给几何人的平展上同调基础

温尊

2023 年 3 月 29 日

摘要

平展上同调是代数几何中非常重要的一部分, 同时也是比较基础的一部分, 广泛应用在各个方向. 这篇笔记将以 Milne 的讲义为大体顺序, 以几何人的视角讲述平展上同调的基础理论, 为后续代数几何的学习和研究扫清一些障碍. 本笔记也得到了舍友很多支持, 感谢他对这个笔记的贡献和帮助.

目录

1 平展上同调简介 **4**

2 平展基本群 **5**

3 景和层和层化 **7**

4 平展拓扑上的层 **8**
- 4.1 基本结果和例子 . . . 9
- 4.2 平展预层/层的茎 . . . 10
- 4.3 常值层和局部常值层 . . . 12
- 4.4 Abel 群预层和层构成的范畴 . . . 13
- 4.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列 . . . 13
- 4.6 拟凝聚层 . . . 14

5 层的一些函子 **14**
- 5.1 直像 . . . 14
- 5.2 逆像 . . . 15
- 5.3 零扩张函子 (下叹号函子) . . . 16

6 平展上同调的定义和基本性质 **17**
- 6.1 定义 . . . 17
- 6.2 群上同调一瞥 . . . 18
- 6.3 点的上同调 . . . 18
- 6.4 严格 Hensel 局部环的上同调 . . . 19
- 6.5 平展上同调和极限一瞥 . . . 19
- 6.6 支撑在闭集的上同调及性质 . . . 20

7 Čech 上同调和挠子 **21**

7.1 Čech 上同调 . . . 21
7.2 Čech-导出谱序列 . . . 22
7.3 应用 I——Mayer-Vietoris 列 . . . 23
7.4 应用 II——拟凝聚层的上同调 . . . 24
7.5 挠子理论一瞥和应用 . . . 25

8 高阶直像 **26**

8.1 基础性质 . . . 26
8.2 Leray 谱序列 . . . 27

9 曲线的上同调 I——基础结果 **27**

9.1 Brauer 群和 C_r 域一瞥 . . . 28
9.2 $\mathbb{G}_{m,X}$ 的上同调 . . . 28
9.3 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 的上同调 . . . 30
9.4 支撑在点上的上同调 . . . 31

10 可构建层和挠层 **32**

10.1 可构建层 . . . 32
10.2 挠层 . . . 33

11 曲线的上同调 II——挠层的上同调 **34**

11.1 迹映射方法基础 . . . 34
11.2 挠层的上同调 . . . 34

12 上同调维数 I——一般情况 **36**

13 紧合基变换和光滑基变换 **37**

13.1 经典拓扑里的紧合基变换 . . . 37
13.2 紧合基变换的叙述和证明 . . . 38
13.3 紧合基变换的应用 . . . 41
13.4 经典拓扑里的光滑基变换 . . . 41
13.5 光滑基变换一瞥 . . . 42
13.6 光滑基变换的应用 . . . 42

14 上同调维数 II——仿射情况 **42**

15 ℓ-进层和 ℓ-进上同调 **42**

16 平展上同调的 Künneth 公式 **42**

17 比较定理 **42**

17.1 常值层上同调-奇异比较定理 . . . 42
17.2 平展-奇异比较定理 . . . 43
17.3 其他比较定理 . . . 43

18 上同调纯性和 Gysin 序列 **43**

19 紧支上同调 **43**

20 链映射和 Chern 类 **43**

21 Poincaré 对偶 **43**

22 Lefchetz 迹公式 **43**

23 Weil 上同调理论 **43**

24 平展上同调的一些应用 I——代数曲面的应用 **43**
24.1 待添加 43

25 平展上同调的一些应用 II——Abel 簇相关 **43**
25.1 Abel 簇的平展上同调 43
25.2 Abel 簇和 Jacobi 簇 43
25.3 Mordell-Weil 定理 43

26 平展上同调的一些应用 III——相关大定理和猜想一瞥 **43**
26.1 Mordell 猜想 43
26.2 p 进 Hodge 理论 43
26.3 双有理几何 43

索引 **44**

参考文献 **45**

1 平展上同调简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取 X 为 $\mathbb{C}$ 上的代数簇, 其解析化 X^{an} 可以对应奇异上同调 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{Z})$ 满足

(i) 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模;

(ii) 群 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{C})$ 有额外的结构;

(iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 我们会发现挠系数的上同调, 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 系数的上同调可以比较好的模拟奇异上同调. 但会发现 $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})=0$ 而 $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ 并不能很好的模拟奇异上同调, 另一方面我们发现如下结果:

定理 1.1 (Serre)**.** *不存在上同调理论 H^* 使得 (i) 具有函子性;(ii) 满足 Kunneth 公式;(iii) 对所有椭圆曲线 E 满足 $H^1(E)\cong\mathbb{Q}^2$.*

基本思路. 取 E 为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}$ 是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到 $\mathrm{End}(E)$ 作用在 E 上会诱导出 $\mathrm{End}(E)$ 在 $H^1(E)$, 进而诱导出代数同态 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}\to\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{Q})$. 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论. □

为了在非挠系数下也可以模仿奇异上同调, 我们会定义类似的 ℓ-进上同调理论, 其中 ℓ 和特征 p 互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论):

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)=\varprojlim H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})\ \text{和}\ H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_\ell)=H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell,$$

这样也可以得到比较好的模拟.

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点 $(X,\bar{x})$, 可以定义 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$ 为平展基本群, 其定义事实上是从代数拓扑里偷的, 运用了覆叠变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

猜想 1 (Weil 猜想)**.** *设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上 n 维光滑紧合几何整的簇, 设*

$$S_X(t)=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n}t^n\right),$$

则

(i) 函数 $S_X(t)$ 是有理函数, 即 $S_X(t)=\prod_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}S_i(t)$, 其中 S_i 是满足一定条件的整系数多项式;

(ii) 满足函数方程 $S_X(q^{-n}t^{-1})=\pm q^{nE/2}t^ES_X(t)$ 其中 E 是 X 欧拉示性数;

(iii) 所有零点和极点的绝对值为 $q^{j/2}$ 其中 $j\in\mathbb{Z}$;

(iv) 若 X 提升为代数整数环 $R\subset\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 Y, 则对于 $i=0,...,2n$, 流形 $Y(\mathbb{C})$ 的 Betti 数为 $S_i(t)$ 的次数 b_i.

最后结果. (i) 由 Dwork 运用 H^1 的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Gorthendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明. □

因此平展上同调是相当成功的上同调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点集拓扑) 就会被我略去. 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐 [10] 里的Tag 0BQ6 和Tag 03N1, 扶磊教授的书 [5] 和 Milne 的传世经典 [6], 我们也会多次引用里面的代数细节.

前置知识: 至少是经典代数几何教材 [3] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 还有基本的导出范畴. 最好懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好.

2 平展基本群

对于连通概形 X, 定义 $\mathrm{F\acute{e}t}/X$ 为 X 上的有限平展态射构成的范畴, 而 $\mathrm{\acute{E}t}/X$ 为 X 上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点 $(X, \bar{x})$, 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}} : \mathrm{F\acute{e}t}/X \to \mathrm{Sets}, (\pi : Y \to X) \mapsto \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆叠空间? 事实上不一定存在:

例 2.1. *考虑 $\mathbb{C}$ 上射影直线 $\mathbb{A}^1$, 存在有限平展映射 $\mathbb{A}^1\backslash\{0\} \to \mathbb{A}^1\backslash\{0\}, x \mapsto x^n$, 那么注定没有像拓扑里的 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 来表示万有覆盖!*

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [6] 也没证明. 而 [5] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X' = ((X_i, f_i)_{i\in I}, \phi_{ij} : X_j \to X_i, f_i = \phi_{ij} \circ f_j, f_i \in \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\mathrm{Hom}(X', Y) := \varinjlim \mathrm{Hom}_X(X_i, Y) \to \mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y), \sigma \mapsto \sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取 X_i/X 为 Galois 覆盖, 也就是说 $\deg(X_i/X) = \#\mathrm{Aut}_X X_i$, 见 [6] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于 $\phi_{ij} : X_j \to X_i$ 可以诱导 $\mathrm{Aut}_X X_j \to \mathrm{Aut}_X X_i$ 如下: 注意到 $\mathrm{Aut}_X X_j \to \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j), \sigma \mapsto \sigma(f_j)$ 是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [5] 第三节), 则通过 $F(X_j) \to F(X_i), \alpha \mapsto \phi_{ij}(\alpha)$ 即得到映射.

定义 2.1. *对于连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 考虑上述构造, 定义平展基本群为*

$$\pi_1^{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

定理 2.2. *考虑连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$.*

(i) 函子 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$ 诱导出 $\mathrm{F\acute{e}t}/X$ 到有限 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$-集的等价;

(ii) 取第二个几何点 $\bar{x}'$, 我们有 $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \cong \mathfrak{F}_{\bar{x}'}$ 进而诱导 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}')$, 并且和 (i) 契合;

(iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考Tag 0BND. □

例 2.2. *(i) 对一个点 $X = \mathrm{Spec}(k)$ 和几何点 Ω, 由定义知道 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\Omega) = \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$;*

(ii) 考虑 $\mathbb{C}$ 上的 $X = \mathbb{A}^1\backslash\{0\}$, 则考虑 $x \mapsto x^n$ 得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i = \varprojlim \boldsymbol{\mu}_n(k) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell;$$

(iii) 考虑代数闭域上的 $X = \mathbb{P}^1$, 由 Riemann-Hurwitz 公式不难得到 X 只有平凡的平展覆叠, 故 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) = 1$. 归纳可以得到 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^n,\bar{x}) = 1$;

(iv) 事实上我们对 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^1,\bar{x})$ 都一无所知, 其中 k 是正特征域 (根据 Artin-Scheier 列, 起码不是平凡的群);

(v) 对于正规簇 X, 考虑一般点上的几何点 $\bar{x}$, 假设

$$L = \bigcup \left\{ \text{几何点内的有限可分扩张} K/K(X) : X \text{在} K \text{内的正规化到} X \text{平展} \right\},$$

则 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \mathrm{Gal}(L/K(X))$, 参考 [5] 命题 3.3.6.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

定理 2.3 (Riemann 存在定理)**.** *设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形, 则由范畴等价*

$$(\mathrm{F\acute{e}t}/X) \to (\mathrm{FTopCov}/X^{\text{an}}).$$

特别的有 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \pi_1\widehat{(X^{\text{an}},x)}$, 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [2] 的定理 XII.5.1. □

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形的平展基本群了.

注 2.4 (算术和数论人的最爱)**.** *(i) 对于 X 为 k 上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 [5] 命题 3.3.7):*

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\text{sep}}},\bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \to \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \to 1;$$

(ii) 对于 $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\backslash\{0,1,\infty\}$, 运用正合列得到

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}},\bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q}) \to 1.$$

嵌入 $\mathbb{Q}^{\text{al}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 可以得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}},\bar{x}) \cong \langle a,b,\widehat{c|abc} = 1\rangle.$$

而群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q})$ 则十分复杂, 如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 (摘自 J. Milne 的讲义 [7]).

3 景和层和层化

本质就是推广拓扑空间的定义.

定义 3.1 (Grothendieck 拓扑和景)**.** 设 $\mathcal{C}$ 是范畴, 一个 $\mathcal{C}$ 上的 *Grothendieck* 拓扑由集合 $\{\{U_i \to U\}_{i\in I}\} = \mathrm{Cov}(U)$ 组成, 其中 U 是任意对象, 满足

(i) 若 $V \to X$ 是同构, 则 $\{V \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$;

(ii) 若 $\{X_i \to X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ 且 $Y \to X$ 是任意态射, 则纤维积 $X_i \times_X Y$ 存在且

$$\{X_i \times_X Y \to Y\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(Y);$$

(iii) 若 $\{X_i \to X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ 且对任意 $i \in I$ 都给定 $\{V_{ij} \to X_i\}_{j\in J_i}$, 则

$$\{V_{ij} \to X_i \to X\}_{i\in I, j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(X).$$

范畴 $\mathcal{C}$ 和其上的 *Grothendieck* 拓扑称为景.

例 3.1 (小 Zariski 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\mathrm{Op}(X)$ 由开子概形构成, 态射是包含关系. 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{Zar}.

例 3.2 (大 Zariski 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 为开浸入且 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{ZAR}.

例 3.3 (小平展景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\mathrm{\acute{E}t}/X$, 不难证明里面的态射都是平展的, 所以我们不假设条件. $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$.

例 3.4 (大平展景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平展且 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\mathrm{\acute{E}t}}$.

例 3.5 (fppf 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平坦和局部有限表现, 且 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 X_{fppf}.

定义 3.2. 景 $\mathcal{C}$ 上的预层为函子 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$*;*

定义 3.3. 给定景 $\mathcal{C}$ 和其上的预层 F.

(i) 预层 F 称之为分离的, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$, 诱导态射 $F(U) \to \prod_{i\in I} F(U_i)$ 是单射*;*

(ii) 预层 F 称为层, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$, 我们有如下等化子*:*

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被 $U_i \times_U U_j \to U_i$ 和 $U_i \times_U U_j \to U_j$ 诱导.

定义 3.4. 一个范畴称为 *Grothendieck* 意象 *(Topos)* 如果其等价于某个景上的层范畴.

定义 3.5 (层化)**.** *在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$, 称 $\mathscr{P}^\sharp \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 使得 $\mathscr{P} \to \mathscr{P}^\sharp$ 是 $\mathscr{P}$ 的层化, 如果任取 $\mathscr{G} \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 和 $\mathscr{P} \to \mathscr{G}$, 都有交换图:*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{P}^\sharp \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ \mathscr{G} & \end{tikzcd}$$

定理 3.6. *在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$. 对某个覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$, 定义*

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) := \ker\left(\prod_i \mathscr{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathscr{P}(U_i \times_U U_j)\right).$$

故有典范映射 $\mathscr{P}(U) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$. 不难证明不同覆盖可以诱导良定义的态射且和覆盖间映射选取无关 (参考 Tag 03NQ), 故定义

$$\mathscr{P}^+ : U \mapsto \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{P}).$$

(i) 函子 $\mathscr{P}^+$ 是分离预层;
(ii) 若 $\mathscr{P}$ 是分离预层, 则 $\mathscr{P}^+$ 是层且 $\mathscr{P} \to \mathscr{P}^+$ 单射;
(iii) 若 $\mathscr{P}$ 是层, 则 $\mathscr{P} \to \mathscr{P}^+$ 是同构;
(iv) 不论如何 $\mathscr{P}^{++}$ 一定是层, 且 $\mathscr{P}^{++} \cong \mathscr{P}^\sharp$.

证明. 这是纯粹的层论推导, 参考Tag 00WB. □

注 3.7. 我们在景的定义3.1里规定 $\mathrm{Cov}(U)$ 是集合很大程度上就是为了保证这个极限存在.

推论 3.8. *在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$. 则 $\sharp : \mathrm{PreSh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 是个函子, 且若规定遗忘函子为 $i : \mathrm{Sh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$, 则有 $(\sharp, i)$ 是伴随函子. 特别的, 函子 $\sharp$ 是正合函子.*

证明. 近乎平凡. □

推论 3.9. *考虑图 $\mathscr{F} : \mathcal{I} \to \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$, 则 $\varprojlim_{\mathcal{I}} \mathscr{F}$ 存在且和预层范畴内一样, 而 $\varinjlim_{\mathcal{I}} \mathscr{F}$ 存在且为预层范畴内的层化.*

证明. 也是纯粹的层论验证, 见Tag 00W2和Tag 00WI. □

4 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景 $X_{\text{ét}}$. 记 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 是集合取值的平展层范畴, 而 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为 $\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 和 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$.

