

# 平展上同调和反常层基础

温尊

2023 年 3 月 21 日

## 目录

<b>I</b>	<b>平展上同调基础理论</b>	<b>3</b>
1	平展上同调简介	3
2	平展基本群	4
3	景和层和层化	5
4	平展拓扑上的层	6
4.1	基本结果和例子	6
4.2	平展预层/层的茎	7
4.3	常值层和局部常值层	9
4.4	Abel 群预层和层构成的范畴	9
4.5	Kummer 理论和 Artin-Schreier 列	10
4.6	拟凝聚层	10
5	层的一些函子	10
5.1	直像	10
5.2	逆像	11
5.3	零扩张函子 (下叹号函子)	12
6	平展上同调的定义和基本性质	13
6.1	定义	13
6.2	群上同调一瞥	13
6.3	点的上同调	14
6.4	平展上同调和极限一瞥	14
6.5	支撑在闭集的上同调及性质	15
7	Čech 上同调和挠子	16
7.1	Čech 上同调	16
7.2	Čech-导出的比较	17
7.3	几个应用	17
7.4	拟凝聚层的上同调	17
7.5	挠子理论一瞥和应用	17
8	高阶直像	17
9	曲线的上同调——基础结果	17
10	可构建层和挠层	17
11	曲线上挠层的上同调	17

12 上同调维数	17
II 反常层基础理论	18
13 反常层简介	18
14 一些同调代数	18
索引	19
参考文献	19

## Part I

# 平展上同调基础理论

## 1 平展上同调简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取  $X$  为  $\mathbb{C}$  上的代数簇, 其解析化  $X^{\text{an}}$  可以对应奇异上同调  $H^i(X^{\text{an}}, \mathbb{Z})$  满足

- (i) 是有限生成  $\mathbb{Z}$  模;
- (ii) 群  $H^i(X^{\text{an}}, \mathbb{C})$  有额外的结构;
- (iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 我们会发现挠系数的上同调, 例如  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  系数的上同调可以比较好的模拟奇异上同调. 但会发现  $H_{\text{ét}}^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathbb{Z}) = 0$  而  $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  并不能很好的模拟奇异上同调, 另一方面我们发现如下结果:

**定理 1.1 (Serre).** 不存在上同调理论  $H^*$  使得 (i) 具有函子性; (ii) 满足 Kunneth 公式; (iii) 对所有椭圆曲线  $E$  满足  $H^1(E) \cong \mathbb{Q}^2$ .

基本思路. 取  $E$  为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是  $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}$  是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到  $\text{End}(E)$  作用在  $E$  上会诱导出  $\text{End}(E)$  在  $H^1(E)$ , 进而诱导出代数同态  $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ . 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论.  $\square$

为了模拟在非挠系数下也可以模仿奇异上同调, 我们会定义类似的  $\ell$ -进上同调理论, 其中  $\ell$  和特征  $p$  互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论)  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_{\ell}) = \varprojlim H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})$  和  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_{\ell}) = H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_{\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$ . 这样也可以得到比较好的模拟.

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点  $(X, \bar{x})$ , 可以定义  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$  为平展基本群, 其定义事实上是从代数拓扑里偷的, 运用了覆盖变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

**猜想 1 (Weil 猜想).** 设  $X$  是  $\mathbb{F}_q$  上  $n$  维光滑紧合几何整的簇, 设

$$S_X(t) = \exp \left( \sum_{n>0} \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n} t^n \right),$$

则

(i) 函数  $S_X(t)$  是有理函数, 即  $S_X(t) = \prod_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} S_i(t)$ , 其中  $S_i$  是满足一定条件的整系数多项式;

(ii) 满足函数方程  $S_X(q^{-n}t^{-1}) = \pm q^{nE/2} t^E S_X(t)$  其中  $E$  是  $X$  欧拉示性数;

(iii) 所有零点和极点的绝对值为  $q^{j/2}$  其中  $j \in \mathbb{Z}$ ;

(iv) 若  $X$  提升为代数整数环  $R \subset \mathbb{C}$  上的光滑射影簇  $Y$ , 则对于  $i = 0, \dots, 2n$ , 流形  $Y(\mathbb{C})$  的 Betti 数为  $S_i(t)$  的次数  $b_i$ .

最后结果. (i) 由 Dwork 运用  $H^1$  的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Grothendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明.  $\square$

因此平展上同调是相当成功的上同调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点集拓扑) 就会被我略去. 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐 [9] 里的 Tag 0BQ6 和 Tag 03N1, 扶磊教授的书 [4] 和 Milne 的传世经典 [5], 我们也会多次引用里面的代数细节.

前置知识: 至少是经典代数几何教材 [3] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 还有基本的导出范畴. 最好懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好.

## 2 平展基本群

对于连通概形  $X$ , 定义  $\text{Fét}/X$  为  $X$  上的有限平展态射构成的范畴, 而  $\text{Ét}/X$  为  $X$  上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点  $(X, \bar{x})$ , 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}} : \text{Fét}/X \rightarrow \text{Sets}, (\pi : Y \rightarrow X) \mapsto \text{Hom}_X(\bar{x}, Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆盖空间? 事实上不一定存在:

**例 2.1.** 考虑  $\mathbb{C}$  上射影直线  $\mathbb{A}^1$ , 存在有限平展映射  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$ , 那么注定没有像拓扑里的  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  来表示万有覆盖!

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [5] 也没证明. 而 [4] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X' = ((X_i, f_i)_{i \in I}, \phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i, f_i = \phi_{ij} \circ f_j, f_i \in \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\text{Hom}(X', Y) := \varprojlim \text{Hom}_X(X_i, Y) \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y), \sigma \mapsto \sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取  $X_i/X$  为 Galois 覆盖, 也就是说  $\deg(X_i/X) = \#\text{Aut}_X X_i$ , 见 [5] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于  $\phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$  可以诱导  $\text{Aut}_X X_j \rightarrow \text{Aut}_X X_i$  如下: 注意到  $\text{Aut}_X X_j \rightarrow \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j), \sigma \mapsto \sigma(f_j)$  是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [4] 第三节), 则通过  $F(X_j) \rightarrow F(X_i), \alpha \mapsto \phi_{ij}(\alpha)$  即得到映射.

**定义 2.1.** 对于连通概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 考虑上述构造, 定义平展基本群为

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \text{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

**定理 2.2.** 考虑连通概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ .

- (i) 函子  $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$  诱导出  $\text{Fét}/X$  到有限  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$ -集的等价;
- (ii) 取第二个几何点  $\bar{x}'$ , 我们有  $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \cong \mathfrak{F}_{\bar{x}'}$  进而诱导  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \cong \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}')$ , 并且和 (i) 契合;
- (iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考 Tag 0BND. □

**例 2.2.** (i) 对一个点  $X = \text{Spec}(k)$  和几何点  $\Omega$ , 由定义知道  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \Omega) = \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$ ;

(ii) 考虑  $\mathbb{C}$  上的  $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ , 则考虑  $x \mapsto x^n$  得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \text{Aut}_X X_i = \varprojlim \mu_n(k) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{\ell} \mathbb{Z}_{\ell};$$

(iii) 考虑代数闭域上的  $X = \mathbb{P}^1$ , 由 *Riemann-Hurwitz* 公式不难得到  $X$  只有平凡的平展覆盖, 故  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = 1$ . 归纳可以得到  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^n, \bar{x}) = 1$ ;

(iv) 事实上我们对  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^1, \bar{x})$  都一无所知, 其中  $k$  是正特征域 (根据 *Artin-Schreier* 列, 起码不是平凡的群);

(v) 对于正规簇  $X$ , 考虑一般点上的几何点  $\bar{x}$ , 假设

$$L = \bigcup \{ \text{几何点内的有限可分扩张 } K/K(X) : X \text{ 在 } K \text{ 内的正规化到 } X \text{ 平展} \},$$

则  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \cong \text{Gal}(L/K(X))$ , 参考 [4] 命题 3.3.6.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

**定理 2.3** (*Riemann 存在定理*). 设  $X$  是  $\mathbb{C}$  上的有限型概形, 则由范畴等价

$$(\text{Fét}/X) \rightarrow (\text{FTopCov}/X^{\text{an}}).$$

特别的有  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \cong \widehat{\pi_1(X^{\text{an}}, x)}$ , 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [2] 的定理 XII.5.1.  $\square$

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多  $\mathbb{C}$  上的有限型概形的平展基本群了.

