平展上同调基础

温尊

2023 年 4 月 2 日

摘要

平展上同调是代数几何中非常重要的一部分, 同时也是比较基础的一部分, 广泛应用在各个方向. 这篇笔记将以 Milne 的讲义为大体顺序, 以几何人的视角讲述平展上同调的基础理论, 为后续代数几何的学习和研究扫清一些障碍. 本笔记也得到了舍友很多支持, 感谢他对这个笔记的贡献和帮助.

目录

1 平展上同调简介

何为平展上同调? 举一个简单的例子, 取 X 为 $\mathbb{C}$ 上的代数簇, 其解析化 X^{an} 可以对应奇异上同调 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{Z})$ 满足

(i) 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模;

(ii) 群 $H^i(X^{\mathrm{an}},\mathbb{C})$ 有额外的结构;

(iii) 和代数链有关系.

所以平展上同调的目标就是定义一个类似奇异上同调的上同调理论 (满足类似性质的上同调称为 Weil 上同调理论, 还有其他的 Weil 上同调理论, 例如经典的 de Rham 上同调, 代数 de Rham 上同调和晶体上同调) 使其适用于更加一般的概形上去.

在平展上同调中, 我们会发现挠系数的上同调, 例如 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 系数的上同调可以比较好的模拟奇异上同调. 但会发现 $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})=0$ 而 $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ 并不能很好的模拟奇异上同调, 另一方面我们发现如下结果:

定理 1.1 (Serre)**.** *不存在上同调理论 H^* 使得 (i) 具有函子性;(ii) 满足 Kunneth 公式;(iii) 对所有椭圆曲线 E 满足 $H^1(E)\cong\mathbb{Q}^2$.*

基本思路. 取 E 为超奇异椭圆曲线, 有一个事实是 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}$ 是不分裂四元数代数. 根据 (i)(ii) 不难得到 $\mathrm{End}(E)$ 作用在 E 上会诱导出 $\mathrm{End}(E)$ 在 $H^1(E)$, 进而诱导出代数同态 $\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}\to\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{Q})$. 而根据基本的表示论, 这种同态一定不存在! 故而没有这种上同调理论. □

为了在非挠系数下也可以模仿奇异上同调, 我们会定义类似的 ℓ-进上同调理论, 其中 ℓ 和特征 p 互素 (不满足这个情况的需要晶体上同调理论):

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)=\varprojlim H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \text{ 和} H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Q}_\ell)=H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell,$$

这样也可以得到比较好的模拟.

顺便一提, 类似代数拓扑一样, 在概形情况下也可以模拟拓扑的基本群. 给定概形和固定的几何点 $(X,\bar{x})$, 可以定义 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$ 为平展基本群, 其定义事实上是从代数拓扑里偷的, 运用了覆叠变换群和拓扑基本群的关系来定义, 十分合理. 当然之后还有更多的类似不变量, 例如高阶的平展同伦群等.

另一个发展平展上同调, 乃至 Grothendieck 发展代数几何的重要动机就是 Weil 猜想:

猜想 1 (Weil 猜想)**.** *设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上 n 维光滑紧合几何整的簇, 设*

$$S_X(t)=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n}t^n\right),$$

则

(i) 函数 $S_X(t)$ 是有理函数, 即 $S_X(t)=\prod_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}S_i(t)$, 其中 S_i 是满足一定条件的整系数多项式;

(ii) 满足函数方程 $S_X(q^{-n}t^{-1})=\pm q^{nE/2}t^ES_X(t)$ 其中 E 是 X 欧拉示性数;

(iii) 所有零点和极点的绝对值为 $q^{j/2}$ 其中 $j\in\mathbb{Z}$;

(iv) 若 X 提升为代数整数环 $R\subset\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 Y, 则对于 $i=0,...,2n$, 流形 $Y(\mathbb{C})$ 的 Betti 数为 $S_i(t)$ 的次数 b_i.

最后结果. (i) 由 Dwork 运用 H^1 的有限生成性得到结果;

(ii) 由 Gorthendieck 运用 Poincaré 对偶得到;

(iii)(iv) 由 Deligne 证明. □

因此平展上同调是相当成功的上同调理论, 而本笔记就是为了在介绍基础理论的同时来阐述这些和代数拓扑, 复几何类似的结果和性质. 正如题所言, 这个笔记是作为几何人的笔者写的, 所以有很多我认为就算不知道也无妨, 或者自己就能推理的无聊细节 (主要集中在交换代数和点集拓扑) 就会被我略去 (当然大部分情况只是我懒得写了). 因此可能不适合其他方向的人观看, 推荐 [16] 里的Tag 0BQ6 和Tag 03N1, 扶磊教授的书 [9] 和 Milne 的传世经典 [11], 我们也会多次引用里面的某些细节.

前置知识: 至少是经典代数几何教材 [7] 的前三章, 还有光滑, 无分歧和平展映射的基本性质, 还有基本的导出范畴, 懂一些下降理论. 而会一些基本的代数拓扑和复几何更好, 你也会注意到平展上同调是研究概形的拓扑, 而凝聚上同调是研究概形的几何.

2 平展基本群

对于连通概形 X, 定义 $\mathrm{F\acute{e}t}/X$ 为 X 上的有限平展态射构成的范畴, 而 $\mathrm{\acute{E}t}/X$ 为 X 上的平展态射构成的范畴. 给定概形和几何点 $(X,\bar{x})$, 定义 (纤维) 函子

$$\mathfrak{F}_{\bar{x}} : \mathrm{F\acute{e}t}/X \to \mathrm{Sets}, (\pi : Y \to X) \mapsto \mathrm{Hom}_X(\bar{x}, Y).$$

我们寻求这个函子是否可表? 也就是说是否存在万有覆叠空间? 事实上不一定存在:

例 2.1. *考虑 $\mathbb{C}$ 上射影直线 $\mathbb{A}^1$, 存在有限平展映射 $\mathbb{A}^1\backslash\{0\} \to \mathbb{A}^1\backslash\{0\}, x \mapsto x^n$, 那么注定没有像拓扑里的 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 来表示万有覆盖!*

但是可以退而求其次, 考虑射可表性: 可以证明 (但我不证明, 事实上 [11] 也没证明. 而 [9] 里有很多证明, 想看的读者可以看看) 存在有限平展覆盖组成的定向逆系统

$$X' = ((X_i, f_i)_{i\in I}, \phi_{ij} : X_j \to X_i, f_i = \phi_{ij} \circ f_j, f_i \in \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_i))$$

使得

$$\mathrm{Hom}(X', Y) := \varinjlim \mathrm{Hom}_X(X_i, Y) \to \mathfrak{F}_{\bar{x}}(Y), \sigma \mapsto \sigma(f_i)$$

是同构. 事实上可以选取 X_i/X 为 Galois 覆盖, 也就是说 $\deg(X_i/X) = \#\mathrm{Aut}_X X_i$, 见 [11] 注 5.4.

选取好 Galois 覆盖, 对于 $\phi_{ij} : X_j \to X_i$ 可以诱导 $\mathrm{Aut}_X X_j \to \mathrm{Aut}_X X_i$ 如下: 注意到 $\mathrm{Aut}_X X_j \to \mathfrak{F}_{\bar{x}}(X_j), \sigma \mapsto \sigma(f_j)$ 是双射 (由于是 Galois 覆盖, 见 [9] 第三节), 则通过 $F(X_j) \to F(X_i), \alpha \mapsto \phi_{ij}(\alpha)$ 即得到映射.

定义 2.1. *对于连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 考虑上述构造, 定义平展基本群为*

$$\pi_1^{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i$$

赋予有限离散拓扑的射影极限拓扑.

定理 2.2. *考虑连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$.*

(i) 函子 $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$ 诱导出 $\mathrm{F\acute{e}t}/X$ 到有限 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x})$-集的等价;

(ii) 取第二个几何点 $\bar{x}'$, 我们有 $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \cong \mathfrak{F}_{\bar{x}'}$ 进而诱导 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}')$, 并且和 (i) 契合;

(iii) 平展基本群有函子性, 并且和 (i) 交换.

证明. 这些都比较复杂, 秉承几何人的优良品质, 我们直接默认它们吧! 参考Tag 0BND. □

例 2.2. *(i) 对一个点 $X = \mathrm{Spec}(k)$ 和几何点 Ω, 由定义知道 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\Omega) = \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$;*

(ii) 考虑 $\mathbb{C}$ 上的 $X = \mathbb{A}^1\backslash\{0\}$, 则考虑 $x \mapsto x^n$ 得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X X_i = \varprojlim \boldsymbol{\mu}_n(k) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{\ell} \mathbb{Z}_\ell;$$

(iii) 考虑代数闭域上的 $X = \mathbb{P}^1$, 由 Riemann-Hurwitz 公式不难得到 X 只有平凡的平展覆叠, 故 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) = 1$. 归纳可以得到 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{P}^n,\bar{x}) = 1$;

(iv) 事实上我们对 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^1,\bar{x})$ 都一无所知, 其中 k 是正特征域 (根据 Artin-Scheier 列, 起码不是平凡的群);

(v) 对于正规簇 X, 考虑一般点上的几何点 $\bar{x}$, 假设

$$L = \bigcup \left\{ \text{几何点内的有限可分扩张} K/K(X) : X \text{在} K \text{内的正规化到} X \text{平展} \right\},$$

则 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \mathrm{Gal}(L/K(X))$, 参考 [9] 命题 3.3.6.

自然的, 我们也会考虑平展基本群和拓扑基本群有何种联系? 我们有以下重要的比较定理:

定理 2.3 (Riemann 存在定理)**.** *设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形, 则由范畴等价*

$$(\mathrm{F\acute{e}t}/X) \to (\mathrm{FTopCov}/X^{\text{an}}).$$

特别的有 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \cong \pi_1\widehat{(X^{\text{an}},x)}$, 为射有限完备化.

证明. 这个证明更加复杂, 我们也直接承认, 请参考 [5] 的定理 XII.5.1. □

这样我们就可以通过拓扑基本群来计算许多 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形的平展基本群了.

注 2.4 (算术和数论人的最爱)**.** *(i) 对于 X 为 k 上几何连通的簇, 我们有正合列 (参考 [9] 命题 3.3.7):*

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{k^{\text{sep}}},\bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \to \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k) \to 1;$$

(ii) 对于 $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}\backslash\{0,1,\infty\}$, 运用正合列得到

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}},\bar{x}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q}) \to 1.$$

嵌入 $\mathbb{Q}^{\text{al}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 可以得到

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{Q}^{\text{al}}},\bar{x}) \cong \langle a,b,\widehat{c|abc}=1\rangle.$$

而群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{al}}/\mathbb{Q})$ 则十分复杂, 如果完全了解它就可以了解相当一部分的算术猜想和结果 (摘自 J. Milne 的讲义 [12]).

3 景和层和层化

本质就是推广拓扑空间的定义.

定义 3.1 (Grothendieck 拓扑和景)**.** 设 $\mathcal{C}$ 是范畴, 一个 $\mathcal{C}$ 上的 *Grothendieck* 拓扑由集合 $\{\{U_i \to U\}_{i\in I}\} = \mathrm{Cov}(U)$ 组成, 其中 U 是任意对象, 满足

(i) 若 $V \to X$ 是同构, 则 $\{V \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$*;*

(ii) 若 $\{X_i \to X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ 且 $Y \to X$ 是任意态射, 则纤维积 $X_i \times_X Y$ 存在且

$$\{X_i \times_X Y \to Y\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(Y);$$

(iii) 若 $\{X_i \to X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ 且对任意 $i \in I$ 都给定 $\{V_{ij} \to X_i\}_{j\in J_i}$, 则

$$\{V_{ij} \to X_i \to X\}_{i\in I, j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(X).$$

范畴 $\mathcal{C}$ 和其上的 *Grothendieck* 拓扑称为景.

例 3.1 (小 Zariski 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\mathrm{Op}(X)$ 由开子概形构成, 态射是包含关系. 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{Zar}.

例 3.2 (大 Zariski 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 为开浸入且 $U = \bigcup_i U_i$. 记这个景为 X_{ZAR}.

例 3.3 (小平展景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 $\mathrm{\acute{E}t}/X$, 不难证明里面的态射都是平展的, 所以我们不假设条件. $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$.

例 3.4 (大平展景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平展且 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 $X_{\mathrm{\acute{E}t}}$.

例 3.5 (fppf 景)**.** 假设 X 是一个概形. 考虑范畴 Sch/X, 则 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 为覆盖如果 $U_i \to U$ 平坦和局部有限表现, 且 $\coprod_{i\in I} U_i \to U$ 是满射. 记这个景为 X_{fppf}.

定义 3.2. 景 $\mathcal{C}$ 上的预层为函子 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$*;*

定义 3.3. 给定景 $\mathcal{C}$ 和其上的预层 F.

(i) 预层 F 称之为分离的, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$, 诱导态射 $F(U) \to \prod_{i\in I} F(U_i)$ 是单射*;*

(ii) 预层 F 称为层, 如果对任意的 $U \in \mathcal{C}$ 和覆盖 $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$, 我们有如下等化子*:*

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j)$$

其中态射被 $U_i \times_U U_j \to U_i$ 和 $U_i \times_U U_j \to U_j$ 诱导.

定义 3.4. 一个范畴称为 *Grothendieck* 意象 *(Topos)* 如果其等价于某个景上的层范畴.

定义 3.5 (层化)**.** *在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$, 称 $\mathscr{P}^\sharp\in\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 使得 $\mathscr{P}\to\mathscr{P}^\sharp$ 是 $\mathscr{P}$ 的层化, 如果任取 $\mathscr{G}\in\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 和 $\mathscr{P}\to\mathscr{G}$, 都有交换图:*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{P}^\sharp \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\
\mathscr{G} &
\end{tikzcd}$$

定理 3.6. *在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$. 对某个覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_i\to U\}\in\mathrm{Cov}(U)$, 定义*

$$\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{P}):=\ker\left(\prod_i\mathscr{P}(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j}\mathscr{P}(U_i\times_U U_j)\right).$$

故有典范映射 $\mathscr{P}(U)\to\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{P})$. 不难证明不同覆盖可以诱导良定义的态射且和覆盖间映射选取无关 (参考Tag 03NQ), 故定义

$$\mathscr{P}^+:U\mapsto\varinjlim_{\mathfrak{U}}\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{P}).$$

(i) 函子 $\mathscr{P}^+$ 是分离预层;
(ii) 若 $\mathscr{P}$ 是分离预层, 则 $\mathscr{P}^+$ 是层且 $\mathscr{P}\to\mathscr{P}^+$ 单射;
(iii) 若 $\mathscr{P}$ 是层, 则 $\mathscr{P}\to\mathscr{P}^+$ 是同构;
(iv) 不论如何 $\mathscr{P}^{++}$ 一定是层, 且 $\mathscr{P}^{++}\cong\mathscr{P}^\sharp$.

证明. 这是纯粹的层论推导, 参考Tag 00WB. □

注 3.7. 我们在景的定义3.1里规定 $\mathrm{Cov}(U)$ 是集合很大程度上就是为了保证这个极限存在.

推论 3.8. *在某个景 $\mathcal{C}$ 上, 取定 $\mathscr{P}\in\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$. 则 $\sharp:\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})\to\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 是个函子, 且若规定遗忘函子为 $i:\mathrm{Sh}(\mathcal{C})\to\mathrm{PreSh}(\mathcal{C})$, 则有 $(\sharp,i)$ 是伴随函子. 特别的, 函子 $\sharp$ 是正合函子.*

证明. 近乎平凡. □

推论 3.9. *考虑图 $\mathscr{F}:\mathcal{I}\to\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$, 则 $\varprojlim_{\mathcal{I}}\mathscr{F}$ 存在且和预层范畴内一样, 而 $\varinjlim_{\mathcal{I}}\mathscr{F}$ 存在且为预层范畴内的层化.*

证明. 也是纯粹的层论验证, 见Tag 00W2和Tag 00WI. □

4 平展拓扑的一些应用

定义 4.1 (平展邻域)**.** *给定概形 X, 称几何点 $\bar{x}$ 的一个平展邻域为如下图表:*

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, "f"] \\
\bar{x} \arrow[ur, "\bar{u}"] \arrow[r, "\bar{x}"'] & X
\end{tikzcd}$$

其中 f 平展. 我们记为 $(U,\bar{u})\to(X,\bar{x})$.

4.1 拟有限映射的平展局部

4.2 Zariski 主定理

4.3 Stein 分解

5 平展拓扑上的层

我们一般考虑小平展景 $X_{\text{ét}}$. 记 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 是集合取值的平展层范畴, 而 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 群取值的平展层. 类似的预层范畴也为 $\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 和 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$.

