \rightarrow U$ 平坦和局部有限表现, 且 $\coprod_{i \in I} U_i \rightarrow U$ 是满射. 记这个景为 X_{fppf} .

定义 3.2. 景 \mathcal{C} 上的预层为函子 $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$;

定义 3.3. 给定景 \mathcal{C} 和其上的预层 F .

(i) 预层 F 称之为分离的, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$, 诱导态射 $F(U) \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i)$ 是单射;

(ii) 预层 F 称为层, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$, 我们有如下等化子:

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被 $U_i \times_U U_j \rightarrow U_i$ 和 $U_i \times_U U_j \rightarrow U_j$ 诱导.

定义 3.4. 一个范畴称为 *Grothendieck* 意象 (*Topos*) 如果其等价于某个景上的层范畴.

定义 3.5 (层化). 在某个景 \mathcal{C} 上, 取定 $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$, 称 $\mathcal{P}^\# \in \text{Sh}(\mathcal{C})$ 使得 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\#$ 是 \mathcal{P} 的层化, 如果任取 $\mathcal{G} \in \text{Sh}(\mathcal{C})$ 和 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$, 都有交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}^\# \\ \downarrow & \swarrow \exists! & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

定理 3.6. 在某个景 \mathcal{C} 上, 取定 $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$. 对某个覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$, 定义

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := \ker \left(\prod_i \mathcal{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j} \mathcal{P}(U_i \times_U U_j) \right).$$

故有典范映射 $\mathcal{P}(U) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$. 不难证明不同覆盖可以诱导良定义的态射且和覆盖间映射选取无关 (参考 Tag 03NQ), 故定义

$$\mathcal{P}^+ : U \mapsto \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P}).$$

- (i) 函子 \mathcal{P}^+ 是分离预层;
- (ii) 若 \mathcal{P} 是分离预层, 则 \mathcal{P}^+ 是层且 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^+$ 单射;
- (iii) 若 \mathcal{P} 是层, 则 $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^+$ 是同构;
- (iv) 不论如何 \mathcal{P}^{++} 一定是层, 且 $\mathcal{P}^{++} \cong \mathcal{P}^\sharp$.

证明. 这是纯粹的层论推导, 参考Tag 00WB. □

注 3.7. 我们在景的定义3.1里规定 $\text{Cov}(U)$ 是集合很大程度上就是为了保证这个极限存在.

推论 3.8. 在某个景 \mathcal{C} 上, 取定 $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$. 则 $\sharp: \text{PreSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C})$ 是个函子, 且若规定遗忘函子为 $i: \text{Sh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{PreSh}(\mathcal{C})$, 则有 (\sharp, i) 是伴随函子. 特别的, 函子 \sharp 是正合函子.

证明. 近乎平凡. □

推论 3.9. 考虑图 $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C})$, 则 $\varprojlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$ 存在且和预层范畴内一样, 而 $\varinjlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$ 存在且为预层范畴内的层化.

证明. 也是纯粹的层论验证, 见Tag 00W2和Tag 00WI. □

4 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景 $X_{\text{ét}}$. 记 $\text{Sh}(X_{\text{ét}})$ 是集合取值的平展层范畴, 而 $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为 $\text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 和 $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$.

4.1 基本结果和例子

命题 4.1. 固定概形 X , 对于 $\mathcal{F} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 若 \mathcal{F} 在限制到 *Zariski* 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖 $V \rightarrow U$ 满足层条件, 则 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$.

证明. 详细细节参考 [5] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 *Zariski* 开覆盖上的条件会给出: 对于概形 $V = \coprod_i V_i$, 我们有 $\mathcal{F}(V) = \prod_i \mathcal{F}(V_i)$. 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖 $\coprod_i U_i \rightarrow U$ 满足等化子条件, 那么 $\{U_i \rightarrow U\}$ 也满足等化子条件 (因为 $\prod_i U_i \times_U \prod_j U_j = \prod_{i,j} U_i \times_U U_j$). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到 $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ 也满足等化子条件, 其中 I 有限且 U_i 仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去. □

例 4.1 (结构层). 给定概形 X . 定义 $\mathcal{O}_{X, \text{ét}}$ 为 $\mathcal{O}_{X, \text{ét}}(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. 我们断言 $\mathcal{O}_{X, \text{ét}} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$. 运用4.1, 这其实就是环的忠实平坦下降: 设环同态 $f: A \rightarrow B$ 忠实平坦, 则有正合列:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b \mapsto 1 \otimes b - b \otimes 1} B \otimes_A B$$

证明颇为经典, 分成三步:(a) 证明如果 f 有一个截面, 则命题成立;(b) 证明如果存在另一个忠实平坦同态 $A \rightarrow A'$ 使得命题对 $A' \rightarrow A' \otimes_A B$ 成立, 则也对 $A \rightarrow B$ 成立;(c) 发现 $B \rightarrow B \otimes_A B, b \mapsto b \otimes 1$ 存在截面 $b \otimes b' \mapsto bb'$.