4.1 基本结果和例子

命题 4.1. *固定概形 X, 对于 $\mathscr{F} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 若 $\mathscr{F}$ 在限制到 Zariski 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖 $V \to U$ 满足层条件, 则 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.*

证明. 详细细节参考 [6] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 Zariski 开覆盖上的条件会给出: 对于概形 $V = \coprod_i V_i$, 我们有 $\mathscr{F}(V) = \prod_i \mathscr{F}(V_i)$. 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖 $\coprod_i U_i \to U$ 满足等化子条件, 那么 $\{U_i \to U\}$ 也满足等化子条件 (因为 $\coprod_i U_i \times_U \coprod_j U_j = \coprod_{i,j} U_i \times_U U_j$). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 也满足等化子条件, 其中 I 有限且 U_i 仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去. □

例 4.1 (结构层)**.** *给定概形 X. 定义 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$ 为 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}(U) := \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$. 我们断言 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$. 运用4.1, 这其实就是环的忠实平坦下降: 设环同态 $f : A \to B$ 忠实平坦, 则有正合列:*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b \mapsto 1\otimes b - b\otimes 1} B \otimes_A B$$

证明颇为经典, 分成三步:(a) 证明如果 f 有一个截面, 则命题成立;(b) 证明如果存在另一个忠实平坦同态 $A \to A'$ 使得命题对 $A' \to A' \otimes_A B$ 成立, 则也对 $A \to B$ 成立;(c) 发现 $B \to B \otimes_A B, b \mapsto b \otimes 1$ 存在截面 $b \otimes b' \mapsto bb'$.

例 4.2 (由概形表示的层)**.** *给定概形 X. 取定 Z 为 X-概形, 定义为 $h_Z := \mathrm{Hom}_X(-, Z)$. 事实上通过 (i) 的正合列也容易得到 $h_Z \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$. 下面有几个常用的例子:*

(a) 定义 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}(T) = \{\zeta \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T) : \zeta^n = 1\}$, 即 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t]/(t^n - 1)$ 表示;

(b) 定义 $\mathbb{G}_{a,X}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$, 即 $\mathbb{G}_{a,X}$ 是被 $\mathbb{A}^1_X$ 表示的函子;

(c) 定义 $\mathbb{G}_{m,X}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T^*)$, 即 $\mathbb{G}_{m,X}$ 是被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t, t^{-1}]$ 表示的函子;

(d) 定义 $\mathrm{GL}_{n,X}(T) = \mathrm{GL}_n(\Gamma(T, \mathscr{O}_T))$, 即 $\mathrm{GL}_{n,X}$ 是被

$$\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[\{x_{ij}\}_{1\le i,j\le n}][1/\det(x_{ij})]$$

表示的函子.

例 4.3 (拟凝聚层)**.** *给定概形 X. 考虑 $\mathscr{M} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{Zar}})$ 是拟凝聚的, 定义 $\mathscr{M}^{\text{ét}}(\phi : U \to X) := \Gamma(U, \phi^*\mathscr{M})$. 运用4.1和更一般的正合列: 环同态 $f : A \to B$ 忠实平坦且 M 为 A-模, 则有正合列*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

即可得到 $\mathscr{M}^{\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.

命题 4.2 (点上的层范畴)**.** *对于 $X = \mathrm{Spec}\, k$, 有范畴等价*

$$\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) \to (\text{离散}\,\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) - \text{集}), \mathscr{F} \mapsto M_{\mathscr{F}} := \varinjlim_{k^{\mathrm{sep}} \supset k'/k \text{有限 Galois}} \mathscr{F}(\mathrm{Spec}\, k').$$

证明. 定义逆为 $M \mapsto \mathscr{F}_M := (A \mapsto \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(A, k^{\mathrm{sep}}), M))$. 见Tag 03QT. □

注 4.3. 类似的有范畴等价

$$\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to (\text{离散}\,\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k) - \text{模}).$$

4.2 平展预层/层的茎

定义 4.4 (平展邻域). *给定概形 X, 称几何点 $\bar{x}$ 的一个平展邻域为如下图表:*

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "f"] \\ \bar{x} \arrow[ur, "\bar{u}"] \arrow[r, "\bar{x}"'] & X \end{tikzcd}$$

其中 f 平展. 我们记为 $(U,\bar{u}) \to (X,\bar{x})$.

引理 4.5. *给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 则*

(i) 给定两个平展邻域 $(U_i,\bar{u}_i)_{i=1,2}$, 存在第三个平展邻域 $(U,\bar{u})$ 和态射 $(U,\bar{u}) \to (U_i,\bar{u}_i)$;

(ii) 假设 $h_1,h_2 : (U_1,\bar{u}_1) \to (U_2,\bar{u}_2)$ 是平展邻域的态射, 则存在第三个平展邻域 $(U,\bar{u})$ 和态射 $h : (U,\bar{u}) \to (U_1,\bar{u}_1)$ 使得 $h_1 \circ h = h_2 \circ h$.

证明. (i) 只需考虑 $U = U_1 \times_X U_2$, 而 $\bar{s} \to U$ 被 $(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ 定义;

(ii) 定义 U 为纤维积

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & U_1 \arrow[d, "(h_1,h_2)"] \\ U_2 \arrow[r, "\Delta"] & U_2 \times_X U_2 \end{tikzcd}$$

并定义 $\bar{u} = (\bar{u}_1,\bar{u}_2)$. □

注 4.6. 在 *(ii)* 内, 通过一些假设, 我们可以使得态射 $h_1 = h_2$: 若我们有诺特分离概形的图标

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, shift right, "g"'] \arrow[dl, shift left, "g'"] \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "p"'] & S \end{tikzcd}$$

其中 Y 连通且 p,q 平展, 则 $g = g'$. 这是因为 $\delta : X \to X \times_S X$ 平展且是闭浸入, 则 $X \times_S X = \delta(X) \sqcup Z$ 为连通分支的无交并. 注意到 $g \times g' : Y \to X \times_S X$ 有连通的像. 根据图知 $\delta(X) \cap \mathrm{Im}(g \times g') \neq \emptyset$, 故 $\mathrm{Im}(g \times g') \subset \delta(X)$, 故 $g = g'$.

定义 4.7. *给定概形 X 和 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 给定几何点 $\bar{x}$, 定义 $\mathscr{P}$ 在 $\bar{x}$ 的茎为*

$$\mathscr{P}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U,\bar{u})} \mathscr{P}(U)$$

其中余极限遍历所有平展邻域, 根据引理4.5此为滤余极限.

注 4.8. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 则不难看出 $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_{\bar{x}}$ 作为函子 $\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sets}$ 或者 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sets}$ 或者 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{AbGrps}$ 或者 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{AbGrps}$ 都是正合的. 如果你不放心, 请参考*Tag 03PT*.

定义 4.9. *给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 给定集合 E, 定义 $E^{\bar{x}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 为:*

$$E^{\bar{x}}(U) := \bigoplus_{\mathrm{Hom}_X(\bar{x},U)} E.$$

注 4.10. 有几个简单的性质:
(i) 这个 $E^{\bar{x}}$ 在平展拓扑下一定是层, 其他景上面不一定;
(ii) 我们有伴随函子 $((-)_{\bar{x}}, (-)^{\bar{x}})$, 在预层范畴上这个伴随对任何景都对, 在层范畴上需要一定条件 (而小平展景显然满足), 若对这个有兴趣, 参考 *Tag 00Y3;*
(iii) 对于几何点 $\bar{y}$, 除非 $\bar{y}$ 也在 $\bar{x}$ 对应的点上, 否则 $(E^{\bar{x}})_{\bar{y}} = 0$.

命题 4.11. *给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 对于 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 有 $\mathscr{P}_{\bar{x}} = \mathscr{P}^{\sharp}_{\bar{x}}$.*

证明. 因为有伴随性, 对于任何集合 E, 我们有

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sets}}(\mathscr{P}_{\bar{x}}, E) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})}(\mathscr{P}, E^{\bar{x}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})}(\mathscr{P}^{\sharp}, E^{\bar{x}}) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sets}}(\mathscr{P}^{\sharp}_{\bar{x}}, E),$$

因此成立. □

对于结构层 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$, 它的茎有特殊的代数性质.

命题 4.12. *给定概形 X 和在 $x \in X$ 上的几何点 $\bar{x}$. 设 $\kappa(x) \subset \kappa(x)^{\mathrm{sep}} \subset \kappa(\bar{x})$ 是可分代数闭包, 则有*
(i) 有同构 $(\mathscr{O}_{X,x})^{\mathrm{sh}} \cong (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 前者为 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的严格 *Hensel* 化;
(ii) 设 $\mathfrak{m}_x$ 是 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的极大理想, 则 $\mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 是 $(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 的极大理想, 且满足

$$(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}/\mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}} \cong \kappa(x)^{\mathrm{sep}};$$

(iii) 对任何首一多项式 $f \in (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}[T]$ 和任意 $\bar{f} \in \kappa(x)^{\mathrm{sep}}[T]$ 的根 $\alpha_0 \in \kappa(x)^{\mathrm{sep}}$ 使得 $\bar{f}'(\alpha_0) \neq 0$, 则存在 $\alpha \in (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 使得 $f(\alpha) = 0$ 且 $\alpha_0 = \bar{\alpha}$.

证明. 这些都是复杂的交换代数, 见Tag 04GE, Tag 04GP和04GW. 其中 (iii) 被称之为 Hensel 引理, 满足 (iii) 的环叫做 Hensel 局部环, 如果这个环的剩余类域可分代数闭, 则称之为严格 Hensel 局部环. 所以我们这里就是一个严格 Hensel 环. □

注 4.13. 我们之后将记 $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}} := (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 也不会有歧义.

对于 Hensal 局部环, 我们还有如下常用的结论:

命题 4.14 (Hensel 引理)**.** *设 $(A, \mathfrak{m}, \kappa)$ 是 Hensal 局部环, 则*
(i) 任何有限 A-代数 S 都是在 R 上有限的局部环的乘积, 此时这些局部环依旧是 *Hensal* 局部环;
(ii) 如果平展 A-代数 B 满足 B 的极大理想 $\mathfrak{n}$ 卧于 $\mathfrak{m}$ 上使得 $\kappa \cong B/\mathfrak{n}$, 则存在同构 $\phi : B \cong A \times B'$ 使得 $\phi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m} \times B' \subset A \times B'$;
(iii) 我们有范畴等价:

$$\{\text{有限平展}A\text{-代数}\} \longleftrightarrow \{\text{有限平展}\kappa\text{-代数}\}, S \mapsto S/\mathfrak{m}S.$$

证明. 纯粹的交换代数, 参考Tag 04GG, Tag 04GH, Tag 04GK和Tag 03QH. □

4.3 常值层和局部常值层

定义 4.15. *给定概形 X.*

(i) 对于 $\mathscr{F}\in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$), 则 $\mathscr{F}$ 称为常值层如果存在集合 E(或者 Abel 群 G) 使得 $\mathscr{F}\cong (U\mapsto E)^\sharp =: \underline{E}_X$(或者 $\cong (U\mapsto G)^\sharp =: \underline{G}_X$);

(ii) 称 $\mathscr{F}\in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$) 是局部常值层, 如果存在覆盖 $\{U_i\to X\}$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是常值层;

(iii) 称 $\mathscr{F}\in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$) 是有限局部常值层, 如果 $\mathscr{F}$ 是局部常值层且取值的集合 (或 Abel 群) 是有限集合.

注 4.16. 对于 *(i)(ii)* 可以定义一般的 Λ-模的常值层/局部常值层.

引理 4.17 (有限平展映射的平展局部分解)**.** *(i) 设 $f: X\to S$ 有限无分歧, 取 $s\in S$, 则存在平展邻域 $(U,u)\to(S,s)$ 和有限无交分解 $X_U=\coprod_j V_j$ 使得所有 $V_j\to U$ 均为闭浸入.*

(ii) 设 $f: X\to S$ 有限平展, 取 $s\in S$, 则存在平展邻域 $(U,u)\to(S,s)$ 和有限无交分解 $X_U=\coprod_j V_j$ 使得所有 $V_j\to U$ 均为同构.

证明. 首先, 有关各种映射的平展局部, 可参考Tag 024J. 二者究其本质都是拟有限态射的平展局部性质 (见Tag 02LM). 证明虽然不甚复杂, 但写于此意义也不大, 故这里我们略去证明, 证明参考Tag 04HJ和 Tag 04HN. □

命题 4.18. *给定概形 X, 则有范畴等价*

$$\{\text{有限平展映射} U\to X\}\cong\{\text{有限局部常值层}\}, (U\to X)\mapsto \mathscr{F}=h_U.$$

证明. 根据引理4.17(ii), 不难看出 h_U 确实是有限局部常值层. 另一方面, 任取 $\mathscr{F}$ 是有限局部常值层, 则存在平展覆盖 $\{U_i\to X\}$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是常值层, 则可以被有限平展态射 $U_i\to X$ 表示 (设取值集合的基数是 κ, 若是诺特分离概形, 考虑注4.6, 则令 $Z_i=\coprod_{i=1}^{\kappa} U_i$, 故 $\mathscr{F}|_{U_i}=h_{Z_i}$). 根据仿射态射满足有效的忠实平坦下降 (fpqc), 我们可以得到存在 $Z\to X$ 使得 $h_Z\cong\mathscr{F}$. 而由于有限性和平展性都是 fpqc 局部的, 故 $Z\to X$ 仍然是有限平展映射. □

命题 4.19. *给定连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$.*

(i) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})\}\to\{\text{有限}\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\text{-集}\};$$

(ii) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\}\to\{\text{有限}\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})\text{-模}\}.$$

证明. (i) 根据定理2.2(i) 和命题4.18, 得到结论; (ii) 即为 (i) 赋予加法结构. □

4.4 Abel 群预层和层构成的范畴

固定概形 X, 可以看出 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 一定是 Abel 范畴, 它里面的正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等皆为正常的定义方法. 我们主要考虑的是满子范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 它是加性范畴, 我们将要证明它为 Abel 范畴 (其正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等和一般拓扑空间上类似, 皆为层化).

命题 4.20. *给定概形 X 和范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的列*

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0,$$

则下述命题等价:

(i) 列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 在 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内 (函子性的) 正合;

(ii) 列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 在 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内正合且 $\mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ 满足对任意的 $U \in X_{\text{ét}}$ 和 $s \in \mathscr{F}''(U)$, 存在 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ 使得 $s|_{U_i}$ 在 $\mathscr{F}(U_i) \to \mathscr{F}''(U_i)$ 的像内;

(iii) 对所有几何点 $\bar{x} \to X$, 都有 $0 \to \mathscr{F}'_{\bar{x}} \to \mathscr{F}_{\bar{x}} \to \mathscr{F}''_{\bar{x}} \to 0$ 正合.

证明. (ii) 推 (i), 平凡. (i) 推 (iii) 由于取茎是正合函子, 故也平凡.