5.1 基本结果和例子

命题 5.1. *固定概形 X, 对于 $\mathscr{F} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 若 $\mathscr{F}$ 在限制到 Zariski 开覆盖时满足层条件, 且对于仿射平展覆盖 $V \to U$ 满足层条件, 则 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.*

证明. 详细细节参考 [11] 命题 II.1.5. 简单来说就是运用 Zariski 开覆盖上的条件会给出: 对于概形 $V = \coprod_i V_i$, 我们有 $\mathscr{F}(V) = \prod_i \mathscr{F}(V_i)$. 运用这个我们发现如果单个映射组成的平展覆盖 $\coprod_i U_i \to U$ 满足等化子条件, 那么 $\{U_i \to U\}$ 也满足等化子条件 (因为 $\coprod_i U_i \times_U \coprod_j U_j = \coprod_{i,j} U_i \times_U U_j$). 根据仿射平展覆盖满足等化子条件, 我们轻易得到 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ 也满足等化子条件, 其中 I 有限且 U_i 仿射. 对于一般情况, 需要证明相互契合, 追图细节略去. $\square$

例 5.1 (结构层)**.** *给定概形 X. 定义 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$ 为 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}(U) := \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$. 我们断言 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$. 运用5.1, 这其实就是环的忠实平坦下降: 设环同态 $f : A \to B$ 忠实平坦, 则有正合列:*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{b \mapsto 1\otimes b - b\otimes 1} B \otimes_A B$$

证明颇为经典, 分成三步:(a) 证明如果 f 有一个截面, 则命题成立;(b) 证明如果存在另一个忠实平坦同态 $A \to A'$ 使得命题对 $A' \to A' \otimes_A B$ 成立, 则也对 $A \to B$ 成立;(c) 发现 $B \to B \otimes_A B, b \mapsto b \otimes 1$ 存在截面 $b \otimes b' \mapsto bb'$.

例 5.2 (由概形表示的层)**.** *给定概形 X. 取定 Z 为 X-概形, 定义为 $h_Z := \mathrm{Hom}_X(-, Z)$. 事实上通过 (i) 的正合列也容易得到 $h_Z \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$. 下面有几个常用的例子:*

(a) 定义 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}(T) = \{\zeta \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T) : \zeta^n = 1\}$, 即 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t]/(t^n - 1)$ 表示;

(b) 定义 $\mathbb{G}_{a,X}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$, 即 $\mathbb{G}_{a,X}$ 是被 $\mathbb{A}^1_X$ 表示的函子;

(c) 定义 $\mathbb{G}_{m,X}(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T^*)$, 即 $\mathbb{G}_{m,X}$ 是被 $\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t, t^{-1}]$ 表示的函子;

(d) 定义 $\mathrm{GL}_{n,X}(T) = \mathrm{GL}_n(\Gamma(T, \mathscr{O}_T))$, 即 $\mathrm{GL}_{n,X}$ 是被

$$\underline{\mathrm{Spec}}_X \mathscr{O}_X[\{x_{ij}\}_{1\le i,j\le n}][1/\det(x_{ij})]$$

表示的函子.

例 5.3 (拟凝聚层)**.** *给定概形 X. 考虑 $\mathscr{M} \in \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{Zar}})$ 是拟凝聚的, 定义 $\mathscr{M}^{\text{ét}}(\phi : U \to X) := \Gamma(U, \phi^*\mathscr{M})$. 运用5.1和更一般的正合列: 环同态 $f : A \to B$ 忠实平坦且 M 为 A-模, 则有正合列*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

即可得到 $\mathscr{M}^{\text{ét}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.

命题 5.2 (点上的层范畴). 对于 $X = \operatorname{Spec} k$, 有范畴等价

$$\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) \to (\text{离散}\, \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k) - \text{集}), \mathscr{F} \mapsto M_{\mathscr{F}} := \varinjlim_{k^{\text{sep}} \supset k'/k \text{有限 } Galois} \mathscr{F}(\operatorname{Spec} k').$$

证明. 定义逆为 $M \mapsto \mathscr{F}_M := (A \mapsto \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}_{k-\text{alg}}(A, k^{\text{sep}}), M))$. 见Tag 03QT. □

注 5.3. 类似的有范畴等价

$$\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to (\text{离散}\, \mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k) - \text{模}).$$

5.2 平展预层/层的茎

引理 5.4. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 则

(i) 给定两个平展邻域 $(U_i, \bar{u}_i)_{i=1,2}$, 存在第三个平展邻域 $(U, \bar{u})$ 和态射 $(U, \bar{u}) \to (U_i, \bar{u}_i)$;

(ii) 假设 $h_1, h_2 : (U_1, \bar{u}_1) \to (U_2, \bar{u}_2)$ 是平展邻域的态射, 则存在第三个平展邻域 $(U, \bar{u})$ 和态射 $h : (U, \bar{u}) \to (U_1, \bar{u}_1)$ 使得 $h_1 \circ h = h_2 \circ h$.

证明. (i) 只需考虑 $U = U_1 \times_X U_2$, 而 $\bar{s} \to U$ 被 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 定义;

(ii) 定义 U 为纤维积

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & U_1 \arrow[d, "(h_1,h_2)"] \\ U_2 \arrow[r, "\Delta"] & U_2 \times_X U_2 \end{tikzcd}$$

并定义 $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. □

注 5.5. 在 *(ii)* 内, 通过一些假设, 我们可以使得态射 $h_1 = h_2$: 若我们有诺特分离概形的图标

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, shift right, "g"'] \arrow[dl, shift left, "g'"] \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "p"'] & S \end{tikzcd}$$

其中 Y 连通且 p, q 平展, 则 $g = g'$. 这是因为 $\delta : X \to X \times_S X$ 平展且是闭浸入, 则 $X \times_S X = \delta(X) \sqcup Z$ 为连通分支的无交并. 注意到 $g \times g' : Y \to X \times_S X$ 有连通的像. 根据图知 $\delta(X) \cap \mathrm{Im}(g \times g') \neq \emptyset$, 故 $\mathrm{Im}(g \times g') \subset \delta(X)$, 故 $g = g'$.

定义 5.6. 给定概形 X 和 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$. 给定几何点 $\bar{x}$, 定义 $\mathscr{P}$ 在 $\bar{x}$ 的茎为

$$\mathscr{P}_{\bar{x}} := \varinjlim_{(U, \bar{u})} \mathscr{P}(U)$$

其中余极限遍历所有平展邻域, 根据引理*5.4*此为滤余极限.

注 5.7. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 则不难看出 $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_{\bar{x}}$ 作为函子 $\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sets}$ 或者 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sets}$ 或者 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{AbGrps}$ 或者 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{AbGrps}$ 都是正合的. 如果你不放心, 请参考*Tag 03PT*.

定义 5.8. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 给定集合 E, 定义 $E^{\bar{x}} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 为:

$$E^{\bar{x}}(U) := \bigoplus_{\mathrm{Hom}_X(\bar{x},U)} E.$$

注 5.9. 有几个简单的性质:

(i) 这个 $E^{\bar{x}}$ 在平展拓扑下一定是层, 其他景上面不一定;

(ii) 我们有伴随函子 $((-)_{\bar{x}}, (-)^{\bar{x}})$, 在预层范畴上这个伴随对任何景都对, 在层范畴上需要一定条件 (而小平展景显然满足), 若对这个有兴趣, 参考*Tag 00Y3*;

(iii) 对于几何点 $\bar{y}$, 除非 $\bar{y}$ 也在 $\bar{x}$ 对应的点上, 否则 $(E^{\bar{x}})_{\bar{y}} = 0$.

命题 5.10. 给定概形 X 和几何点 $\bar{x}$, 对于 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$ 有 $\mathscr{P}_{\bar{x}} = \mathscr{P}^{\sharp}_{\bar{x}}$.

证明. 因为有伴随性, 对于任何集合 E, 我们有

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sets}}(\mathscr{P}_{\bar{x}}, E) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})}(\mathscr{P}, E^{\bar{x}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})}(\mathscr{P}^{\sharp}, E^{\bar{x}}) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sets}}(\mathscr{P}^{\sharp}_{\bar{x}}, E),$$

因此成立. □

对于结构层 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$, 它的茎有特殊的代数性质.

命题 5.11. 给定概形 X 和在 $x \in X$ 上的几何点 $\bar{x}$. 设 $\kappa(x) \subset \kappa(x)^{\text{sep}} \subset \kappa(\bar{x})$ 是可分代数闭包, 则有

(i) 有同构 $(\mathscr{O}_{X,x})^{\text{sh}} \cong (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 前者为 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的严格 *Hensel* 化;

(ii) 设 $\mathfrak{m}_x$ 是 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的极大理想, 则 $\mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 是 $(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 的极大理想, 且满足

$$(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}/\mathfrak{m}_x(\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}} \cong \kappa(x)^{\text{sep}};$$

(iii) 对任何首一多项式 $f \in (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}[T]$ 和任意 $\bar{f} \in \kappa(x)^{\text{sep}}[T]$ 的根 $\alpha_0 \in \kappa(x)^{\text{sep}}$ 使得 $\bar{f}'(\alpha_0) \neq 0$, 则存在 $\alpha \in (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$ 使得 $f(\alpha) = 0$ 且 $\alpha_0 = \bar{\alpha}$.

证明. 这些都是复杂的交换代数, 见Tag 04GE, Tag 04GP和04GW. 其中 (iii) 被称之为 Hensel 引理, 满足 (iii) 的环叫做 Hensel 局部环, 如果这个环的剩余类域可分代数闭, 则称之为严格 Hensel 局部环. 所以我们这里就是一个严格 Hensel 环. □

注 5.12. 我们之后将记 $\mathscr{O}^{\text{sh}}_{X,\bar{x}} := (\mathscr{O}_{X,\text{ét}})_{\bar{x}}$, 也不会有歧义.

对于 Hensal 局部环, 我们还有如下常用的结论:

命题 5.13 (Hensel 引理)**.** 设 $(A, \mathfrak{m}, \kappa)$ 是 *Hensal* 局部环, 则

(i) 任何有限 A-代数 S 都是在 R 上有限的局部环的乘积, 此时这些局部环依旧是 *Hensal* 局部环;

(ii) 如果平展 A-代数 B 满足 B 的极大理想 $\mathfrak{n}$ 卧于 $\mathfrak{m}$ 上使得 $\kappa \cong B/\mathfrak{n}$, 则存在同构 $\phi : B \cong A \times B'$ 使得 $\phi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m} \times B' \subset A \times B'$;

(iii) 我们有范畴等价:

$$\{\text{有限平展}A\text{-代数}\} \longleftrightarrow \{\text{有限平展}\kappa\text{-代数}\}, S \mapsto S/\mathfrak{m}S.$$

证明. 纯粹的交换代数, 参考Tag 04GG, Tag 04GH, Tag 04GK和Tag 03QH. □

5.3 常值层和局部常值层

定义 5.14. *给定概形 X.*

(i) 对于 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$), 则 $\mathscr{F}$ 称为常值层如果存在集合 E(或者 Abel 群 G) 使得 $\mathscr{F} \cong (U \mapsto E)^\sharp =: \underline{E}_X$(或者 $\cong (U \mapsto G)^\sharp =: \underline{G}_X$);

(ii) 称 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$) 是局部常值层, 如果存在覆盖 $\{U_i \to X\}$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是常值层;

(iii) 称 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或者 $\in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$) 是有限局部常值层, 如果 $\mathscr{F}$ 是局部常值层且取值的集合 (或 Abel 群) 是有限集合.

注 5.15. *对于 (i)(ii) 可以定义一般的 Λ-模的常值层/局部常值层.*

引理 5.16 (有限平展映射的平展局部分解)**.** *(i) 设 $f: X \to S$ 有限无分歧, 取 $s \in S$, 则存在平展邻域 $(U, u) \to (S, s)$ 和有限无交分解 $X_U = \coprod_j V_j$ 使得所有 $V_j \to U$ 均为闭浸入.*

(ii) 设 $f: X \to S$ 有限平展, 取 $s \in S$, 则存在平展邻域 $(U, u) \to (S, s)$ 和有限无交分解 $X_U = \coprod_j V_j$ 使得所有 $V_j \to U$ 均为同构.

证明. 首先, 有关各种映射的平展局部, 可参考Tag 024J. 二者究其本质都是拟有限态射的平展局部性质 (见Tag 02LM). 证明虽然不甚复杂, 但写于此意义也不大, 故这里我们略去证明, 证明参考Tag 04HJ和 Tag 04HN. □

命题 5.17. *给定概形 X, 则有范畴等价*

$$\{\text{有限平展映射} U \to X\} \cong \{\text{有限局部常值层}\}, (U \to X) \mapsto \mathscr{F} = h_U.$$

证明. 根据引理5.16(ii), 不难看出 h_U 确实是有限局部常值层. 另一方面, 任取 $\mathscr{F}$ 是有限局部常值层, 则存在平展覆盖 $\{U_i \to X\}$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是常值层, 则可以被有限平展态射 $U_i \to X$ 表示 (设取值集合的基数是 κ, 若是诺特分离概形, 考虑注5.5, 则令 $Z_i = \coprod_{i=1}^{\kappa} U_i$, 故 $\mathscr{F}|_{U_i} = h_{Z_i}$). 根据仿射态射满足有效的忠实平坦下降 (fpqc), 我们可以得到存在 $Z \to X$ 使得 $h_Z \cong \mathscr{F}$. 而由于有限性和平展性都是 fpqc 局部的, 故 $Z \to X$ 仍然是有限平展映射. □

命题 5.18. *给定连通概形 X 和几何点 $\bar{x}$.*

(i) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})\} \to \{\text{有限}\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-集}\};$$

(ii) 存在范畴等价

$$\{\text{有限局部常值层} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})\} \to \{\text{有限}\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})\text{-模}\}.$$

证明. (i) 根据定理2.2(i) 和命题5.17, 得到结论; (ii) 即为 (i) 赋予加法结构. □

5.4 Abel 群预层和层构成的范畴

固定概形 X, 可以看出 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 一定是 Abel 范畴, 它里面的正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等皆为正常的定义方法. 我们主要考虑的是满子范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 它是加性范畴, 我们将要证明它为 Abel 范畴 (其正合性, 核, 余核, 积, 极限和余极限等和一般拓扑空间上类似, 皆为层化).

命题 5.19. *给定概形 X 和范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的列*

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0,$$

则下述命题等价:

(i) 列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 在 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内 (函子性的) 正合;

(ii) 列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 在 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内正合且 $\mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ 满足对任意的 $U \in X_{\text{ét}}$ 和 $s \in \mathscr{F}''(U)$, 存在 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ 使得 $s|_{U_i}$ 在 $\mathscr{F}(U_i) \to \mathscr{F}''(U_i)$ 的像内;

(iii) 对所有几何点 $\bar{x} \to X$, 都有 $0 \to \mathscr{F}'_{\bar{x}} \to \mathscr{F}_{\bar{x}} \to \mathscr{F}''_{\bar{x}} \to 0$ 正合.

证明. (ii) 推 (i), 平凡. (i) 推 (iii) 由于取茎是正合函子, 故也平凡.

(iii) 推 (ii), 先证明满射部分. 任取 $U \in X_{\text{ét}}$ 和几何点 $\bar{u} \to U$. 设 $\bar{x} : \bar{u} \to U \to X$ 也为几何点. 根据定义有 $\mathscr{F}_{\bar{u}} = \mathscr{F}_{\bar{x}}$, 故 $\mathscr{F}_{\bar{u}} \to \mathscr{F}''_{\bar{u}}$ 也是满射. 再由定义知道成立. 对于其他部分, 注意到 $s \in \mathscr{F}(U)$ 为零当且仅当 $s_{\bar{u}} = 0$ 即可, 这也是定义. □

推论 5.20. *给定概形 X, 则范畴 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是 Abel 范畴.*

5.5 Kummer 理论和 Artin-Schreier 列

类似于复几何里的正合列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \to 0$, 我们有如下正合列 (以此取逆极限来模拟):

定理 5.21 (Kummer 正合列)**.** *给定概形 X 和正整数 n 使得 n 在 X 内可逆 (不被任何剩余类域的特征整除), 则有 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列*

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_{n,X} \to \mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t \mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X} \to 0.$$

证明. 显然 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 为 $\mathbb{G}_{m,X} \xrightarrow{t\mapsto t^n} \mathbb{G}_{m,X}$ 的核. 故只需要证明满射. 取 $U = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的平展 X-概形, 任取 $a \in \Gamma(U, \mathbb{G}_{m,X})$, 根据假设知典范映射 $V = \operatorname{Spec} A[t]/(t^n - a) \to U$ 是平展映射. 注意到对应的环同态是有限自由的, 故忠实平坦, 于是是满射. 因此 $V \to U$ 是平展覆盖, 根据5.19即可得到结论. □

定理 5.22 (Artin-Schreier 列)**.** *给定概形 X 和素数 p 使得在 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ 内 $p = 0$, 则有 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内的正合列*

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X \to \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{t \mapsto t^p - t} \mathbb{G}_{a,X} \to 0.$$

证明. 类似于 Kummer 正合列, 注意到此时 $\operatorname{Spec} A[t]/(t^p - t - a) \to \operatorname{Spec} A$ 是平展覆盖即可. □

5.6 拟凝聚层

定义 5.23. 考虑景 $X_{\text{ét}}$ 上的 $\mathscr{O}_{X,\text{ét}}$-模 $\mathscr{F}$ 称之为拟凝聚的如果任取 $U \in X_{\text{ét}}$, 存在 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ 使得

$$\mathscr{F}|_{X_{\text{ét}}/U_i} \cong \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{k\in K}\mathscr{O}_{X,\text{ét}/U_i} \to \bigoplus_{l\in L}\mathscr{O}_{X,\text{ét}/U_i}\right).$$

其中 $X_{\text{ét}}/U_i$ 是局部景, 其中的对象皆为 $V \to U_i$, 覆盖皆为 U_i-映射.

注 5.24. 这个在所有景上面都可以定义.