例 4.2 (由概形表示的层). 给定概形 X . 取定 Z 为 X -概形, 定义其为 $h_Z := \text{Hom}_X(-, Z)$. 事实上通过 (i) 的正合列也容易得到 $h_Z \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$. 下面有几个常用的例子:

- (a) 定义 $\mu_{n, X}(T) = \{\zeta \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T) : \zeta^n = 1\}$, 即 $\mu_{n, X}$ 被 $\text{Spec}_X \mathcal{O}_X[t]/(t^n - 1)$ 表示;
- (b) 定义 $\mathbb{G}_{a, X}(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, 即 $\mathbb{G}_{a, X}$ 是被 \mathbb{A}_X^1 表示的函子;

- (c) 定义 $\mathbb{G}_{m,X}(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T^*)$, 即 $\mathbb{G}_{m,X}$ 是被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathcal{O}_X[t, t^{-1}]$ 表示的函子;
(d) 定义 $\mathrm{GL}_{n,X}(T) = \mathrm{GL}_n(\Gamma(T, \mathcal{O}_T))$, 即 $\mathrm{GL}_{n,X}$ 是被

$$\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathcal{O}_X[\{x_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}][1/\det(x_{ij})]$$

表示的函子.

例 4.3 (拟凝聚层). 给定概形 X . 考虑 $\mathcal{M} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{Zar}})$ 是拟凝聚的, 定义 $\mathcal{M}^{\mathrm{et}}(\phi: U \rightarrow X) := \Gamma(U, \phi^* \mathcal{M})$. 运用 4.1 和更一般的正合列: 环同态 $f: A \rightarrow B$ 忠实平坦且 M 为 A -模, 则有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

即可得到 $\mathcal{M}^{\mathrm{et}} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}})$.

命题 4.2 (点上的层范畴). 对于 $X = \mathrm{Spec} k$, 有范畴等价

$$\mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}}) \rightarrow (\text{离散 Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) - \text{集}), \mathcal{F} \mapsto M_{\mathcal{F}} := \varinjlim_{k^{\mathrm{sep}} \supset k' / k \text{ 有限 Galois}} \mathcal{F}(\mathrm{Spec} k').$$

证明. 定义逆为 $M \mapsto \mathcal{F}_M := (A \mapsto \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k^{\mathrm{sep}}), M))$. 见 Tag 03QT. \square

注 4.3. 类似的有范畴等价

$$\mathrm{Ab}(X_{\mathrm{et}}) \rightarrow (\text{离散 Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) - \text{模}).$$

4.2 平展预层/层的茎

定义 4.4 (平展邻域). 给定概形 X , 称几何点 \bar{x} 的一个平展邻域为如下图表:

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow \bar{u} & \downarrow f \\ \bar{x} & \xrightarrow{\bar{x}} & X \end{array}$$

其中 f 平展. 我们记为 $(U, \bar{u}) \rightarrow (X, \bar{x})$.

引理 4.5. 给定概形 X 和几何点 \bar{x} , 则

- (i) 给定两个平展邻域 $(U_i, \bar{u}_i)_{i=1,2}$, 存在第三个平展邻域 (U, \bar{u}) 和态射 $(U, \bar{u}) \rightarrow (U_i, \bar{u}_i)$;
- (ii) 假设 $h_1, h_2: (U_1, \bar{u}_1) \rightarrow (U_2, \bar{u}_2)$ 是平展邻域的态射, 则存在第三个平展邻域 (U, \bar{u}) 和态射 $h: (U, \bar{u}) \rightarrow (U_1, \bar{u}_1)$ 使得 $h_1 \circ h = h_2 \circ h$.

证明. (i) 只需考虑 $U = U_1 \times_X U_2$, 而 $\bar{s} \rightarrow U$ 被 (\bar{u}_1, \bar{u}_2) 定义;

(ii) 定义 U 为纤维积

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U_1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow (h_1, h_2) \\ U_2 & \xrightarrow{\Delta} & U_2 \times_X U_2 \end{array}$$

并定义 $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. \square

注 4.6. 在 (ii) 内, 通过一些假设, 我们可以使得态射 $h_1 = h_2$: 若我们有诺特分离概形的图标

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ g \swarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow[p]{} & S \\ g' \nearrow & & \end{array}$$

其中 Y 连通且 p, q 平展, 则 $g = g'$. 这是因为 $\delta: X \rightarrow X \times_S X$ 平展且是闭浸入, 则 $X \times_S X = \delta(X) \sqcup Z$ 为连通分支的无交并. 注意到 $g \times g': Y \rightarrow X \times_S X$ 有连通的像. 根据图知 $\delta(X) \cap \text{Im}(g \times g') \neq \emptyset$, 故 $\text{Im}(g \times g') \subset \delta(X)$, 故 $g = g'$.

定义 4.7. 给定概形 X 和 $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 给定几何点 \bar{x} , 定义 \mathcal{P} 在 \bar{x} 的茎为

$$\mathcal{P}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U, \bar{u})} \mathcal{P}(U)$$

其中余极限遍历所有平展邻域, 根据引理 4.5 此为滤余极限.

注 4.8. 给定概形 X 和几何点 \bar{x} , 则不难看出 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}$ 作为函子 $\text{PreSh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sets}$ 或者 $\text{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sets}$ 或者 $\text{PreAb}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{AbGrps}$ 或者 $\text{Ab}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{AbGrps}$ 都是正合的. 如果你不放心, 请参考 Tag 03PT.