(iii) 推 (ii), 先证明满射部分. 任取 $U \in X_{\text{ét}}$ 和几何点 $\bar{u} \to U$. 设 $\bar{x} : \bar{u} \to U \to X$ 也为几何点. 根据定义有 $\mathscr{F}_{\bar{u}} = \mathscr{F}_{\bar{x}}$, 故 $\mathscr{F}_{\bar{u}} \to \mathscr{F}''_{\bar{u}}$ 也是满射. 再由定义知道成立. 对于其他部分, 注意到 $s \in \mathscr{F}(U)$ 为零当且仅当 $s_{\bar{u}} = 0$ 即可, 这也是定义. □

推论 4.21. *给定概形 X, 则范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 范畴.*

4.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列

类似于复几何里的正合列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \to 0$, 我们有如下正合列 (以此取逆极限来模拟):

定理 4.22 (Kummer 正合列)**.** *给定概形 X 和正整数 n 使得 n 在 X 内可逆 (不被任何剩余类域的特征整除), 则有 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列*

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_{n,X} \to \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X} \to 0.$$

证明. 显然 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 为 $\mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X}$ 的核. 故只需要证明满射. 取 $U = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的平展 X-概形, 任取 $a \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{m,X})$, 根据假设知典范映射 $V = \operatorname{Spec} A[t]/(t^n - a) \to U$ 是平展映射. 注意到对应的环同态是有限自由的, 故忠实平坦, 于是是满射. 因此 $V \to U$ 是平展覆盖, 根据4.20即可得到结论. □

定理 4.23 (Artin-Schreier 列)**.** *给定概形 X 和素数 p 使得在 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ 内 $p = 0$, 则有 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列*

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X \to \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \to 0.$$

证明. 类似于 Kummer 正合列, 注意到此时 $\operatorname{Spec} A[t]/(t^p - t - a) \to \operatorname{Spec} A$ 是平展覆盖即可. □

4.6 拟凝聚层

定义 4.24. 考虑景 $X_{\text{ét}}$ 上的 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$-模 $\mathscr{F}$ 称之为拟凝聚的如果任取 $U \in X_{\text{ét}}$, 存在 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ 使得

$$\mathscr{F}|_{X_{\text{ét}}/U_i} \cong \mathrm{coker}\left(\bigoplus_{k\in K}\mathscr{O}_{X,\text{ét}/U_i} \to \bigoplus_{l\in L}\mathscr{O}_{X,\text{ét}/U_i}\right).$$

其中 $X_{\text{ét}}/U_i$ 是局部景, 其中的对象皆为 $V \to U_i$, 覆盖皆为 U_i-映射.

注 4.25. 这个在所有景上面都可以定义.

作为下降理论的应用, 我们有如下令人震惊的结论:

定理 4.26. *如下拟凝聚层范畴是范畴等价:*

$$\mathrm{Qcoh}(X_{\mathrm{Zar}}) \to \mathrm{Qcoh}(X_{\text{ét}}), \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\text{ét}}.$$

证明. 这个是下降理论的直接应用, 需要用到纤维范畴 QCOH 然后可以证明其为有效的 fpqc 下降, 但这个的证明非常复杂 (参考 [1] 定理 4.23). 我们推荐感兴趣的读者阅读 [9] 命题 4.3.15. □

注 4.27. 作为推广我们可以考虑一些特殊的景, 也满足类似结论. 见 *Tag 03OJ.*

5 层的一些函子

5.1 直像

定义 5.1. 考虑概形映射 $f : X \to Y$, 设 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$, 定义直像为

$$f_*\mathscr{P}(U \to Y) = \mathscr{P}(U \times_Y X \to X).$$

命题 5.2. *概形映射 $f : X \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.*

(i) 必然有 $f_*\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$;

(ii) 对于 $g : Y \to Z$, 我们有 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;

(iii) 若视作函子 $f_* : \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$, 则左正合.

证明. 此乃定义, 略去. □

命题 5.3. *考虑概形映射 $f : X \to Y$ 和几何点 $\bar{y} = \mathrm{Spec}\, k \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.*

(i) 若 f 是闭浸入, 则

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \begin{cases} \{*\} & \text{当} \quad \bar{y} \notin X \\ \mathscr{F}_{\bar{y}} & \text{当} \quad \bar{y} \in X \end{cases}$$

其中 $\{*\}$ 指单点集;

(ii) 若 f 是开浸入, 若 $\bar{y} \in X$, 则 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \mathscr{F}_{\bar{y}}$;

(iii) 如果 f 是有限态射, 则

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \prod_{\bar{x}:\mathrm{Spec}\, k \to X, f(\bar{x})=\bar{y}} \mathscr{F}_{\bar{x}}.$$

若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \bigoplus_{\bar{x}:\mathrm{Spec}\, k \to X, f(\bar{x})=\bar{y}} \mathscr{F}_{\bar{x}}$.

证明. (ii) 是平凡的;(iii) 颇为麻烦, 需要用到严格 Hensel 环的性质, 我们略去, 参考Tag 03QP.

(i) 当 $\bar{y} \notin X$, 这是显然的. 下面考虑 $\bar{y} \in X$ 的情况. 考虑两个事实:

事实 1. 对任意两个平展态射 $U, U' \to Y$, 设 $h : U_X \to U'_X$ 是 X-态射, 则存在 $a : W \to U, b : W \to U'$ 使得 $a_X : W_X \to U_X$ 是同构且 $h = b_X \circ (a_X)^{-1}$.

事实 1 的证明: 设 $M = U \times_Y U'$ 和图像 $\Gamma_h \subset M_X$. 注意到 Γ_h 是平展映射 $\mathrm{pr}_{1,X} : M_X \to U_X$ 一个截面的像, 故是开的. 则存在开子概形 $W \subset M$ 使得 $W \cap M_X = \Gamma_h$. 故取 $a = \mathrm{pr}_1|_W, b = \mathrm{pr}_2|_W$ 即可.

事实 2. 对平展态射 $V \to X$, 存在一族平展态射 $U_i \to Y$ 和态射 $U_{i,X} \to V$ 使得 $\{U_{i,X} \to V\}$ 是 V 的是 Zariski 覆盖.

事实 2 的证明: 不妨设 Y, V 皆为仿射的, 则化为以下简单的交换代数: 假设环 R 和理想 $I \subset R$, 设 $R/I \to S'$ 平展, 则存在平展同态 $R \to S$ 使得 $S' \cong S/IS$ 是 R/I-代数同构. 这是因为平展同态总可以写成 $S' = (R/I)[x_1, ..., x_n]/(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)$ 其中 $\overline{\Delta} = \det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$ 在 S' 里可逆. 只需要提升成某些 $f_1, ..., f_n$ 且设

$$S = R[x_1, ..., x_n, x_{n+1}]/(f_1, ..., f_n, x_{n+1}\Delta - 1),$$

其中 $\Delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 即可.

回到原结论. 注意到 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} \mathscr{F}(U_X)$ 且 $\mathscr{F}_{\bar{y}} = \varinjlim_{(V,\bar{v})} \mathscr{F}(V)$, 故 $\{(U, \bar{u})\}$ 在 $\{(V, \bar{v})\}$ 内共尾, 则得证. □

5.2 逆像

定义 5.4. *考虑概形映射 $f : X \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 定义逆像为*

$$f^{-1}\mathscr{F} = \left((U \to X) \mapsto \varinjlim_{U \to X \times_Y V} \mathscr{F}(V \to Y)\right)^{\sharp}.$$

命题 5.5. *考虑概形映射 $f : X \to Y$, 则*

(i) 有伴随函子 (f^{-1}, f_*);

(ii) 函子 $f^{-1} : \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和 $f^{-1} : \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 正合;

(iii) 对几何点 $\bar{x} \to X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 设 $\bar{y} = \ \to X \to Y$, 则 $(f^{-1}\mathscr{F})_{\bar{x}} \cong \mathscr{F}_{\bar{y}}$;

(iv) 对 $g : Y \to Z$, 有 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;

(v) 对平展映射 $V \to Y$, 有 $f^{-1}h_V = h_{X \times_Y V}$.

证明. (i)(ii) 略去.(iv) 和 (v) 由伴随性和 Yoneda 引理显然. 考虑 (iii), 注意到

$$\begin{aligned}(f^{-1}\mathscr{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(U,\bar{u})} (f^{-1}\mathscr{F})(U) \\ &= \varinjlim_{(U,\bar{u})} \varinjlim_{a:U \to X \times_Y V} \mathscr{F}(U) \\ &= \varinjlim_{(V, a\circ\bar{u})} \mathscr{F}(V) = \mathscr{F}_{\bar{y}}\end{aligned}$$

即可. □

命题 5.6 (基变换). 考虑纤维积

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

其中 f 有限, 则 $f'_* \circ (g')^{-1} = g^{-1} \circ f_*$.

证明. 只需验证茎即可. 注意到纤维积, 对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 考虑几何点 $\bar{y}' : \operatorname{Spec} k \to Y'$, 我们有

$$\begin{aligned} (f'_*(g')^{-1}(\mathscr{F}))_{\bar{y}'} &= \prod_{\bar{x}':\operatorname{Spec} k \to X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} ((g')^{-1}(\mathscr{F}))_{\bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x}':\operatorname{Spec} k \to X', f' \circ \bar{x}' = \bar{y}'} \mathscr{F}_{g' \circ \bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x}:\operatorname{Spec} k \to X, f \circ \bar{x} = g \circ \bar{y}'} \mathscr{F}_{\bar{x}} = (f_* \mathscr{F})_{g \circ \bar{y}'} = (g^{-1} f_* \mathscr{F})_{\bar{y}'} \end{aligned}$$

得到结论. □

5.3 零扩张函子 (下叹号函子)

定义 5.7. 考虑平展映射 $j : U \to X$, 定义 $j_! : \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 为

$$j_! \mathscr{F} = \left((V \mapsto X) \mapsto \bigoplus_{V \to U} \mathscr{F}(V \to U) \right)^{\sharp}.$$

命题 5.8. 对平展映射 $j : U \to X$, 有

(i) 有伴随函子 $(j_!, j^{-1})$;

(ii) 对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 和几何点 $\bar{x} : \operatorname{Spec} k \to X$ 我们有

$$(j_! \mathscr{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{\bar{u}:\operatorname{Spec} k \to U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathscr{F}_{\bar{u}},$$

特别的, 函子 $j_!$ 正合;

(iii) 若 j 有限平展, 则存在 $j_! \to j_*$ 使得对任何 $\mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 都同构;

(iv) 若 j 是开浸入, 则对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 有 $j^{-1} j_* \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F} \to j^{-1} j_! \mathscr{F}$ 是同构. 事实上 $j_! \mathscr{F}$ 是唯一一个使得限制在 U 上是 $\mathscr{F}$, 且在其他地方的茎是 0 的 *Abel* 群层.

证明. (i)(iv) 平凡, 略去.(iii) 只需要考虑平展局部, 用引理4.17(ii) 即可验证.

考虑 (ii), 映射为

$$\begin{aligned} (j_! \mathscr{F})_{\bar{x}} = \varinjlim_{(V, \bar{v})} (j_! \mathscr{F})(V) = \varinjlim_{(V, \bar{v})} \bigoplus_{\phi : V \to U} \mathscr{F}(\phi) \\ \to \bigoplus_{\bar{u}:\operatorname{Spec} k \to U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathscr{F}_{\bar{u}}. \end{aligned}$$

同构参考Tag 03S5. □

命题 5.9 (基变换)**.** *(i) 设 $f: Y \to X$ 是概形映射且 $j: V \to X$ 平展, 考虑纤维积*

$$\begin{tikzcd} Y \times_X V \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & V \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

则在 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层都有 $j'_! \circ (f')^{-1} = f^{-1} \circ j_!$;

(ii) 设 $f: X \to Y$ 是有限映射且 $j: V \to Y$ 开浸入, 且基变换之后 $g: U = X \times_Y V \to V$ 平展, 设 $j': U \to X$, 则在 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 内有 $f_* \circ j'_* = j_! \circ g_*$.

证明. (i) 考虑二者的右伴随函子, 然后因为直像和平展局部化交换即可得到结论;

(ii) 首先考虑 Y 的不在 U 内的几何点上的茎不难得知二者皆为零. 其次用命题5.8(iv) 和命题5.6, 得到同构

$$j^{-1} f_* j'_! \mathscr{F} = g_* (j')^{-1} j'_! \mathscr{F} = g_* \mathscr{F}.$$

再次用命题5.8(iv) 即可得到结论. □

命题 5.10. *对于概形 X 和闭子概形 $i: Z \to X$ 及其补 $j: U \to X$, 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有正合列*

$$0 \to j_! j^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to i_* i^{-1} \mathscr{F} \to 0.$$

证明. 分情况不难根据定义得到取茎之后正合, 然后用命题4.20即可. □

6 平展上同调的定义和基本性质

6.1 定义

引理 6.1. *对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 存在内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 使得有单射 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}$.*

证明. 任取 $x \in X$ 和在其上的几何点 $i_x : \bar{x} \to X$, 取内射 Abel 群满足 $\mathscr{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow I(x)$. 则 $\mathscr{I}(x) := i_{x,*} I(x)$ 是内射的, 故取 $\mathscr{I} = \prod_{x \in X} \mathscr{I}(x)$ 即可得到 $\mathscr{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} \mathscr{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow \mathscr{I}$. □

定义 6.2. *对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 不难得知截面函子 $\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$ 左正合. 由引理6.1知有内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$, 则定义 X 上 $\mathscr{F}$ 的平展上同调为*

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) := R^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathscr{F}) = H^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathscr{I}^*).$$

和我们之前定义的上同调理论类似, 我们也有如下基本结果:

命题 6.3. *(i) 满足 $H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$;*

(ii) 若 $\mathscr{I}$ 内射, 则当 $i > 0$ 时 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{I}) = 0$;

(iii) 短正合列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 会诱导长正合列

$$0 \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}') \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}'') \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}') \to \cdots.$$

注 6.4. *(a) 若* $g: U \to X$ *平展, 则* $g^{-1} \circ \Gamma(U, -) = \Gamma(U, -)$*, 故* $H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U) = H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F})$*;*

(b) 对于 $f: X \to Y$*, 因为有* $\mathscr{F} \to f_* f^{-1}\mathscr{F}$*, 则诱导* $R\Gamma(Y, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, f^{-1}\mathscr{F})$*, 故可以诱导映射* $H^i_{\text{ét}}(Y, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(X, f^{-1}\mathscr{F})$*.*

6.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

定义 6.5. *设* G *是拓扑群.*

(i) 一个 Abel 群 M*(赋予离散拓扑) 称为* G*-模, 如果有连续作用* $G \times M \to M$*;*

(ii) 设 Mod_G *是* G*-模构成的范畴. 根据Tag 04JF, 范畴* Mod_G *有足够内射对象. 考虑左正合函子*

$$\Gamma_G : \mathrm{Mod}_G \to \mathrm{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群 G *的 (连续) 上同调为* $H^i(G, M) = R^i\Gamma_G(M)$*. 若* G *是 Galois 群则成为 Galois 上同调.*

命题 6.6. *对于群* G*, 考虑群环* $\mathbb{Z}[G]$*, 那么有自然的范畴等价* $\mathrm{Mod}_G \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$*. 设* $\mathbb{Z}$ *可以经过平凡* G *作用来作为* $\mathbb{Z}[G]$ *模, 则* $H^i(G, M) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$*.*

证明. 近乎平凡, 略去. □

定理 6.7 (Tate)**.** *设* M *是拓扑群并且赋予连续* G*-作用. 考虑复形*

$$C^*_{\mathrm{cont}}(G, M) : M \to \mathrm{Maps}_{\mathrm{cont}}(G, M) \to \mathrm{Maps}_{\mathrm{cont}}(G \times G, M) \to \cdots$$

其中边界算子为当 $n = 0$*, 则* $m \mapsto (g \mapsto g(m) - m)$*; 当* $n > 0$ *时定义为*

$$\begin{aligned} d(f)(g_1, ..., g_{n+1}) = g_1(f(g_2, ..., g_{n+1})) \\ + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f(g_1, ..., g_j g_{j+1}, ..., g_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(g_1, ..., g_n). \end{aligned}$$

这样定义 Tate 连续上同调为 $H^i_{\mathrm{cont}}(G, M) := H^i(C^*_{\mathrm{cont}}(G, M))$*. 则对于* $M \in \mathrm{Mod}_G$*, 存在典范映射* $H^i(G, M) \to H^i_{\mathrm{cont}}(G, M)$*. 并且当* G *是离散群或者射有限群, 则为同构* $H^i(G, M) \cong H^i_{\mathrm{cont}}(G, M)$*.*

证明. 映射 $H^i(G, M) \to H^i_{\mathrm{cont}}(G, M)$ 通过万有 δ-函子不难诱导. 证明见 [8] 第二章. □

6.3 点的上同调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上同调也是很复杂的.