注 2.4 (算术和数论人的最爱). (i) 对于  $X$  为  $k$  上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 [4] 命题 3.3.7):

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\text{sep}}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \rightarrow 1;$$

(ii) 对于  $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ , 运用正合列得到

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1.$$

嵌入  $\mathbb{Q}^{\text{al}} \hookrightarrow \mathbb{C}$  可以得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}}, \bar{x}) \cong \langle a, b, c \mid abc = 1 \rangle.$$

而群  $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q})$  则十分复杂, 如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 (摘自 J. Milne 的讲义 [6]).

### 3 景和层和层化

本质就是推广拓扑空间的定义.

定义 3.1 (Grothendieck 拓扑和景). 设  $\mathcal{C}$  是范畴, 一个  $\mathcal{C}$  上的 Grothendieck 拓扑由集合  $\{\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}\} = \text{Cov}(U)$  组成, 其中  $U$  是任意对象, 满足

(i) 若  $V \rightarrow X$  是同构, 则  $\{V \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$ ;

(ii) 若  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$  且  $Y \rightarrow X$  是任意态射, 则纤维积  $X_i \times_X Y$  存在且

$$\{X_i \times_X Y \rightarrow Y\}_{i \in I} \in \text{Cov}(Y);$$

(iii) 若  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$  且对任意  $i \in I$  都给定  $\{V_{ij} \rightarrow X_i\}_{j \in J_i}$ , 则

$$\{V_{ij} \rightarrow X_i \rightarrow X\}_{i \in I, j \in J_i} \in \text{Cov}(X).$$

范畴  $\mathcal{C}$  和其上的 Grothendieck 拓扑称为景.

例 3.1 (小 Zariski 景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Op}(X)$  由开子概形构成, 态射是包含关系. 则  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $U = \bigcup_i U_i$ . 记这个景为  $X_{\text{Zar}}$ .

例 3.2 (大 Zariski 景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Sch}/X$ , 则  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $U_i \rightarrow U$  为开浸入且  $U = \bigcup_i U_i$ . 记这个景为  $X_{\text{ZAR}}$ .

例 3.3 (小平展景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Ét}/X$ , 不难证明里面的态射都是平展的, 所以我们不假设条件.  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $\prod_{i \in I} U_i \rightarrow U$  是满射. 记这个景为  $X_{\text{ét}}$ .

例 3.4 (大平展景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Sch}/X$ , 则  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $U_i \rightarrow U$  平展且  $\prod_{i \in I} U_i \rightarrow U$  是满射. 记这个景为  $X_{\text{Ét}}$ .

例 3.5 (fppf 景). 假设  $X$  是一个概形. 考虑范畴  $\text{Sch}/X$ , 则  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  为覆盖如果  $U_i \rightarrow U$  平坦和局部有限表现, 且  $\prod_{i \in I} U_i \rightarrow U$  是满射. 记这个景为  $X_{\text{fppf}}$ .

定义 3.2. 景  $\mathcal{C}$  上的预层为函子  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ ;

定义 3.3. 给定景  $\mathcal{C}$  和其上的预层  $F$ .

(i) 预层  $F$  称之为分离的, 如果对任意的  $U \in \mathcal{C}$  和覆盖  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$ , 诱导态射  $F(U) \rightarrow \prod_{i \in I} F(U_i)$  是单射;

(ii) 预层  $F$  称为层, 如果对任意的  $U \in \mathcal{C}$  和覆盖  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$ , 我们有如下等化子:

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被  $U_i \times_U U_j \rightarrow U_i$  和  $U_i \times_U U_j \rightarrow U_j$  诱导.

**定义 3.4.** 一个范畴称为 *Grothendieck* 意象 (*Topos*) 如果其等价于某个景上的层范畴.

**定义 3.5** (层化). 在某个景  $\mathcal{C}$  上, 取定  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$ , 称  $\mathcal{P}^\# \in \text{Sh}(\mathcal{C})$  使得  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\#$  是  $\mathcal{P}$  的层化, 如果任取  $\mathcal{G} \in \text{Sh}(\mathcal{C})$  和  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ , 都有交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}^\# \\ \downarrow & \swarrow \exists! & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

**定理 3.6.** 在某个景  $\mathcal{C}$  上, 取定  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$ . 对某个覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ , 定义

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := \ker \left( \prod_i \mathcal{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{P}(U_i \times_U U_j) \right).$$

故有典范映射  $\mathcal{P}(U) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ . 不难证明不同覆盖可以诱导良定义的态射且和覆盖间映射选取无关 (参考 Tag 03NQ), 故定义

$$\mathcal{P}^+ : U \mapsto \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P}).$$

- (i) 函子  $\mathcal{P}^+$  是分离预层;
- (ii) 若  $\mathcal{P}$  是分离预层, 则  $\mathcal{P}^+$  是层且  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^+$  单射;
- (iii) 若  $\mathcal{P}$  是层, 则  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^+$  是同构;
- (iv) 不论如何  $\mathcal{P}^{++}$  一定是层, 且  $\mathcal{P}^{++} \cong \mathcal{P}^\#$ .

证明. 这是纯粹的层论推导, 参考 Tag 00WB. □

**注 3.7.** 我们在景的定义 3.1 里规定  $\text{Cov}(U)$  是集合很大程度上就是为了保证这个极限存在.

**推论 3.8.** 在某个景  $\mathcal{C}$  上, 取定  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(\mathcal{C})$ . 则  $\sharp : \text{PreSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C})$  是个函子, 且若规定遗忘函子为  $i : \text{Sh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{PreSh}(\mathcal{C})$ , 则有  $(\sharp, i)$  是伴随函子. 特别的, 函子  $\sharp$  是正合函子.

证明. 近乎平凡. □

**推论 3.9.** 考虑图  $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C})$ , 则  $\varprojlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$  存在且和预层范畴内一样, 而  $\varinjlim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$  存在且为预层范畴内的层化.

证明. 也是纯粹的层论验证, 见 Tag 00W2 和 Tag 00WI. □

## 4 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景  $X_{\text{ét}}$ . 记  $\text{Sh}(X_{\text{ét}})$  是集合取值的平展层范畴, 而  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为  $\text{PreSh}(X_{\text{ét}})$  和  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ .

### 4.1 基本结果和例子

**命题 4.1.** 固定概形  $X$ , 对于  $\mathcal{F} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ . 若  $\mathcal{F}$  在限制到 *Zariski* 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖  $V \rightarrow U$  满足层条件, 则  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ .

证明. 详细细节参考 [5] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 *Zariski* 开覆盖上的条件会给出: 对于概形  $V = \coprod_i V_i$ , 我们有  $\mathcal{F}(V) = \prod_i \mathcal{F}(V_i)$ . 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖  $\coprod_i U_i \rightarrow U$  满足等化子条件, 那么  $\{U_i \rightarrow U\}$  也满足等化子条件 (因为  $\coprod_i U_i \times_U \coprod_j U_j = \coprod_{i,j} U_i \times_U U_j$ ). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  也满足等化子条件, 其中  $I$  有限且  $U_i$  仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去. □

**例 4.1 (结构层).** 给定概形  $X$ . 定义  $\mathcal{O}_{X,\text{ét}}$  为  $\mathcal{O}_{X,\text{ét}}(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ . 我们断言  $\mathcal{O}_{X,\text{ét}} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ . 运用 4.1, 这其实就是环的忠实平坦下降: 设环同态  $f: A \rightarrow B$  忠实平坦, 则有正合列:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b \mapsto 1 \otimes b - b \otimes 1} B \otimes_A B$$

证明颇为经典, 分成三步: (a) 证明如果  $f$  有一个截面, 则命题成立; (b) 证明如果存在另一个忠实平坦同态  $A \rightarrow A'$  使得命题对  $A' \rightarrow A' \otimes_A B$  成立, 则也对  $A \rightarrow B$  成立; (c) 发现  $B \rightarrow B \otimes_A B, b \mapsto b \otimes 1$  存在截面  $b \otimes b' \mapsto bb'$ .

**例 4.2 (由概形表示的层).** 给定概形  $X$ . 取定  $Z$  为  $X$ -概形, 定义其为  $h_Z := \text{Hom}_X(-, Z)$ . 事实上通过 (i) 的正合列也容易得到  $h_Z \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ . 下面有几个常用的例子:

- (a) 定义  $\mu_{n,X}(T) = \{\zeta \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T) : \zeta^n = 1\}$ , 即  $\mu_{n,X}$  被  $\text{Spec}_X \mathcal{O}_X[t]/(t^n - 1)$  表示;
- (b) 定义  $\mathbb{G}_{a,X}(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ , 即  $\mathbb{G}_{a,X}$  是被  $\mathbb{A}_X^1$  表示的函子;
- (c) 定义  $\mathbb{G}_{m,X}(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T^*)$ , 即  $\mathbb{G}_{m,X}$  是被  $\text{Spec}_X \mathcal{O}_X[t, t^{-1}]$  表示的函子;
- (d) 定义  $\text{GL}_{n,X}(T) = \text{GL}_n(\Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ , 即  $\text{GL}_{n,X}$  是被

$$\text{Spec}_X \mathcal{O}_X[\{x_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}][1/\det(x_{ij})]$$

表示的函子.

**例 4.3 (拟凝聚层).** 给定概形  $X$ . 考虑  $\mathcal{M} \in \text{Sh}(X_{\text{Zar}})$  是拟凝聚的, 定义  $\mathcal{M}^{\text{ét}}(\phi : U \rightarrow X) := \Gamma(U, \phi^* \mathcal{M})$ . 运用 4.1 和更一般的正合列: 环同态  $f: A \rightarrow B$  忠实平坦且  $M$  为  $A$ -模, 则有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

即可得到  $\mathcal{M}^{\text{ét}} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ .

**命题 4.2 (点上的层范畴).** 对于  $X = \text{Spec } k$ , 有范畴等价

$$\text{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow (\text{离散 Gal}(k^{\text{sep}}/k) - \text{集}), \mathcal{F} \mapsto M_{\mathcal{F}} := \varinjlim_{k^{\text{sep}} \supset k'/k \text{ 有限 Galois}} \mathcal{F}(\text{Spec } k').$$

证明. 定义逆为  $M \mapsto \mathcal{F}_M := (A \mapsto \text{Hom}_G(\text{Hom}_{k-\text{alg}}(A, k^{\text{sep}}), M))$ . 见 Tag 03QT. □

**注 4.3.** 类似的有范畴等价

$$\text{Ab}(X_{\text{ét}}) \rightarrow (\text{离散 Gal}(k^{\text{sep}}/k) - \text{模}).$$

## 4.2 平展预层/层的茎

**定义 4.4 (平展邻域).** 给定概形  $X$ , 称几何点  $\bar{x}$  的一个平展邻域为如下图表:

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow \bar{u} & \downarrow f \\ \bar{x} & \xrightarrow{\bar{x}} & X \end{array}$$

其中  $f$  平展. 我们记为  $(U, \bar{u}) \rightarrow (X, \bar{x})$ .

**引理 4.5.** 给定概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 则

- (i) 给定两个平展邻域  $(U_i, \bar{u}_i)_{i=1,2}$ , 存在第三个平展邻域  $(U, \bar{u})$  和态射  $(U, \bar{u}) \rightarrow (U_i, \bar{u}_i)$ ;
- (ii) 假设  $h_1, h_2 : (U_1, \bar{u}_1) \rightarrow (U_2, \bar{u}_2)$  是平展邻域的态射, 则存在第三个平展邻域  $(U, \bar{u})$  和态射  $h : (U, \bar{u}) \rightarrow (U_1, \bar{u}_1)$  使得  $h_1 \circ h = h_2 \circ h$ .

证明. (i) 只需考虑  $U = U_1 \times_X U_2$ , 而  $\bar{s} \rightarrow U$  被  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  定义;

(ii) 定义  $U$  为纤维积

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & U_1 \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow (h_1, h_2) \\ U_2 & \xrightarrow{\Delta} & U_2 \times_X U_2 \end{array}$$

并定义  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ . □

注 4.6. 在 (ii) 内, 通过一些假设, 我们可以使得态射  $h_1 = h_2$ : 若我们有诺特分离概形的图标

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ g \swarrow & & \searrow q \\ X & \xrightarrow[p]{} & S \end{array}$$

其中  $Y$  连通且  $p, q$  平展, 则  $g = g'$ . 这是因为  $\delta: X \rightarrow X \times_S X$  平展且是闭浸入, 则  $X \times_S X = \delta(X) \sqcup Z$  为连通分支的无交并. 注意到  $g \times g': Y \rightarrow X \times_S X$  有连通的像. 根据图知  $\delta(X) \cap \text{Im}(g \times g') \neq \emptyset$ , 故  $\text{Im}(g \times g') \subset \delta(X)$ , 故  $g = g'$ .

定义 4.7. 给定概形  $X$  和  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ . 给定几何点  $\bar{x}$ , 定义  $\mathcal{P}$  在  $\bar{x}$  的茎为

$$\mathcal{P}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U, \bar{u})} \mathcal{P}(U)$$

其中余极限遍历所有平展邻域, 根据引理 4.5 此为滤余极限.

注 4.8. 给定概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 则不难看出  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{x}}$  作为函子  $\text{PreSh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sets}$  或者  $\text{Sh}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sets}$  或者  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{AbGrps}$  或者  $\text{Ab}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{AbGrps}$  都是正合的. 如果你不放心, 请参考 Tag 03PT.

定义 4.9. 给定概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 给定集合  $E$ , 定义  $E^{\bar{x}} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  为:

$$E^{\bar{x}}(U) := \bigoplus_{\text{Hom}_X(\bar{x}, U)} E.$$

注 4.10. 有几个简单的性质:

- (i) 这个  $E^{\bar{x}}$  在平展拓扑下一定是层, 其他景上面不一定;
- (ii) 我们有伴随函子  $((-)^{\bar{x}}, (-)^{\bar{x}})$ , 在预层范畴上这个伴随对任何景都对, 在层范畴上需要一定条件 (而小平展景显然满足), 若对这个有兴趣, 参考 Tag 00Y3;
- (iii) 对于几何点  $\bar{y}$ , 除非  $\bar{y}$  也在  $\bar{x}$  对应的点上, 否则  $(E^{\bar{x}})_{\bar{y}} = 0$ .