作为下降理论的应用, 我们有如下令人震惊的结论:

定理 5.25. 如下拟凝聚层范畴是范畴等价:

$$\mathrm{Qcoh}(X_{\text{Zar}}) \to \mathrm{Qcoh}(X_{\text{ét}}), \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\text{ét}}.$$

证明. 这个是下降理论的直接应用, 需要用到纤维范畴 QCOH 然后可以证明其为有效的 fpqc 下降, 但这个的证明非常复杂 (参考 [2] 定理 4.23). 我们推荐感兴趣的读者阅读 [15] 命题 4.3.15. □

注 5.26. 作为推广我们可以考虑一些特殊的景, 也满足类似结论. 见 *Tag 03OJ.*

6 层的一些函子

6.1 直像

定义 6.1. 考虑概形映射 $f : X \to Y$, 设 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreSh}(X_{\text{ét}})$, 定义直像为

$$f_*\mathscr{P}(U \to Y) = \mathscr{P}(U \times_Y X \to X).$$

命题 6.2. 概形映射 $f : X \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.

(i) 必然有 $f_*\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$;

(ii) 对于 $g : Y \to Z$, 我们有 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;

(iii) 若视作函子 $f_* : \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$, 则左正合.

证明. 此乃定义, 略去. □

命题 6.3. 考虑概形映射 $f : X \to Y$ 和几何点 $\bar{y} = \operatorname{Spec} k \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$.

(i) 若 f 是闭浸入, 则

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \begin{cases} \{*\} & \text{当} \quad \bar{y} \notin X \\ \mathscr{F}_{\bar{y}} & \text{当} \quad \bar{y} \in X \end{cases}$$

其中 $\{*\}$ 指单点集;

(ii) 若 f 是开浸入, 若 $\bar{y} \in X$, 则 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \mathscr{F}_{\bar{y}}$;

(iii) 如果 f 是有限态射, 则

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \prod_{\bar{x}:\operatorname{Spec} k \to X, f(\bar{x}) = \bar{y}} \mathscr{F}_{\bar{x}}.$$

若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \bigoplus_{\bar{x}:\operatorname{Spec} k \to X, f(\bar{x}) = \bar{y}} \mathscr{F}_{\bar{x}}$.

证明. (ii) 是平凡的;(iii) 颇为麻烦, 需要用到严格 Hensel 环的性质, 我们略去, 参考Tag 03QP.

(i) 当 $\bar{y} \notin X$, 这是显然的. 下面考虑 $\bar{y} \in X$ 的情况. 考虑两个事实:

事实 1. 对任意两个平展态射 $U, U' \to Y$, 设 $h: U_X \to U'_X$ 是 X-态射, 则存在 $a: W \to U, b: W \to U'$ 使得 $a_X: W_X \to U_X$ 是同构且 $h = b_X \circ (a_X)^{-1}$.

事实 1 的证明: 设 $M = U \times_Y U'$ 和图像 $\Gamma_h \subset M_X$. 注意到 Γ_h 是平展映射 $\mathrm{pr}_{1,X}: M_X \to U_X$ 一个截面的像, 故是开的. 则存在开子概形 $W \subset M$ 使得 $W \cap M_X = \Gamma_h$. 故取 $a = \mathrm{pr}_1|_W, b = \mathrm{pr}_2|_W$ 即可.

事实 2. 对平展态射 $V \to X$, 存在一族平展态射 $U_i \to Y$ 和态射 $U_{i,X} \to V$ 使得 $\{U_{i,X} \to V\}$ 是 V 的是 Zariski 覆盖.

事实 2 的证明: 不妨设 Y, V 皆为仿射的, 则化为以下简单的交换代数: 假设环 R 和理想 $I \subset R$, 设 $R/I \to S'$ 平展, 则存在平展同态 $R \to S$ 使得 $S' \cong S/IS$ 是 R/I-代数同构. 这是因为平展同态总可以写成 $S' = (R/I)[x_1, ..., x_n]/(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)$ 其中 $\overline{\Delta} = \det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$ 在 S' 里可逆. 只需要提升成某些 $f_1, ..., f_n$ 且设

$$S = R[x_1, ..., x_n, x_{n+1}]/(f_1, ..., f_n, x_{n+1}\Delta - 1),$$

其中 $\Delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 即可.

回到原结论. 注意到 $(f_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = \varinjlim_{(U,\bar{u})} \mathscr{F}(U_X)$ 且 $\mathscr{F}_{\bar{y}} = \varinjlim_{(V,\bar{v})} \mathscr{F}(V)$, 故 $\{(U, \bar{u})\}$ 在 $\{(V, \bar{v})\}$ 内共尾, 则得证. □

6.2 逆像

定义 6.4. *考虑概形映射 $f: X \to Y$, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 定义逆像为*

$$f^{-1}\mathscr{F} = \left((U \to X) \mapsto \varinjlim_{U \to X \times_Y V} \mathscr{F}(V \to Y) \right)^{\sharp}.$$

命题 6.5. *考虑概形映射 $f: X \to Y$, 则*

(i) 有伴随函子 (f^{-1}, f_*);

(ii) 函子 $f^{-1}: \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和 $f^{-1}: \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 正合;

(iii) 对几何点 $\bar{x} \to X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$, 设 $\bar{y} = \ \to X \to Y$, 则 $(f^{-1}\mathscr{F})_{\bar{x}} \cong \mathscr{F}_{\bar{y}}$;

(iv) 对 $g: Y \to Z$, 有 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;

(v) 对平展映射 $V \to Y$, 有 $f^{-1}h_V = h_{X \times_Y V}$.

证明. (i)(ii) 略去.(iv) 和 (v) 由伴随性和 Yoneda 引理显然. 考虑 (iii), 注意到

$$\begin{aligned}(f^{-1}\mathscr{F})_{\bar{x}} &= \varinjlim_{(U,\bar{u})} (f^{-1}\mathscr{F})(U) \\ &= \varinjlim_{(U,\bar{u})} \varinjlim_{a: U \to X \times_Y V} \mathscr{F}(U) \\ &= \varinjlim_{(V, a \circ \bar{u})} \mathscr{F}(V) = \mathscr{F}_{\bar{y}}\end{aligned}$$

即可. □

命题 6.6 (基变换). 考虑纤维积

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

其中 f 有限, 则 $f'_* \circ (g')^{-1} = g^{-1} \circ f_*$.

证明. 只需验证茎即可. 注意到纤维积, 对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 考虑几何点 $\bar{y}' : \operatorname{Spec} k \to Y'$, 我们有

$$\begin{aligned}(f'_*(g')^{-1}(\mathscr{F}))_{\bar{y}'} &= \prod_{\bar{x}':\operatorname{Spec} k \to X', f'\circ \bar{x}' = \bar{y}'} ((g')^{-1}(\mathscr{F}))_{\bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x}':\operatorname{Spec} k \to X', f'\circ \bar{x}' = \bar{y}'} \mathscr{F}_{g'\circ \bar{x}'} \\ &= \prod_{\bar{x}:\operatorname{Spec} k \to X, f\circ \bar{x} = g\circ \bar{y}'} \mathscr{F}_{\bar{x}} = (f_*\mathscr{F})_{g\circ \bar{y}'} = (g^{-1}f_*\mathscr{F})_{\bar{y}'}\end{aligned}$$

得到结论. □

6.3 零扩张函子 (下叹号函子)

定义 6.7. 考虑平展映射 $j : U \to X$, 定义 $j_! : \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 为

$$j_!\mathscr{F} = \left((V \mapsto X) \mapsto \bigoplus_{V \to U} \mathscr{F}(V \to U) \right)^{\sharp}.$$

命题 6.8. 对平展映射 $j : U \to X$, 有

(i) 有伴随函子 $(j_!, j^{-1})$;

(ii) 对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 和几何点 $\bar{x} : \operatorname{Spec} k \to X$ 我们有

$$(j_!\mathscr{F})_{\bar{x}} = \bigoplus_{\bar{u}:\operatorname{Spec} k \to U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathscr{F}_{\bar{u}},$$

特别的, 函子 $j_!$ 正合;

(iii) 若 j 有限平展, 则存在 $j_! \to j_*$ 使得对任何 $\mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 都同构;

(iv) 若 j 是开浸入, 则对 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(U_{\text{ét}})$ 有 $j^{-1}j_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F} \to j^{-1}j_!\mathscr{F}$ 是同构. 事实上 $j_!\mathscr{F}$ 是唯一一个使得限制在 U 上是 $\mathscr{F}$, 且在其他地方的茎是 0 的 *Abel* 群层.

证明. (i)(iv) 平凡, 略去.(iii) 只需要考虑平展局部, 用引理5.16(ii) 即可验证.

考虑 (ii), 映射为

$$\begin{aligned}(j_!\mathscr{F})_{\bar{x}} = \varinjlim_{(V,\bar{v})} (j_!\mathscr{F})(V) = \varinjlim_{(V,\bar{v})} \bigoplus_{\phi:V\to U} \mathscr{F}(\phi) \\ \to \bigoplus_{\bar{u}:\operatorname{Spec} k \to U, j(\bar{u}) = \bar{x}} \mathscr{F}_{\bar{u}}.\end{aligned}$$

同构参考Tag 03S5. □

命题 6.9 (基变换). *(i)* 设 $f: Y \to X$ 是概形映射且 $j: V \to X$ 平展, 考虑纤维积

$$\begin{tikzcd} Y \times_X V \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner" very near start] & V \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

则在 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层都有 $j'_! \circ (f')^{-1} = f^{-1} \circ j_!$;

(ii) 设 $f: X \to Y$ 是有限映射且 $j: V \to Y$ 开浸入, 且基变换之后 $g: U = X \times_Y V \to V$ 平展, 设 $j': U \to X$, 则在 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 内有 $f_* \circ j'_* = j_! \circ g_*$.

证明. (i) 考虑二者的右伴随函子, 然后因为直像和平展局部化交换即可得到结论;

(ii) 首先考虑 Y 的不在 U 内的几何点上的茎不难得知二者皆为零. 其次用命题6.8(iv) 和命题6.6, 得到同构

$$j^{-1} f_* j'_! \mathscr{F} = g_* (j')^{-1} j'_! \mathscr{F} = g_* \mathscr{F}.$$

再次用命题6.8(iv) 即可得到结论. □

命题 6.10. 对于概形 X 和闭子概形 $i: Z \to X$ 及其补 $j: U \to X$, 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有正合列

$$0 \to j_! j^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to i_* i^{-1} \mathscr{F} \to 0.$$

证明. 分情况不难根据定义得到取茎之后正合, 然后用命题5.19即可. □

7 平展上同调的定义和基本性质

7.1 定义

引理 7.1. 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 存在内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 使得有单射 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}$.

证明. 任取 $x \in X$ 和在其上的几何点 $i_x: \bar{x} \to X$, 取内射 Abel 群满足 $\mathscr{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow I(x)$. 则 $\mathscr{I}(x) := i_{x,*} I(x)$ 是内射的, 故取 $\mathscr{I} = \prod_{x \in X} \mathscr{I}(x)$ 即可得到 $\mathscr{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} \mathscr{F}_{\bar{x}} \hookrightarrow \mathscr{I}$. □

定义 7.2. 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 不难得知截面函子 $\Gamma(X_{\text{ét}}, -)$ 左正合. 由引理*7.1*知有内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$, 则定义 X 上 $\mathscr{F}$ 的平展上同调为

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) := R^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathscr{F}) = H^i \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathscr{I}^*).$$

和我们之前定义的上同调理论类似, 我们也有如下基本结果:

命题 7.3. *(i)* 满足 $H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$;

(ii) 若 $\mathscr{I}$ 内射, 则当 $i > 0$ 时 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{I}) = 0$;

(iii) 短正合列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ 会诱导长正合列

$$0 \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}') \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}'') \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}') \to \cdots.$$

注 7.4. *(a)* 若 $g: U \to X$ 平展, 则 $g^{-1} \circ \Gamma(U, -) = \Gamma(U, -)$, 故 $H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U) = H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F})$;

(b) 对于 $f: X \to Y$, 因为有 $\mathscr{F} \to f_* f^{-1}\mathscr{F}$, 则诱导 $R\Gamma(Y, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, f^{-1}\mathscr{F})$, 故可以诱导映射 $H^i_{\text{ét}}(Y, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(X, f^{-1}\mathscr{F})$.

7.2 群上同调一瞥

几何人可以通过这里速成一下群的上同调理论.

定义 7.5. 设 G 是拓扑群.

(i) 一个 *Abel* 群 M*(*赋予离散拓扑*)* 称为 G-模, 如果有连续作用 $G \times M \to M$;

(ii) 设 Mod_G 是 G-模构成的范畴. 根据*Tag 04JF*, 范畴 Mod_G 有足够内射对象. 考虑左正合函子

$$\Gamma_G : \mathrm{Mod}_G \to \mathrm{AbGrps}, M \mapsto M^G,$$

定义群 G 的 *(*连续*)* 上同调为 $H^i(G, M) = R^i\Gamma_G(M)$. 若 G 是 *Galois* 群则成为 *Galois* 上同调.

命题 7.6. 对于群 G, 考虑群环 $\mathbb{Z}[G]$, 那么有自然的范畴等价 $\mathrm{Mod}_G \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$. 设 $\mathbb{Z}$ 可以经过平凡 G 作用来作为 $\mathbb{Z}[G]$ 模, 则 $H^i(G, M) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

证明. 近乎平凡, 略去. □

定理 7.7 (Tate)**.** 设 M 是拓扑群并且赋予连续 G-作用. 考虑复形

$$C^*_{\text{cont}}(G, M) : M \to \mathrm{Maps}_{\text{cont}}(G, M) \to \mathrm{Maps}_{\text{cont}}(G \times G, M) \to \cdots$$

其中边界算子为当 $n = 0$, 则 $m \mapsto (g \mapsto g(m) - m)$; 当 $n > 0$ 时定义为

$$\begin{aligned} d(f)(g_1, ..., g_{n+1}) = g_1(f(g_2, ..., g_{n+1}))& \\ + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f(g_1, ..., g_j g_{j+1}, ..., g_{n+1})& \\ + (-1)^{n+1} f(g_1, ..., g_n).& \end{aligned}$$

这样定义 *Tate* 连续上同调为 $H^i_{\text{cont}}(G, M) := H^i(C^*_{\text{cont}}(G, M))$. 则对于 $M \in \mathrm{Mod}_G$, 存在典范映射 $H^i(G, M) \to H^i_{\text{cont}}(G, M)$. 并且当 G 是离散群或者射有限群, 则为同构 $H^i(G, M) \cong H^i_{\text{cont}}(G, M)$.

证明. 映射 $H^i(G, M) \to H^i_{\text{cont}}(G, M)$ 通过万有 δ-函子不难诱导. 证明见 [13] 第二章. □

7.3 点的上同调

和代数拓扑里不同, 一个点的平展上同调也是很复杂的.

引理 7.8. 设 $x = \mathrm{Spec}\, k$, 固定几何点 $\bar{x} = \mathrm{Spec}\, \Omega$. 取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(x_{\text{ét}})$, 则

$$\Gamma(x, \mathscr{F}) \cong (\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\text{sep}}/k)}.$$

证明. 根据命题5.17和命题5.2, 我们用 Yoneda 引理有

$$\Gamma(x,\mathscr{F})=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})}(h_x,\mathscr{F})=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)-\text{集}}(\{*\},\mathscr{F}_{\bar{x}})=(\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$$

得到结论. □

定理 7.9. *设 $x=\operatorname{Spec}k,\bar{x}=\operatorname{Spec}k^{\mathrm{sep}}$ 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(x_{\text{ét}})$, 则对任意 $i\geq 0$,*

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^i(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),\mathscr{F}_{\bar{x}}).$$

证明. 根据引理, 我们得知 $\Gamma(x,\mathscr{F})=\Gamma_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}(\mathscr{F}_{\bar{x}}):=(\mathscr{F}_{\bar{x}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$, 故我们有

$$H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=R^i\Gamma(x,\mathscr{F})=R^i\Gamma_{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}(\mathscr{F}_{\bar{x}})=H^i(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),\mathscr{F}_{\bar{x}})$$

即可得到结论. □

注意到当 $x=\bar{x}$ 且当 $i>0$ 时, 就有 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=0$, 这和几何上是一样的.

7.4 严格 Hensel 局部环的上同调

我们时常会使用严格 Hensel 局部环的谱的上同调消失的结论如下:

定理 7.10. *设 R 是严格 Hensel 局部环, 设 $X=\operatorname{Spec}R$ 和闭点 $\bar{x}$. 则对任何 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有 $\Gamma(X,\mathscr{F})=\mathscr{F}_{\bar{x}}$. 特别的, 函子 $\Gamma(X,-)$ 正合, 故对任何 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和 $i>0$ 都有 $H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=0$.*

证明. 设平展邻域 $(U,\bar{u})$, 取 $\bar{u}$ 的的仿射邻域 $\operatorname{Spec}A$, 故 $R\to A$ 平展且 $\kappa(\bar{x})=\kappa(\bar{u})$. 由命题5.13(ii) 得知作为 R-代数有 $A\cong R\times A'$ 且和 $\kappa(\bar{x})=\kappa(\bar{u})$ 契合. 故我们有截面 $X\to\operatorname{Spec}A$. 因此平展邻域 $(X,\bar{x})$ 是共尾的, 故 $\Gamma(X,\mathscr{F})=\mathscr{F}_{\bar{x}}$. 其他结论就平凡了. □

7.5 平展上同调和极限一瞥

我们这里只给出叙述, 不给出证明, 详细细节参考Tag 03Q4.

定义 7.11. *设 I 是预序集, 考虑逆系统 $(X_i,f_{i'i})_I$. 一个在其上定义的层系统 $(\mathscr{F}_i,\varphi_{i'i})$ 为满足*

(i) 层 $\mathscr{F}_i\in\mathrm{Sh}(X_{i,\text{ét}})$;
(ii) 对 $i'\geq i$, 有 $\mathrm{Sh}(X_{i,\text{ét}})$ 内的映射 $\varphi_{i'i}:f_{i'i}^{-1}\mathscr{F}_i\to\mathscr{F}_{i'}$
使得 $\varphi_{i''i}=\varphi_{i''i'}\circ f_{i''i'}^{-1}\varphi_{i'i}$.