引理 6.8. *设* $x = \mathrm{Spec}\, k$*, 固定几何点* $\bar{x} = \mathrm{Spec}\, \Omega$*. 取* $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(x_{\text{ét}})$*, 则*

$$\Gamma(x, \mathscr{F}) \cong (\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}.$$

证明. 根据命题4.18和命题4.2, 我们用 Yoneda 引理有

$$\Gamma(x,\mathscr{F})=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})}(h_x,\mathscr{F})=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)-\text{集}}(\{*\},\mathscr{F}_{\bar{x}})=(\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$$

得到结论. □

定理 6.9. *设* $x=\operatorname{Spec}k,\bar{x}=\operatorname{Spec}k^{\mathrm{sep}}$ *和* $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(x_{\text{ét}})$, *则对任意* $i\geq 0$,

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^i(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),\mathscr{F}_{\bar{x}}).$$

证明. 根据引理, 我们得知 $\Gamma(x,\mathscr{F})=\Gamma_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}(\mathscr{F}_{\bar{x}}):=(\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$, 故我们有

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=R^i\Gamma(x,\mathscr{F})=R^i\Gamma_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}(\mathscr{F}_{\bar{x}})=H^i(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),\mathscr{F}_{\bar{x}})$$

即可得到结论. □

注意到当 $x=\bar{x}$ 且当 $i>0$ 时, 就有 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=0$, 这和几何上是一样的.

6.4 严格 Hensel 局部环的上同调

我们时常会使用严格 Hensel 局部环的谱的上同调消失的结论如下:

定理 6.10. *设* R *是严格 Hensel 局部环, 设* $X=\operatorname{Spec}R$ *和闭点* $\bar{x}$. *则对任何* $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ *都有* $\Gamma(X,\mathscr{F})=\mathscr{F}_{\bar{x}}$. *特别的, 函子* $\Gamma(X,-)$ *正合, 故对任何* $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ *和* $i>0$ *都有* $H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=0$.

证明. 设平展邻域 $(U,\bar{u})$, 取 $\bar{u}$ 的的仿射邻域 $\operatorname{Spec}A$, 故 $R\to A$ 平展且 $\kappa(\bar{x})=\kappa(\bar{u})$. 由命题4.14(ii) 得知作为 R-代数有 $A\cong R\times A'$ 且和 $\kappa(\bar{x})=\kappa(\bar{u})$ 契合. 故我们有截面 $X\to\operatorname{Spec}A$. 因此平展邻域 $(X,\bar{x})$ 是共尾的, 故 $\Gamma(X,\mathscr{F})=\mathscr{F}_{\bar{x}}$. 其他结论就平凡了. □

6.5 平展上同调和极限一瞥

我们这里只给出叙述, 不给出证明, 详细细节参考Tag 03Q4.

定义 6.11. *设* I *是预序集, 考虑逆系统* $(X_i,f_{i'i})_I$. *一个在其上定义的层系统* $(\mathscr{F}_i,\varphi_{i'i})$ *为满足*

(i) 层 $\mathscr{F}_i\in\mathrm{Sh}(X_{i,\text{ét}})$;
(ii) 对 $i'\geq i$, *有* $\mathrm{Sh}(X_{i,\text{ét}})$ *内的映射* $\varphi_{i'i}:f^{-1}_{i'i}\mathscr{F}_i\to\mathscr{F}_{i'}$
使得 $\varphi_{i''i}=\varphi_{i''i'}\circ f^{-1}_{i''i'}\varphi_{i'i}$.

定理 6.12 (Tag 09YQ)**.** *考虑定向逆系统* $(X_i,f_{i'i})_I$ *使得* X_i *拟紧拟分离且* $f_{i'i}$ *仿射. 对于其上定义的层系统* $(\mathscr{F}_i,\varphi_{i'i})$, *假设* $f_i:X=\varprojlim X_i\to X_i$ *且* $\mathscr{F}:=\varinjlim f_i^{-1}\mathscr{F}_i$, *则有*

$$\varinjlim H^i_{\text{ét}}(X_i,\mathscr{F}_i)\cong H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

6.6 支撑在闭集的上同调及性质

首先, 不难证明如下事实: 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 取截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 则存在开集 $W \subset U$ 使得

(i) W 是 U 内最大的开集使得 $s|_W = 0$;

(ii) 对任何几何点 $\bar{u} \to U$, 设 $\bar{s} = (U \to S) \circ \bar{u}$, 则

$$0 = (U, \bar{u}, s) \in \mathscr{F}_{\bar{s}} \Leftrightarrow \bar{u} \in W.$$

读者可以自己证明, 如果想当懒狗, 参考Tag 04FR.

定义 6.13. 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$.

(i) 层 $\mathscr{F}$ 的支集为点集 $\mathrm{supp}(\mathscr{F}) \ni s$ 使得对所有 (一些)s 上的几何点 $\bar{s}$ 都有 $\mathscr{F}_{\bar{s}} \neq 0$;

(ii) 截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 其支集 $\mathrm{supp}(s)$ 定义为闭集 $U \backslash W$.

注 6.14. *层的支集不一定是闭的, 但如果取值是环, 那一定是闭的, 因为这时相当于单位截面的支集.*

定义 6.15. *对概形 X, 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 定义*

$$\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) = \{s \in \mathscr{F}(X) : \mathrm{supp}(x) \subset Z\}.$$

定义支撑在 Z 的平展上同调为

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) := R^i\Gamma_Z(X, \mathscr{F}).$$

命题 6.16. *对概形 X, 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 设 $U = X \backslash Z$, 则有好三角:*

$$R\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(U, \mathscr{F}) \to R\Gamma_Z(X, \mathscr{F})[1]$$

进而诱导出正合列:

$$\cdots \to H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \to H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to \cdots.$$

证明. 任取内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们断言 $\mathscr{I}(X) \to \mathscr{I}(U)$ 是满的. 设 $j : U \to X$, 注意到对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有

$$\mathrm{Hom}(j_!\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathscr{F}|_U) = \Gamma(U, \mathscr{F}),$$

因为 $\mathscr{I}$ 是内射的, 故只需证明 $j_!\underline{\mathbb{Z}}_U \to \underline{\mathbb{Z}}_X$ 是单射. 根据层化函子是正合的, 只需证明对平展映射 $V \to X$, 典范映射

$$\bigoplus_{V \to U} \underline{\mathbb{Z}}(U) \to \bigoplus_{V \to X} \underline{\mathbb{Z}}(U)$$

是单射, 而这是显然的, 故断言成立.

不难发现上述满射的核为 $\Gamma_Z(X, \mathscr{I})$, 因此立即得到好三角

$$R\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(U, \mathscr{F}) \to R\Gamma_Z(X, \mathscr{F})[1].$$

而长正合列因此是显然的. $\square$

定理 6.17 (切除)**.** 设 $f: X' \to X$ 平展和闭子概形 $Z' \subset X'$ 使得

(i) 设 $Z := f(Z')$ 是闭集且 $f|_{Z'}: Z' \cong Z$ 同构;

(ii) 有 $f(X' \backslash Z') \subset X \backslash Z$.

则对任意的 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有对任意 i 的同构

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^i_{Z',\text{ét}}(X', f^{-1}\mathscr{F}).$$

证明. 设 $U' = X' \backslash Z', U = X \backslash Z$, 考虑

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "\cong"] \\
U \arrow[r, "j"] & X & Z \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

得到

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Gamma(X, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U, \mathscr{F}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(X', f^{-1}\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(U', f^{-1}\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

其中虚线为诱导出来的映射. 由于 f^{-1} 正合且和内射对象交换, 则只需证明诱导的

$$g: \Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F})$$

是同构. 注意到若 $s \in \ker g$, 则 s 在 $\Gamma(X', \mathscr{F})$ 和 $\Gamma(U, \mathscr{F})$ 是 0. 而 $\{X', U\}$ 是平展覆盖, 则 $s = 0$, 故是单射. 另一方面, 取 $s' \in \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F}) \subset \Gamma(X', f^{-1}\mathscr{F})$. 注意到 $s', 0$ 在 U' 是 0; 另外 s' 限制 $X' \times_X X' \rightrightarrows X'$ 都是相等的, 因此可以粘合成 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$, 故满射. □

推论 6.18. 对概形 X 和闭点 $x \in X$, 任取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有

$$H^i_{x,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^i_{x,\text{ét}}(\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,x}, \mathscr{F}).$$

证明. 用定理6.17和定理6.12即可. □

7 Čech 上同调和挠子

7.1 Čech 上同调

定义 7.1. 考虑概形 X 和一族平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i \in I}$, 考虑 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 定义

$$\check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) = \prod_{(i_0, \dots, i_r) \in I^{r+1}} \mathscr{P}(U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_r})$$

和映射 $d^r: \check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \to \check{C}^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$ 为

$$s = (s_{i_0, \dots, i_r}) \mapsto \left(\sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j (s_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{r+1}})|_{U_{i_0, \dots, i_{r+1}}} \right)_{i_0, \dots, i_{r+1}}.$$

复形 $\check{C}^*(\mathfrak{U},\mathscr{P})$ 称为 *Čech* 复形, 其上同调

$$\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{P}) := H^i(\check{C}^*(\mathfrak{U},\mathscr{P}))$$

称为 $\mathscr{P}$ 关于覆盖 $\mathfrak{U}$ 的 *Čech* 上同调.

注 7.2. 不难注意到 *Čech* 复形可以重新写成:

$$\check{C}^*(\mathfrak{U},\mathscr{P}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})}\left(\left(\bigoplus_{i_0\in I}\underline{\mathbb{Z}}_{U_{i_0}} \leftarrow \bigoplus_{(i_0,i_1)\in I^2}\underline{\mathbb{Z}}_{U_{i_0}\times_X U_{i_1}} \leftarrow \cdots\right), \mathscr{P}\right).$$

而且直接 *(*大量*)* 计算会得到 Hom 里面的复形 $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{U}}^*$ 是正合的 *(*参考 *Tag 03AT)*.

例 7.1. 考虑覆盖 $\mathfrak{U}=\{Y\to X\}$ 使得 $Y\to X$ 是 *Galois* 覆叠 G. 对 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 假设其吧无交并映成积, 应用定理*6.7*则有 $\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{P})\cong H^r(G,\mathscr{P}(Y))$.

命题 7.3. 给定概形 X 和平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$.

(i) 对任何内射对象 $\mathscr{I}\in\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 对 $i>0$ 我们有 $\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{I})=0$;

(ii) 在 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内 $\check{H}^i(\mathfrak{U},-)$ 是 $\check{H}^0(\mathfrak{U},-)$ 的导出函子;

(iii) 若 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})=\Gamma(X,\mathscr{F})$.

证明. (ii) 运用万有 δ 函子理论即可;(iii) 就是层的条件之一;(i) 注意到

$$\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{I}) = H^i(\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{U}}^*,\mathscr{I}))$$

且 $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{U}}^*$ 正合和 $\mathscr{I}$ 内射即可. □

定义 7.4. 考虑概形 X 和一族平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$. 这个覆叠的一个加细指覆盖 $\mathfrak{V}=\{V_j\to X\}_{j\in J}$ 满足对任意的 $V_j\to X$ 都存在分解 $V_j\to U_{\alpha(j)}\to X$. 这样会自然诱导一个 $\alpha^*:\check{C}^*(\mathfrak{U},\mathscr{P})\to\check{C}^*(\mathfrak{V},\mathscr{P})$ 为 $(\alpha^r s)_{j_0,\ldots,j_r}=s_{\alpha(j_0),\ldots,\alpha(j_r)}|_{V_{j_0,\ldots,j_r}}$. 因此诱导 $\rho(\mathfrak{V},\mathfrak{U}):\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{P})\to\check{H}^i(\mathfrak{V},\mathscr{P})$. 故而可以定义 *Čech* 上同调为

$$\check{H}^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{P}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}}\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{P}).$$

命题 7.5. 给定概形 X.

(i) 对任何内射对象 $\mathscr{I}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 对 $i>0$ 我们有 $\check{H}^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{I})=0$;

(ii) 若 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $\check{H}^0_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=\Gamma(X,\mathscr{F})$.

证明. (i) 注意到遗忘函子保持内射性质, 于是在 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内也满足; (ii) 由于对所有覆盖都满足, 因此余极限也满足. □

7.2 Čech-导出谱序列

类似于 Zariski 上同调, 平展上同调也有类似的 Čech-导出的比较结论.

引理 7.6. 考虑概形 X 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 考虑预层 $\underline{H}^i(\mathscr{F}):U\mapsto H^i_{\text{ét}}(U,\mathscr{F}|_U)$. 考虑遗忘函子 $i:\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\to\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 我们有 $\underline{H}^r(-)=R^r i(-)$. 特别的 $\underline{H}^i(\mathscr{F})^\sharp=0$.

证明. 考虑 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{i} \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{\sharp} \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则取内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$ 我们有 $\underline{H}^r(\mathscr{F}) = H^r(i(\mathscr{I}^*))$. 因此 $\underline{H}^r(-) = R^r i(-)$. □

推论 7.7. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 对 $r > 0$, 任取 $s \in H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 都存在平展覆盖 $\{U_i \to X\}$ 使得 s 在每个 $H^r_{\text{ét}}(U_i, \mathscr{F}|_{U_i})$ 内均为 0.*

证明. 这是引理7.6的直接推论. □

定理 7.8. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 考虑预层 $\underline{H}^i(\mathscr{F}) : U \mapsto H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U)$, 则有谱序列*

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

证明. 对 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{i} \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{\check{H}^0_{\text{ét}}(X,-)} \mathrm{AbGrps}$, 因为 $\check{H}^0_{\text{ét}}(X, -) \circ i = \Gamma(X, -)$, 引用上述引理和 Grothendieck 谱序列, 我们得到结论. □

作为应用, 我们有如下比较结果:

命题 7.9. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 对于 $r = 0, 1$, 我们有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$.*

证明. 考虑谱序列 $E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 根据推论7.7, 我们得知对 $s > 0$ 有 $E_2^{0,q} = 0$. 观察谱序列第二页:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \bullet & \bullet \\
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \bullet & \bullet \\
0 & 0 & E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & \bullet
\end{tikzcd}$$

即可得知对于 $r = 0, 1$, 有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. □

注 7.10. *如果 X 拟紧且对任何有限子集都包含在某个仿射开集内, 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和任何 r, 我们都有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 参考 [6] 内的 III.2.17.*

7.3 应用 I——Mayer-Vietoris 列

定理 7.11 (Mayer-Vietoris)**.** *设概形 $X = U \cup V$ 为开集的并, 给定 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们有正合列:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^s_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \arrow[r] & H^s_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \oplus H^s_{\text{ét}}(V, \mathscr{F}) \arrow[dll, rounded corners] \\
H^s_{\text{ét}}(U \cap V, \mathscr{F}) \arrow[r] & H^{s+1}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

证明. 设覆盖为 $\mathfrak{U}=\{U\to X, V\to X\}$. 根据 Čech 上同调定义, 我们有如下正合列:

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U},\underline{H}^s(\mathscr{F})) \to H^s_{\text{ét}}(U,\mathscr{F})\oplus H^s_{\text{ét}}(V,\mathscr{F}) \to H^s_{\text{ét}}(U\cap V,\mathscr{F}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U},\underline{H}^s(\mathscr{F})) \longrightarrow 0.$$

另一方面, 考虑谱序列 $E_2^{p,q}=\check{H}^p_{\text{ét}}(X,\underline{H}^q(\mathscr{F}))\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$. 注意到当 $r>1$ 时有 $\check{H}^r(\mathfrak{U},\underline{H}^s(\mathscr{F}))=0$, 运用谱序列结论 [4] 命题 2.2.4 我们有如下正合列

$$0\to\check{H}^1(\mathfrak{U},\underline{H}^s(\mathscr{F}))\to H^{s+1}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})\to\check{H}^0(\mathfrak{U},\underline{H}^{s+1}(\mathscr{F}))\to 0.$$

综合两个正合列即可得到结论. □

注 7.12. *直接证明参考Tag 0A50. 还有相对版本的 Mayer-Vietoris 列, 我们不再赘述, 见Tag 0EYK.*

7.4 应用 II——拟凝聚层的上同调

接下来介绍一个意料之中的结果.