命题 4.11. 给定概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ , 对于  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$  有  $\mathcal{P}_{\bar{x}} = \mathcal{P}_{\bar{x}}^{\sharp}$ .

证明. 因为有伴随性, 对于任何集合  $E$ , 我们有

$$\text{Mor}_{\text{Sets}}(\mathcal{P}_{\bar{x}}, E) = \text{Hom}_{\text{PreSh}(X_{\text{ét}})}(\mathcal{P}, E^{\bar{x}}) = \text{Hom}_{\text{Sh}(X_{\text{ét}})}(\mathcal{P}^{\sharp}, E^{\bar{x}}) = \text{Mor}_{\text{Sets}}(\mathcal{P}_{\bar{x}}^{\sharp}, E),$$

因此成立. □

对于结构层  $\mathcal{O}_{X, \text{ét}}$ , 它的茎有特殊的代数性质.

命题 4.12. 给定概形  $X$  和在  $x \in X$  上的几何点  $\bar{x}$ . 设  $\kappa(x) \subset \kappa(x)^{\text{sep}} \subset \kappa(\bar{x})$  是可分代数闭包, 则有

- (i) 有同构  $(\mathcal{O}_{X, x})^{\text{sh}} \cong (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$ , 前者为  $\mathcal{O}_{X, x}$  的严格 Hensel 化;
- (ii) 设  $\mathfrak{m}_x$  是  $\mathcal{O}_{X, x}$  的极大理想, 则  $\mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$  是  $(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$  的极大理想, 且满足

$$(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}} / \mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}} \cong \kappa(x)^{\text{sep}};$$

- (iii) 对任何首一多项式  $f \in (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}[T]$  和任意  $\bar{f} \in \kappa(x)^{\text{sep}}[T]$  的根  $\alpha_0 \in \kappa(x)^{\text{sep}}$  使得  $\bar{f}'(\alpha_0) \neq 0$ , 则存在  $\alpha \in (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$  使得  $f(\alpha) = 0$  且  $\alpha_0 = \bar{\alpha}$ .

证明. 这些都是复杂的交换代数, 见 Tag 04GE, Tag 04GP 和 04GW. 其中 (iii) 被称之为 Hensel 引理, 满足 (iii) 的环叫做 Hensel 局部环, 如果这个环的剩余类域可分代数闭, 则称之为严格 Hensel 局部环. 所以我们这里就是一个严格 Hensel 环. □

注 4.13. 我们之后将记  $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{\text{sh}} := (\mathcal{O}_{X, \text{ét}})_{\bar{x}}$ , 也不会有歧义.



### 4.3 常值层和局部常值层

定义 4.14. 给定概形  $X$ .

- (i) 对于  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  (或者  $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ ), 则  $\mathcal{F}$  称为常值层如果存在集合  $E$  (或者  $\text{Abel}$  群  $G$ ) 使得  $\mathcal{F} \cong (U \mapsto E)^{\sharp} =: \underline{E}_X$  (或者  $\cong (U \mapsto G)^{\sharp} =: \underline{G}_X$ );
- (ii) 称  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  (或者  $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ ) 是局部常值层, 如果存在覆盖  $\{U_i \rightarrow X\}$  使得  $\mathcal{F}|_{U_i}$  是常值层;
- (iii) 称  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  (或者  $\in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ ) 是有限局部常值层, 如果  $\mathcal{F}$  是局部常值层且取值的集合 (或  $\text{Abel}$  群) 是有限集合.

引理 4.15 (有限平展映射的平展局部分解). (i) 设  $f: X \rightarrow S$  有限无分歧, 取  $s \in S$ , 则存在平展邻域  $(U, u) \rightarrow (S, s)$  和有限无交分解  $X_U = \coprod_j V_j$  使得所有  $V_j \rightarrow U$  均为闭浸入.

(ii) 设  $f: X \rightarrow S$  有限平展, 取  $s \in S$ , 则存在平展邻域  $(U, u) \rightarrow (S, s)$  和有限无交分解  $X_U = \coprod_j V_j$  使得所有  $V_j \rightarrow U$  均为同构.

证明. 首先, 有关各种映射的平展局部, 可参考 Tag 024J. 二者究其本质都是拟有限态射的平展局部性质 (见 Tag 02LM). 证明虽然不甚复杂, 但写于此意义也不大, 故这里我们略去证明, 证明参考 Tag 04HJ 和 Tag 04HN.  $\square$

命题 4.16. 给定概形  $X$ , 则有范畴等价

$$\{\text{有限平展映射 } U \rightarrow X\} \cong \{\text{有限局部常值层}\}, (U \rightarrow X) \mapsto \mathcal{F} = h_U.$$

证明. 根据引理 4.15(ii), 不难看出  $h_U$  确实是有限局部常值层. 另一方面, 任取  $\mathcal{F}$  是有限局部常值层, 则存在平展覆盖  $\{U_i \rightarrow X\}$  使得  $\mathcal{F}|_{U_i}$  是常值层, 则可以被有限平展态射  $U_i \rightarrow X$  表示 (设取值集合的基数是  $\kappa$ , 若是诺特分离概形, 考虑注 4.6, 则令  $Z_i = \coprod_{i=1}^{\kappa} U_i$ , 故  $\mathcal{F}|_{U_i} = h_{Z_i}$ ). 根据仿射态射满足有效的忠实平坦下降 (fpqc), 我们可以得到存在  $Z \rightarrow X$  使得  $h_Z \cong \mathcal{F}$ . 而由于有限性和平展性都是 fpqc 局部的, 故  $Z \rightarrow X$  仍然是有限平展映射.  $\square$

命题 4.17. 给定连通概形  $X$  和几何点  $\bar{x}$ .

(i) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})\} \rightarrow \{\text{有限 } \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-集}\};$$

(ii) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})\} \rightarrow \{\text{有限 } \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-模}\}.$$

证明. (i) 根据定理 2.2(i) 和命题 4.16, 得到结论; (ii) 即为 (i) 赋予加法结构.  $\square$

### 4.4 Abel 群预层和层构成的范畴

固定概形  $X$ , 可以看出  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$  一定是  $\text{Abel}$  范畴, 它里面的正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等皆为正常的定义方法. 我们主要考虑的是满子范畴  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 它是加性范畴, 我们将要证明它为  $\text{Abel}$  范畴 (其正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等和一般拓扑空间上类似, 皆为层化).

命题 4.18. 给定概形  $X$  和范畴  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内的列

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0,$$

则下述命题等价:

- (i) 列  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  在  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内 (函子性的) 正合;
- (ii) 列  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  在  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$  内正合且  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  满足对任意的  $U \in X_{\text{ét}}$  和  $s \in \mathcal{F}''(U)$ , 存在  $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$  使得  $s|_{U_i}$  在  $\mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}''(U_i)$  的像内;
- (iii) 对所有几何点  $\bar{x} \rightarrow X$ , 都有  $0 \rightarrow \mathcal{F}'_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}''_{\bar{x}} \rightarrow 0$  正合.

证明. (ii) 推 (i), 平凡. (i) 推 (iii) 由于取茎是正合函子, 故也平凡.

(iii) 推 (ii), 先证明满射部分. 任取  $U \in X_{\text{ét}}$  和几何点  $\bar{u} \rightarrow U$ . 设  $\bar{x}: \bar{u} \rightarrow U \rightarrow X$  也为几何点. 根据定义有  $\mathcal{F}_{\bar{u}} = \mathcal{F}_{\bar{x}}$ , 故  $\mathcal{F}_{\bar{u}} \rightarrow \mathcal{F}''_{\bar{u}}$  也是满射. 再由定义知道成立. 对于其他部分, 注意到  $s \in \mathcal{F}(U)$  为零当且仅当  $s_{\bar{u}} = 0$  即可, 这也是定义.  $\square$

推论 4.19. 给定概形  $X$ , 则范畴  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  是  $\text{Abel}$  范畴.