定理 7.12 (Tag 09YQ)**.** *考虑定向逆系统 $(X_i,f_{i'i})_I$ 使得 X_i 拟紧拟分离且 $f_{i'i}$ 仿射. 对于其上定义的层系统 $(\mathscr{F}_i,\varphi_{i'i})$, 假设 $f_i:X=\varprojlim X_i\to X_i$ 且 $\mathscr{F}:=\varinjlim f_i^{-1}\mathscr{F}_i$, 则有*

$$\varinjlim H^i_{\text{ét}}(X_i,\mathscr{F}_i)\cong H^i_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

7.6 平展上同调的拓扑不变性一瞥

定理 7.13 (平展上同调的拓扑不变性). 设 $f: X_0 \to X$ 是万有同胚 *(例如幂零理想层定义的闭浸入)*, 则

(i) 小平展景 $X_{\text{ét}} \to (X_0)_{\text{ét}}, V \mapsto V \times_X X_0$ 是同构;

(ii) 平展意象 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和 $\mathrm{Sh}((X_0)_{\text{ét}})$ 是同构;

(iii) 对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和任何 q 都有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_0, \mathscr{F}|_{X_0})$.

证明. (ii) 和 (iii) 由 (i) 可以得到. 而 (i) 比较复杂, 我们只给一瞥, 完整证明参考Tag 03SI. 事实上可以 (不太容易地) 约化到幂零理想层定义的闭浸入且是仿射局部的情况. 也就是说对于幂零理想 $I \subset A$, 有 $A_{\text{ét}} \cong (A/I)_{\text{ét}}$. 事实上对于平展 A/I-代数, 可以写为

$$A/I[x_1, ..., x_n]/(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)$$

且 $\det\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}\right)$ 可逆, 取一个提升得到 $A[x_1, ..., x_n]/(f_1, ..., f_n)$, 现在考察 $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 是否可逆. 不难得知由于 I 幂零, 则 A/I 内可逆的元素在 A 上一定可逆. □

7.7 支撑在闭集的上同调及性质

首先, 不难证明如下事实: 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 取截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 则存在开集 $W \subset U$ 使得

(i) W 是 U 内最大的开集使得 $s|_W = 0$;

(ii) 对任何几何点 $\bar{u} \to U$, 设 $\bar{s} = (U \to S) \circ \bar{u}$, 则

$$0 = (U, \bar{u}, s) \in \mathscr{F}_{\bar{s}} \Leftrightarrow \bar{u} \in W.$$

读者可以自己证明, 如果想当懒狗, 参考Tag 04FR.

定义 7.14. 对概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$.

(i) 层 $\mathscr{F}$ 的支集为点集 $\mathrm{supp}(\mathscr{F}) \ni s$ 使得对所有 *(一些)*s 上的几何点 $\bar{s}$ 都有 $\mathscr{F}_{\bar{s}} \neq 0$;

(ii) 截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, 其支集 $\mathrm{supp}(s)$ 定义为闭集 $U \backslash W$.

注 7.15. 层的支集不一定是闭的, 但如果取值是环, 那一定是闭的, 因为这时相当于单位截面的支集.

定义 7.16. 对概形 X, 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 定义

$$\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) = \{s \in \mathscr{F}(X) : \mathrm{supp}(x) \subset Z\}.$$

定义支撑在 Z 的平展上同调为

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) := R^i\Gamma_Z(X, \mathscr{F}).$$

命题 7.17. 对概形 X, 闭子概形 $Z \subset X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 设 $U = X \backslash Z$, 则有好三角:

$$R\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(U, \mathscr{F}) \to R\Gamma_Z(X, \mathscr{F})[1]$$

进而诱导出正合列:

$$\cdots \to H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \to H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to \cdots.$$

证明. 任取内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们断言 $\mathscr{I}(X) \to \mathscr{I}(U)$ 是满的. 设 $j: U \to X$, 注意到对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有

$$\mathrm{Hom}(j_!\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathscr{F}|_U) = \Gamma(U, \mathscr{F}),$$

因为 $\mathscr{I}$ 是内射的, 故只需证明 $j_!\underline{\mathbb{Z}}_U \to \underline{\mathbb{Z}}_X$ 是单射. 根据层化函子是正合的, 只需证明对平展映射 $V \to X$, 典范映射

$$\bigoplus_{V \to U} \underline{\mathbb{Z}}(U) \to \bigoplus_{V \to X} \underline{\mathbb{Z}}(U)$$

是单射, 而这是显然的, 故断言成立.

不难发现上述满射的核为 $\Gamma_Z(X, \mathscr{I})$, 因此立即得到好三角

$$R\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(X, \mathscr{F}) \to R\Gamma(U, \mathscr{F}) \to R\Gamma_Z(X, \mathscr{F})[1].$$

而长正合列因此是显然的. $\square$

定理 7.18 (切除)**.** *设 $f: X' \to X$ 平展和闭子概形 $Z' \subset X'$ 使得*

(i) 设 $Z := f(Z')$ 是闭集且 $f|_{Z'}: Z' \cong Z$ 同构;

(ii) 有 $f(X' \backslash Z') \subset X \backslash Z$.

则对任意的 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有对任意 i 的同构

$$H^i_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^i_{Z',\text{ét}}(X', f^{-1}\mathscr{F}).$$

证明. 设 $U' = X' \backslash Z', U = X \backslash Z$, 考虑

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \cong \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \end{array}$$

得到

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma_Z(X, \mathscr{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathscr{F}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X', f^{-1}\mathscr{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U', f^{-1}\mathscr{F}) \end{array}$$

其中虚线为诱导出来的映射. 由于 f^{-1} 正合且和内射对象交换, 则只需证明诱导的

$$g: \Gamma_Z(X, \mathscr{F}) \to \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F})$$

是同构. 注意到若 $s \in \ker g$, 则 s 在 $\Gamma(X', \mathscr{F})$ 和 $\Gamma(U, \mathscr{F})$ 是 0. 而 $\{X', U\}$ 是平展覆盖, 则 $s = 0$, 故是单射. 另一方面, 取 $s' \in \Gamma_{Z'}(X', f^{-1}\mathscr{F}) \subset \Gamma(X', f^{-1}\mathscr{F})$. 注意到 $s', 0$ 在 U' 是 0; 另外 s' 限制 $X' \times_X X' \rightrightarrows X'$ 都是相等的, 因此可以粘合成 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$, 故满射. $\square$

推论 7.19. *对概形 X 和闭点 $x \in X$, 任取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有*

$$H^i_{x,\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^i_{x,\text{ét}}(\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}, \mathscr{F}).$$

证明. 用定理7.18和定理7.12即可. $\square$

8 Čech 上同调和挠子

8.1 Čech 上同调

定义 8.1. 考虑概形 X 和一族平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i\in I}$, 考虑 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 定义

$$\check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) = \prod_{(i_0,\dots,i_r)\in I^{r+1}} \mathscr{P}(U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_r})$$

和映射 $d^r : \check{C}^r(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \to \check{C}^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$ 为

$$s = (s_{i_0,\dots,i_r}) \mapsto \left(\sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j (s_{i_0,\dots,i_{j-1},i_{j+1},\dots,i_{r+1}})|_{U_{i_0,\dots,i_{r+1}}} \right)_{i_0,\dots,i_{r+1}}.$$

复形 $\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P})$ 称为 *Čech* 复形, 其上同调

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) := H^i(\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P}))$$

称为 $\mathscr{P}$ 关于覆盖 $\mathfrak{U}$ 的 *Čech* 上同调.

注 8.2. 不难注意到 *Čech* 复形可以重新写成:

$$\check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})}\left(\left(\bigoplus_{i_0\in I} \mathbb{Z}_{U_{i_0}} \leftarrow \bigoplus_{(i_0,i_1)\in I^2} \mathbb{Z}_{U_{i_0}\times_X U_{i_1}} \leftarrow \cdots \right), \mathscr{P} \right).$$

而且直接 *(大量)* 计算会得到 Hom 里面的复形 $\mathbb{Z}^*_{\mathfrak{U}}$ 是正合的 *(参考 Tag 03AT)*.

例 8.1. 考虑覆盖 $\mathfrak{U} = \{Y \to X\}$ 使得 $Y \to X$ 是 *Galois* 覆叠 G. 对 $\mathscr{P} \in \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 假设其吧无交并映成积, 应用定理7.7则有 $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \cong H^r(G, \mathscr{P}(Y))$.

命题 8.3. 给定概形 X 和平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i\in I}$.
(i) 对任何内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 对 $i > 0$ 我们有 $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{I}) = 0$;
(ii) 在 $\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$ 内 $\check{H}^i(\mathfrak{U}, -)$ 是 $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -)$ 的导出函子;
(iii) 若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$.

证明. (ii) 运用万有 δ 函子理论即可;(iii) 就是层的条件之一;(i) 注意到

$$\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{I}) = H^i(\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})}(\mathbb{Z}^*_{\mathfrak{U}}, \mathscr{I}))$$

且 $\mathbb{Z}^*_{\mathfrak{U}}$ 正合和 $\mathscr{I}$ 内射即可. □

定义 8.4. 考虑概形 X 和一族平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i\in I}$. 这个覆叠的一个加细指覆盖 $\mathfrak{V} = \{V_j \to X\}_{j\in J}$ 满足对任意的 $V_j \to X$ 都存在分解 $V_j \to U_{\alpha(j)} \to X$. 这样会自然诱导一个 $\alpha^* : \check{C}^*(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \to \check{C}^*(\mathfrak{V}, \mathscr{P})$ 为 $(\alpha^r s)_{j_0,\dots,j_r} = s_{\alpha(j_0),\dots,\alpha(j_r)}|_{V_{j_0,\dots,j_r}}$. 因此诱导 $\rho(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) : \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}) \to \check{H}^i(\mathfrak{V}, \mathscr{P})$. 故而可以定义 *Čech* 上同调为

$$\check{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{P}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{P}).$$

命题 8.5. *给定概形 X.*

(i) 对任何内射对象 $\mathscr{I} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 对 $i > 0$ 我们有 $\check{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{I}) = 0$;

(ii) 若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则 $\check{H}^0_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$.

证明. (i) 注意到遗忘函子保持内射性质, 于是在 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 内也满足; (ii) 由于对所有覆盖都满足, 因此余极限也满足. □

8.2 Čech-导出谱序列

类似于 Zariski 上同调, 平展上同调也有类似的 Čech-导出的比较结论.

引理 8.6. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 考虑预层 $\underline{H}^i(\mathscr{F}) : U \mapsto H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U)$. 考虑遗忘函子 $i : \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})$, 我们有 $\underline{H}^r(-) = R^r i(-)$. 特别的 $\underline{H}^i(\mathscr{F})^\sharp = 0$.*

证明. 考虑 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{i} \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{\sharp} \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则取内射预解 $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}^*$ 我们有 $\underline{H}^r(\mathscr{F}) = H^r(i(\mathscr{I}^*))$. 因此 $\underline{H}^r(-) = R^r i(-)$. □

推论 8.7. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 对 $r > 0$, 任取 $s \in H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 都存在平展覆盖 $\{U_i \to X\}$ 使得 s 在每个 $H^r_{\text{ét}}(U_i, \mathscr{F}|_{U_i})$ 内均为 0.*

证明. 这是引理8.6的直接推论. □

定理 8.8. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 考虑预层 $\underline{H}^i(\mathscr{F}) : U \mapsto H^i_{\text{ét}}(U, \mathscr{F}|_U)$, 则有谱序列*

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}).$$

证明. 对 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{i} \mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \xrightarrow{\check{H}^0_{\text{ét}}(X,-)} \mathrm{AbGrps}$, 因为 $\check{H}^0_{\text{ét}}(X, -) \circ i = \Gamma(X, -)$, 引用上述引理和 Grothendieck 谱序列, 我们得到结论. □

作为应用, 我们有如下比较结果:

命题 8.9. *考虑概形 X 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$. 对于 $r = 0, 1$, 我们有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$.*

证明. 考虑谱序列 $E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 根据推论8.7, 我们得知对 $s > 0$ 有 $E_2^{0,q} = 0$. 观察谱序列第二页:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \bullet & \bullet \\
0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & 0 \arrow[drr] & \bullet & \bullet \\
0 & 0 & E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & \bullet
\end{tikzcd}$$

即可得知对于 $r = 0, 1$, 有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. □

注 8.10. *如果 X 拟紧且对任何有限子集都包含在某个仿射开集内, 则对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和任何 r, 我们都有 $\check{H}^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^r_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$. 参考 [11] 内的 III.2.17.*

8.3 应用 I——Mayer-Vietoris 列

定理 8.11 (Mayer-Vietoris)**.** *设概形 $X = U \cup V$ 为开集的并, 给定 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 我们有正合列:*

$$\cdots \longrightarrow H^s_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow H^s_{\text{ét}}(U,\mathscr{F}) \oplus H^s_{\text{ét}}(V,\mathscr{F}) \longrightarrow H^s_{\text{ét}}(U\cap V,\mathscr{F}) \longrightarrow H^{s+1}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots .$$

证明. 设覆盖为 $\mathfrak{U} = \{U \to X, V \to X\}$. 根据 Čech 上同调定义, 我们有如下正合列:

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \longrightarrow H^s_{\text{ét}}(U,\mathscr{F}) \oplus H^s_{\text{ét}}(V,\mathscr{F}) \longrightarrow H^s_{\text{ét}}(U\cap V,\mathscr{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \longrightarrow 0.$$

另一方面, 考虑谱序列 $E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$. 注意到当 $r > 1$ 时有 $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) = 0$, 运用谱序列结论 [8] 命题 2.2.4 我们有如下正合列

$$0 \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{H}^s(\mathscr{F})) \to H^{s+1}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^{s+1}(\mathscr{F})) \to 0.$$

综合两个正合列即可得到结论. □

注 8.12. *直接证明参考 Tag 0A50. 还有相对版本的 Mayer-Vietoris 列, 我们不再赘述, 见 Tag 0EYK.*

8.4 应用 II——拟凝聚层的上同调

接下来介绍一个意料之中的结果.

引理 8.13. *设 $X = \operatorname{Spec} A$ 仿射, 取拟凝聚层 $\mathscr{F}^{\text{ét}}$, 则对 $i > 0$ 都有 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}}) = 0$.*

证明. 我们用对 i 的归纳法.

先考虑 $i = 1$. 取 $\xi \in H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 将覆盖加细可以假设 U_i 仿射. 根据命题8.9得到其对应 $\eta' \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 设 $\mathfrak{V} = \{\sqcup_i U_i \to X\}$ 不难看出 $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 假设 $\mathfrak{V} = \{\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A\}$, 则复形 $\check{C}^*(\mathfrak{V}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$ 为

$$B \otimes_A M \to B \otimes_A B \otimes_A M \to B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A M \to \cdots .$$

故成立.

对于 $i > 1$, 取 $\xi \in H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}})$, 由推论8.7存在平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}$ 使得 $\eta|_{U_i} = 0$. 将覆盖加细可以假设 U_i 仿射. 注意到 $U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$ 皆为仿射, 考虑谱序列8.8

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p_{\text{ét}}(X, \underline{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

根据归纳假设知道对 $0 < q < p$ 都有 $E_2^{p,q} = 0$, 我们可以看出 ξ 必然来自 $\xi' \in \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}})$. 继续 $i = 1$ 情况的证明即可. □

定理 8.14 (平展-Zariski 的拟凝聚上同调比较定理)**.** *对概形 X 和拟凝聚层 $\mathscr{F}$, 对任何 $i \geq 0$ 我们都有*

$$H^i(X, \mathscr{F}) \cong H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}}).$$

证明. 我们只考虑概形 X 分离的情况 (一般情况可以由Tag 03F3和 Tag 03DW得到). 取 Zariski 开覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}$, 根据分离性,$U_{i_0} \times_X U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$ 皆为仿射. 则谱序列8.8除了第一行全是零. 故我们有

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{\text{ét}}) = \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = H^i(X, \mathscr{F})$$

即可得到结论. □

定理 8.15 (拟凝聚层)**.** *计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调.*

证明. 运用定理5.25和定理8.14即可. □

因此, 我们只需要计算不是拟凝聚层的平展上同调即可. 比如挠层, 这是我们一大目标之一.

8.5 挠子理论一瞥和应用

类似于概型理论里的挠子理论, 我们可以将其推广至小平展景.

定义 8.16. *对概形 X 和平展覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i \to X\}_{i \in I}$. 取取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$, 设 $U_{i_0 \cdots i_p} = U_{i_0} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$. 我们定义取值在 $\mathscr{G}$ 的 1-余链为 $g = (g_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ 使得 $g_{ij} \in \mathscr{G}(U_{ij})$ 满足*

$$g_{ij}|_{U_{ijk}} g_{jk}|_{U_{ijk}} = g_{ik}|_{U_{ijk}}.$$

两个 1-余链 g, g', 定义 $g \sim g'$ 使得存在 $(h_i)_{i \in I}$ 其中 $h_i \in \mathscr{G}(U_i)$ 满足

$$g'_{ij} = h_i|_{U_{ij}} g_{ij} (h_j|_{U_{ij}})^{-1}.$$

定义 $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) := \{g\}/\sim$.