引理 7.13. *设 $X=\operatorname{Spec}A$ 仿射, 取拟凝聚层 $\mathscr{F}^{\text{ét}}$, 则对 $i>0$ 都有 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}})=0$.*

证明. 我们用对 i 的归纳法.

先考虑 $i=1$. 取 $\xi\in H^1_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}})$. 将覆盖加细可以假设 U_i 仿射. 根据命题7.9得到其对应 $\eta'\in\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}^{\text{ét}})$. 设 $\mathfrak{V}=\{\sqcup_i U_i\to X\}$ 不难看出 $\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}^{\text{ét}})=\check{H}^1(\mathfrak{V},\mathscr{F}^{\text{ét}})$. 假设 $\mathfrak{V}=\{\operatorname{Spec}B\to\operatorname{Spec}A\}$, 则复形 $\check{C}^*(\mathfrak{V},\mathscr{F}^{\text{ét}})$ 为

$$B\otimes_A M\to B\otimes_A B\otimes_A M\to B\otimes_A B\otimes_A B\otimes_A M\to\cdots.$$

故成立.

对于 $i>1$, 取 $\xi\in H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}})$, 由推论7.7存在平展覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}$ 使得 $\eta|_{U_i}=0$. 将覆盖加细可以假设 U_i 仿射. 注意到 $U_{i_0}\times_X U_{i_1}\times_X\cdots\times_X U_{i_p}$ 皆为仿射, 考虑谱序列7.8

$$E_2^{p,q}=\check{H}^p_{\text{ét}}(X,\underline{H}^q(\mathscr{F}))\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

根据归纳假设知道对 $0<q<p$ 都有 $E_2^{p,q}=0$, 我们可以看出 ξ 必然来自 $\xi'\in\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{F}^{\text{ét}})$. 继续 $i=1$ 情况的证明即可. □

定理 7.14 (平展-Zariski 的拟凝聚上同调比较定理)**.** *对概形 X 和拟凝聚层 $\mathscr{F}$, 对任何 $i\geq 0$ 我们都有*

$$H^i(X,\mathscr{F})\cong H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}}).$$

证明. 我们只考虑概形 X 分离的情况 (一般情况可以由Tag 03F3和 Tag 03DW得到). 取 Zariski 开覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}$, 根据分离性,$U_{i_0}\times_X U_{i_1}\times_X\cdots\times_X U_{i_p}$ 皆为仿射. 则谱序列7.8除了第一行全是零. 故我们有

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}^{\text{ét}})=\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{F}^{\text{ét}})=\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathscr{F})=H^i(X,\mathscr{F})$$

即可得到结论. □

定理 7.15 (拟凝聚层). *计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调.*

证明. 运用定理4.26和定理7.14即可. □

因此, 我们只需要计算不是拟凝聚层的平展上同调即可. 比如挠层, 这是我们一大目标之一.

7.5 挠子理论一瞥和应用

类似于概型理论里的挠子理论, 我们可以将其推广至小平展景.

定义 7.16. *对概形 X 和平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i\in I}$. 取取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$, 设 $U_{i_0\cdots i_p} = U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$. 我们定义取值在 $\mathscr{G}$ 的 1-余链为 $g = (g_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ 使得 $g_{ij} \in \mathscr{G}(U_{ij})$ 满足*

$$g_{ij}|_{U_{ijk}} g_{jk}|_{U_{ijk}} = g_{ik}|_{U_{ijk}}.$$

两个 1-余链 g, g', 定义 $g \sim g'$ 使得存在 $(h_i)_{i\in I}$ 其中 $h_i \in \mathscr{G}(U_i)$ 满足

$$g'_{ij} = h_i|_{U_{ij}} g_{ij} (h_j|_{U_{ij}})^{-1}.$$

定义 $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) := \{g\}/\sim$.

注 7.17. *根据构造, 对于短正合列 $1 \to \mathscr{G}' \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}'' \to 1$, 我们有*

$$1 \to \Gamma(X, \mathscr{G}') \to \Gamma(X, \mathscr{G}) \to \Gamma(X, \mathscr{G}'') \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}') \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}'').$$

定义 7.18. *对概形 X 和取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$. 设 $\mathscr{S} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 存在右 $\mathscr{G}$-作用. 我们称 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{G}$-挠子如果满足*

(i) 存在平展覆盖 $\{U_i \to X\}$ 使得 $\mathscr{S}(U_i) \neq \emptyset$;

(ii) 对任意的平展映射 $U \to X$ 和 $s \in \Gamma(U, \mathscr{S})$, 映射 $\mathscr{G}|_U \to \mathscr{S}|_U, g \mapsto sg$ 是同构.

我们称 $\mathscr{S}$ 被 $\{U_i \to X\}$ 平凡化. 如果 $\mathscr{S}(X) \neq \emptyset$ 我们称 $\mathscr{S}$ 是平凡 $\mathscr{G}$-挠子.

这两个概念出现不是偶然, 事实上我们有如下结论:

定理 7.19. *对概形 X 和取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$. 我们有双射*

$$\{\text{被}\mathfrak{U}\text{平凡化的}\mathscr{G}\text{-挠子}\}/\cong \longleftrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}).$$

证明. 我们阐述映射如何诱导. 给定被 $\mathfrak{U}$ 平凡化的 $\mathscr{G}$-挠子 $\mathscr{S}$. 对 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i\in I}$, 给定 $s_i \in \mathscr{S}(U_i)$, 由于作用单可迁, 存在 $g_{ij} \in \mathscr{G}(U_{ij})$ 使得 $(s_i|_{U_{ij}})g_{ij} = s_j|_{U_{ij}}$. 则得到 $g = (g_{ij})_{I^2}$. 对另一组 s'_i, 我们可以有 $s'_i = s_i h_i$, 故会得到 $g \sim g'$, 因此良定义. 有关这个证明因为没什么意思所以我们略去, 参考 [7] 命题 11.1. □

注 7.20. *如果 G 是有限常值群层且 X 连通, 则*

$$\{G\text{-挠子}\}/\cong = \{\textit{Galois 群为}G\textit{的}X\textit{的 Galois 覆盖}\} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}), G).$$

定理 7.21 (向量丛和挠子)**.** *对概形 X 和秩 n 局部自由模构成的群 $\mathrm{Vect}^n_{\mathrm{Zar}}(X)$, 我们有*

$$\mathrm{Vect}^n_{\mathrm{Zar}}(X) \cong \check{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathrm{GL}_{n,X}) \cong \check{H}^1_{\mathrm{fppf}}(X, \mathrm{GL}_{n,X}) \cong \check{H}^1_{\text{ét}}(X, \mathrm{GL}_{n,X}).$$

证明. 忽略, 参考 [7] 定理 11.4. □

推论 7.22. *我们有*

$$H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{m,X}) \cong \mathrm{Pic}(X).$$

证明. 注意到 $\mathbb{G}_{m,X}$ 交换, 根据命题7.9和定理7.21即得到结果. □

推论 7.23 (Hilbert 定理 90)**.** *对于有限 Galois 扩张 L/k, 有 $H^1(\mathrm{Gal}(L/k), L^*) = 0$.*

证明. 注意到

$$H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), (k^{\mathrm{sep}})^*) = \varinjlim_{\text{有限 Galois 覆盖}L/k} H^1(\mathrm{Gal}(L/k), L^*)$$

其中后者是 $L \subset L'$ 诱导 $H^1(\mathrm{Gal}(L/k), L^*) \hookrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(L'/k), (L')^*)$. 根据推论7.22和定理6.9得到当 $X = \mathrm{Spec}\, k$ 有 $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{m,X}) \cong H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), (k^{\mathrm{sep}})^*)$ 且

$$H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{m,X}) \cong \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\, k) = 0$$

即可得到结论. □

8 高阶直像

8.1 基础性质

定义 8.1. *对概形态射 $f : X \to Y$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 因为 f_* 左正合, 故可以得到高阶直像 $R^i f_* \mathscr{F}$.*

命题 8.2. *对概形态射 $f : X \to Y$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有*

$$R^i f_* \mathscr{F} = \left(U \mapsto H^i_{\text{ét}}(U \times_Y X, \mathscr{F})\right)^\sharp.$$

证明. 定义函子 $f_*^{\mathrm{pre}} : \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{PreAb}(Y_{\text{ét}})$ 为 $\mathscr{P} \mapsto (U \mapsto \Gamma(U \times_Y X, \mathscr{P}))$. 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{f_*^{\mathrm{pre}}} & \mathrm{PreAb}(Y_{\text{ét}}) \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \sharp} \\ \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}}) \end{array}$$

由于 $\sharp, f_*^{\mathrm{pre}}$ 正合, 取内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$ 得到

$$R^r f_* \mathscr{F} = H^i(f_* \mathscr{I}^*) = H^r(\sharp \circ f_*^{\mathrm{pre}} \circ i \mathscr{I}^*) = (f_*^{\mathrm{pre}} H^r(i \mathscr{I}^*))^\sharp = (f_*^{\mathrm{pre}} \underline{H}^r(\mathscr{F}))^\sharp$$

即可. □

推论 8.3. 对于几何点 $\bar{y}$, 我们有

$$(R^i f_* \mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} H^i_{\text{ét}}(U \times_Y X, \mathscr{F}).$$

推论 8.4. 如果 f 拟紧拟分离, 我们有

$$(R^i f_* \mathscr{F})_{\bar{y}} = H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y} \times_Y X, \mathscr{F}).$$

证明. 根据定义, 上述命题还有定理6.12即可得到结论 (这个在导出范畴内也对, 参考Tag 03Q7). □

例 8.1. 参考 *[7] 定理 12.4*, 如果 X 是正规整概形, 考虑一般点 $f : \eta \to X$, 则有 $(R^i f_* \mathscr{F})_\eta = H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \operatorname{Frac} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,x} \times_Y X, \mathscr{F})$.

推论 8.5. 如果 $f : X \to Y$ 是有限映射, 则对 $\mathscr{F} \in \operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有对于所有 $i > 0$ 有 $R^i f_* \mathscr{F} = 0$.

证明. 这时我们有

$$(R^i f_* \mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y} \times_Y X, \mathscr{F}).$$

由于 f 有限, 那么 $\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y} \times_Y X$ 在 $\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}$ 上有限. 故 $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y} \times_Y X$. 根据命题4.14(i) 得到 $A \cong A_1 \times \cdots \times A_r$ 为 Hensel 局部有限 $\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}$-代数. 故而 A_i 也是严格 Hensel 局部环. 此时 $\operatorname{Spec} A = \coprod_{i=1}^r \operatorname{Spec} A_i$, 运用定理6.10得到对 $i > 0$ 有 $(R^i f_* \mathscr{F})_{\bar{y}} = 0$. □

8.2 Leray 谱序列

定理 8.6 (Leray 谱序列)**.** 对概形态射 $f : X \to Y$ 和 $\mathscr{F} \in \operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(Y, R^q f_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

证明. 注意到 $\Gamma(X, -) \circ f_* = \Gamma(Y, -)$, 由于 f_* 保持内射, 根据 Grothendieck 谱序列得到

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(Y, R^q f_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$$

即可. □

9 曲线的上同调 I——基础结果

我们已经知道, 计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调, 因此只需要考虑不是拟凝聚的情况. 眼下我们只能解决最简单的情况——代数闭域上光滑曲线的上同调, 我们主要关心的是它上面挠层的上同调. 本节我们讨论挠层里的基石——$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-系数的上同调, 求出这个我们根据有限生成 Abel 群就可以得到常值层的上同调, 之后的内容在后续章节阐述.

9.1 Brauer 群和 C_r 域一瞥

定义 9.1. *考虑所有域 k 上的 (有限维) 中心单代数构成的集合 CSA_k, 定义等价关系为 $A \sim B$ 当且仅当存在中心除环 D 使得 $A \cong \mathrm{Mat}_m(D), B \cong \mathrm{Mat}_n(D)$. 定义 Brauer 群为 $\mathrm{Br}(k) := \mathrm{CSA}_k / \sim$.*

注 9.2. 由定义,$\mathrm{Mat}_n(D) \sim D$.

事实上根据 Wedderburn 定理, 域 k 上任何中心单代数都形如 $\mathrm{Mat}_n(D)$. 也就是说,$\mathrm{Br}(k)$ 给出了 k 上中心除环的分类! 结合代数理论告诉我们, 如果 A 是中心单代数, 那么 $A \otimes_k k^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_n(k^{\mathrm{sep}})$(参考 Tag 0753). 也就是说, 中心除环平展局部地是局部环, 而这一点能让我们使用 Galois 下降.

此外, 我们还能在一般的概形上定义中心单代数, 也就是所谓的 Azumaya 代数. 伽罗瓦上同调告诉我们 $\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), (k^{\mathrm{sep}})^*)$, 根据定理6.9, 我们有 $\mathrm{Br}(k) = H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{G}_m)$, 于是我们可以通过这个来定义一般概形的 Brauer 群.