## 4.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列

**定理 4.20** (Kummer 正合列). 给定概形  $X$  和正整数  $n$  使得  $n$  在  $X$  内可逆 (不被任何剩余类域的特征整除), 则有  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内的正合列

$$0 \rightarrow \mu_{n,X} \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow 0.$$

证明. 显然  $\mu_{n,X}$  为  $\mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X}$  的核. 故只需要证明满射. 取  $U = \text{Spec } A$  是仿射的平展  $X$ -概形, 任取  $a \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{m,X})$ , 根据假设知典范映射  $V = \text{Spec } A[t]/(t^n - a) \rightarrow U$  是平展映射. 注意到对应的环同态是有限自由的, 故忠实平坦, 于是满射. 因此  $V \rightarrow U$  是平展覆盖, 根据 4.18 即可得到结论.  $\square$

**定理 4.21** (Artin-Schreier 列). 给定概形  $X$  和素数  $p$  使得在  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  内  $p = 0$ , 则有  $\text{Ab}(X_{\text{ét}})$  内的正合列

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow 0.$$

证明. 类似于 Kummer 正合列, 注意到此时  $\text{Spec } A[t]/(t^p - t - a) \rightarrow \text{Spec } A$  是平展覆盖即可.  $\square$

## 4.6 拟凝聚层

**定义 4.22.** 考虑景  $X_{\text{ét}}$  上的  $\mathcal{O}_{X,\text{ét}}$ -模  $\mathcal{F}$  称之为拟凝聚的如果任取  $U \in X_{\text{ét}}$ , 存在  $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$  使得

$$\mathcal{F}|_{X_{\text{ét}}/U_i} \cong \text{coker} \left( \bigoplus_{k \in K} \mathcal{O}_{X,\text{ét}}/U_i \rightarrow \bigoplus_{l \in L} \mathcal{O}_{X,\text{ét}}/U_i \right).$$

其中  $X_{\text{ét}}/U_i$  是局部景, 其中的对象皆为  $V \rightarrow U_i$ , 覆盖皆为  $U_i$ -映射.

**注 4.23.** 这个在所有景上面都可以定义.

作为下降理论的应用, 我们有如下令人震惊的结论:

**定理 4.24.** 如下拟凝聚层范畴是范畴等价:

$$\text{Qcoh}(X_{\text{Zar}}) \rightarrow \text{Qcoh}(X_{\text{ét}}), \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{ét}}.$$

证明. 这个是下降理论的直接应用, 需要用到纤维范畴  $\text{QCOH}$  然后可以证明其为有效的 fpqc 下降, 但这个证明非常复杂 (参考 [1] 定理 4.23). 我们推荐感兴趣的读者阅读 [8] 命题 4.3.15.  $\square$

**注 4.25.** 作为推广我们可以考虑一些特殊的景, 也满足类似结论. 见 *Tag 03OJ*.

## 5 层的一些函子

### 5.1 直像

**定义 5.1.** 考虑概形映射  $f: X \rightarrow Y$ , 设  $\mathcal{P} \in \text{PreSh}(X_{\text{ét}})$ , 定义直像为

$$f_* \mathcal{P}(U \rightarrow Y) = \mathcal{P}(U \times_Y X \rightarrow X).$$

**命题 5.2.** 概形映射  $f: X \rightarrow Y$ , 设  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ .

- (i) 必然有  $f_* \mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$ ;
- (ii) 对于  $g: Y \rightarrow Z$ , 我们有  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ;
- (iii) 若视作函子  $f_*: \text{Ab}(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}(Y_{\text{ét}})$ , 则左正合.

证明. 此乃定义, 略去.  $\square$

**命题 5.3.** 考虑概形映射  $f : X \rightarrow Y$  和几何点  $\bar{y} = \text{Spec } k \rightarrow Y$ , 设  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$ .

(i) 若  $f$  是闭浸入, 则

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \begin{cases} \{*\} & \text{当 } \bar{y} \notin X \\ \mathcal{F}_{\bar{y}} & \text{当 } \bar{y} \in X \end{cases}$$

其中  $\{*\}$  指单点集;

(ii) 若  $f$  是开浸入, 若  $\bar{y} \in X$ , 则  $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \mathcal{F}_{\bar{y}}$ ;

(iii) 如果  $f$  是有限态射, 则

$$(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \prod_{\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow X, f(\bar{x}) = \bar{y}} \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则  $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \bigoplus_{\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow X, f(\bar{x}) = \bar{y}} \mathcal{F}_{\bar{x}}$ .

证明. (ii) 是平凡的; (iii) 颇为麻烦, 需要用到严格 Hensel 环的性质, 我们略去, 参考 Tag 03QP.

(i) 当  $\bar{y} \notin X$ , 这是显然的. 下面考虑  $\bar{y} \in X$  的情况. 考虑两个事实:

**事实 1.** 对任意两个平展态射  $U, U' \rightarrow Y$ , 设  $h : U_X \rightarrow U'_X$  是  $X$ -态射, 则存在  $a : W \rightarrow U, b : W \rightarrow U'$  使得  $a_X : W_X \rightarrow U_X$  是同构且  $h = b_X \circ (a_X)^{-1}$ .

事实 1 的证明: 设  $M = U \times_Y U'$  和图像  $\Gamma_h \subset M_X$ . 注意到  $\Gamma_h$  是平展映射  $\text{pr}_{1,X} : M_X \rightarrow U_X$  一个截面的像, 故是开的. 则存在开子概形  $W \subset M$  使得  $W \cap M_X = \Gamma_h$ . 故取  $a = \text{pr}_1|_W, b = \text{pr}_2|_W$  即可.

**事实 2.** 对平展态射  $V \rightarrow X$ , 存在一族平展态射  $U_i \rightarrow Y$  和态射  $U_{i,X} \rightarrow V$  使得  $\{U_{i,X} \rightarrow V\}$  是  $V$  的 Zariski 覆盖.

事实 2 的证明: 不妨设  $Y, V$  皆为仿射的, 则化为以下简单的交换代数: 假设环  $R$  和理想  $I \subset R$ , 设  $R/I \rightarrow S'$  平展, 则存在平展同态  $R \rightarrow S$  使得  $S' \cong S/IS$  是  $R/I$ -代数同构. 这是因为平展同态总可以写成  $S' = (R/I)[x_1, \dots, x_n]/(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$  其中  $\bar{\Delta} = \det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$  在  $S'$  里可逆. 只需要提升成某些  $f_1, \dots, f_n$

且设  $S = R[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]/(f_1, \dots, f_n, x_{n+1}\Delta - 1)$ , 其中  $\Delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$  即可.