注 8.17. *根据构造, 对于短正合列 $1 \to \mathscr{G}' \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}'' \to 1$, 我们有*

$$1 \to \Gamma(X, \mathscr{G}') \to \Gamma(X, \mathscr{G}) \to \Gamma(X, \mathscr{G}'') \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}') \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}'').$$

定义 8.18. *对概形 X 和取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$. 设 $\mathscr{S} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 存在右 $\mathscr{G}$-作用. 我们称 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{G}$-挠子如果满足*

(i) 存在平展覆盖 $\{U_i \to X\}$ 使得 $\mathscr{S}(U_i) \neq \emptyset$;

(ii) 对任意的平展映射 $U \to X$ 和 $s \in \Gamma(U, \mathscr{S})$, 映射 $\mathscr{G}|_U \to \mathscr{S}|_U, g \mapsto sg$ 是同构.

我们称 $\mathscr{S}$ 被 $\{U_i \to X\}$ 平凡化. 如果 $\mathscr{S}(X) \neq \emptyset$ 我们称 $\mathscr{S}$ 是平凡 $\mathscr{G}$-挠子.

这两个概念出现不是偶然, 事实上我们有如下结论:

定理 8.19. *对概形 X 和取值为群 (不一定交换) 的平展层 $\mathscr{G}$. 我们有双射*

$$\{\text{被}\mathfrak{U}\text{平凡化的}\mathscr{G}\text{-挠子}\}/\cong \longleftrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathscr{G}).$$

证明. 我们阐述映射如何诱导. 给定被 $\mathfrak{U}$ 平凡化的 $\mathscr{G}$-挠子 $\mathscr{S}$. 对 $\mathfrak{U}=\{U_i\to X\}_{i\in I}$, 给定 $s_i\in\mathscr{S}(U_i)$, 由于作用单可迁, 存在 $g_{ij}\in\mathscr{G}(U_{ij})$ 使得 $(s_i|_{U_{ij}})g_{ij}=s_j|_{U_{ij}}$. 则得到 $g=(g_{ij})_{I^2}$. 对另一组 s_i', 我们可以有 $s_i'=s_ih_i$, 故会得到 $g\sim g'$, 因此良定义. 有关这个证明因为没什么意思所以我们略去, 参考 [12] 命题 11.1. □

注 8.20. *如果 G 是有限常值群层且 X 连通, 则*

$$\{G\text{-挠子}\}/\cong=\{Galois\ \text{群为}G\text{的}X\text{的}\ Galois\ \text{覆盖}\}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1^{\text{ét}}(X,\bar{x}),G).$$

定理 8.21 (向量丛和挠子)**.** *对概形 X 和秩 n 局部自由模构成的群 $\mathrm{Vect}^n_{\mathrm{Zar}}(X)$, 我们有*

$$\mathrm{Vect}^n_{\mathrm{Zar}}(X)\cong\check{H}^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathrm{GL}_{n,X})\cong\check{H}^1_{\mathrm{fppf}}(X,\mathrm{GL}_{n,X})\cong\check{H}^1_{\text{ét}}(X,\mathrm{GL}_{n,X}).$$

证明. 忽略, 参考 [12] 定理 11.4. □

推论 8.22. *我们有*

$$H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})\cong\mathrm{Pic}(X).$$

证明. 注意到 $\mathbb{G}_{m,X}$ 交换, 根据命题8.9和定理8.21即得到结果. □

推论 8.23 (Hilbert 定理 90)**.** *对于有限 Galois 扩张 L/k, 有 $H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)=0$.*

证明. 注意到

$$H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),(k^{\mathrm{sep}})^*)=\varinjlim_{\text{有限 Galois 覆盖}L/k}H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)$$

其中后者是 $L\subset L'$ 诱导 $H^1(\mathrm{Gal}(L/k),L^*)\hookrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(L'/k),(L')^*)$. 根据推论8.22和定理7.9得到当 $X=\mathrm{Spec}\,k$ 有 $H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})\cong H^1(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k),(k^{\mathrm{sep}})^*)$ 且

$$H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})\cong\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\,k)=0$$

即可得到结论. □

9 高阶直像

9.1 基础性质

定义 9.1. *对概形态射 $f:X\to Y$ 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 因为 f_* 左正合, 故可以得到高阶直像 $R^if_*\mathscr{F}$.*

命题 9.2. *对概形态射 $f:X\to Y$ 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有*

$$R^if_*\mathscr{F}=\left(U\mapsto H^i_{\text{ét}}(U\times_YX,\mathscr{F})\right)^\sharp.$$

证明. 定义函子 $f_*^{\mathrm{pre}}:\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}})\to\mathrm{PreAb}(Y_{\text{ét}})$ 为 $\mathscr{P}\mapsto(U\mapsto\Gamma(U\times_Y X,\mathscr{P}))$. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{PreAb}(X_{\text{ét}}) \arrow[r, "f_*^{\mathrm{pre}}"] & \mathrm{PreAb}(Y_{\text{ét}}) \arrow[d, "\sharp"] \\
\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}}) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})
\end{tikzcd}$$

由于 $\sharp, f_*^{\mathrm{pre}}$ 正合, 取内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$ 得到

$$R^r f_*\mathscr{F}=H^i(f_*\mathscr{I}^*)=H^r(\sharp\circ f_*^{\mathrm{pre}}\circ i\mathscr{I}^*)=(f_*^{\mathrm{pre}}H^r(i\mathscr{I}^*))^\sharp=(f_*^{\mathrm{pre}}\underline{H}^r(\mathscr{F}))^\sharp$$

即可. □

推论 9.3. *对于几何点 $\bar{y}$, 我们有*

$$(R^i f_*\mathscr{F})_{\bar{y}}=\varinjlim_{(U,\bar{u})}H^i_{\text{ét}}(U\times_Y X,\mathscr{F}).$$

推论 9.4. *如果 f 拟紧拟分离, 我们有*

$$(R^i f_*\mathscr{F})_{\bar{y}}=H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}\times_Y X,\mathscr{F}).$$

证明. 根据定义, 上述命题还有定理7.12即可得到结论 (这个在导出范畴内也对, 参考Tag 03Q7). □

例 9.1. *参考 [12] 定理 12.4, 如果 X 是正规整概形, 考虑一般点 $f:\eta\to X$, 则有 $(R^i f_*\mathscr{F})_\eta=H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\operatorname{Frac}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,x}\times_Y X,\mathscr{F})$.*

推论 9.5. *如果 $f:X\to Y$ 是有限映射, 则对 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有对于所有 $i>0$ 有 $R^i f_*\mathscr{F}=0$.*

证明. 这时我们有

$$(R^i f_*\mathscr{F})_{\bar{y}}=\varinjlim_{(U,\bar{u})}H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}\times_Y X,\mathscr{F}).$$

由于 f 有限, 那么 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}\times_Y X$ 在 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}$ 上有限. 故 $\operatorname{Spec}A=\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}\times_Y X$. 根据命题5.13(i) 得到 $A\cong A_1\times\cdots\times A_r$ 为 Hensel 局部有限 $\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{Y,y}$-代数. 故而 A_i 也是严格 Hensel 局部环. 此时 $\operatorname{Spec}A=\coprod_{i=1}^r\operatorname{Spec}A_i$, 运用定理7.10得到对 $i>0$ 有 $(R^i f_*\mathscr{F})_{\bar{y}}=0$. □

9.2 Leray 谱序列

定理 9.6 (Leray 谱序列)**.** *对概形态射 $f:X\to Y$ 和 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 则有谱序列*

$$E_2^{p,q}=H^p_{\text{ét}}(Y,R^q f_*\mathscr{F})\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

证明. 注意到 $\Gamma(X,-)\circ f_*=\Gamma(Y,-)$, 由于 f_* 保持内射, 根据 Grothendieck 谱序列得到

$$E_2^{p,q}=H^p_{\text{ét}}(Y,R^q f_*\mathscr{F})\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})$$

即可. □

10 曲线的上同调 I——基础结果

我们已经知道, 计算拟凝聚层的平展上同调只需要计算对应小 Zariski 景内拟凝聚层的上同调, 因此只需要考虑不是拟凝聚的情况. 眼下我们只能解决最简单的情况——代数闭域上光滑曲线的上同调, 我们主要关心的是它上面挠层的上同调. 本节我们讨论挠层里的基石——$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-系数的上同调, 求出这个我们根据有限生成 Abel 群就可以得到常值层的上同调, 之后的内容在后续章节阐述.

10.1 Brauer 群和 C_r 域一瞥

定义 10.1. *考虑所有域 k 上的 (有限维) 中心单代数构成的集合 CSA_k, 定义等价关系为 $A \sim B$ 当且仅当存在中心除环 D 使得 $A \cong \mathrm{Mat}_m(D), B \cong \mathrm{Mat}_n(D)$. 定义 Brauer 群为 $\mathrm{Br}(k) := \mathrm{CSA}_k/\sim$.*

注 10.2. *由定义,$\mathrm{Mat}_n(D) \sim D$.*

事实上根据 Wedderburn 定理, 域 k 上任何中心单代数都形如 $\mathrm{Mat}_n(D)$. 也就是说,$\mathrm{Br}(k)$ 给出了 k 上中心除环的分类! 结合代数理论告诉我们, 如果 A 是中心单代数, 那么 $A \otimes_k k^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_n(k^{\mathrm{sep}})$(参考 Tag 0753). 也就是说, 中心除环平展局部地是局部环, 而这一点能让我们使用 Galois 下降.

此外, 我们还能在一般的概形上定义中心单代数, 也就是所谓的 Azumaya 代数. 伽罗瓦上同调告诉我们 $\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), (k^{\mathrm{sep}})^*)$, 根据定理7.9, 我们有 $\mathrm{Br}(k) = H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{G}_m)$, 于是我们可以通过这个来定义一般概形的 Brauer 群.

定义 10.3. *域 K 称之为 C_r 的, 如果对任何 $0 < d^r < n$ 和任何 d 次齐次多项式 $f \in K[T_1, ..., T_n]$, 都存在不全是零的 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ 使得 $f(\alpha) = 0$.*

命题 10.4. *若 K 是 C_1 的, 则 $\mathrm{Br}(K) = 0$.*

证明. 不然, 考虑 K 上非平凡的有限维除环 D, 则 $D \otimes_K K^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_d(K^{\mathrm{sep}})$. 考虑行列式映射 $\det : D \otimes_K K^{\mathrm{sep}} \cong \mathrm{Mat}_d(K^{\mathrm{sep}}) \to K^{\mathrm{sep}}$. 取 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$-不变元得到映射 $N : D \to K$. 因为 K 是 C_1 的, 若 $d > 1$, 则存在非零 $x \in D$ 使得 $N(x) = 0$. 这会推出 x 不可逆, 这不可能! □

定理 10.5 (Tsen 定理)**.** *代数闭域 k 上的 r 维代数簇的函数域是 C_r 的.*

证明. □

Tsen 定理告诉我们为什么 C_r 域的条件如此奇怪. 事实上我们还会使用 Serre 的如下定理:

定理 10.6 (Serre)**.** *假设对于 K, 若对所有的有限扩张 K'/K 都有 $\mathrm{Br}(K') = 0$, 则对所有 $q \geq 1$ 都有*

$$H^q(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K), (K^{\mathrm{sep}})^*) = 0.$$

证明. 参考Tag 03R8. □

10.2 $\mathbb{G}_{m,X}$ 的上同调

定理 10.7 (基本正合列)**.** *设 X 是整正规概形, 设一般点嵌入为 $g:\eta\to X$ 和余一维点的嵌入 $i_z:z\to X$, 则有正合列:*

$$0\to\mathbb{G}_{m,X}\to g_*\mathbb{G}_{m,\eta}\to\bigoplus_{\operatorname{codim}(z)=1}i_{z,*}\underline{\mathbb{Z}}.$$

如果 X 光滑, 则也右正合, 进而正合.

证明. 取平展映射 $\phi:U\to X$, 不妨设 $U=\operatorname{Spec}A$ 连通仿射. 则根据正规性, 这个列限制在 U_{Zar} 上正合:

$$0\to A^*\to K^*\xrightarrow{\oplus v_{\mathfrak{p}}}\bigoplus_{\operatorname{ht}(\mathfrak{p})=1}\mathbb{Z}.$$

故我们得到正合列

$$0\to\mathbb{G}_{m,X}\to g_*\mathbb{G}_{m,\eta}\to\bigoplus_{\operatorname{codim}(z)=1}i_{z,*}\underline{\mathbb{Z}}.$$

当 X 光滑, 因为此时 Weil 除子和 Cartier 除子重合, 因此局部主, 故而右正合. □

引理 10.8. *设 k 是代数闭域且 K/k 是超越度为 1 的域扩张, 则对 $r\geq 1$ 有*

$$H^r_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}K,\mathbb{G}_m)=0.$$

证明. 根据定理7.9, 只需考虑 $H^q(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K),(K^{\mathrm{sep}})^*)$. 再根据定理10.6 我们只需证明对所有的有限扩张 K'/K 都有 $\mathrm{Br}(K')=0$. 设 $K'=\varinjlim K''$ 为在 k 上超越度为 1 的有限生成扩张, 故 $\mathrm{Br}(K')=\varinjlim\mathrm{Br}(K'')$. 于是只需考虑 k 上超越度为 1 的有限生成扩张. 根据 Tsen 定理10.5, 我们得知这样的域都是 C_1 的, 再根据命题10.4即可得到结论. □

定理 10.9. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑射影曲线, 则*

$$H^q_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_{m,X})=\begin{cases}\Gamma(X,\mathscr{O}_X)^* & q=0,\\ \operatorname{Pic}(X) & q=1,\\ 0 & q\geq 2.\end{cases}$$

证明. 根据推论8.22, 只需要考虑 $q\geq 2$ 的情况.

- **步骤 1.** 对任何 $q\geq 1$, 考虑一般点嵌入 $j:\eta\to X$, 则 $R^qj_*\mathbb{G}_{m,\eta}=0$.
  考虑茎即可. 考虑闭点 $\bar{x}\to X$, 取仿射邻域 $\operatorname{Spec}A$, 设 $K=\operatorname{Frac}(A)$, 则

$$(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}})\times_X\eta=\operatorname{Spec}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}}\otimes_A K),$$

其中后者是 DVR 的局部化. 由于现在极大理想生成元可逆, 故

$$\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}}\otimes_A K=\operatorname{Frac}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\bar{x}})=:K^{\mathrm{sh}}_{\bar{x}}.$$

因此 $(R^qj_*\mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{x}}=H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}K^{\mathrm{sh}}_{\bar{x}},\mathbb{G}_m)$. 根据引理10.8 得到结论.

若一般点, 考虑几何点 $\bar{\eta}$, 则 $\mathscr{O}_{\bar{\eta}}^{\mathrm{sh}} = \kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}$, 故

$$\begin{aligned}(R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{\eta}} &= H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}) \times_X \eta, \mathbb{G}_m) \\ &= H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}), \mathbb{G}_m) \\ &= H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Gal}(\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}/\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}}), (\kappa(\eta)^{\mathrm{sep}})^*) = 0,\end{aligned}$$

于是步骤 1 成立.

- **步骤 2.** 对任何 $q \geq 1$, 有 $H^q_{\text{ét}}(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$.

  根据定理9.6得到

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(Y, R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}).$$

再根据引理10.8得到当 $p+q \geq 1$ 时有 $H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$. 取 $q = 0$ 再利用步骤 1 即可得到步骤 2.

- **步骤 3.** 对任何 $q \geq 1$ 和闭点嵌入 $i_x : x \to X$, 有 $H^q_{\text{ét}}\left(X, \bigoplus_{x\text{闭点}} i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}\right) = 0$.

  只需证明对闭点嵌入 $i_x : x \to X$ 和 $q > 0$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}) = 0$. 根据推论9.5和定理9.6得到 $H^q_{\text{ét}}(X, i_{x,*}\underline{\mathbb{Z}}) = H^q_{\text{ét}}(x, \underline{\mathbb{Z}})$. 由于代数闭, 步骤 3 成立.

- **步骤 4.** 完成证明.

  根据步骤 2 和步骤 3 还有正合列10.7即可得到结论. □

10.3 $\boldsymbol{\mu}_{n,X}$ 的上同调

引理 10.10. *若概形 X 在基概形 $\operatorname{Spec} A$ 上, 其中 A 是严格 Hensel 局部环且 $n \in A^*$, 则 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \cong \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X$.*

证明. 因为 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} = \underline{\operatorname{Spec}}_X \mathscr{O}_X[t]/(t^n - 1)$, 由于严格 Hensal, 多项式 $t^n - 1$ 会分裂. 故得到平凡的平展覆盖 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \to X$, 则 $\boldsymbol{\mu}_{n,X} \cong \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X$(参考 [9] 命题 7.2.2). □

定理 10.11. *设 X 是代数闭域 k 上的亏格 g 光滑射影曲线, 且 $n \in k^*$, 则*

$$H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_n(k) & q = 0, \\ \operatorname{Pic}^0(X)[n] & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \geq 3. \end{cases}$$

根据引理10.10我们有 $H^q_{\text{ét}}\left(X, \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_X\right) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 0, \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g} & q = 1, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \geq 3. \end{cases}$

证明. 根据 Kummer 正合列5.21和定理10.9引出长正合列为:

$$\begin{aligned}&0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_n(k) \longrightarrow k^* \xrightarrow{(-)^n} k^* \\ &\longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X) \xrightarrow{(-)^n} \operatorname{Pic}(X) \\ &\longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.\end{aligned}$$

故而当 $q \geq 3$ 时 $H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = 0$. 只需考虑 $q = 1, 2$. 由于代数闭, 映射 $(-)^n : k^* \to k^*$ 是满射, 因此对于 $(-)^n : \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X)$, $H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \ker(-)^n$ 且 $H^2_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \operatorname{coker}(-)^n$. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Pic}^0(X) \arrow[r] \arrow[d, "{[n]}"] & \operatorname{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "(-)^n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\times n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Pic}^0(X) \arrow[r] & \operatorname{Pic}(X) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据 Abel 簇的知识我们知道 $[n]$ 是满射且 $\ker[n] = \operatorname{Pic}^0(X)[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g}$. 运用蛇引理即可得到结论. □

定理 10.12. 设 X 是代数闭域 k 上的仿射光滑曲线且 $n \in k^*$. 取光滑紧化 $X \subset X'$, 设 g 为 X' 亏格, 设 $r = \#(X' \backslash X)$, 则

$$H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_n(k) & q = 0, \\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+r-1} & q = 1, \\ 0 & q \geq 2. \end{cases}$$

证明. 设 $X = X' \backslash \{x_1, ..., x_r\}$, 则 $\operatorname{Pic}(X) = \operatorname{Pic}(X)/R$ 其中 R 被 $\mathscr{O}_{X'}(x_i)$ 生成. 由于 R 非空, 则 $\operatorname{Pic}^0(X') \to \operatorname{Pic}(X)$ 是满射, 故 $\operatorname{Pic}(X)$ 可除, 因此不难得知 $H^0_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = \boldsymbol{\mu}_n(k)$ 且当 $q \geq 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = 0$. 只需证明 $H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2g+r-1}$.