定义 9.3. *域 K 称之为 C_r 的, 如果对任何 $0 < d^r < n$ 和任何 d 次齐次多项式 $f \in K[T_1, ..., T_n]$, 都存在不全是零的 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ 使得 $f(\alpha) = 0$.*

命题 9.4. *若 K 是 C_1 的, 则 $\mathrm{Br}(K) = 0$.*

证明. 不然, 考虑 K 上非平凡的有限维除环 D, 则 $D \otimes_K K^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_d(K^{\mathrm{sep}})$. 考虑行列式映射 $\det : D \otimes_K K^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_d(K^{\mathrm{sep}}) \to K^{\mathrm{sep}}$. 取 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$-不变元得到映射 $N : D \to K$. 因为 K 是 C_1 的, 若 $d > 1$, 则存在非零 $x \in D$ 使得 $N(x) = 0$. 这会推出 x 不可逆, 这不可能! □

定理 9.5 (Tsen 定理)**.** *代数闭域 k 上的 r 维代数簇的函数域是 C_r 的.*

证明. □

Tsen 定理告诉我们为什么 C_r 域的条件如此奇怪. 事实上我们还会使用 Serre 的如下定理:

定理 9.6 (Serre)**.** *假设对于 K, 若对所有的有限扩张 K'/K 都有 $\mathrm{Br}(K') = 0$, 则对所有 $q \geq 1$ 都有*

$$H^q(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K), (K^{\mathrm{sep}})^*) = 0.$$

证明. 参考Tag 03R8. □

9.2 $\mathbb{G}_{m,X}$ 的上同调

定理 9.7 (基本正合列)**.** *设 X 是整正规概形, 设一般点嵌入为 $g : \eta \to X$ 和余一维点的嵌入 $i_z : z \to X$, 则有正合列:*

$$0 \to \mathbb{G}_{m,X} \to g_* \mathbb{G}_{m,\eta} \to \bigoplus_{\mathrm{codim}(z)=1} i_{z,*}\mathbb{Z}.$$

如果 X 光滑, 则也右正合, 进而正合.

证明. 取平展映射 $\phi: U \to X$, 不妨设 $U = \operatorname{Spec} A$ 连通仿射. 则根据正规性, 这个列限制在 U_{Zar} 上正合:

$$0 \to A^* \to K^* \xrightarrow{\oplus v_{\mathfrak{p}}} \bigoplus_{\operatorname{ht}(\mathfrak{p})=1} \mathbb{Z}.$$

故我们得到正合列

$$0 \to \mathbb{G}_{m,X} \to g_* \mathbb{G}_{m,\eta} \to \bigoplus_{\operatorname{codim}(z)=1} i_{z,*}\mathbb{Z}.$$

当 X 光滑, 因为此时 Weil 除子和 Cartier 除子重合, 因此局部主, 故而右正合. □

引理 9.8. 设 k 是代数闭域且 K/k 是超越度为 1 的域扩张, 则对 $r \geq 1$ 有

$$H^r_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} K, \mathbb{G}_m) = 0.$$

证明. 根据定理6.9, 只需考虑 $H^q(\operatorname{Gal}(K^{\text{sep}}/K), (K^{\text{sep}})^*)$. 再根据定理9.6 我们只需证明对所有的有限扩张 K'/K 都有 $\operatorname{Br}(K') = 0$. 设 $K' = \varinjlim K''$ 为在 k 上超越度为 1 的有限生成扩张, 故 $\operatorname{Br}(K') = \varinjlim \operatorname{Br}(K'')$. 于是只需考虑 k 上超越度为 1 的有限生成扩张. 根据 Tsen 定理9.5, 我们得知这样的域都是 C_1 的, 再根据命题9.4即可得到结论. □

定理 9.9. 设 X 是代数闭域 k 上的光滑射影曲线, 则

$$H^q_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{m,X}) = \begin{cases} \Gamma(X, \mathscr{O}_X)^* & q = 0, \\ \operatorname{Pic}(X) & q = 1, \\ 0 & q \geq 2. \end{cases}$$

证明. 根据推论7.22, 只需要考虑 $q \geq 2$ 的情况.

- **步骤 1.** 对任何 $q \geq 1$, 考虑一般点嵌入 $j: \eta \to X$, 则 $R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta} = 0$.

  考虑茎即可. 考虑闭点 $\bar{x} \to X$, 取仿射邻域 $\operatorname{Spec} A$, 设 $K = \operatorname{Frac}(A)$, 则

$$(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}}) \times_X \eta = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}} \otimes_A K),$$

其中后者是 DVR 的局部化. 由于现在极大理想生成元可逆, 故

$$\mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}} \otimes_A K = \operatorname{Frac}(\mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}}) =: K^{\text{sh}}_{\bar{x}}.$$

因此 $(R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{x}} = H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} K^{\text{sh}}_{\bar{x}}, \mathbb{G}_m)$. 根据引理9.8 得到结论.

  若一般点, 考虑几何点 $\bar{\eta}$, 则 $\mathscr{O}^{\text{sh}}_{\bar{\eta}} = \kappa(\eta)^{\text{sep}}$, 故

$$\begin{aligned}(R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{\eta}} &= H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\text{sep}}) \times_X \eta, \mathbb{G}_m) \\ &= H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\text{sep}}), \mathbb{G}_m) \\ &= H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Gal}(\kappa(\eta)^{\text{sep}}/\kappa(\eta)^{\text{sep}}), (\kappa(\eta)^{\text{sep}})^*) = 0,\end{aligned}$$

于是步骤 1 成立.

- **步骤 2.** 对任何 $q \geq 1$, 有 $H^q_{\text{ét}}(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$.

根据定理8.6得到

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(Y, R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}).$$

再根据引理9.8得到当 $p+q \geq 1$ 时有 $H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$. 取 $q = 0$ 再利用步骤 1 即可得到步骤 2.

- **步骤 3.** 对任何 $q \geq 1$ 和闭点嵌入 $i_x : x \to X$, 有 $H^q_{\text{ét}}\left(X, \bigoplus_{x\text{闭点}} i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}\right) = 0$.

只需证明对闭点嵌入 $i_x : x \to X$ 和 $q > 0$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}) = 0$. 根据推论8.5和定理8.6得到 $H^q_{\text{ét}}(X, i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}) = H^q_{\text{ét}}(x, \underline{\mathbb{Z}})$. 由于代数闭, 步骤 3 成立.

- **步骤 4.** 完成证明.

根据步骤 2 和步骤 3 还有正合列9.7即可得到结论. □

9.3 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 的上同调

引理 9.10. *若概形 X 在基概形 $\operatorname{Spec} A$ 上, 其中 A 是严格 Hensel 局部环且 $n \in A^*$, 则 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \cong \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X$.*

证明. 因为 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} = \underline{\operatorname{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t]/(t^n - 1)$, 由于严格 Hensal, 多项式 $t^n - 1$ 会分裂. 故得到平凡的平展覆盖 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \to X$, 则 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \cong \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X$(参考 [5] 命题 7.2.2). □

定理 9.11. *设 X 是代数闭域 k 上的亏格 g 光滑射影曲线, 且 $n \in k^*$, 则*

$$H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_n(k) & q = 0, \\ \operatorname{Pic}^0(X)[n] & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \geq 3. \end{cases}$$

根据引理9.10我们有 $H^q_{\text{ét}}\left(X, \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 0, \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g} & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \geq 3. \end{cases}$

证明. 根据 Kummer 正合列4.22和定理9.9引出长正合列为:

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_n(k) \longrightarrow k^* \xrightarrow{(-)^n} k^* \longrightarrow \\ \quad \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \to \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{(-)^n} \operatorname{Pic}(X) \longrightarrow \\ \quad \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots. \end{array}$$

故而当 $q \geq 3$ 时 $H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = 0$. 只需考虑 $q = 1, 2$. 由于代数闭, 映射 $(-)^n : k^* \to k^*$ 是满射, 因此对于 $(-)^n : \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X)$, $H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \ker(-)^n$ 且 $H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \operatorname{coker}(-)^n$. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Pic}^0(X) \arrow[r] \arrow[d, "{[n]}"] & \operatorname{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "(-)^n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\times n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Pic}^0(X) \arrow[r] & \operatorname{Pic}(X) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

根据 Abel 簇的知识我们知道 $[n]$ 是满射且 $\ker[n]=\mathrm{Pic}^0(X)[n]\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g}$. 运用蛇引理即可得到结论. $\square$

定理 9.12. 设 X 是代数闭域 k 上的仿射光滑曲线且 $n\in k^*$. 取光滑紧化 $X\subset X'$, 设 g 为 X' 亏格, 设 $r=\#(X'\backslash X)$, 则

$$H^q_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=\begin{cases}\boldsymbol{\mu}_n(k) & q=0,\\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+r-1} & q=1,\\ 0 & q\geq 2.\end{cases}$$

证明. 设 $X=X'\backslash\{x_1,...,x_r\}$, 则 $\mathrm{Pic}(X)=\mathrm{Pic}(X)/R$ 其中 R 被 $\mathscr{O}_{X'}(x_i)$ 生成. 由于 R 非空, 则 $\mathrm{Pic}^0(X')\to\mathrm{Pic}(X)$ 是满射, 故 $\mathrm{Pic}(X)$ 可除, 因此不难得知 $H^0_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=\boldsymbol{\mu}_n(k)$ 且当 $q\geq 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=0$. 只需证明 $H^1_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+r-1}$.

注意到我们有

$$\begin{aligned}&H^1_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})=\{(\mathscr{L},\alpha):\mathscr{L}\in\mathrm{Pic}(X),\alpha:\mathscr{L}^{\otimes n}\cong\mathscr{O}_X\}/\cong\\ &=\frac{\{(\mathscr{L}',D,\alpha'):\mathscr{L}'\in\mathrm{Pic}^0(X),\mathrm{supp}(D)\subset\{x_1,...,x_r\},\alpha':(\mathscr{L}')^{\otimes n}\cong\mathscr{O}_{X'}(D)\}}{\{(\mathscr{O}_{X'}(D),nD,1^{\otimes n}):\deg D=0,\mathrm{supp}(D)\subset\{x_1,...,x_r\}\}}.\end{aligned}$$

则有

$$0\longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X',\boldsymbol{\mu}_{n,X'})\longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X,\boldsymbol{\mu}_{n,X})\xrightarrow{f}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus r}\xrightarrow{\sum}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

其中 f 为 $(\mathscr{L}',D=\sum a_i[x_i],\alpha')\mapsto(a_i)_{i=1}^r$. 运用定理9.11计算秩即可. $\square$

9.4 支撑在点上的上同调

命题 9.13. 设 U 是代数闭域 k 上的光滑曲线且 $n\in k^*$. 取闭点 $x\in U$, 则

$$H^q_{x,\text{ét}}(U,\boldsymbol{\mu}_{n,U})=\begin{cases}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q=2,\\ 0 & q\neq 2.\end{cases}$$

证明. 由推论6.18得知 $H^i_{x,\text{ét}}(U,\mathscr{F})\cong H^i_{x,\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{U,x},\mathscr{F})$. 根据定理9.9得到当 $i>0$ 时

$$H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m)=0.$$

再根据命题6.16得到正合列

$$\cdots\longrightarrow H^i_{x,\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m)\to H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m)\to H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{U,x}\backslash\{x\},\mathbb{G}_m)\to H^{i+1}_{x,\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m)\longrightarrow\cdots.$$

得到对 $i\neq 1$ 有

$$H^{i-1}_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{U,x}\backslash\{x\},\mathbb{G}_m)\cong H^i_{x,\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m).$$

由于 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{U,x}^{\mathrm{sh}}\backslash\{x\}=\operatorname{Spec}K$, 根据引理9.8我们有当 $i\geq 1$ 时

$$H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{U,x}^{\mathrm{sh}}\backslash\{x\},\mathbb{G}_m)=0.$$

故

$$H^1_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{U,x}^{\mathrm{sh}},\mathbb{G}_m)=\frac{H^0_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{U,x}^{\mathrm{sh}}\backslash\{x\},\mathbb{G}_m)}{H^0_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{U,x}^{\mathrm{sh}},\mathbb{G}_m)}\cong\mathbb{Z},$$

且当 $i\neq 1$ 时候有 $H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}_{U,x}^{\mathrm{sh}},\mathbb{G}_m)=0$. 再根据 Kummer 正合列即可得到结论. □

10 可构建层和挠层

10.1 可构建层

定义 10.1. 设 X 是概形, 设 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 称为可构建的, 如果任取仿射开集 $U\subset X$, 存在有限分解 $U=\coprod_i U_i$ 为可构建局部闭集使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限局部常值层.

注 10.2. 对 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 也同理定义, 但对一般的 Λ-模层, 需定义 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限型的局部常值层.

命题 10.3. *设概形 X 是拟紧拟分离且 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层, 这时需假设 Λ 诺特), 则 $\mathscr{F}$ 可构建当且仅当存在开覆盖 $X=\bigcup_i U_i$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 可构建当且仅当存在分解 $X=\bigcup_i U_i$ 可构建局部闭集使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限局部常值层.*

证明. 纯粹的点集拓扑和层论, 参考Tag 095E. □

命题 10.4. *(i) 设 $f:X\to Y$ 是概形映射, 令 $\mathscr{F}\,\mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$(或 $\mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层, 其中 Λ 诺特) 是可构建的, 则 $f^{-1}\mathscr{F}$ 也是可构建的;*

(ii) 设 X 是概形, 则 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 内的可构建层关于有限极限和余极限封闭, 若为 $\mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层 (其中 Λ 诺特), 则为弱 Serre 子范畴;

(iii) 若 X 拟紧拟分离, 若 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$(或 Λ-模层, 其中 Λ 诺特) 可构建, 则 $\mathrm{supp}(\mathscr{F})$ 也可构建.

证明. 纯粹的点集拓扑和层论, 参考Tag 095G, Tag 03RZ和Tag 09YS. □

引理 10.5. *设 $j:U\to X$ 是拟紧拟分离概形间的平展映射, 则*

(i) 层 h_U 可构建;

(ii) 对于有限 Abel 群 M(或 Λ-模, 其中 Λ 诺特), 层 $j_!\underline{M}_U$ 可构建.

证明. 运用如下结论:

• **事实.** 若 $U\to X$ 是拟紧拟分离概形间的平展映射, 则存在有限分解 $X=\coprod_i X_i$ 为可构建局部闭集使得 $\pi_i:X_i\times_X U\to X_i$ 是有限平展映射.(参考Tag 03S0)

(i) 根据这个事实和命题4.18即可得到结论.

(ii) 运用命题5.9(i) 和命题5.8(iii) 可以得到

$$(j_!\underline{M}_U)|_{X_i}=\pi_{i,!}\underline{M}=\pi_{i,*}\underline{M}.$$

此时 π_i 有限平展, 则根据直像是平展局部的且引理4.17(ii), 因此 $\pi_{i,*}\underline{M}$ 必然是有限局部常值. □

命题 10.6. *设概形 X 拟紧拟分离. 若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或 Λ-模, 其中 Λ 诺特), 则 $\mathscr{F}$ 是可构建层的滤余极限.*

证明. 我们需要如下结论 (参考Tag 093C):
• **事实 1.** 任何 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 内的层都可以写成

$$\mathrm{Coequalizer}\left(\coprod_{j=1,\ldots,m} h_{V_j} \rightrightarrows \coprod_{i=1,\ldots,n} h_{U_i}\right)$$

其中 V_j, U_i 均为 $X_{\text{ét}}$ 内的拟紧拟分离元.
• **事实 2.** 任何 (Λ 诺特)Λ-模都可以写成

$$\mathrm{coker}\left(\coprod_{j=1,\ldots,m} j_{V_j,!}\underline{\Lambda}_{V_j} \longrightarrow \coprod_{i=1,\ldots,n} j_{U_i,!}\underline{\Lambda}_{U_i}\right)$$

其中 V_j, U_i 均为 $X_{\text{ét}}$ 内的拟紧拟分离元.