回到原结论. 注意到  $(f_*\mathcal{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U, \bar{u})} \mathcal{F}(U_X)$  且  $\mathcal{F}_{\bar{y}} = \varinjlim_{(V, \bar{v})} \mathcal{F}(V)$ . 由这两个事实可以得到  $\{(U, \bar{u})\}$  在  $\{(V, \bar{v})\}$  内共尾, 则得证.  $\square$

## 5.2 逆像

**定义 5.4.** 考虑概形映射  $f : X \rightarrow Y$ , 设  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$ , 定义逆像为

$$f^{-1}\mathcal{F} = \left( (U \rightarrow X) \mapsto \varinjlim_{U \rightarrow X \times_Y V} \mathcal{F}(V \rightarrow Y) \right)^{\#}.$$

**命题 5.5.** 考虑概形映射  $f : X \rightarrow Y$ , 则

(i) 有伴随函子  $(f^{-1}, f_*)$ ;

(ii) 函子  $f^{-1} : \text{Sh}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  和  $f^{-1} : \text{Ab}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  正合;

(iii) 对几何点  $\bar{x} \rightarrow X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y_{\text{ét}})$ , 设  $\bar{y} = \bar{x} \rightarrow X \rightarrow Y$ , 则  $(f^{-1}\mathcal{F})_{\bar{x}} \cong \mathcal{F}_{\bar{y}}$ ;

(iv) 对  $g : Y \rightarrow Z$ , 有  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ;

(v) 对平展映射  $V \rightarrow Y$ , 有  $f^{-1}h_V = h_{X \times_Y V}$ .

证明. (i)(ii) 略去. (iv) 和 (v) 由伴随性和 Yoneda 引理显然. 考虑 (iii), 注意到

$$\begin{aligned} (f^{-1}\mathcal{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(U, \bar{u})} (f^{-1}\mathcal{F})(U) \\ &= \varinjlim_{(U, \bar{u})} \varinjlim_{a : U \rightarrow X \times_Y V} \mathcal{F}(U) \\ &= \varinjlim_{(V, a \circ \bar{u})} \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_{\bar{y}} \end{aligned}$$

即可.  $\square$

**命题 5.6** (基变换). 考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

其中  $f$  有限, 则  $f'_* \circ (g')^{-1} = g^{-1} \circ f_*$ .

证明. 只需验证茎即可. 注意到纤维积, 对  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X_{\text{ét}})$  考虑几何点  $\bar{y}' : \text{Spec } k \rightarrow Y'$ , 我们有

$$\begin{aligned} (f'_*(g')^{-1}(\mathcal{F}))_{\bar{y}'} &= \prod_{\bar{x}' : \text{Spec } k \rightarrow X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} ((g')^{-1}(\mathcal{F}))_{\bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x}' : \text{Spec } k \rightarrow X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} \mathcal{F}_{g' \circ \bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow X, f \circ \bar{x} = g \circ \bar{y}'} \mathcal{F}_{\bar{x}} = (f_* \mathcal{F})_{g \circ \bar{y}'} = (g^{-1} f_* \mathcal{F})_{\bar{y}'} \end{aligned}$$

得到结论. □

### 5.3 零扩张函子 (下叹号函子)

**定义 5.7.** 考虑平展映射  $j : U \rightarrow X$ , 定义  $j_! : \text{Ab}(U_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  为

$$j_! \mathcal{F} = \left( (V \mapsto X) \mapsto \bigoplus_{V \rightarrow U} \mathcal{F}(V \rightarrow U) \right)^{\sharp}.$$

**命题 5.8.** 对平展映射  $j : U \rightarrow X$ , 有

- (i) 有伴随函子  $(j_!, j^{-1})$ ;
- (ii) 对  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(U_{\text{ét}})$  和几何点  $\bar{x} : \text{Spec } k \rightarrow X$  我们有

$$(j_! \mathcal{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{\bar{u} : \text{Spec } k \rightarrow U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathcal{F}_{\bar{u}},$$

特别的, 函子  $j_!$  正合;

- (iii) 若  $j$  有限平展, 则存在  $j_! \rightarrow j_*$  使得对任何  $\text{Ab}(U_{\text{ét}})$  都同构;
- (iv) 若  $j$  是开浸入, 则对  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(U_{\text{ét}})$  有  $j^{-1} j_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  和  $\mathcal{F} \rightarrow j^{-1} j_! \mathcal{F}$  是同构. 事实上  $j_! \mathcal{F}$  是唯一一个使得限制在  $U$  上是  $\mathcal{F}$ , 且在其他地方的茎是 0 的 *Abel* 群层.

证明. (i)(iv) 平凡, 略去.(iii) 只需要考虑平展局部, 用引理4.15(ii) 即可验证.

考虑 (ii), 映射为

$$\begin{aligned} (j_! \mathcal{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(V, \bar{v})} (j_! \mathcal{F})(V) = \varinjlim_{(V, \bar{v})} \bigoplus_{\phi : V \rightarrow U} \mathcal{F}(\phi) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\bar{u} : \text{Spec } k \rightarrow U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathcal{F}_{\bar{u}}. \end{aligned}$$

同构参考Tag 03S5. □

**命题 5.9** (基变换). (i) 设  $f : Y \rightarrow X$  是概形映射且  $j : V \rightarrow X$  平展, 考虑纤维积

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X V & \xrightarrow{f'} & V \\ j' \downarrow & \lrcorner & \downarrow j \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

则有  $j'_! \circ (f')^{-1} = f^{-1} \circ j_!$ ;

(ii) 设  $f: X \rightarrow Y$  是有限映射且  $j: V \rightarrow Y$  开浸入, 且基变换之后  $g: U = X \times_Y V \rightarrow V$  平展, 设  $j': U \rightarrow X$ , 则有  $f_* \circ j'_* = j_! \circ g_*$ .

证明. (i) 考虑二者的右伴随函子, 然后因为直像和平展局部化交换即可得到结论;

(ii) 首先考虑  $Y$  的不在  $U$  内的几何点上的茎不难得知二者皆为零. 其次用命题5.8(iv) 和命题5.6, 得到同构

$$j^{-1} f_* j'_! \mathcal{F} = g_*(j')^{-1} j'_! \mathcal{F} = g_* \mathcal{F}.$$

再次用命题5.8(iv) 即可得到结论.  $\square$

**命题 5.10.** 对于概形  $X$  和闭子概形  $i: Z \rightarrow X$  及其补  $j: U \rightarrow X$ , 则对任何  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  有正合列

$$0 \rightarrow j_! j^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_* i^{-1} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

证明. 分情况不难根据定义得到取茎之后正合, 然后用命题4.18即可.  $\square$

## 6 平展上同调的定义和基本性质

### 6.1 定义

**引理 6.1.** 对概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 存在内射对象  $\mathcal{I} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  使得有单射  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ .

证明. 任取  $x \in X$  和在其上的几何点  $i_x: \bar{x} \rightarrow X$ , 取内射 Abel 群满足  $\mathcal{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow I(x)$ . 则  $\mathcal{I}(x) := i_{x,*} I(x)$  是内射的, 故取  $\mathcal{I} = \prod_{x \in X} \mathcal{I}(x)$  即可得到  $\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow \mathcal{I}$ .  $\square$

**定义 6.2.** 对概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 不难得知截面函子  $\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$  左正合. 由引理6.1知有内射预解  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$ , 则定义  $X$  上  $\mathcal{F}$  的平展上同调为

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) := R^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) = H^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathcal{I}^*).$$

和我们之前定义的上同调理论类似, 我们也有如下基本结果:

**命题 6.3.** (i) 满足  $H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ ;

(ii) 若  $\mathcal{I}$  内射, 则当  $i > 0$  时  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{I}) = 0$ ;

(iii) 短正合列  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  会诱导长正合列

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^0(X, \mathcal{F}'') \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \cdots.$$

**注 6.4.** (a) 若  $g: U \rightarrow X$  平展, 则  $g^{-1} \circ \Gamma(U, -) = \Gamma(U, -)$ , 故  $H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}|_U) = H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F})$ ;

(b) 对于  $f: X \rightarrow Y$ , 因为有  $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^{-1} \mathcal{F}$ , 故可以诱导  $R\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, f^{-1} \mathcal{F})$ , 故可以诱导映射  $H_{\text{ét}}^i(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, f^{-1} \mathcal{F})$ .