注意到我们有

$$\begin{aligned} H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) &= \{(\mathscr{L}, \alpha) : \mathscr{L} \in \operatorname{Pic}(X), \alpha : \mathscr{L}^{\otimes n} \cong \mathscr{O}_X\}/\cong \\ &= \frac{\{(\mathscr{L}', D, \alpha') : \mathscr{L}' \in \operatorname{Pic}^0(X), \operatorname{supp}(D) \subset \{x_1, ..., x_r\}, \alpha' : (\mathscr{L}')^{\otimes n} \cong \mathscr{O}_{X'}(D)\}}{\{(\mathscr{O}_{X'}(D), nD, 1^{\otimes n}) : \deg D = 0, \operatorname{supp}(D) \subset \{x_1, ..., x_r\}\}}. \end{aligned}$$

则有

$$0 \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X', \boldsymbol{\mu}_{n,X'}) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, \boldsymbol{\mu}_{n,X}) \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus r} \xrightarrow{\sum} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

其中 f 为 $(\mathscr{L}', D = \sum a_i[x_i], \alpha') \mapsto (a_i)_{i=1}^r$. 运用定理10.11计算秩即可. □

10.4 支撑在点上的上同调

命题 10.13. 设 U 是代数闭域 k 上的光滑曲线且 $n \in k^*$. 取闭点 $x \in U$, 则

$$H^q_{x,\text{ét}}(U, \boldsymbol{\mu}_{n,U}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & q = 2, \\ 0 & q \neq 2. \end{cases}$$

证明. 由推论7.19得知 $H^i_{x,\text{ét}}(U, \mathscr{F}) \cong H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathscr{F})$. 根据定理10.9得到当 $i > 0$ 时

$$H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}, \mathbb{G}_m) = 0.$$

再根据命题7.17得到正合列

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m) \arrow[r] & H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- (X.center) \tikztonodes -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}\backslash\{x\},\mathbb{G}_m) \arrow[r] & H^{i+1}_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}
$$

得到对 $i\neq 1$ 有

$$H^{i-1}_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}\backslash\{x\},\mathbb{G}_m)\cong H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m).$$

由于 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}\backslash\{x\}=\operatorname{Spec}K$, 根据引理10.8我们有当 $i\geq 1$ 时

$$H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}\backslash\{x\},\mathbb{G}_m)=0.$$

故

$$H^1_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m)=\frac{H^0_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x}\backslash\{x\},\mathbb{G}_m)}{H^0_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m)}\cong\mathbb{Z},$$

且当 $i\neq 1$ 时候有 $H^i_{x,\text{ét}}(\operatorname{Spec}\mathscr{O}^{\text{sh}}_{U,x},\mathbb{G}_m)=0$. 再根据 Kummer 正合列即可得到结论. □

11 可构建层和挠层

11.1 可构建层

定义 11.1. 设 X 是概形, 设 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 称为可构建的, 如果任取仿射开集 $U\subset X$, 存在有限分解 $U=\coprod_i U_i$ 为可构建局部闭集使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限局部常值层.

注 11.2. 对 $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 也同理定义, 但对一般的 Λ-模层, 需定义 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限型的局部常值层.

命题 11.3. 设概形 X 是拟紧拟分离且 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$*(或* $\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层, 这时需假设 Λ 诺特*)*, 则 $\mathscr{F}$ 可构建当且仅当存在开覆盖 $X=\bigcup_i U_i$ 使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 可构建当且仅当存在分解 $X=\bigcup_i U_i$ 可构建局部闭集使得 $\mathscr{F}|_{U_i}$ 是有限局部常值层.

证明. 纯粹的点集拓扑和层论, 参考Tag 095E. □

命题 11.4. *(i)* 设 $f:X\to Y$ 是概形映射, 令 $\mathscr{F}\,\mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$*(或* $\mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层, 其中 Λ 诺特*)* 是可构建的, 则 $f^{-1}\mathscr{F}$ 也是可构建的*;*

(ii) 设 X 是概形, 则 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 内的可构建层关于有限极限和余极限封闭, 若为 $\mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$ 和 Λ-模层 *(*其中 Λ 诺特*)*, 则为弱 *Serre* 子范畴 *(*若 X 诺特, 则可为强 *Serre* 子范畴*);*

(iii) 若 X 拟紧拟分离, 若 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$*(或* Λ-模层, 其中 Λ 诺特*)* 可构建, 则 $\mathrm{supp}(\mathscr{F})$ 也可构建.

证明. 纯粹的点集拓扑和层论, 参考Tag 095G, Tag 03RZ,Tag 09YS 和Tag 098H. □

引理 11.5. *设 $j: U \to X$ 是拟紧拟分离概形间的平展映射, 则*

(i) 层 h_U 可构建;

(ii) 对于有限 Abel 群 M(或 Λ-模, 其中 Λ 诺特), 层 $j_!\underline{M}_U$ 可构建.

证明. 运用如下结论:

• **事实.** 若 $U \to X$ 是拟紧拟分离概形间的平展映射, 则存在有限分解 $X = \coprod_i X_i$ 为可构建局部闭集使得 $\pi_i : X_i \times_X U \to X_i$ 是有限平展映射.(参考Tag 03S0)

(i) 根据这个事实和命题5.17即可得到结论.

(ii) 运用命题6.9(i) 和命题6.8(iii) 可以得到

$$(j_!\underline{M}_U)|_{X_i} = \pi_{i,!}\underline{M} = \pi_{i,*}\underline{M}.$$

此时 π_i 有限平展, 则根据直像是平展局部的且引理5.16(ii), 因此 $\pi_{i,*}\underline{M}$ 必然是有限局部常值. □

命题 11.6. *设概形 X 拟紧拟分离. 若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$(或 Λ-模, 其中 Λ 诺特), 则 $\mathscr{F}$ 是可构建层的滤余极限.*

证明. 我们需要如下结论 (参考Tag 093C):

• **事实 1.** 任何 $\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 内的层都可以写成

$$\mathrm{Coequalizer}\left(\coprod_{j=1,\dots,m} h_{V_j} \rightrightarrows \coprod_{i=1,\dots,n} h_{U_i}\right)$$

其中 V_j, U_i 均为 $X_{\text{ét}}$ 内的拟紧拟分离元.

• **事实 2.** 任何 (Λ 诺特)Λ-模都可以写成

$$\mathrm{coker}\left(\coprod_{j=1,\dots,m} j_{V_j,!}\underline{\Lambda}_{V_j} \longrightarrow \coprod_{i=1,\dots,n} j_{U_i,!}\underline{\Lambda}_{U_i}\right)$$

其中 V_j, U_i 均为 $X_{\text{ét}}$ 内的拟紧拟分离元.

故根据命题11.4和引理11.5即可得到. □

11.2 挠层

定义 11.7. *设 X 是概形, 设 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 如果任何 $\mathscr{F}(U)$ 是挠群, 则称其为挠层.*

命题 11.8. *若 $f: X \to Y$ 拟紧拟分离, 则若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则 $R^n f_*\mathscr{F}$ 也是挠层.*

证明. 注意到

$$R^n f_*\mathscr{F} = (U \mapsto H^n_{\text{ét}}(U \times_Y X, \mathscr{F}))^\sharp.$$

可以取仿射 V 使得 $X \times_Y V$ 是拟紧拟分离的 (因为 f 是如此). 因此只需要证明若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层且 X 拟紧拟分离, 则 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 是挠群. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_d \mathscr{F}[d]$ 其中 $\mathscr{F}[d]$ 是 d-挠元的部分, 根据定理7.12我们有

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_d H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}[d]).$$

而 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}[d])$ 也是 d-挠群, 故成立. □

命题 11.9. 若 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则 $\mathscr{F}$ 是可构建层的滤余极限.

证明. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_d \mathscr{F}[d]$ 其中 $\mathscr{F}[d]$ 是 d-挠元的部分, 视 $\mathscr{F}[d]$ 为 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-模. 根据命题11.6即可得到结论. □

注 11.10. 若 X 诺特, 任取 E 在特殊化下稳定, 如果挠层 $\mathscr{F}$ 在 E 上支撑, 那么其可以写为在 E 上支撑的可构建层的滤余极限. 这是因为命题*11.4*知道每个 $\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}$ 的像 $\mathscr{F}_i'$ 均为可构建, 则 $\mathscr{F} = \varinjlim \mathscr{F}_i'$. 其支集可构建且在 E 内, 则闭包也是如此.

12 曲线的上同调 II——挠层的上同调

12.1 迹映射方法基础

考虑 $\mathrm{Ab}((-)_{\text{ét}})$ 内的函子. 对于平展映射 $f : Y \to X$, 有伴随对 $(f_!, f^{-1})$ 和 (f^{-1}, f_*). 因此得到映射 $\mathrm{id} \to f_* f^{-1}$ 和 $f_! f^{-1} \to \mathrm{id}$.

定义 12.1. 根据命题*6.8(iii)*, 当 f 有限平展时 $f_* = f_!$, 因此有映射 $f_* f^{-1} \to \mathrm{id}$, 称之为迹映射.

命题 12.2. 设 $f : Y \to X$ 有限平展, 则迹映射被如下性质所决定:

(a) 和 X 上的平展局部化交换;

(b) 若 $Y = \coprod_{i=1}^d X$, 则迹映射是求和映射 $f_* f^{-1} \mathscr{F} = \mathscr{F}^{\oplus d} \to \mathscr{F}$.

证明. 根据引理5.16, 用 (a) 考虑平展局部上自然是 (b) 中的情况. □

命题 12.3 (迹映射方法)**.** 设 $f : Y \to X$ 处处满足 $\deg f = d$, 则不难看出 $\mathscr{F} \to f_* f^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 是乘 d 映射. 如果 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 满足乘 d 映射是同构, 则有单射

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \hookrightarrow H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1}\mathscr{F}).$$

特别的, 如果 $H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1}\mathscr{F}) = 0$, 则 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.

证明. 注意到因为 f 有限, 则 $H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1}\mathscr{F}) = H^n_{\text{ét}}(X, f_* f^{-1}\mathscr{F})$. 乘 d 映射诱导

$$H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^n_{\text{ét}}(Y, f^{-1}\mathscr{F}) \to H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$$

是同构, 于是成立. □

12.2 挠层的上同调

定理 12.4. 设 X 是代数闭域 k 上的分离有限型一维概形且 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则

(i) 对任何 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(ii) 若 X 仿射, 则对任何 $q > 1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(iii) 若 $p = \mathrm{char}(k) > 0$ 且 $\mathscr{F}$ 是 p-幂次挠层, 则对任何 $q > 1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(iv) 如果 $\mathscr{F}$ 是可构建层且和 $\mathrm{char}(k)$ 互素的挠层, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 有限;

(v) 如果 $\mathscr{F}$ 是可构建层且 X 紧合, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 有限;

(vi) 对任何代数闭扩张 K/k, 如果 $\mathscr{F}$ 是 $\mathrm{char}(k)$ 互素的挠层, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathscr{F}|_{X_K})$;

(vii) 对任何代数闭扩张 K/k, 如果 X 是紧合, 则 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \cong H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathscr{F}|_{X_K})$;

(viii) 对任何开集 $U \subset X$, 映射 $H^2_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) \to H^2_{\text{ét}}(U, \mathscr{F})$ 是满射.

参考Tag 03SB. 这是本节最重要的结论, 这些命题的证明事实上是殊途同归的, 我们只以 (i) 和 (iii) 在光滑的情况下来举例说明. 对于不光滑的情况, 取概形的既约结构, 因为是一个加厚所以不改变上同调. 然后取正规化, 我们总能得到一个交换图和一些函子运算的交换性. 最后, 把曲线分解成连通分支即可, 更多细节我们不在介绍.

这里按照惯例我们定义局部系为有限局部常值层, 记作 $\mathrm{Loc}(X)$. 我们首先证明如下结论:

定理 12.5. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层 (且挠部分在 k 中可逆), 则对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

引理 12.6. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且局部系 $\mathscr{F}$ 的挠部分在 k 中可逆, 则对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.*

证明. 设 ℓ 在 k 中可逆, 如果 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-层, 即对于每个平展开集 U, 层 $\mathscr{F}(U)$ 是 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 线性空间. 对于某个 k 中可逆的 d, 取 d 次平展覆叠 $\pi : U \to X$ 使得 $\mathscr{F}|_U$ 是常值层. 由于是线性空间上, 故乘 d 为同构, 根据命题12.3 和定理10.11, 我们得知对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$.

一般地, 将 $\mathscr{F}$ 分解成 $\mathscr{F}_1 \oplus ... \oplus \mathscr{F}_r$, 其中 $\mathscr{F}_i$ 被 ℓ_i 的幂次消灭, $\mathscr{F}$ 被某个 ℓ 的幂次消灭. 最后, 记 $\mathscr{F}[\ell]$ 为 $\mathscr{F}$ 的 ℓ-挠部分, 考虑正合列 $0 \to \mathscr{F}[\ell] \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell] \to 0$, 然后归纳即可. $\square$

引理 12.7. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线且可构建层 $\mathscr{F}$ 的挠部分在 k 中可逆, 根据点集拓扑推导不难得知存在稠密开浸入 $j : U \to X$ 使得 $\mathscr{F}|_U \in \mathrm{Loc}(U)$. 考虑下面命题等价:*

(a) 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = 0$;

(b) 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, j_! j^{-1}\mathscr{F}) = 0$.

证明. 设 $Z = X \backslash U$ 和 $i : Z \to X$, 根据命题6.10有正合列

$$0 \to j_! j^{-1}\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to i_* i^{-1}\mathscr{F} \to 0.$$

注意到 $H^q_{\text{ét}}(X, i_* i^{-1}\mathscr{F}) = H^q(Z, i^{-1}\mathscr{F})$ 且 Z 是代数闭域的谱的乘积, 因此诱导长正合列即可得到证明. $\square$

定理12.5的证明. 根据命题11.9, 只需考虑可构建层的情况. 再根据引理12.7, 我们只需要证明: 对稠密开浸入 $j : U \to X$ 和 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(U)$, 对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X, j_!\mathscr{F}) = 0$.

再次使用迹映射方法, 取合适的有限平展覆盖 $g : V \to U$, 只需考虑形如 $j_! g_* g^{-1}\mathscr{F}$ 的上同调且使得 $g^{-1}\mathscr{F}$ 是常值层. 由 Zariski 主定理, 有分解

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "b"] & \\
V \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "g"'] & & X \\
 & U \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

为开浸入 a 和有限态射 b 的复合. 不难验证得到 $j_! g_* = b_* a_!$, 只需要证明对 $q > 2$ 有 $H^q_{\text{ét}}(Y, a_!\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}) = 0$, 其中 ℓ 在 k 里可逆. 只需要考虑 $a_! a^{-1}\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}$, 根据引理12.7和引理12.6. $\square$

再考虑如下:

定理 12.8. *设 X 是代数闭域 k 上的光滑曲线, 设 $p=\mathrm{char}(k)>0$ 且 $\mathscr{F}$ 是 p-幂次挠层, 则对任何 $q>1$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=0$.*

引理 12.9. *设 k 是一个特征 p 代数闭域, 设 V 是有限维 k-线性空间. 设线性映射 $F:V\to V$ 是加性的且 $F(ax)=a^pF(x)$. 那么 $F-\mathrm{id}:V\to V$ 是满射.*

证明. 交换代数, 参考Tag 0A3L. □

命题 12.10. *设 X/k 是 d 维紧合概形, 那么对于 $q>d$, 有 $H^q_{\text{ét}}(X,\underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})=0$.*

证明. 考虑 Artin-Schreier 正合列定理5.22:

$$0\to \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X\to \mathbb{G}_{a,X}\xrightarrow{t\mapsto t^p-t}\mathbb{G}_{a,X}\to 0.$$

诱导长正合列为

$$\cdots\to H^d_{\text{ét}}(X,\mathscr{O}_X)\xrightarrow{F\mathrm{id}}H^d_{\text{ét}}(X,\mathscr{O}_X)\to H^{d+1}_{\text{ét}}(X,\underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})\to 0\to\cdots.$$

其中根据定理8.14和 Grothendieck 消灭定理得知当 $q>d$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X,\mathscr{O}_X)=0$, 因此之后的项是 0. 因此当 $q>d+1$ 时 $H^q_{\text{ét}}(X,\underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})=0$. 再根据引理12.9得到 $H^{d+1}_{\text{ét}}(X,\underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})=0$, 于是得到结果. □

定理12.8的证明. 类似定理12.5的证明, 化归到局部系, 然后再到可构建层即可, 略去. □

事实上定理12.4的某些可以减弱至可分闭域:

命题 12.11 (参考Tag 0A5E)**.** *设 K/k 是可分闭域的扩张, 设 X 在 $\mathrm{Spec}\,k$ 上紧合且维数不大于 1, 则对挠层 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有 $H^q_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^q_{\text{ét}}(X_K,\mathscr{F}|_{X_K})$.*

13 上同调维数 I——一般情况

定义 13.1. *对于概形 X, 定义其 (平展) 上同调维数为*

$$\mathrm{cd}(X):=\min\{d: \text{对于所有挠 } Abel \text{ 层}\mathscr{F}\text{都有当}q>d\text{时有}H^q_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})=0\}$$

或者 $\mathrm{cd}(X)=\infty$.