故根据命题10.4和引理10.5即可得到. □

10.2 挠层

定义 10.7. *设 X 是概形, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 如果任何 $\mathscr{F}(U)$ 是挠群, 则称其为挠层.*

命题 10.8. *若 $f : X \to Y$ 拟紧拟分离, 则若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则 $R^n f_* \mathscr{F}$ 也是挠层.*

证明. 注意到

$$R^n f_* \mathscr{F} = (U \mapsto H^n_{\text{ét}}(U \times_Y X, \mathscr{F}))^\sharp.$$

可以取仿射 V 使得 $X \times_Y V$ 是拟紧拟分离的 (因为 f 是如此). 因此只需要证明若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层且 X 拟紧拟分离, 则 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 是挠群. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_d \mathscr{F}[d]$ 其中 $\mathscr{F}[d]$ 是 d-挠元的部分, 根据定理6.12我们有

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_d H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}[d]).$$

而 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}[d])$ 也是 d-挠群, 故成立. □

命题 10.9. *若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则 $\mathscr{F}$ 是可构建层的滤余极限.*

证明. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_d \mathscr{F}[d]$ 其中 $\mathscr{F}[d]$ 是 d-挠元的部分, 视 $\mathscr{F}[d]$ 为 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-模. 根据命题10.6即可得到结论. □

11 曲线的上同调 II——挠层的上同调

11.1 迹映射方法基础

考虑 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 内的函子. 对于平展映射 $f: Y \to X$, 有伴随对 $(f_!, f^{-1})$ 和 (f^{-1}, f_*). 因此得到映射 $\mathrm{id} \to f_* f^{-1}$ 和 $f_! f^{-1} \to \mathrm{id}$.

定义 11.1. *根据命题5.8(iii), 当 f 有限平展时 $f_* = f_!$, 因此有映射 $f_* f^{-1} \to \mathrm{id}$, 称之为迹映射.*

命题 11.2. *设 $f: Y \to X$ 有限平展, 则迹映射被如下性质所决定:*

(a) 和 X 上的平展局部化交换;

(b) 若 $Y = \coprod_{i=1}^d X$, 则迹映射是求和映射 $f_* f^{-1} \mathscr{F} = \mathscr{F}^{\oplus d} \to \mathscr{F}$.

证明. 根据引理4.17, 用 (a) 考虑平展局部上自然是 (b) 中的情况. □

命题 11.3 (迹映射方法)**.** *设 $f: Y \to X$ 处处满足 $\deg f = d$, 则不难看出 $\mathscr{F} \to f_* f^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 是乘 d 映射. 如果 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 满足乘 d 映射是同构, 则有单射*

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \hookrightarrow H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1}\mathscr{F}).$$

特别的, 如果 $H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1}\mathscr{F}) = 0$, 则 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.

证明. 注意到因为 f 有限, 则 $H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1}\mathscr{F}) = H^n_{\text{ét}}(X, f_* f^{-1}\mathscr{F})$. 乘 d 映射诱导

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1}\mathscr{F}) \to H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$$

是同构, 于是成立. □

11.2 挠层的上同调

定理 11.4. *设 X 是代数闭域 k 上的分离有限型一维概形且 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则*

(i) 对任何 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(ii) 若 X 仿射, 则对任何 $q > 1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(iii) 若 $p = \mathrm{char}(k) > 0$ 且 $\mathscr{F}$ 是 p-幂次挠层, 则对任何 $q > 1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(iv) 如果 $\mathscr{F}$ 是可构建层且和 $\mathrm{char}(k)$ 互素的挠层, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 有限;

(v) 如果 $\mathscr{F}$ 是可构建层且 X 紧合, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 有限;

(vi) 对任何代数闭扩张 K/k, 如果 $\mathscr{F}$ 是 $\mathrm{char}(k)$ 互素的挠层, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathscr{F}|_{X_K})$;

(vii) 对任何代数闭扩张 K/k, 如果 X 是紧合, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathscr{F}|_{X_K})$;

(viii) 对任何开集 $U \subset X$, 映射 $H^2_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^2_{\text{ét}}(U, \mathscr{F})$ 是满射.

参考Tag 03SB. 这是本节最重要的结论, 这些命题的证明事实上是殊途同归的, 我们只以 (i) 和 (iii) 在光滑的情况下来举例说明. 对于不光滑的情况, 取概形的既约结构, 因为是一个加厚所以不改变上同调. 然后取正规化, 我们总能得到一个交换图和一些函子运算的交换性. 最后, 把曲线分解成连通分支即可, 更多细节我们不在介绍.

这里按照惯例我们定义局部系为有限局部常值层, 记作 $\mathrm{Loc}(X)$. 我们首先证明如下结论:

定理 11.5. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层 (且挠部分在 k 中可逆), 则对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

引理 11.6. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且局部系 $\mathscr{F}$ 的挠部分在 k 中可逆, 则对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

证明. 设 ℓ 在 k 中可逆, 如果 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-层, 即对于每个平展开集 U, 层 $\mathscr{F}(U)$ 是 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 线性空间. 对于某个 k 中可逆的 d, 取 d 次平展覆叠 $\pi : U \to X$ 使得 $\mathscr{F}|_U$ 是常值层. 由于是线性空间上, 故乘 d 为同构, 根据命题11.3 和定理9.11, 我们得知对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.

一般地, 将 $\mathscr{F}$ 分解成 $\mathscr{F}_1 \oplus ... \oplus \mathscr{F}_r$, 其中 $\mathscr{F}_i$ 被 ℓ_i 的幂次消灭, $\mathscr{F}$ 被某个 ℓ 的幂次消灭. 最后, 记 $\mathscr{F}[\ell]$ 为 $\mathscr{F}$ 的 ℓ-挠部分, 考虑正合列 $0 \to \mathscr{F}[\ell] \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell] \to 0$, 然后归纳即可. □

引理 11.7. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且可构建层 $\mathscr{F}$ 的挠部分在 k 中可逆, 根据点集拓扑推导不难得知存在稠密开浸入 $j : U \to X$ 使得 $\mathscr{F}|_U \in \mathrm{Loc}(U)$. 考虑下面命题等价:*

(a) 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(b) 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, j_! j^{-1}\mathscr{F}) = 0$.

证明. 设 $Z = X \backslash U$ 和 $i : Z \to X$, 根据命题5.10有正合列

$$0 \to j_! j^{-1}\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to i_* i^{-1}\mathscr{F} \to 0.$$

注意到 $H^q_{\text{ét}}(X, i_* i^{-1}\mathscr{F}) = H^q(Z, i^{-1}\mathscr{F})$ 且 Z 是代数闭域的谱的乘积, 因此诱导长正合列即可得到证明. □

定理11.5的证明. 根据命题10.9, 只需考虑可构建层的情况. 再根据引理11.7, 我们只需要证明: 对稠密开浸入 $j : U \to X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(U)$, 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, j_!\mathscr{F}) = 0$.

再次使用迹映射方法, 取合适的有限平展覆盖 $g : V \to U$, 只需考虑形如 $j_! g_* g^{-1}\mathscr{F}$ 的上同调且使得 $g^{-1}\mathscr{F}$ 是常值层. 由 Zariski 主定理, 有分解

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "b"] & \\ V \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "g"'] & & X \\ & U \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

为开浸入 a 和有限态射 b 的复合. 不难验证得到 $j_! g_* = b_* a_!$, 只需要证明对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(Y, a_!\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}) = 0$, 其中 ℓ 在 k 里可逆. 只需要考虑 $a_! a^{-1}\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$, 根据引理11.7和引理11.6. □

再考虑如下:

定理 11.8. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线, 设 $p = \mathrm{char}(k) > 0$ 且 $\mathscr{F}$ 是 p-幂次挠层, 则对任何 $q > 1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

引理 11.9. 设 k 是一个特征 p 代数闭域, 设 V 是有限维 k-线性空间. 设线性映射 $F: V \to V$ 是加性的且 $F(ax) = a^p F(x)$. 那么 $F - \mathrm{id}: V \to V$ 是满射.

证明. 交换代数, 参考Tag 0A3L. □

命题 11.10. 设 X/k 是 d 维紧合概形, 那么对于 $q > d$, 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$.

证明. 考虑 Artin-Schreier 正合列定理4.23:

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X \to \mathbb{G}_{a,X} \overset{t \mapsto t^p - t}{\longrightarrow} \mathbb{G}_{a,X} \to 0.$$

诱导长正合列为

$$\cdots \to H^d_{\text{ét}}(X, \mathscr{O}_X) \overset{F\text{id}}{\longrightarrow} H^d_{\text{ét}}(X, \mathscr{O}_X) \to H^{d+1}_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) \to 0 \to \cdots.$$

其中根据定理7.14和 Grothendieck 消灭定理得知当 $q > d$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{O}_X) = 0$, 因此之后的项是 0. 因此当 $q > d+1$ 时 $H^q_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$. 再根据引理11.9得到 $H^{d+1}_{\text{ét}}(X, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) = 0$, 于是得到结果. □

定理11.8的证明. 类似定理11.5的证明, 化归到局部系, 然后再到可构建层即可, 略去. □

事实上定理11.4的某些可以减弱至可分闭域:

命题 11.11 (参考Tag 0A5E)**.** 设 K/k 是可分闭域的扩张, 设 X 在 $\operatorname{Spec} k$ 上紧合且维数不大于 1, 则对挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathscr{F}|_{X_K})$.

12 上同调维数 I——一般情况

定义 12.1. 对于概形 X, 定义其 *(平展)* 上同调维数为

$$\mathrm{cd}(X) := \min\{d : \text{对于所有挠 } Abel \text{ 层} \mathscr{F} \text{都有当} q > d \text{时有} H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0\}$$

或者 $\mathrm{cd}(X) = \infty$.

引理 12.2 (Tate)**.** 设 L/K 是域扩张, 那么 $\mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(K) + \operatorname{trdeg}(L/K)$.

证明. 首先断言: 若 X 是 K 上的一维代数概形, 则 $\mathrm{cd}(X) \leq \mathrm{cd}(K) + 1$. 对 $f: X \to \operatorname{Spec} K$ 和挠层 $\mathscr{F}$ 用 Leray 谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} K, R^q f_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

注意到对于几何点 $\bar{x}: \operatorname{Spec} \bar{K} \to \operatorname{Spec} K$, 由推论8.4 有 $(R^q f_* \mathscr{F})_{\bar{x}} = H^q(X_{\bar{K}}, \mathscr{F})$. 当 $q > 1$ 时由定理11.4知为 0. 分析谱序列得到断言成立.

回到引理本身. 若 $\operatorname{trdeg}(L/K) = \infty$ 则显然成立. 当超越度有限时, 根据归纳法不妨设 $\operatorname{trdeg}(L/K) = 1$. 设 $L = \varinjlim_i A_i$ 是一些有限生成 K 代数的滤余极限, 这些 A_i 的维数都不超过 1. 再利用断言和定理6.12即可得到结论. □

定理 12.3. 设 X 是代数闭域 k 上的代数簇, 则 $\mathrm{cd}(X) \leq 2\dim X$.

证明. 固定一个挠层 $\mathscr{F}$, 用归纳法.

- **步骤 1.** 对一般点含入 $j : \eta \to X$, 划归到形如 $j_*\mathscr{F}$ 的情况.

注意到映射 $\mathscr{F} \to j_*j^{-1}\mathscr{F}$ 诱导同构 $(\mathscr{F})_\eta \cong (j_*j^{-1}\mathscr{F})_\eta$. 其核和余核都是支撑在维数更小的闭子概形上的层. 根据归纳假设只需要证明 $j_*\mathscr{F}$ 的情况.

- **步骤 2.** $R^q j_*\mathscr{F}$ 支撑在维数 $\dim X - q$ 的子簇上.

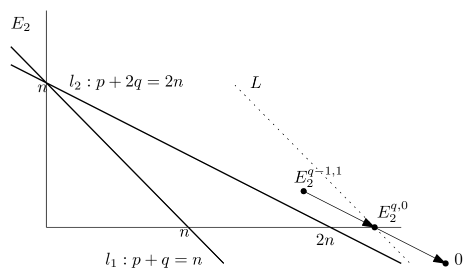
对于 X 的任何不可约闭子簇 Z, 设 Z 的一般点为 ξ, 然后选择一个几何点 $\bar{\xi} \to \xi \to Z$. 注意到由推论8.4得到 $(R^q j_*\mathscr{F})_{\bar{\xi}} = H^q(\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{\bar{\xi}}^{\mathrm{sh}}), \mathscr{F})$. 由于 $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{\bar{\xi}}^{\mathrm{sh}})/\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{\bar{\xi}})$ 是代数扩张 (因为其为有限扩张的极限), 注意到

$$\mathrm{trdeg}(\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{\bar{\xi}})/k) = \dim X - \dim Z,$$

根据引理12.2得知成立.

- **步骤 3.** 完成证明.

考虑 Leray 谱序列 $E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(X, R^q j_*\mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta, \mathscr{F})$ 如图 ($n = \dim X$):



根据归纳, 当 $p > 2(n-q)$ 且 $q > 0$ 时 $E_2^{p,q} = 0$; 由引理12.2知当 $p + q > n$ 时 $H^{p+q}(\eta, \mathscr{F}) = 0$. 故在图中 l_1 右方区域均收敛至 0, 在 l_2 右方的区域均为零. 于是考虑当 $p > 2\dim X$ 时有 $E_2^{p-1,1} = 0$, 故 $E_2^{p,0} = E_\infty^{p,0}$. 在虚线 L 上全部收敛至 0, 因此 $E_2^{p,0} = 0$, 则证明完毕. □

13 紧合基变换和光滑基变换

13.1 经典拓扑里的紧合基变换

定义 13.1. 连续映射 $f : X \to S$ 称为紧合的如果 f 是万有闭的且 $\Delta : X \to X \times_S X$ 是闭映射. 如果 f 紧合当且仅当紧集的逆像仍然是紧的, 我们称 f 是拟紧合 *(更多的参考 Tag 005M)*.

引理 13.2. 设 $f : X \to Y$ 是紧合映射, 则对于任何 X 上的层 $\mathscr{F}$ 和点 $y \in Y$ 都有

$$(Rf_*\mathscr{F})_y \cong R\Gamma(X_y, \mathscr{F}|_{X_y}),$$

其中 $X_y = f^{-1}(y)$.

证明. 我们需要如下结论 (参考Tag 09V3):

• 设 Z 是空间 X 的紧子集使得任何两个 Z 内的点都有 X 内的不交开邻域包含它们, 则对层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X)$ 都有 $\varinjlim_{U \supset Z} H^r(U, \mathscr{F}) \cong H^r(Z, \mathscr{F}|_Z)$.

回到引理本身. 取内射预解用伴随性不难得到映射 $(Rf_*\mathscr{F})_y \to R\Gamma(X_y, \mathscr{F}|_{X_y})$. 取内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$, 由于 $\mathscr{I}^*|_{X_y}$ 是 $\Gamma(X_y, -)$-零调的, 故 $R\Gamma(X_y, \mathscr{F}|_{X_y})$ 可被 $\Gamma(X_y, \mathscr{I}^*|_{X_y})$ 表示, 故只需证明同构

$$\varinjlim_{V} \mathscr{I}^*(f^{-1}(V)) \cong \Gamma(X_y, \mathscr{I}^*|_{X_y}).$$

注意到如果 $X_y \subset U$ 是开邻域, 由于 f 闭, 则设 $V = Y \backslash f(X \backslash U)$ 就得到 $f^{-1}(V) \subset U$, 进而此系统共尾, 因此根据上述结论即可得到结论. □

定理 13.3 (拓扑紧合基变换)**.** *设 $f : X \to Y$ 是紧合的映射, 设 $g : Y' \to Y$ 是连续映射, 考虑纤维积*

$$\begin{tikzcd} X' := X \times_Y Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

则对层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X)$ 都有 $g^{-1}(Rf_*\mathscr{F}) \cong Rf'_*((g')^{-1}\mathscr{F})$.