定义 4.9. 给定概形 X 和几何点 \bar{x} , 给定集合 E , 定义 $E^{\bar{x}} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ 为:

$$E^{\bar{x}}(U) := \bigoplus_{\text{Hom}_X(\bar{x}, U)} E.$$

注 4.10. 有几个简单的性质:

- (i) 这个 $E^{\bar{x}}$ 在平展拓扑下一定是层, 其他景上面不一定;
- (ii) 我们有伴随函子 $((-)^{\bar{x}}, (-)^{\bar{x}})$, 在预层范畴上这个伴随对任何景都对, 在层范畴上需要一定条件 (而小平展景显然满足), 若对这个有兴趣, 参考 Tag 00Y3;
- (iii) 对于几何点 \bar{y} , 除非 \bar{y} 也在 \bar{x} 对应的点上, 否则 $(E^{\bar{x}})_{\bar{y}} = 0$.

命题 4.11. 给定概形 X 和几何点 \bar{x} , 对于 $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 有 $\mathcal{P}_{\bar{x}} = \mathcal{P}_{\bar{x}}^{\sharp}$.

证明. 因为有伴随性, 对于任何集合 E , 我们有

$$\text{Mor}_{\text{Sets}}(\mathcal{P}_{\bar{x}}, E) = \text{Hom}_{\text{PreSh}(X_{\text{ét}})}(\mathcal{P}, E^{\bar{x}}) = \text{Hom}_{\text{Sh}(X_{\text{ét}})}(\mathcal{P}^{\sharp}, E^{\bar{x}}) = \text{Mor}_{\text{Sets}}(\mathcal{P}_{\bar{x}}^{\sharp}, E),$$

因此成立. \square

对于结构层 $\mathcal{O}_{X, \text{ét}}$, 它的茎有特殊的代数性质.

命题 4.12. 给定概形 X 和在 $x \in X$ 上的几何点 \bar{x} . 设 $\kappa(x) \subset \kappa(x)^{\text{sep}} \subset \kappa(\bar{x})$ 是可分代数闭包, 则有

- (i) 有同构 $(\mathcal{O}_{X, x})^{\text{sh}} \cong (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$, 前者为 $\mathcal{O}_{X, x}$ 的严格 Hensel 化;
- (ii) 设 \mathfrak{m}_x 是 $\mathcal{O}_{X, x}$ 的极大理想, 则 $\mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$ 是 $(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$ 的极大理想, 且满足

$$(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}} / \mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}} \cong \kappa(x)^{\text{sep}};$$

- (iii) 对任何首一多项式 $f \in (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}[T]$ 和任意 $\bar{f} \in \kappa(x)^{\text{sep}}[T]$ 的根 $\alpha_0 \in \kappa(x)^{\text{sep}}$ 使得 $\bar{f}'(\alpha_0) \neq 0$, 则存在 $\alpha \in (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$ 使得 $f(\alpha) = 0$ 且 $\alpha_0 = \bar{\alpha}$.

证明. 这些都是复杂的交换代数, 见Tag 04GE, Tag 04GP和04GW. 其中 (iii) 被称之为 Hensel 引理, 满足 (iii) 的环叫做 Hensel 局部环, 如果这个环的剩余类域可分代数闭, 则称之为严格 Hensel 局部环. 所以我们这里就是一个严格 Hensel 环. \square

注 4.13. 我们之后将记 $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}} := (\mathcal{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 也不会有歧义.

4.3 常值层和局部常值层

定义 4.14. 给定概形 X .

(i) 对于 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ (或者 $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$), 则 \mathcal{F} 称为常值层如果存在集合 E (或者 Abel 群 G) 使得 $\mathcal{F} \cong (U \mapsto E)^{\sharp} =: \underline{E}_X$ (或者 $\cong (U \mapsto G)^{\sharp} =: \underline{G}_X$);

(ii) 称 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ (或者 $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$) 是局部常值层, 如果存在覆盖 $\{U_i \rightarrow X\}$ 使得 $\mathcal{F}|_{U_i}$ 是常值层;

(iii) 称 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ (或者 $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$) 是有限局部常值层, 如果 \mathcal{F} 是局部常值层且取值的集合 (或 Abel 群) 是有限集合.

引理 4.15 (有限平展映射的平展局部分解). (i) 设 $f: X \rightarrow S$ 有限无分歧, 取 $s \in S$, 则存在平展邻域 $(U, u) \rightarrow (S, s)$ 和有限无交分解 $X_U = \coprod_j V_j$ 使得所有 $V_j \rightarrow U$ 均为闭浸入.

(ii) 设 $f: X \rightarrow S$ 有限平展, 取 $s \in S$, 则存在平展邻域 $(U, u) \rightarrow (S, s)$ 和有限无交分解 $X_U = \coprod_j V_j$ 使得所有 $V_j \rightarrow U$ 均为同构.