引理 13.2 (Tate)**.** *设 L/K 是域扩张, 那么 $\mathrm{cd}(L)\le\mathrm{cd}(K)+\mathrm{trdeg}(L/K)$.*

证明. 首先断言: 若 X 是 K 上的一维代数概形, 则 $\mathrm{cd}(X)\le\mathrm{cd}(K)+1$. 对 $f:X\to\mathrm{Spec}\,K$ 和挠层 $\mathscr{F}$ 用 Leray 谱序列

$$E_2^{p,q}=H^p_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,K,R^qf_*\mathscr{F})\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathscr{F}).$$

注意到对于几何点 $\bar{x}:\mathrm{Spec}\,\bar{K}\to\mathrm{Spec}\,K$, 由推论9.4 有 $(R^qf_*\mathscr{F})_{\bar{x}}=H^q(X_{\bar{K}},\mathscr{F})$. 当 $q>1$ 时由定理12.4知为 0. 分析谱序列得到断言成立.

回到引理本身. 若 $\mathrm{trdeg}(L/K)=\infty$ 则显然成立. 当超越度有限时, 根据归纳法不妨设 $\mathrm{trdeg}(L/K)=1$. 设 $L=\varinjlim_i A_i$ 是一些有限生成 K 代数的滤余极限, 这些 A_i 的维数都不超过 1. 再利用断言和定理7.12即可得到结论. □

定理 13.3. 设 X 是代数闭域 k 上的代数簇, 则 $\mathrm{cd}(X) \leq 2\dim X$.

证明. 固定一个挠层 $\mathscr{F}$, 用归纳法.

- **步骤 1.** 对一般点含入 $j : \eta \to X$, 划归到形如 $j_*\mathscr{F}$ 的情况.

注意到映射 $\mathscr{F} \to j_*j^{-1}\mathscr{F}$ 诱导同构 $(\mathscr{F})_\eta \cong (j_*j^{-1}\mathscr{F})_\eta$. 其核和余核都是支撑在维数更小的闭子概形上的层. 根据归纳假设只需要证明 $j_*\mathscr{F}$ 的情况.

- **步骤 2.** $R^qj_*\mathscr{F}$ 支撑在维数 $\dim X - q$ 的子簇上.

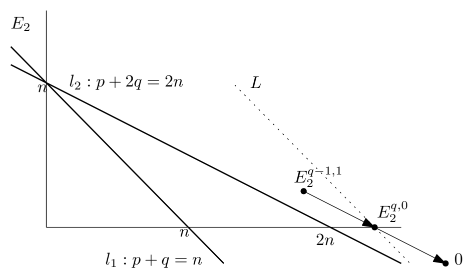
对于 X 的任何不可约闭子簇 Z, 设 Z 的一般点为 ξ, 然后选择一个几何点 $\bar{\xi} \to \xi \to Z$. 注意到由推论9.4得到 $(R^qj_*\mathscr{F})_{\bar{\xi}} = H^q(\mathrm{Frac}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\bar{\xi}}), \mathscr{F})$. 由于 $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{\bar{\xi}})/\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{\bar{\xi}})$ 是代数扩张 (因为其为有限扩张的极限), 注意到

$$\mathrm{trdeg}(\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{\bar{\xi}})/k) = \dim X - \dim Z,$$

根据引理13.2得知成立.

- **步骤 3.** 完成证明.

考虑 Leray 谱序列 $E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}(X, R^qj_*\mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\eta, \mathscr{F})$ 如图 ($n = \dim X$):



根据归纳, 当 $p > 2(n-q)$ 且 $q > 0$ 时 $E_2^{p,q} = 0$; 由引理13.2知当 $p + q > n$ 时 $H^{p+q}(\eta, \mathscr{F}) = 0$. 故在图中 l_1 右方区域均收敛至 0, 在 l_2 右方的区域均为零. 于是考虑当 $p > 2\dim X$ 时有 $E_2^{p-1,1} = 0$, 故 $E_2^{p,0} = E_\infty^{p,0}$. 在虚线 L 上全部收敛至 0, 因此 $E_2^{p,0} = 0$, 则证明完毕. □

14 紧合基变换和光滑基变换

14.1 经典拓扑里的紧合基变换

定义 14.1. 连续映射 $f : X \to S$ 称为紧合的如果 f 是万有闭的且 $\Delta : X \to X \times_S X$ 是闭映射. 如果 f 紧合当且仅当紧集的逆像仍然是紧的, 我们称 f 是拟紧合 *(更多的参考 Tag 005M)*.

引理 14.2. 设 $f : X \to Y$ 是紧合映射, 则对于任何 X 上的层 $\mathscr{F}$ 和点 $y \in Y$ 都有

$$(Rf_*\mathscr{F})_y \cong R\Gamma(X_y, \mathscr{F}|_{X_y}),$$

其中 $X_y = f^{-1}(y)$.

证明. 我们需要如下结论 (参考Tag 09V3):

• 设 Z 是空间 X 的紧子集使得任何两个 Z 内的点都有 X 内的不交开邻域包含它们, 则对层 $\mathscr{F}\in \mathrm{Ab}(X)$ 都有 $\varinjlim_{U\supset Z} H^r(U,\mathscr{F})\cong H^r(Z,\mathscr{F}|_Z)$.

回到引理本身. 取内射预解用伴随性不难得到映射 $(Rf_*\mathscr{F})_y\to R\Gamma(X_y,\mathscr{F}|_{X_y})$. 取内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$, 由于 $\mathscr{I}^*|_{X_y}$ 是 $\Gamma(X_y,-)$-零调的, 故 $R\Gamma(X_y,\mathscr{F}|_{X_y})$ 可被 $\Gamma(X_y,\mathscr{I}^*|_{X_y})$ 表示, 故只需证明同构

$$\varinjlim_{V}\mathscr{I}^*(f^{-1}(V))\cong\Gamma(X_y,\mathscr{I}^*|_{X_y}).$$

注意到如果 $X_y\subset U$ 是开邻域, 由于 f 闭, 则设 $V=Y\backslash f(X\backslash U)$ 就得到 $f^{-1}(V)\subset U$, 进而此系统共尾, 因此根据上述结论即可得到结论. □

定理 14.3 (拓扑紧合基变换). 设 $f:X\to Y$ 是紧合的映射, 设 $g:Y'\to Y$ 是连续映射, 考虑纤维积

$$\begin{tikzcd} X':=X\times_Y Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

则对层 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X)$ 都有 $g^{-1}(Rf_*\mathscr{F})\cong Rf'_*((g')^{-1}\mathscr{F})$.

证明. 取内射预解用伴随性不难得到所述映射, 故只需在茎上证明同构即可. 取 $y'\in Y$ 在 $y\in Y$ 上, 根据引理14.2得到同构

$$(Rf'_*((g')^{-1}\mathscr{F}))_{y'}=R\Gamma((f')^{-1}(y'),(g')^{-1}\mathscr{F}|_{(f')^{-1}(y')})$$

和

$$(Rf_*\mathscr{F})_y=R\Gamma(f^{-1}(y),\mathscr{F}|_{f^{-1}(y)})$$

于是同构是显然的, 故成立. □

14.2 紧合基变换的叙述和证明

但平展上同调的紧合基变换类比没有这么容易.

引理 14.4. 对概形的紧合映射 $f:X\to S$ 和几何点 $\bar{s}\to S$, 对任意的 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 都有双射

$$(f_*\mathscr{F})_{\bar{s}}\to\Gamma(X_{\bar{s}},\mathscr{F}_{\bar{s}}).$$

证明. 这个需要 Hensel 对的一些结果, 见Tag 0A3T. □

引理 14.5. 设 ℓ 是任一素数且 A 是严格 *Hensel* 局部环, 设 $X\to\mathrm{Spec}(A)$ 紧合, 那么对于挠层 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有

$$H^q_{\text{ét}}(X,\mathscr{F})\cong H^q_{\text{ét}}(X_0,\mathscr{F}|_{X_0}),$$

其中 X_0 是特殊纤维.

证明. 这个结论颇为复杂, 直接证明需要 Artin 逼近等技术, 我们略去. 读者可以用紧合基变换来推出它 (其实和紧合基变换等价). 而 [16] 内只证明了 $\mathbb{F}_\ell$-模层且 $X=\mathbb{P}^1_A$ 的情况 (我们也只需要这个条件), 我们简述一下这种情况: 取 $\mathbb{F}_\ell$-模内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$, 可以证明 $\mathscr{I}^*|_{X_0}$ 是 $\mathscr{F}|_{X_0}$ 的右 $H^0_{\text{ét}}(X_0,-)$-零调的 (参考Tag 0A5H), 于是 $H^q_{\text{ét}}(X_0,\mathscr{F}|_{X_0})$ 可以由 $H^0_{\text{ét}}(X_0,\mathscr{F}|_{X_0})$ 得到, 再由引理14.4即可得到结论. □

注 14.6. *在复几何里有一个给予动机的类比 (证明见 [18] 定理 9.3):*
• *Ehresmann 定理. 设 $f:\mathcal{X}\to(B,0)$ 是微分流形之间的紧合浸没, 其中 B 是可缩的流形且 0 是其上的一个基点. 则存在微分同胚 $T:\mathcal{X}\cong\mathcal{X}_0\times B$ 使得对投影 $p:\mathcal{X}_0\times B\to B$ 满足 $p\circ T=f$. 因此在此种情况下有同伦等价 $\mathcal{X}\simeq\mathcal{X}_0$, 因此有相同的上同调.*

定理 14.7 (紧合基变换)**.** *设 $f:X\to Y$ 是概形间的紧合映射, 对任何概形映射 $g: Y'\to Y$ 和纤维积*

$$\begin{tikzcd} X':=X\times_Y Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

对任何挠层 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 都有同构

$$g^{-1}Rf_*\mathscr{F}\longrightarrow Rf'_*(g')^{-1}\mathscr{F}.$$

证明. 我们需要如下几个步骤来得到证明.
• **步骤 1.** 先证明不导出的情况对任意的 $\mathscr{F}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 成立.
映射不难由伴随性给出, 同构只需要在茎上验证, 根据引理14.4即可得到结论.
• **步骤 2.** 研究几个基变换的重要关系.
为了方便, 如果对任何 $S'\to S$ 和基变换 $X\times_S S'$ 和挠层 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都满足定理的结论, 我们就称 $f:X\to S$ 和上同调的基变换交换. 则我们有如下结论:
•• (a) 紧合映射 $f:X\to Y$ 和上同调的基变换交换当且仅当对任何素数 ℓ 和内射 $\mathbb{F}_\ell$-模层 $\mathscr{I}\in\mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 和任何 $Y'\to Y$ 和定理的基变换 $X\times_Y Y'$, 对任何 $q>0$ 都有层 $R^qf'_*(g')^{-1}\mathscr{I}=0$.
这个不太困难, 首先设 $\mathscr{F}=\varinjlim\mathscr{F}[n]$, 根据定理7.12不难得出高阶直像和滤余极限交换, 而逆像本来就交换, 因此只需要假设 $\mathscr{F}$ 被某个 n 零化. 取素数 $\ell|n$, 考虑

$$0\to\mathscr{F}[\ell]\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell]\to 0,$$

运用 5-引理, 只需对 $\mathscr{F}[\ell],\mathscr{F}/\mathscr{F}[\ell]$ 证明即可. 不断重复这一步骤, 则不妨设 $\mathscr{F}$ 被某个素数 ℓ 零化. 取 $\mathbb{F}_\ell$-模内射预解 $\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{I}^*$, 只需证明对 $\mathscr{I}^*$ 运用步骤 1 即可.
•• (b) 若 $f:X\to Y$ 有限, 则其和上同调的基变换交换.
这个基本上平凡, 运用 (a) 和推论9.5即可得到结果.
•• (c) 对紧合映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$, 若 f,g 都和上同调的基变换交换, 则 $g\circ f$ 也是如此;
•• (d) 对紧合映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$, 若 $f,g\circ f$ 都和上同调的基变换交换且 f 是满射, 则 g 也是如此.

(b)(c) 证明类似, 运用相对 Leray 谱序列即可, 参考Tag 0A4C 和Tag 0A4D, 我们略去.

• **步骤 3.** 将问题划归到 (相对) 射影空间.

根据命题9.2, 我们可以考虑 Zariski 局部, 于是不妨设 Y 仿射. 由 Chow 引理得到如下交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & X'' \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f''"] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

其中 π 是 (H-) 射影满射且 f'' 是紧合映射. 根据步骤 2 的 (b), 则 i 和上同调的基变换交换. 如果我们证明了对形如 $\mathbb{P}^n_S \to S$ 的映射也和上同调的基变换交换, 那么根据步骤 2 的 (c) 得到 f'', π 和上同调的基变换交换, 再根据步骤 2 的 (d), 我们就得到了 f 和上同调的基变换交换. 因此问题划归到了形如 $\mathbb{P}^n_S \to S$ 的映射.

• **步骤 4.** 将问题划归到 (相对) 射影直线.

注意到对于 $n > 0$, 有有限满射

$$\mathbb{P}^1_S \times_S \cdots \times_S \mathbb{P}^1_S \to \mathbb{P}^n_S$$

为 $((x_1 : y_1), (x_2 : y_2), \ldots, (x_n : y_n)) \mapsto (F_0 : \ldots : F_n)$, 其中 F_i 是 x_i, y_i 的整系数多项式满足

$$\prod_i (x_i t + y_i) = F_0 t^n + F_1 t^{n-1} + \ldots + F_n.$$

因此根据步骤 2 的 (c) 和 (d) 只需要考虑 $\mathbb{P}^1_S \to S$ 的情况.

• **步骤 5.** 完成证明.

对任何 $g : T \to S$ 和 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{F}_\ell$ 模层 (根据步骤 2 的 (a) 的证明, 只需考虑这种情况), 观察交换图

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1_T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & \mathbb{P}^1_S \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

只需要在茎上验证. 首先注意到对几何点 $\bar{s}' \to S$, 根据引理14.5和推论9.4我们有

$$(R^q f_* \mathscr{F})_{\bar{s}'} = H^q(\mathbb{P}^1_{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}'}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\mathscr{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\bar{s}'}}}) = H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(s')^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(s')^{\mathrm{sep}}}}).$$

因此考虑几何点 $\bar{t} \to T$, 设 $\bar{s} = g(\bar{t})$, 考虑映射 $g^{-1} R^q f_* \mathscr{F} \to R^q f'_* (g')^{-1} \mathscr{F}$ 的茎为

$$H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(s)^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(s)^{\mathrm{sep}}}}) \to H^q(\mathbb{P}^1_{\kappa(t)^{\mathrm{sep}}}, \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^1_{\kappa(t)^{\mathrm{sep}}}}).$$

根据命题12.11即可得到结论. □

注 14.8. *对挠上同调的 $\mathscr{F} \in D^+(X_{\text{ét}})$ 也对, 根据一般的紧合基变换和一个谱序列 (Tag 015J) 即可得到.*

14.3 紧合基变换的应用

命题 14.9 (相对上同调维数)**.** *若紧合概形映射 $f: X \to Y$ 满足纤维维数 $\leq n$, 则对所有挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 都有当 $q > 2n$ 时 $R^q f_* \mathscr{F} = 0$.*

证明. 当 $n = 0$ 时, 因为紧合且拟有限, 则 f 有限, 故命题由推论9.5得到.