### 6.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

**定义 6.5.** 设  $G$  是拓扑群.

(i) 一个 Abel 群  $M$  (赋予离散拓扑) 称为  $G$ -模, 如果有连续作用  $G \times M \rightarrow M$ ;

(ii) 设  $\text{Mod}_G$  是  $G$ -模构成的范畴. 根据 Tag 04JF, 范畴  $\text{Mod}_G$  有足够内射对象. 考虑左正合函子

$$\Gamma_G: \text{Mod}_G \rightarrow \text{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群  $G$  的 (连续) 上同调为  $H^i(G, M) = R^i \Gamma_G(M)$ . 若  $G$  是 Galois 群则成为 Galois 上同调.

**命题 6.6.** 对于群  $G$ , 考虑群环  $\mathbb{Z}[G]$ , 那么有自然的范畴等价  $\text{Mod}_G \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$ . 设  $\mathbb{Z}$  可以经过平凡  $G$  作用来作为  $\mathbb{Z}[G]$  模, 则  $H^i(G, M) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$ .

证明. 近乎平凡, 略去.  $\square$

**定理 6.7** (Tate). 设  $M$  是拓扑群并且赋予连续  $G$ -作用. 考虑复形

$$C_{\text{cont}}^*(G, M) : M \rightarrow \text{Maps}_{\text{cont}}(G, M) \rightarrow \text{Maps}_{\text{cont}}(G \times G, M) \rightarrow \dots$$

其中边界算子为当  $n = 0$ , 则  $m \mapsto (g \mapsto g(m) - m)$ ; 当  $n > 0$  时定义为

$$\begin{aligned} d(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1(f(g_2, \dots, g_{n+1})) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^j f(g_1, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

这样定义 Tate 连续上调调为  $H_{\text{cont}}^i(G, M) := H^i(C_{\text{cont}}^*(G, M))$ . 则对于  $M \in \text{Mod}_G$ , 存在典范映射  $H^i(G, M) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(G, M)$ . 并且当  $G$  是离散群或者射有限群, 则为同构  $H^i(G, M) \cong H_{\text{cont}}^i(G, M)$ .

证明. 映射  $H^i(G, M) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(G, M)$  通过万有  $\delta$ -函子不难诱导. 证明见 [7] 第二章.  $\square$

### 6.3 点的上调调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上调调也是很复杂的.

**引理 6.8.** 设  $x = \text{Spec } k$ , 固定几何点  $\bar{x} = \text{Spec } \Omega$ . 取  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(x_{\text{ét}})$ , 则

$$\Gamma(x, \mathcal{F}) \cong (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}.$$

证明. 根据命题4.16和命题4.2, 我们用 Yoneda 引理有

$$\Gamma(x, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Sh}(X_{\text{ét}})}(h_x, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)\text{-集}}(\{*\}, \mathcal{F}_{\bar{x}}) = (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}$$

得到结论.  $\square$

**定理 6.9.** 设  $x = \text{Spec } k, \bar{x} = \text{Spec } k^{\text{sep}}$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(x_{\text{ét}})$ , 则对任意  $i \geq 0$ ,

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), \mathcal{F}_{\bar{x}}).$$

证明. 根据引理, 我们得知  $\Gamma(x, \mathcal{F}) = \Gamma_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) := (\mathcal{F}_{\bar{x}})^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}$ , 故我们有

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) = R^i \Gamma(x, \mathcal{F}) = R^i \Gamma_{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) = H^i(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), \mathcal{F}_{\bar{x}})$$

即可得到结论.  $\square$

注意到当  $x = \bar{x}$  且当  $i > 0$  时, 就有  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) = 0$ , 这和几何上是一样的.

### 6.4 平展上调调和极限一瞥

我们这里只给出叙述, 不给出证明, 详细细节参考Tag 03Q4.

**定义 6.10.** 设  $I$  是预序集, 考虑逆系统  $(X_i, f_{i'i})_I$ . 一个在其上定义的层系统  $(\mathcal{F}_i, \varphi_{i'i})$  为满足

- (i) 层  $\mathcal{F}_i \in \text{Sh}(X_{i, \text{ét}})$ ;
- (ii) 对  $i' \geq i$ , 有  $\text{Sh}(X_{i, \text{ét}})$  内的映射  $\varphi_{i'i} : f_{i'i}^{-1} \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i'}$  使得  $\varphi_{i''i} = \varphi_{i''i'} \circ f_{i''i'}^{-1} \varphi_{i'i}$ .

**定理 6.11** (Tag 09YQ). 考虑定向逆系统  $(X_i, f_{i'i})_I$  使得  $X_i$  拟紧拟分离且  $f_{i'i}$  仿射. 对于其上定义的层系统  $(\mathcal{F}_i, \varphi_{i'i})$ , 假设  $f_i : X = \varprojlim X_i \rightarrow X_i$  且  $\mathcal{F} := \varinjlim f_i^{-1} \mathcal{F}_i$ , 则有

$$\varinjlim H_{\text{ét}}^i(X_i, \mathcal{F}_i) \cong H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}).$$

## 6.5 支撑在闭集的上同调及性质

首先, 不难证明如下事实: 对概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 取截面  $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ , 则存在开集  $W \subset U$  使得

- (i)  $W$  是  $U$  内最大的开集使得  $s|_W = 0$ ;
- (ii) 对任何几何点  $\bar{u} \rightarrow U$ , 设  $\bar{s} = (U \rightarrow S) \circ \bar{u}$ , 则

$$0 = (U, \bar{u}, s) \in \mathcal{F}_{\bar{s}} \Leftrightarrow \bar{u} \in W.$$

读者可以自己证明, 如果想当懒狗, 参考Tag 04FR.

**定义 6.12.** 对概形  $X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ .

- (i) 层  $\mathcal{F}$  的支集为点集  $\text{supp}(\mathcal{F}) \ni s$  使得对所有 (一些)  $s$  上的几何点  $\bar{s}$  都有  $\mathcal{F}_{\bar{s}} \neq 0$ ;
- (ii) 截面  $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ , 其支集  $\text{supp}(s)$  定义为闭集  $U \setminus W$ .

**注 6.13.** 层的支集不一定是闭的, 但如果取值是环, 那一定是闭的, 因为这时相当于单位截面的支集.

**定义 6.14.** 对概形  $X$ , 闭子概形  $Z \subset X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 定义

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(X) : \text{supp}(s) \subset Z\}.$$

定义支撑在  $Z$  的平展上同调为

$$H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) := R^i \Gamma_Z(X, \mathcal{F}).$$

**命题 6.15.** 对概形  $X$ , 闭子概形  $Z \subset X$  和  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 设  $U = X \setminus Z$ , 则有好三角:

$$R\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_Z(X, \mathcal{F})[1]$$

进而诱导出正合列:

$$\cdots \rightarrow H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(U, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

证明. 任取内射对象  $\mathcal{I} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 我们断言  $\mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{I}(U)$  是满的. 设  $j : U \rightarrow X$ , 注意到对任何  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  都有

$$\text{Hom}(j_! \mathbb{Z}_U, \mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}|_U) = \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

因为  $\mathcal{I}$  是内射的, 故只需证明  $j_! \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathbb{Z}_X$  是单射. 根据层化函子是正合的, 只需证明对平展映射  $V \rightarrow X$ , 典范映射

$$\bigoplus_{V \rightarrow U} \mathbb{Z}(U) \rightarrow \bigoplus_{V \rightarrow X} \mathbb{Z}(U)$$

是单射, 而这是显然的, 故断言成立.