证明. 首先, 有关各种映射的平展局部, 可参考Tag 024J. 二者究其本质都是拟有限态射的平展局部性质 (见Tag 02LM). 证明虽然不甚复杂, 但写于此意义也不大, 故这里我们略去证明, 证明参考Tag 04HJ和 Tag 04HN. \square

命题 4.16. 给定概形 X , 则有范畴等价

$$\{\text{有限平展映射 } U \rightarrow X\} \cong \{\text{有限局部常值层}\}, (U \rightarrow X) \mapsto \mathcal{F} = h_U.$$

证明. 根据引理4.15(ii), 不难看出 h_U 确实是有限局部常值层. 另一方面, 任取 \mathcal{F} 是有限局部常值层, 则存在平展覆盖 $\{U_i \rightarrow X\}$ 使得 $\mathcal{F}|_{U_i}$ 是常值层, 则可以被有限平展态射 $U_i \rightarrow X$ 表示 (设取值集合的基数是 κ , 若是诺特分离概形, 考虑注4.6, 则令 $Z_i = \coprod_{i=1}^{\kappa} U_i$, 故 $\mathcal{F}|_{U_i} = h_{Z_i}$). 根据仿射态射满足有效的忠实平坦下降 (fpqc), 我们可以得到存在 $Z \rightarrow X$ 使得 $h_Z \cong \mathcal{F}$. 而由于有限性和平展性都是 fpqc 局部的, 故 $Z \rightarrow X$ 仍然是有限平展映射. \square

命题 4.17. 给定连通概形 X 和几何点 \bar{x} .

(i) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})\} \rightarrow \{\text{有限 } \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-集}\};$$

(ii) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})\} \rightarrow \{\text{有限 } \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-模}\}.$$

证明. (i) 根据定理2.2(i) 和命题4.16, 得到结论; (ii) 即为 (i) 赋予加法结构. \square

4.4 Abel 群预层和层构成的范畴

固定概形 X , 可以看出 $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 一定是 Abel 范畴, 它里面的正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等皆为正常的定义方法. 我们主要考虑的是满子范畴 $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$, 它是加性范畴, 我们要证明它为 Abel 范畴 (其正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等和一般拓扑空间上类似, 皆为层化).

命题 4.18. 给定概形 X 和范畴 $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的列

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0,$$

则下述命题等价:

- (i) 列 $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ 在 $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内 (函子性的) 正合;
- (ii) 列 $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ 在 $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内正合且 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ 满足对任意的 $U \in X_{\text{ét}}$ 和 $s \in \mathcal{F}''(U)$, 存在 $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ 使得 $s|_{U_i}$ 在 $\mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}''(U_i)$ 的像内;
- (iii) 对所有几何点 $\bar{x} \rightarrow X$, 都有 $0 \rightarrow \mathcal{F}'_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}''_{\bar{x}} \rightarrow 0$ 正合.

证明. (ii) 推 (i), 平凡. (i) 推 (iii) 由于取茎是正合函子, 故也平凡.

(iii) 推 (ii), 先证明满射部分. 任取 $U \in X_{\text{ét}}$ 和几何点 $\bar{u} \rightarrow U$. 设 $\bar{x}: \bar{u} \rightarrow U \rightarrow X$ 也为几何点. 根据定义有 $\mathcal{F}_{\bar{u}} = \mathcal{F}_{\bar{x}}$, 故 $\mathcal{F}_{\bar{u}} \rightarrow \mathcal{F}''_{\bar{u}}$ 也是满射. 再由定义知道成立. 对于其他部分, 注意到 $s \in \mathcal{F}(U)$ 为零当且仅当 $s_{\bar{u}} = 0$ 即可, 这也是定义. \square

推论 4.19. 给定概形 X , 则范畴 $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 范畴.

4.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列

定理 4.20 (Kummer 正合列). 给定概形 X 和正整数 n 使得 n 在 X 内可逆 (不被任何剩余类域的特征整除), 则有 $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列

$$0 \rightarrow \mu_{n,X} \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow 0.$$

证明. 显然 $\mu_{n,X}$ 为 $\mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X}$ 的核. 故只需要证明满射. 取 $U = \text{Spec } A$ 是仿射的平展 X -概形, 任取 $a \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{m,X})$, 根据假设知典范映射 $V = \text{Spec } A[t]/(t^n - a) \rightarrow U$ 是平展映射. 注意到对应的环同态是有限自由的, 故忠实平坦, 于是是满射. 因此 $V \rightarrow U$ 是平展覆盖, 根据 4.18 即可得到结论. \square

定理 4.21 (Artin-Schreier 列). 给定概形 X 和素数 p 使得在 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 内 $p = 0$, 则有 $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow 0.$$

证明. 类似于 Kummer 正合列, 注意到此时 $\text{Spec } A[t]/(t^p - t - a) \rightarrow \text{Spec } A$ 是平展覆盖即可. \square

4.6 拟凝聚层

定义 4.22. 考虑景 $X_{\text{ét}}$ 上的 $\mathcal{O}_{X,\text{ét}}$ -模 \mathcal{F} 称之为拟凝聚的如果任取 $U \in X_{\text{ét}}$, 存在 $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ 使得

$$\mathcal{F}|_{X_{\text{ét}}/U_i} \cong \text{coker} \left(\bigoplus_{k \in K} \mathcal{O}_{X,\text{ét}}/U_i \rightarrow \bigoplus_{l \in L} \mathcal{O}_{X,\text{ét}}/U_i \right).$$

其中 $X_{\text{ét}}/U_i$ 是局部景, 其中的对象皆为 $V \rightarrow U_i$, 覆盖皆为 U_i -映射.

注 4.23. 这个在所有景上面都可以定义.