证明. 取内射预解用伴随性不难得到所述映射, 故只需在茎上证明同构即可. 取 $y' \in Y$ 在 $y \in Y$ 上, 根据引理13.2得到同构

$$(Rf'_*((g')^{-1}\mathscr{F}))_{y'} = R\Gamma((f')^{-1}(y'), (g')^{-1}\mathscr{F}|_{(f')^{-1}(y')})$$

和

$$(Rf_*\mathscr{F})_y = \Gamma(f^{-1}(y), \mathscr{F}|_{f^{-1}(y)})$$

于是同构是显然的, 故成立. □

13.2 紧合基变换的叙述和证明

但平展上同调的紧合基变换类比没有这么容易.

引理 13.4. *对概形的紧合映射 $f : X \to S$ 和几何点 $\bar{s} \to S$, 对任意的 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 都有双射*

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{s}} \to \Gamma(X_{\bar{s}}, \mathscr{F}_{\bar{s}}).$$

证明. 这个需要 Hensel 对的一些结果, 见Tag 0A3T. □

引理 13.5. *设 ℓ 是任一素数且 A 是严格 Hensel 局部环, 设 $X \to \mathrm{Spec}(A)$ 紧合, 那么对于挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有*

$$H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_0, \mathscr{F}|_{X_0}),$$

其中 X_0 是特殊纤维.

证明. 这个结论颇为复杂, 直接证明需要 Artin 逼近等技术, 我们略去. 读者可以用紧合基变换来推出它 (其实和紧合基变换等价). 而 [10] 内只证明了 $\mathbb{F}_\ell$-模层且 $X=\mathbb{P}^1_A$ 的情况 (我们也只需要这个条件), 我们简述一下这种情况: 取 $\mathbb{F}_\ell$-模内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$, 可以证明 $\mathscr{I}^*|_{X_0}$ 是 $\mathscr{F}|_{X_0}$ 的右 $H^0_{\text{ét}}(X_0,-)$-零调的 (参考Tag 0A5H), 于是 $H^q_{\text{ét}}(X_0,\mathscr{F}|_{X_0})$ 可以由 $H^0_{\text{ét}}(X_0,\mathscr{F}|_{X_0})$ 得到, 再由引理13.4即可得到结论. □

注 13.6. *在复几何里有一个给予动机的类比 (证明见 [11] 定理 9.3):*
• *Ehresmann 定理. 设 $f:\mathcal{X}\to(B,0)$ 是微分流形之间的紧合浸没, 其中 B 是可缩的流形且 0 是其上的一个基点. 则存在微分同胚 $T:\mathcal{X}\cong\mathcal{X}_0\times B$ 使得对投影 $p:\mathcal{X}_0\times B\to B$ 满足 $p\circ T=f$. 因此在此种情况下有同伦等价 $\mathcal{X}\simeq\mathcal{X}_0$, 因此有相同的上同调.*

定理 13.7 (紧合基变换)**.** *设 $f:X\to Y$ 是概形间的紧合映射, 对任何概形映射 $g: Y'\to Y$ 和纤维积*

$$\begin{array}{ccc} X':=X\times_Y Y' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

对任何挠层 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 都有同构

$$g^{-1}Rf_*\mathscr{F}\longrightarrow Rf'_*(g')^{-1}\mathscr{F}.$$

证明. 我们需要如下几个步骤来得到证明.
• **步骤 1.** 先证明不导出的情况对任意的 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 成立.

映射不难由伴随性给出, 同构只需要在茎上验证, 根据引理13.4即可得到结论.

• **步骤 2.** 研究几个基变换的重要关系.

为了方便, 如果对任何 $S'\to S$ 和基变换 $X\times_S S'$ 和挠层 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都满足定理的结论, 我们就称 $f:X\to S$ 和上同调的基变换交换. 则我们有如下结论:

•• (a) 紧合映射 $f:X\to Y$ 和上同调的基变换交换当且仅当对任何素数 ℓ 和内射 $\mathbb{F}_\ell$-模层 $\mathscr{I}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和任何 $Y'\to Y$ 和定理的基变换 $X\times_Y Y'$, 对任何 $q>0$ 都有层 $R^qf'_*(g')^{-1}\mathscr{I}=0$.

这个不太困难, 首先设 $\mathscr{F}=\varinjlim\mathscr{F}[n]$, 根据定理6.12不难得出高阶直像和滤余极限交换, 而逆像本来就交换, 因此只需要假设 $\mathscr{F}$ 被某个 n 零化. 取素数 $\ell|n$, 考虑

$$0\to\mathscr{F}[\ell]\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell]\to 0,$$

运用 5-引理, 只需对 $\mathscr{F}[\ell],\mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell]$ 证明即可. 不断重复这一步骤, 则不妨设 $\mathscr{F}$ 被某个素数 ℓ 零化. 取 $\mathbb{F}_\ell$-模内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$, 只需证明对 $\mathscr{I}^*$ 运用步骤 1 即可.

•• (b) 若 $f:X\to Y$ 有限, 则其和上同调的基变换交换.

这个基本上平凡, 运用 (a) 和推论8.5即可得到结果.

•• (c) 对紧合映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$, 若 f,g 都和上同调的基变换交换, 则 $g\circ f$ 也是如此;

•• (d) 对紧合映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$, 若 $f,g\circ f$ 都和上同调的基变换交换且 f 是满射, 则 g 也是如此.

(b)(c) 证明类似, 运用相对 Leray 谱序列即可, 参考Tag 0A4C 和Tag 0A4D, 我们略去.

• **步骤 3.** 将问题划归到 (相对) 射影空间.

根据命题8.2, 我们可以考虑 Zariski 局部, 于是不妨设 Y 仿射. 由 Chow 引理得到如下交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & X'' \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f''"] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

其中 π 是 (H-) 射影满射且 f'' 是紧合映射. 根据步骤 2 的 (b), 则 i 和上同调的基变换交换. 如果我们证明了对形如 $\mathbb{P}^n_S \to S$ 的映射也和上同调的基变换交换, 那么根据步骤 2 的 (c) 得到 f'', π 和上同调的基变换交换, 再根据步骤 2 的 (d), 我们就得到了 f 和上同调的基变换交换. 因此问题划归到了形如 $\mathbb{P}^n_S \to S$ 的映射.

• **步骤 4.** 将问题划归到 (相对) 射影直线.

注意到对于 $n > 0$, 有有限满射

$$\mathbb{P}^1_S \times_S \cdots \times_S \mathbb{P}^1_S \to \mathbb{P}^n_S$$

为 $((x_1 : y_1), (x_2 : y_2), \ldots, (x_n : y_n)) \mapsto (F_0 : \ldots : F_n)$, 其中 F_i 是 x_i, y_i 的整系数多项式满足

$$\prod_i (x_i t + y_i) = F_0 t^n + F_1 t^{n-1} + \ldots + F_n.$$

因此根据步骤 2 的 (c) 和 (d) 只需要考虑 $\mathbb{P}^1_S \to S$ 的情况.

• **步骤 5.** 完成证明.

对任何 $g : T \to S$ 和 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{F}_\ell$ 模层 (根据步骤 2 的 (a) 的证明, 只需考虑这种情况), 观察交换图

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1_T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & \mathbb{P}^1_S \arrow[d, "f"'] \\ T \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

只需要在茎上验证. 首先注意到对几何点 $\bar{s}' \to S$, 根据引理13.5和推论8.4我们有

$$(R^q f_* \mathscr{F})_{\bar{s}'} = H^q(\mathbb{P}^1_{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}'}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}'}}}) = H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(s')^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(s')^{\mathrm{sep}}}}).$$

因此考虑几何点 $\bar{t} \to T$, 设 $\bar{s} = g(\bar{t})$, 考虑映射 $g^{-1} R^q f_* \mathscr{F} \to R^q f'_* (g')^{-1} \mathscr{F}$ 的茎为

$$H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(s)^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(s)^{\mathrm{sep}}}}) \to H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(t)^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(t)^{\mathrm{sep}}}}).$$

根据命题11.11即可得到结论. □

13.3 紧合基变换的应用

命题 13.8 (相对上同调维数)**.** *若紧合概形映射 $f : X \to Y$ 满足纤维维数 $\leq n$, 则对所有挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有当 $q > 2n$ 时 $R^q f_* \mathscr{F} = 0$.*

证明. 当 $n = 0$ 时, 因为紧合且拟有限, 则 f 有限, 故命题由推论8.5得到.

当 $n > 0$ 时, 只需要证明茎为零即可. 对几何点映射运用紧合基变换13.7和上同调维数的结果12.3即可得到结论. □

13.4 经典拓扑里的光滑基变换

定义 13.9. *我们称拓扑空间间的连续映射 $f : X \to Y$ 是光滑的, 如果对任何 $x \in X$, 存在其开邻域同胚于 $U \times [0, 1]^n$, 其中 U 是 $f(x)$ 的开邻域.*

定理 13.10 (拓扑的光滑基变换)**.** *对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(X)$ 和纤维积*

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_S S' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

如果 g 光滑, 则有 $g^{-1} R^i f_* \mathscr{F} \cong R^i f'_* (g')^{-1} \mathscr{F}$.

证明. 映射类似于拓扑紧合基变换, 由于高阶直像可以是上同调群的层化, 我们只需证明

$$H^i(X \times [0, 1]^n, (g')^{-1}\mathscr{F}) \cong H^i(X, \mathscr{F}).$$

因为有同伦等价 $X \times [0, 1]^n \simeq X$, 如果局部系的上同调在同伦等价下不变, 我们就得到结论.

我们只需证明若 $h_0, h_1 : Y' \rightrightarrows Y$ 是同伦的映射, 那么会诱导相同的 $H^i(Y, \underline{A}) \to H^i(Y', \underline{A})$, 其中 $\underline{A}$ 是常值 Abel 群层. 设同伦为 $F : [0, 1] \times Y' \to Y$ 使得 $F|_{0 \times Y} = f_0, F|_{1 \times Y} = f_1$. 取 $j_t : Y' \to Y' \times [0, 1]$ 为 $y' \mapsto (t, y')$, 则有 $f_0 = F \circ j_0, f_1 = F \circ j_1$, 因此只需证明对任何 $t \in [0, 1]$, 映射 j_t 都诱导相同的 $H^i(Y' \times [0, 1], \underline{A}) \to H^i(Y', \underline{A})$. 考虑 $\pi : [0, 1] \times Y' \to Y'$ 为自然投影, 则有 $\pi \circ j_t = \mathrm{id}_{Y'}$, 因此只需要考虑 π 诱导上同调群同构.

根据 Leray 谱序列有 $E_2^{p,q} = H^p(Y', R^q \pi_* \underline{A}) \Rightarrow H^{p+q}([0, 1] \times Y', \underline{A})$. 根据拓扑的紧合基变换13.3得到对任意的 $y' \in Y'$ 有自然同构 $R^i \pi_*(\underline{A})_{y'} \cong H^i([0, 1], \underline{A})$. 由层上同调-奇异上同调比较定理17.1得知当 $i > 0$ 时有

$$H^i([0, 1], \underline{A}) \cong H^i_{\text{sing}}([0, 1], A) = 0.$$

故有典范同构 $\underline{A} \cong \pi_* \underline{A}$ 且当 $i > 0$ 有 $R^i \pi_* \underline{A} = 0$. 因此 Leray 谱序列退化, 故而所有边界映射

$$H^p(Y', \pi_* \underline{A}) \to H^p([0, 1] \times Y', \underline{A})$$

是同构. 最后, 不难验证得到此映射即为:

$$H^p(Y', \pi_* \underline{A}) \to H^p([0, 1] \times Y', \pi^{-1} \pi_* \underline{A}) \to H^p([0, 1] \times Y', \underline{A}),$$

故而因为 $\pi^* \underline{A} \to \pi^{-1} \pi_* \underline{A} \to \underline{A}$ 是单位, 故边界映射和 $\underline{A} \cong \pi_* \underline{A}$ 诱导的同构即为 π 诱导的映射. □

13.5 光滑基变换一瞥

定理 13.11 (光滑基变换)**.** 对概形映射 $f: X \to S$ 和挠群 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 使得挠阶数在 S 内可逆. 对于纤维积

$$\begin{tikzcd} X' = X \times_S S' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

其中 $S' = \varprojlim_\lambda S_\lambda$ 为光滑 S 概形 S_λ 构成的拟系统满足转移映射 $S_{\lambda'} \to S_\lambda$ 是仿射的, 因此有典范同构

$$g^{-1}R^i f_* \mathscr{F} \cong R^i f'_* (g')^{-1} \mathscr{F}.$$

13.6 光滑基变换的应用

14 上同调维数 II——仿射情况

15 ℓ-进层和 ℓ-进上同调

16 平展上同调的 Künneth 公式

17 比较定理

17.1 常值层上同调-奇异比较定理

定理 17.1. 设 X 是局部可缩拓扑空间, 则对任何交换环 G 都有典范同构

$$H^i_{\text{sing}}(X, G) \cong H^i(X, \underline{G}).$$

证明. 待添加, 参考 [11] 定理 4.47. □

17.2 平展-奇异比较定理

17.3 其他比较定理

18 上同调纯性和 Gysin 序列

19 紧支上同调

20 链映射和 Chern 类

21 Poincaré 对偶

22 Lefchetz 迹公式

23 Weil 上同调理论

24 平展上同调的一些应用 I——代数曲面的应用

24.1 待添加

25 平展上同调的一些应用 II——Abel 簇相关

25.1 Abel 簇的平展上同调

25.2 Abel 簇和 Jacobi 簇

25.3 Mordell-Weil 定理

26 平展上同调的一些应用 III——相关大定理和猜想一瞥

26.1 Mordell 猜想

26.2 p 进 Hodge 理论

26.3 双有理几何

索引

1-余链, 25
C_r 域, 28
G-模, 18
$\mathrm{GL}_{n,X}$, 9
$\mathbb{G}_{a,X}$, 9
$\mathbb{G}_{m,X}$, 9
$\boldsymbol{\mu}_{n,X}$, 9
$\mathscr{G}$-挠子, 25
$\mathscr{O}_{X,\bar{x}}^{\mathrm{sh}}$, 11

Brauer 群, 28

Galois 上同调, 18
Grothendieck 意象, 7
Grothendieck 拓扑, 7

Hensel 局部环, 11
Hensel 引理, 11

Riemann 存在定理, 6

Tate 连续上同调, 18
Tsen 定理, 28

Weil 猜想, 4

Čech 上同调, 22

严格 Hensel 化, 11
严格 Hensel 局部环, 11

分离预层, 7
切除, 21
可构建层, 32
局部常值层, 12
层, 7
层化, 8
常值层, 12
平凡 $\mathscr{G}$-挠子, 25
平展上同调, 17
平展基本群, 5

拟凝聚层, 9
摩天大厦层, 11
景, 7
有限局部常值层, 12

直像, 14
纤维函子, 5
结构层, 9
群上同调, 18

茎, 10

逆像, 15
零扩张函子, 16
预层, 7

参考文献

[1] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained*. AMS, 2005.

[2] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer-Verlag, 1971.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

[4] Fu Lei. *Algebraic geometry*. TsingHua and Springer, 2006.

[5] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version*. World Scientific, 2015.

[6] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton university press, 1980.

[7] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013.

[8] James S. Milne. Class field theory, 2020.

[9] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. AMS, 2016.

[10] Stacks project collaborators. The stacks project, 2023.

[11] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*. Cambridge University Press, 2002.