不难发现上述满射的核为  $\Gamma_Z(X, \mathcal{I})$ , 因此立即得到好三角

$$R\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow R\Gamma_Z(X, \mathcal{F})[1].$$

而长正合列因此是显然的. □

**定理 6.16** (切除). 设  $f : X' \rightarrow X$  平展和闭子概形  $Z' \subset X'$  使得

- (i) 设  $Z := f(Z')$  是闭集且  $f|_{Z'} : Z' \cong Z$  同构;
- (ii) 有  $f(X' \setminus Z') \subset X \setminus Z$ .

则对任意的  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$  都有对任意  $i$  的同构

$$H_{Z, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{Z', \text{ét}}^i(X', f^{-1} \mathcal{F}).$$

证明. 设  $U' = X' \setminus Z', U = X \setminus Z$ , 考虑

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \cong \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \end{array}$$

得到

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X', f^{-1}\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U', f^{-1}\mathcal{F})
\end{array}$$

其中虚线为诱导出来的映射. 由于  $f^{-1}$  正合且和内射对象交换, 则只需证明诱导的

$$g : \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathcal{F})$$

是同构. 注意到若  $s \in \ker g$ , 则  $s$  在  $\Gamma(X', \mathcal{F})$  和  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  是 0. 而  $\{X', U\}$  是平展覆盖, 则  $s = 0$ , 故是单射. 另一方面, 取  $s' \in \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathcal{F}) \subset \Gamma(X', f^{-1}\mathcal{F})$ . 注意到  $s', 0$  在  $U'$  是 0; 另外  $s'$  限制  $X' \times_X X' \rightrightarrows X'$  都是相等的, 因此可以粘合成  $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ , 故满射.  $\square$

**推论 6.17.** 对概形  $X$  和闭点  $x \in X$ , 任取  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则有

$$H_{x, \text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \cong H_{x, \text{ét}}^i(\text{Spec } \mathcal{O}_{X, x}^{\text{sh}}, \mathcal{F}).$$

证明. 用定理6.16和定理6.11即可.  $\square$

## 7 Čech 上同调和挠子

### 7.1 Čech 上同调

**定义 7.1.** 考虑概形  $X$  和一族平展覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ , 考虑  $\mathcal{P} \in \text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ , 定义

$$\check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) = \prod_{(i_0, \dots, i_r) \in I^{r+1}} \mathcal{P}(U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_r})$$

和映射  $d^r : \check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$  为

$$s = (s_{i_0, \dots, i_r}) \mapsto \left( \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j (s_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{r+1}})|_{U_{i_0, \dots, i_{r+1}}} \right)_{i_0, \dots, i_{r+1}}.$$

复形  $\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$  称为 Čech 复形, 其上同调

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := H^i(\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}))$$

称为  $\mathcal{P}$  关于覆盖  $\mathfrak{U}$  的 Čech 上同调.

**注 7.2.** 不难注意到 Čech 复形可以重新写成:

$$\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) = \text{Hom}_{\text{PreAb}(X_{\text{ét}})} \left( \left( \bigoplus_{i_0 \in I} \mathbb{Z}_{U_{i_0}} \leftarrow \bigoplus_{(i_0, i_1) \in I^2} \mathbb{Z}_{U_{i_0} \times_X U_{i_1}} \leftarrow \cdots \right), \mathcal{P} \right).$$

而且直接 (大量) 计算会得到  $\text{Hom}$  里面的复形  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{U}}^*$  是正合的 (参考 Tag 03AT).

**例 7.1.** 考虑覆盖  $\mathfrak{U} = \{Y \rightarrow X\}$  使得  $Y \rightarrow X$  是 Galois 覆叠  $G$ . 对  $\mathcal{P} \in \text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ , 假设其吧无交并映成积, 应用定理6.7则有  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \cong H^r(G, \mathcal{P}(Y))$ .

**命题 7.3.** 给定概形  $X$  和平展覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ .

- (i) 对任何内射对象  $\mathcal{S} \in \text{PreAb}(X_{\text{ét}})$ , 对  $i > 0$  我们有  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) = 0$ ;
- (ii) 在  $\text{PreAb}(X_{\text{ét}})$  内  $\check{H}^i(\mathfrak{U}, -)$  是  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -)$  的导出函子;
- (iii) 若  $\mathcal{F} \in \text{Ab}(X_{\text{ét}})$ , 则  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ .



证明. (ii) 运用万有  $\delta$  函子理论即可; (iii) 就是层的条件之一; (i) 注意到

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) = H^i(\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})}(\mathbb{Z}_{\mathfrak{U}}^*, \mathcal{S}))$$

且  $\mathbb{Z}_{\mathfrak{U}}^*$  正合和  $\mathcal{S}$  内射即可. □

**注 7.4.** 注意到遗忘函子保持内射性质, 于是在  $\mathrm{Ab}(X_{\mathrm{\acute{e}t}})$  内也满足 (i).

**定义 7.5.** 考虑概形  $X$  和一族平展覆盖  $\mathfrak{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ . 这个覆盖的一个加细指覆盖  $\mathfrak{V} = \{V_j \rightarrow X\}_{j \in J}$  满足对任意的  $V_j \rightarrow X$  都存在分解  $V_j \rightarrow U_{\alpha(j)} \rightarrow X$ . 这样会自然诱导一个  $\alpha^* : \check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^*(\mathfrak{V}, \mathcal{P})$  为  $(\alpha^r s)_{j_0, \dots, j_r} = s_{\alpha(j_0), \dots, \alpha(j_r)}|_{V_{j_0, \dots, j_r}}$ . 因此诱导  $\rho(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) : \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^i(\mathfrak{V}, \mathcal{P})$ . 故而可以定义 Čech 上同调为

$$\check{H}_{\mathrm{\acute{e}t}}^i(X, \mathcal{P}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{P}).$$

## 7.2 Čech-导出的比较

## 7.3 几个应用

## 7.4 拟凝聚层的上同调

## 7.5 挠子理论一瞥和应用

## 8 高阶直像

## 9 曲线的上同调——基础结果

## 10 可构建层和挠层

## 11 曲线上挠层的上同调

## 12 上同调维数

## Part II

# 反常层基础理论

## 13 反常层简介

## 14 一些同调代数

## 索引

$G$ -模, 13  
 $GL_{n,X}$ , 7  
 $G_{a,X}$ , 7  
 $G_{m,X}$ , 7  
 $\mu_{n,X}$ , 7  
 $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}$ , 8

Galois 上调, 13  
Grothendieck 意象, 6  
Grothendieck 拓扑, 5

Hensel 局部环, 8  
Hensel 引理, 8

Riemann 存在定理, 4

Tate 连续上调, 14

Weil 猜想, 3

Čech 上调, 17

严格 Hensel 化, 8  
严格 Hensel 局部环, 8

分离预层, 5  
切除, 15  
局部常值层, 9  
层, 5  
层化, 6  
常值层, 9  
平展上调, 13  
平展基本群, 4

拟凝聚层, 7  
摩天大厦层, 8  
景, 5  
有限局部常值层, 9

直像, 10  
纤维函子, 4  
结构层, 7  
群上调, 13

茎, 8

逆像, 11  
零扩张函子, 12  
预层, 5

## 参考文献

- [1] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained*. AMS, 2005.
- [2] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer-Verlag, 1971.
- [3] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.
- [4] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version*. World Scientific, 2015.
- [5] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton university press, 1980.
- [6] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013. Available at [www.jmilne.org/math/](http://www.jmilne.org/math/).
- [7] James S. Milne. Class field theory, 2020. Available at [www.jmilne.org/math/](http://www.jmilne.org/math/).
- [8] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. AMS, 2016.
- [9] Stacks project collaborators. The stacks project, 2023. <https://stacks.math.columbia.edu/>.