作为下降理论的应用, 我们有如下令人震惊的结论:

定理 4.24. 如下拟凝聚层范畴是范畴等价:

$$\mathrm{Qcoh}(X_{\mathrm{Zar}}) \rightarrow \mathrm{Qcoh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}}), \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{\acute{e}t}}.$$

证明. 这个是下降理论的直接应用, 需要用到纤维范畴 QCOH 然后可以证明其为有效的 fpqc 下降, 但这个的证明非常复杂 (参考 [1] 定理 4.23). 我们推荐感兴趣的读者阅读 [8] 命题 4.3.15. \square

注 4.25. 作为推广我们可以考虑一些特殊的景, 也满足类似结论. 见 *Tag 03OJ*.

5 层的一些函子

5.1 直像

定义 5.1. 考虑概形映射 $f: X \rightarrow Y$, 设 $\mathcal{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$, 定义直像为

$$f_*\mathcal{P}(U \rightarrow Y) = \mathcal{P}(U \times_Y X \rightarrow X).$$

命题 5.2. 概形映射 $f: X \rightarrow Y$, 设 $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$.

- (i) 必然有 $f_*\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\mathrm{\acute{e}t}})$;
- (ii) 对于 $g: Y \rightarrow Z$, 我们有 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;
- (iii) 若视作函子 $f_*: \mathrm{Ab}(X_{\mathrm{\acute{e}t}}) \rightarrow \mathrm{Ab}(Y_{\mathrm{\acute{e}t}})$, 则左正合.

证明. 此乃定义, 略去. \square

命题 5.3. 考虑概形映射 $f: X \rightarrow Y$ 和几何点 $\bar{y} = \mathrm{Spec} k \rightarrow Y$, 设 $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$.

- (i) 若 f 是闭浸入, 则

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \begin{cases} \{*\} & \text{当 } \bar{y} \notin X \\ \mathcal{F}_{\bar{y}} & \text{当 } \bar{y} \in X \end{cases}$$

其中 $\{*\}$ 指单点集;

- (ii) 若 f 是开浸入, 若 $\bar{y} \in X$, 则 $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \mathcal{F}_{\bar{y}}$;
- (iii) 如果 f 是有限态射, 则

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \prod_{\bar{x}: \mathrm{Spec} k \rightarrow X, f(\bar{x})=\bar{y}} \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

若 $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$, 则 $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \bigoplus_{\bar{x}: \mathrm{Spec} k \rightarrow X, f(\bar{x})=\bar{y}} \mathcal{F}_{\bar{x}}$.

证明. (ii) 是平凡的; (iii) 颇为麻烦, 需要用到严格 Hensel 环的性质, 我们略去, 参考 *Tag 03QP*.

- (i) 当 $\bar{y} \notin X$, 这是显然的. 下面考虑 $\bar{y} \in X$ 的情况. 考虑两个事实:

事实 1. 对任意两个平展态射 $U, U' \rightarrow Y$, 设 $h: U_X \rightarrow U'_X$ 是 X -态射, 则存在 $a: W \rightarrow U, b: W \rightarrow U'$ 使得 $a_X: W_X \rightarrow U_X$ 是同构且 $h = b_X \circ (a_X)^{-1}$.

事实 1 的证明: 设 $M = U \times_Y U'$ 和图像 $\Gamma_h \subset M_X$. 注意到 Γ_h 是平展映射 $\mathrm{pr}_{1,X}: M_X \rightarrow U_X$ 一个截面的像, 故是开的. 则存在开子概形 $W \subset M$ 使得 $W \cap M_X = \Gamma_h$. 故取 $a = \mathrm{pr}_1|_W, b = \mathrm{pr}_2|_W$ 即可.

事实 2. 对平展态射 $V \rightarrow X$, 存在一族平展态射 $U_i \rightarrow Y$ 和态射 $U_{i,X} \rightarrow V$ 使得 $\{U_{i,X} \rightarrow V\}$ 是 V 的 Zariski 覆盖.

事实 2 的证明: 不妨设 Y, V 皆为仿射的, 则化为以下简单的交换代数: 假设环 R 和理想 $I \subset R$, 设 $R/I \rightarrow S'$ 平展, 则存在平展同态 $R \rightarrow S$ 使得 $S' \cong S/IS$ 是 R/I -代数同构. 这是因为平展同态总可以写成 $S' = (R/I)[x_1, \dots, x_n]/(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ 其中 $\bar{\Delta} = \det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$ 在 S' 里可逆. 只需要提升成某些 f_1, \dots, f_n 且设 $S = R[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]/(f_1, \dots, f_n, x_{n+1}\Delta - 1)$, 其中 $\Delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 即可. 回到原结论. 注意到 $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U, \bar{u})} \mathcal{F}(U_X)$ 且 $\mathcal{F}_{\bar{y}} = \varinjlim_{(V, \bar{v})} \mathcal{F}(V)$. 由这两个事实可以得到 $\{(U, \bar{u})\}$ 在 $\{(V, \bar{v})\}$ 内共尾, 则得证. \square

5.2 逆像

定义 5.4. 考虑概形映射 $f: X \rightarrow Y$, 设 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 定义逆像为

$$f^{-1}\mathcal{F} = \left((U \rightarrow X) \mapsto \varinjlim_{U \rightarrow X \times_Y V} \mathcal{F}(V \rightarrow Y) \right)^{\#}.$$

命题 5.5. 考虑概形映射 $f: X \rightarrow Y$, 则

- (i) 有伴随函子 (f^{-1}, f_*) ;
- (ii) 函子 $f^{-1}: \text{Sh}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和 $f^{-1}: \text{Ab}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 正合;
- (iii) 对几何点 $\bar{x} \rightarrow X$ 和 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 设 $\bar{y} = \bar{x} \rightarrow X \rightarrow Y$, 则 $(f^{-1}\mathcal{F})_{\bar{x}} \cong \mathcal{F}_{\bar{y}}$;
- (iv) 对 $g: Y \rightarrow Z$, 有 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
- (v) 对平展映射 $V \rightarrow Y$, 有 $f^{-1}h_V = h_{X \times_Y V}$.

证明. (i)(ii) 略去. (iv) 和 (v) 由伴随性和 Yoneda 引理显然. 考虑 (iii), 注意到

$$\begin{aligned} (f^{-1}\mathcal{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(U, \bar{u})} (f^{-1}\mathcal{F})(U) \\ &= \varinjlim_{(U, \bar{u})} \varinjlim_{a: U \rightarrow X \times_Y V} \mathcal{F}(U) \\ &= \varinjlim_{(V, a \circ \bar{u})} \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_{\bar{y}} \end{aligned}$$

即可. \square

命题 5.6 (基变换). 考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

其中 f 有限, 则 $f'_* \circ (g')^{-1} = g^{-1} \circ f_*$.

证明. 只需验证茎即可. 注意到纤维积, 对 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ 考虑几何点 $\bar{y}' : \text{Spec } k \rightarrow Y'$, 我们有

$$\begin{aligned} (f'_*(g')^{-1}(\mathcal{F}))_{\bar{y}'} &= \prod_{\bar{x}': \text{Spec } k \rightarrow X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} ((g')^{-1}(\mathcal{F}))_{\bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x}': \text{Spec } k \rightarrow X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} \mathcal{F}_{g' \circ \bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X, f \circ \bar{x} = g \circ \bar{y}'} \mathcal{F}_{\bar{x}} = (f_* \mathcal{F})_{g \circ \bar{y}'} = (g^{-1} f_* \mathcal{F})_{\bar{y}'} \end{aligned}$$

得到结论. □

5.3 零扩张函子 (下叹号函子)

定义 5.7. 考虑平展映射 $j : U \rightarrow X$, 定义 $j_! : \text{Ab}(U_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 为

$$j_! \mathcal{F} = \left((V \mapsto X) \mapsto \bigoplus_{V \rightarrow U} \mathcal{F}(V \rightarrow U) \right)^{\#}.$$

命题 5.8. 对平展映射 $j : U \rightarrow X$, 有

- (i) 有伴随函子 $(j_!, j^{-1})$;
- (ii) 对 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(U_{\text{ét}})$ 和几何点 $\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow X$ 我们有

$$(j_! \mathcal{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{\bar{u}: \text{Spec } k \rightarrow U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathcal{F}_{\bar{u}},$$

特别的, 函子 $j_!$ 正合;

- (iii) 若 j 有限平展, 则存在 $j_! \rightarrow j_*$ 使得对任何 $\text{Ab}(U_{\text{ét}})$ 都同构;
- (iv) 若 j 是开浸入, 则对 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(U_{\text{ét}})$ 有 $j^{-1} j_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F} \rightarrow j^{-1} j_! \mathcal{F}$ 是同构. 事实上 $j_! \mathcal{F}$ 是唯一一个使得限制在 U 上是 \mathcal{F} , 且在其他地方的茎是 0 的 *Abel* 群层.

证明. (i)(iv) 平凡, 略去.(iii) 只需要考虑平展局部, 用引理4.15(ii) 即可验证.

考虑 (ii), 映射为

$$\begin{aligned} (j_! \mathcal{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(V, \bar{v})} (j_! \mathcal{F})(V) = \varinjlim_{(V, \bar{v})} \bigoplus_{\phi: V \rightarrow U} \mathcal{F}(\phi) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\bar{u}: \text{Spec } k \rightarrow U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathcal{F}_{\bar{u}}. \end{aligned}$$

同构参考Tag 03S5. □

命题 5.9 (基变换). (i) 设 $f : Y \rightarrow X$ 是概形映射且 $j : V \rightarrow X$ 平展, 考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X V & \xrightarrow{f'} & V \\ j' \downarrow & \lrcorner & \downarrow j \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

则有 $j'_! \circ (f')^{-1} = f^{-1} \circ j_!$;

(ii) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是有限映射且 $j: V \rightarrow Y$ 开浸入, 且基变换之后 $g: U = X \times_Y V \rightarrow V$ 平展, 设 $j': U \rightarrow X$, 则有 $f_* \circ j'_* = j_! \circ g_*$.

证明. (i) 考虑二者的右伴随函子, 然后因为直像和平展局部化交换即可得到结论;

(ii) 首先考虑 Y 的不在 U 内的几何点上的茎不难得知二者皆为零. 其次用命题5.8(iv) 和命题5.6, 得到同构

$$j^{-1} f_* j'_! \mathcal{F} = g_*(j')^{-1} j'_! \mathcal{F} = g_* \mathcal{F}.$$

再次用命题5.8(iv) 即可得到结论. \square

命题 5.10. 对于概形 X 和闭子概形 $i: Z \rightarrow X$ 及其补 $j: U \rightarrow X$, 则对任何 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有正合列

$$0 \rightarrow j_! j^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^{-1} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

证明. 分情况不难根据定义得到取茎之后正合, 然后用命题4.18即可. \square

6 平展上同调的定义和基本性质

6.1 定义

引理 6.1. 对概形 X 和 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$, 存在内射对象 $\mathcal{I} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 使得有单射 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$.

证明. 任取 $x \in X$ 和在其上的几何点 $i_x: \bar{x} \rightarrow X$, 取内射 Abel 群满足 $\mathcal{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow I(x)$. 则 $\mathcal{I}(x) := i_{x,*} I(x)$ 是内射的, 故取 $\mathcal{I} = \prod_{x \in X} \mathcal{I}(x)$ 即可得到 $\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow \mathcal{I}$. \square

定义 6.2. 对概形 X 和 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$, 不难得知截面函子 $\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$ 左正合. 由引理6.1知有内射预解 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$, 则定义 X 上 \mathcal{F} 的平展上同调为

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) := R^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) = H^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathcal{I}^*).$$

和我们之前定义的上同调理论类似, 我们也有如下基本结果:

命题 6.3. (i) 满足 $H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$;

(ii) 若 \mathcal{I} 内射, 则当 $i > 0$ 时 $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{I}) = 0$;

(iii) 短正合列 $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ 会诱导长正合列

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}'') \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

注 6.4. (a) 若 $g: U \rightarrow X$ 平展, 则 $g^{-1} \circ \Gamma(U, -) = \Gamma(U, -)$, 故 $H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}|_U) = H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F})$;

(b) 对于 $f: X \rightarrow Y$, 因为有 $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^{-1} \mathcal{F}$, 故可以诱导 $R\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, f^{-1} \mathcal{F})$, 故可以诱导映射 $H_{\text{ét}}^i(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, f^{-1} \mathcal{F})$.

6.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

定义 6.5. 设 G 是拓扑群.

(i) 一个 $Abel$ 群 M (赋予离散拓扑) 称为 G -模, 如果有连续作用 $G \times M \rightarrow M$;

(ii) 设 Mod_G 是 G -模构成的范畴. 根据 *Tag 04JF*, 范畴 Mod_G 有足够内射对象. 考虑左正合函子

$$\Gamma_G : \text{Mod}_G \rightarrow \text{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群 G 的 (连续) 上同调为 $H^i(G, M) = R^i\Gamma_G(M)$. 若 G 是 *Galois* 群则成为 *Galois* 上同调.

命题 6.6. 对于群 G , 考虑群环 $\mathbb{Z}[G]$, 那么有自然的范畴等价 $\text{Mod}_G \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$. 设 \mathbb{Z} 可以经过平凡 G 作用来作为 $\mathbb{Z}[G]$ 模, 则 $H^i(G, M) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$.

证明. 近乎平凡, 略去. \square

定理 6.7 (Tate). 设 M 是拓扑群并且赋予连续 G -作用. 考虑复形

$$C_{\text{cont}}^*(G, M) : M \rightarrow \text{Maps}_{\text{cont}}(G, M) \rightarrow \text{Maps}_{\text{cont}}(G \times G, M) \rightarrow \dots$$

其中边界算子为当 $n = 0$, 则 $m \mapsto (g \mapsto g(m) - m)$; 当 $n > 0$ 时定义为

$$\begin{aligned} d(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1(f(g_2, \dots, g_{n+1})) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^j f(g_1, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

这样定义 *Tate* 连续上同调为 $H_{\text{cont}}^i(G, M) := H^i(C_{\text{cont}}^*(G, M))$. 则对于 $M \in \text{Mod}_G$, 存在典范映射 $H^i(G, M) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(G, M)$. 并且当 G 是离散群或者射有限群, 则为同构 $H^i(G, M) \cong H_{\text{cont}}^i(G, M)$.

证明. 映射 $H^i(G, M) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(G, M)$ 通过万有 δ -函子不难诱导. 证明见 [7] 第二章. \square

6.3 点的上同调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上同调也是很复杂的.

引理 6.8. 设 $x = \text{Spec } k$, 固定几何点 $\bar{x} = \text{Spec } \Omega$. 取 $\mathcal{F} \in \text{Sh}(x_{\text{ét}})$, 则

$$\Gamma(x, \mathcal{F}) \cong (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}.$$

证明. 根据命题4.16和命题4.2, 我们用 Yoneda 引理有

$$\Gamma(x, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Sh}(X_{\text{ét}})}(h_x, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)\text{-集}}(\{*\}, \mathcal{F}_{\bar{x}}) = (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}$$

得到结论. \square

定理 6.9. 设 $x = \text{Spec } k, \bar{x} = \text{Spec } k^{\text{sep}}$ 和 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(x_{\text{ét}})$, 则对任意 $i \geq 0$,

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), \mathcal{F}_{\bar{x}}).$$

证明. 根据引理, 我们得知 $\Gamma(x, \mathcal{F}) = \Gamma_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) := (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}$, 故我们有

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(x, \mathcal{F}) = R^i\Gamma_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) = H^i(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), \mathcal{F}_{\bar{x}})$$

即可得到结论. \square

注意到当 $x = \bar{x}$ 且当 $i > 0$ 时, 就有 $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) = 0$, 这和几何上是一样的.

6.4 支撑在闭集的上同调及性质

首先, 不难证明如下事实: 对概形 X 和 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$, 取截面 $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, 则存在开集 $W \subset U$ 使得

- (i) W 是 U 内最大的开集使得 $s|_W = 0$;
- (ii) 对任何几何点 $\bar{u} \rightarrow U$, 设 $\bar{s} = (U \rightarrow S) \circ \bar{u}$, 则

$$0 = (U, \bar{u}, s) \in \mathcal{F}_{\bar{s}} \Leftrightarrow \bar{u} \in W.$$

读者可以自己证明, 如果想当懒狗, 参考Tag 04FR.

定义 6.10. 对概形 X 和 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$.

- (i) 层 \mathcal{F} 的支集为点集 $\text{supp}(\mathcal{F}) \ni s$ 使得对所有 (一些) s 上的几何点 \bar{s} 都有 $\mathcal{F}_{\bar{s}} \neq 0$;
- (ii) 截面 $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, 其支集 $\text{supp}(s)$ 定义为闭集 $U \setminus W$.

注 6.11. 层的支集不一定是闭的, 但如果取值是环, 那一定是闭的, 因为这时相当于单位截面的支集.

定义 6.12. 对概形 X , 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$, 定义

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(X) : \text{supp}(s) \subset Z\}.$$

定义支撑在 Z 的平展上同调为

$$H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) := R^i \Gamma_Z(X, \mathcal{F}).$$

命题 6.13. 对概形 X , 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$, 设 $U = X \setminus Z$, 则有好三角:

$$R\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_Z(X, \mathcal{F})[1]$$

进而诱导出正合列:

$$\cdots \rightarrow H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

证明. 任取内射对象 $\mathcal{I} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们断言 $\mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{I}(U)$ 是满的. 设 $j: U \rightarrow X$, 注意到对任何 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有

$$\text{Hom}(j_! \mathbb{Z}_U, \mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}|_U) = \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

因为 \mathcal{I} 是内射的, 故只需证明 $j_! \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathbb{Z}_X$ 是单射. 根据层化函子是正合的, 只需证明对平展映射 $V \rightarrow X$, 典范映射

$$\bigoplus_{V \rightarrow U} \mathbb{Z}(U) \rightarrow \bigoplus_{V \rightarrow X} \mathbb{Z}(U)$$

是单射, 而这是显然的, 故断言成立.

不难发现上述满射的核为 $\Gamma_Z(X, \mathcal{I})$, 因此立即得到好三角

$$R\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_Z(X, \mathcal{F})[1].$$

而长正合列因此是显然的. □

定理 6.14 (Excision). 设 $f: X' \rightarrow X$ 平展和闭子概形 $Z' \subset X'$ 使得

- (i) 设 $Z := f(Z')$ 是闭集且 $f|_{Z'}: Z' \cong Z$ 同构;
 - (ii) 有 $f(X' \setminus Z') \subset X \setminus Z$.
- 则对任意的 $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有对任意 i 的同构

$$H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{Z', \text{ét}}^i(X', f^* \mathcal{F}).$$

证明. □

- 7 Čech 上同调和挠子
 - 7.1 Čech 上同调
 - 7.2 Čech-导出的比较
 - 7.3 几个应用
 - 7.4 拟凝聚层的上同调
 - 7.5 挠子理论一瞥和应用
- 8 高阶直像
- 9 曲线的上同调——基础结果
- 10 可构建层和挠层
- 11 曲线上挠层的上同调
- 12 上同调维数

Part II

反常层基础理论

13 反常层简介

14 一些同调代数

索引

- G -模, 16
- $GL_{n,X}$, 8
- $\mathbb{G}_{a,X}$, 7
- $\mathbb{G}_{m,X}$, 8
- $\mu_{n,X}$, 7
- $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}$, 10
- Galois 上调, 16
- Grothendieck 意象, 6
- Grothendieck 拓扑, 5
- Hensel 局部环, 10
- Hensel 引理, 10
- Riemann 存在定理, 5
- Tate 连续上调, 16
- Weil 猜想, 3
- 严格 Hensel 化, 9
- 严格 Hensel 局部环, 10
- 分离预层, 6
- 局部常值层, 10
- 层, 6
- 层化, 6
- 常值层, 10
- 平展上调, 15
- 平展基本群, 4
- 拟凝聚层, 8
- 摩天大厦层, 9
- 景, 5
- 有限局部常值层, 10
- 直像, 12
- 纤维函子, 4
- 结构层, 7
- 群上调, 16
- 茎, 9
- 逆像, 13
- 零扩张函子, 14
- 预层, 6

参考文献

- [1] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained*. AMS, 2005.
- [2] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer-Verlag, 1971.
- [3] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.
- [4] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version*. World Scientific, 2015.
- [5] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton university press, 1980.
- [6] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013. Available at www.jmilne.org/math/.
- [7] James S. Milne. Class field theory, 2020. Available at www.jmilne.org/math/.
- [8] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. AMS, 2016.
- [9] Stacks project collaborators. The stacks project, 2023. <https://stacks.math.columbia.edu/>.