当 $n > 0$ 时, 只需要证明茎为零即可. 对几何点映射运用紧合基变换14.7和上同调维数的结果13.3即可得到结论. □

引理 14.10. *设概形 X 拟紧拟分离, 设 $\mathscr{E} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 且 $A \in \mathrm{AbGrps}$, 则*

$$R\Gamma(X, \mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \underline{A}) = R\Gamma(X, \mathscr{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} A.$$

证明. 更一般的情况考虑Tag 0F0E. 参照上述 Tag 里的证明, 可以不妨设 A 是平坦 $\mathbb{Z}$-模. 因此只需证明当 A 是平坦 $\mathbb{Z}$-模时有 $H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \underline{A}) = H^n_{\text{ét}}(X, \mathscr{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} A$. 根据一个有趣的代数结论, 即平坦模都可以写成有限自由模的滤余极限 (Lazard 定理, 参考Tag 058G), 故而不妨设 A 是有限自由 $\mathbb{Z}$-模, 而此时结论显然成立. □

命题 14.11. *假设 $f: X \to Y$ 紧合, 对任何挠层 $\mathscr{E} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和层 $\mathscr{G} \in \mathrm{Ab}(Y_{\text{ét}})$ (对 $D^+(X_{\text{ét}})$ 内挠上同调的 $\mathscr{E}$ 和 $D^+(Y_{\text{ét}})$ 内的 $\mathscr{G}$ 也行), 我们有*

$$Rf_* \mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathscr{G} = Rf_*(\mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} f^{-1}\mathscr{G}).$$

证明. 更一般的情况考虑Tag 0F0F. 映射不难由伴随性给出, 因此只需要在茎上验证. 首先注意到

$$(\mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} f^{-1}\mathscr{G}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = (\mathscr{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}} (f^{-1}\mathscr{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = 0,$$

则满足紧合基变换的条件, 因此运用定理14.7和引理14.10即可. □

注 14.12. *对挠环 Λ 和 $\mathscr{E} \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和 $\mathscr{G} \in D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ 也对, 参考Tag 0F0G.*

14.4 经典拓扑里的光滑基变换

定义 14.13. *我们称拓扑空间间的连续映射 $f: X \to Y$ 是光滑的, 如果对任何 $x \in X$, 存在其开邻域同胚于 $U \times [0,1]^n$, 其中 U 是 $f(x)$ 的开邻域.*

定理 14.14 (拓扑的光滑基变换)**.** *对任何 $\mathscr{F} \in \mathrm{Loc}(X)$ 和纤维积*

$$\begin{tikzcd} X' = X \times_S S' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

如果 g 光滑, 则有 $g^{-1} R^i f_* \mathscr{F} \cong R^i f'_* (g')^{-1} \mathscr{F}$.

证明. 映射类似于拓扑紧合基变换, 由于高阶直像可以是上同调群的层化, 我们只需证明

$$H^i(X \times [0,1]^n, (g')^{-1}\mathscr{F}) \cong H^i(X, \mathscr{F}).$$

因为有同伦等价 $X\times[0,1]^n\simeq X$, 如果局部系的上同调在同伦等价下不变, 我们就得到结论.

我们只需证明若 $h_0,h_1:Y'\rightrightarrows Y$ 是同伦的映射, 那么会诱导相同的 $H^i(Y,\underline{A})\to H^i(Y',\underline{A})$, 其中 $\underline{A}$ 是常值 Abel 群层. 设同伦为 $F:[0,1]\times Y'\to Y$ 使得 $F|_{0\times Y}=f_0,F|_{1\times Y}=f_1$. 取 $j_t:Y'\to Y'\times[0,1]$ 为 $y'\mapsto(t,y')$, 则有 $f_0=F\circ j_0,f_1=F\circ j_1$, 因此只需证明对任何 $t\in[0,1]$, 映射 j_t 都诱导相同的 $H^i(Y'\times[0,1],\underline{A})\to H^i(Y',\underline{A})$. 考虑 $\pi:[0,1]\times Y'\to Y'$ 为自然投影, 则有 $\pi\circ j_t=\mathrm{id}_{Y'}$, 因此只需要考虑 π 诱导上同调群同构.

根据 Leray 谱序列有 $E_2^{p,q}=H^p(Y',R^q\pi_*\underline{A})\Rightarrow H^{p+q}([0,1]\times Y',\underline{A})$. 根据拓扑的紧合基变换14.3得到对任意的 $y'\in Y'$ 有自然同构 $R^i\pi_*(\underline{A})_{y'}\cong H^i([0,1],\underline{A})$. 由层上同调-奇异上同调比较定理19.1得知当 $i>0$ 时有

$$H^i([0,1],\underline{A})\cong H^i_{\mathrm{sing}}([0,1],A)=0.$$

故有典范同构 $\underline{A}\cong\pi_*\underline{A}$ 且当 $i>0$ 有 $R^i\pi_*\underline{A}=0$. 因此 Leray 谱序列退化, 故而所有边界映射

$$H^p(Y',\pi_*\underline{A})\to H^p([0,1]\times Y',\underline{A})$$

是同构. 最后, 不难验证得到此映射即为:

$$H^p(Y',\pi_*\underline{A})\to H^p([0,1]\times Y',\pi^{-1}\pi_*\underline{A})\to H^p([0,1]\times Y',\underline{A}),$$

故而因为 $\pi^*\underline{A}\to\pi^{-1}\pi_*\underline{A}\to\underline{A}$ 是单位, 故边界映射和 $\underline{A}\cong\pi_*\underline{A}$ 诱导的同构即为 π 诱导的映射. □

14.5 光滑基变换一瞥

定理 14.15 (光滑基变换)**.** 对概形映射 $f:X\to S$ 和挠群 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 使得挠阶数在 S 内可逆. 对于纤维积

$$\begin{tikzcd} X'=X\times_S S' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

其中 $S'=\varprojlim_\lambda S_\lambda$ 为光滑 S 概形 S_λ 构成的拟系统满足转移映射 $S_{\lambda'}\to S_\lambda$ 是仿射的, 因此有典范同构

$$g^{-1}R^if_*\mathscr{F}\cong R^if'_*(g')^{-1}\mathscr{F}.$$

这个定理的证明非常之复杂, 需要用到太多的技术和技巧, 想学的读者请参考笔记 (smooth-base-change) 或者 Tag 0EYQ.

14.6 紧合-光滑基变换及有限性定理

定理 14.16 (紧合-光滑基变换)**.** 设 $f:X\to Y$ 紧合且光滑, 则对任何 $\mathscr{F}\in\mathrm{Loc}(X)$ 满足挠阶数在 Y 内可逆, 则有 $R^if_*\mathscr{F}\in\mathrm{Loc}(Y)$.

定理 14.17 (有限性定理)**.** 设 $f:X\to Y$ 紧合, 则对任何可构建层 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 有 $R^if_*\mathscr{F}$ 可构建.

15　上同调维数 II——仿射情况

定理 15.1. *设 X 是代数闭域 k 上的仿射簇, 则 $\mathrm{cd}(X) \le \dim X$.*

证明. 固定挠层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$, 对维数做归纳法.

当 $\dim X = 0$, 则为有限映射, 因此根据 Leray 谱序列和推论9.5即可. 当 $\dim X = 1$ 时即为定理12.4. 假设 $d = \dim X > 1$ 使得定理当 $< d$ 时均成立, 要证明对 X 成立.

• **步骤 1.** 约化到证明 $\mathbb{A}_k^d$ 的情况.

根据 Noether 正规化得到有限映射 $\delta : X \to \mathbb{A}_k^d$, 根据推论9.5和 Leray 谱序列得到 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathscr{F}) = H^i_{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^d, \delta_*\mathscr{F})$, 再根据命题11.8得知 $\delta_*\mathscr{F}$ 依旧是挠层, 故只需对 $\mathbb{A}_k^d$ 证明.

• **步骤 2.** 首先讨论两种情况, 为后续做铺垫.

•• 设 $j : X \to Y$ 是开浸入且满足补集是某个有效 Cartier 除子 D 的支集, 对 $q > 0$, 层 $R^q j_*\mathscr{F}$ 在 D 上支撑, 断言当 $a := \mathrm{trdeg}(\kappa(y)/k) > d - q$ 时有 $(R^q j_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = 0$.

取定义 D 的局部函数 $f \in \mathscr{O}_{Y,y}$, 根据推论9.4有

$$(R^q j_*\mathscr{F})_{\bar{y}} = H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y} \times_Y X, \mathscr{F}) = H^q_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}[1/f], \mathscr{F}).$$

根据一个代数结论 (参考Tag 0F0U) 有 $\mathscr{O}^{\text{sh}}_{Y,y}[1/f]$ 是域 $k(t_1, ..., t_a)^{\text{sep}}(x)$ 上的 $(d-a-1)$-维有限型代数的滤余极限, 再根据引理13.2和归纳假设即可.

•• 设 Z 是 k 上光滑 $d-1$ 维, 设 E_a 为满足 $\mathrm{trdeg}(\kappa(z)/k) \le a$ 的集合, 不难得知其在特殊化下稳定. 若 $\mathscr{G}$ $\mathrm{Ab}(Z_{\text{ét}})$ 是支撑在 E_a 上的挠层, 则当 $b > a$ 时 $H^b_{\text{ét}}(Z, \mathscr{G}) = 0$.

根据注11.10可以得到 $\mathscr{G} = \varinjlim \mathscr{G}_i$ 在 E_a 上支撑, 根据归纳假设以及定理7.12即可.

• **步骤 3.** 完成证明.

考虑典范分解

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_k^d \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^{d-1} \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbb{A}_k^{d-1} &
\end{tikzcd}$$

其中 j 是开浸入且满足补集是某个有效 Cartier 除子 D 的支集. 考虑谱序列

$$E_2^{p,q} = R^p g_* R^q j_* \mathscr{F} \Rightarrow R^{p+q} f_* \mathscr{F}.$$

由于 $R^q j_*\mathscr{F}$ 在 D 上支撑且 $g|_D$ 是同构, 故当 $p > 0, q > 0$ 时 $E_2^{p,q} = 0$. 根据步骤 2 知当 $q > d$ 时 $R^q j_*\mathscr{F} = 0$. 由于 g 是紧合且相对维数是 1, 根据命题14.9得到当 $p > 2$ 时有 $E_2^{p,q} = 0$.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \\
g_* R^d f_* \mathscr{F} & 0 & 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
g_* R^1 f_* \mathscr{F} & 0 & 0 & 0 & \\
g_* f_* \mathscr{F} & R^1 g_* f_* \mathscr{F} & R^2 g_* f_* \mathscr{F} & 0 & \cdots
\end{array}$$

故当 $q>2$ 有 $R^qf_*\mathscr{F}=g_*R^qj_*\mathscr{F}$. 根据步骤 2 第 1 条得知当 $q>2$ 有 $\operatorname{supp}R^qf_*\mathscr{F}\subset E_{d-q}\subset\mathbb{A}_k^{d-1}$. 根据步骤 2 第 2 条得知当 $p>d-q$ 且 $q>2$ 时有

$$H^p_{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^{d-1},R^qf_*\mathscr{F})=0.$$

由推论9.4有一般点的茎 $(R^2f_*\mathscr{F})_{\bar\eta}=H^2(\mathbb{A}^1_{\bar\eta},\mathscr{F})=0$, 再用步骤 2 第 2 条得知当 $p>d-2$ 时有

$$H^p_{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^{d-1},R^2f_*\mathscr{F})=0.$$

再用归纳假设得到当 $p>d-1$ 且 $q>2=0,1$ 时有

$$H^p_{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^{d-1},R^qf_*\mathscr{F})=0.$$

综合上述结论, 考虑谱序列 $H^p_{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^{d-1},R^qf_*\mathscr{F})\Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\mathbb{A}_k^{d-1},\mathscr{F})$ 即可. □

注 15.2. 事实上对于一般的域 K 和其上的有限型仿射概形 X, 都有

$$\operatorname{cd}(X)\le\dim(X)+\operatorname{cd}(K)$$

(证明基本类似, 略去). 甚至更有推广 (Artin 消灭定理): 若 $f:X\to Y$ 是域 K 上有限型仿射映射, 若挠层 $\mathscr{F}\in\operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 支撑在满足 $\operatorname{trdeg}(\kappa(x)/K)\le a$ 的区域上, 则 $R^qf_*\mathscr{F}$ 支撑在满足 $\operatorname{trdeg}(\kappa(x)/K)\le a-q$ 的区域上 (参考Tag 0F0X).

16 紧支上同调

16.1 分离有限型映射的下叹号函子

我们通常需要如下紧化作为基础:

定理 16.1 (Nagata 紧化). *设概形 S 拟紧拟分离且 $f:X\to S$ 分离有限型, 则存在如下分解:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\bar f"] \\ & S \end{tikzcd}$$

其中 j 概形论稠密的开浸入且 $\bar f$ 是紧合的.

证明. 异常复杂, 现代证明见 [1]. □

定义 16.2. 设 $f:X\to Y$ 分离有限型, 对 $\mathscr{F}\in\operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$ 定义

$$(f_!\mathscr{F})(U):=\{s\in(f_*\mathscr{F})(U):\operatorname{supp}(s)\text{在}S\text{上紧合}\}.$$

命题 16.3. 设 $f:X\to Y$ 分离有限型, 设 $\mathscr{F}\in\operatorname{Ab}(X_{\text{ét}})$.

(i) 当 f 还是平展的, 则 $f_!$ 是零扩张函子;

(ii) 若 f 紧合, 则 $f_!\mathscr{F}=f_*\mathscr{F}$;

(iii) 取一个 Nagata 紧化 $f=\bar f\circ j$, 则 $f_!\cong\bar f_*\circ j_!$.

证明. (i) 这个是比较繁琐的, 首先要说明分离平展的时候零扩张可以单射到直像 (参考Tag 0F4L), 其次要证明二者相同 (参考Tag 0F4Y);

(ii) 是平凡的;(iii) 不难构造出单射 $f_!(j^{-1}j_!\mathscr{F})\to\bar f_*j_!\mathscr{F}$ (比如Tag 0F53). 根据推论6.8(iii), 只需说明满射即可, 但这是平凡的. □

16.2 紧支高阶直像

定义 16.4 (紧支高阶直像)**.** 设概形 S 拟紧拟分离且 $f: X \to S$ 分离有限型, 定义

$$\begin{aligned}
R^q f_! &:= R^q \bar{f}_* \circ j_! : \mathrm{Ab}_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}) \to \mathrm{Ab}_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}), \\
R f_! &:= R\bar{f}_* \circ j_! : D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}) \to D^+_{\mathrm{tor}}(S_{\text{ét}}), \\
R f_! &:= R\bar{f}_* \circ j_! : D(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to D(S_{\text{ét}}, \Lambda),
\end{aligned}$$

其中 $f = \bar{f} \circ j$ 是 *Nagata* 紧化且 tor 指具有挠上同调的范畴且 Λ 是挠环.

注 16.5. 下述 $D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$ 均可换成 $D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, 其中 Λ 是环.

命题 16.6. 设概形 S 拟紧拟分离且 $f: X \to S$ 分离有限型有

(i) 紧支高阶直像 $R^* f_!$ 和 $Rf_!$ 定义和 *Nagata* 紧化选取无关;

(ii) 设 $f': X' \to X$ 也是分离有限型, 则有典范同构 $Rf_! \circ Rf'_! \cong R(f \circ f')_!$, 故有 *Leray* 谱序列 $E_2^{p,q} := R^p f_! R^q f'_! \mathscr{F} \Rightarrow R^{p+q}(f \circ f')_! \mathscr{F}$;

(iii) 对于拟紧拟分离概形的纤维积

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\
S' \arrow[r, "g"] & S
\end{tikzcd}$$

有 $g^{-1} \circ Rf_! \cong Rf'_! \circ (g')^{-1}$;

(iv) 设 $Z \to X$ 是闭子概形, 补为 U. 设 $f_Z : Z \to S, f_U : U \to S$ 是结构映射, 则有好三角

$$Rf_{U,!}(K|_U) \to Rf_! K \to Rf_{Z,!}(K|_Z) \to Rf_{U,!}(K|_U)[1],$$

其中 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$ 或 $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 其中 Λ 是挠环. 因此有长正合列

$$\cdots \to R^i f_{U,!}(\mathscr{F}|_U) \to R^i f_! \mathscr{F} \to R^i f_{Z,!}(\mathscr{F}|_Z) \to \cdots;$$

(v) 若 $X = U \cup V$ 为拟紧开集的并, 设 $a: U \to S, b: V \to S$ 和 $c: U \cap V \to S$. 对于 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$ 或 $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 其中 Λ 是挠环, 则有好三角

$$Rc_!(K|_{U\cap V}) \to Ra_!(K|_U) \oplus Rb_!(K|_V) \to Rf_! K \to Rc_!(K|_{U\cap V})[1];$$

(vi) 短正合列可以诱导 $R^* f_!$ 的长正合列.

证明. (i)(ii)(iii) 颇为复杂, 我们参且略去, 参考Tag 0F7I, Tag 0F7J和Tag 0F7L; (vi) 是平凡的, 只需注意到对开浸入, 下叹号正合, 然后直接引高阶直像的长正合列即可; (iv)(v) 虽然不太困难, 但我懒得写了, 大致是先对不导出的版本给出短正合列, 然后得到好三角, 见Tag 0GKN和Tag 0GKP. 注意 (iv) 为 MV-序列, 而 (v) 为命题6.10的导出版本. □

命题 16.7. 设 $f: X \to Y$ 是拟紧拟分离概形间的分离有限型映射, 设 Λ 是挠环.

(i) 设 $K_i \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$, 若存在 a 使得对 $n < a$ 有 $H^n(K_i) = 0$, 则

$$Rf_!\left(\bigoplus_i K_i\right) = \bigoplus_i Rf_! K_i;$$

(ii) 函子 $Rf_! := R\bar{f}_* \circ j_! : D(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和直和交换;
(iii) 若 $E \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和 $K \in D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, 则有

$$Rf_! E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} K = Rf_!(E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} f^{-1}K).$$

证明. (i)(ii) 只需要对开浸入和紧合映射分别考虑即可. 开浸入因为是逆像的左伴随, 故一定和直和交换. 对于紧合映射, 当为挠环的模层时, 首先不难得知其纤维维数有界, 故根据命题14.9知道其相对上同调维数有限. (i) 是容易的, 取内射预解即可; 对 (ii) 需要取 K-内射的, 然后根据相对上同调维数有限, 运用滤余极限和导出推出交换等等, 细节略去, 参考Tag 0F11;

(iii) 根据 Nagata 紧化分解成开浸入 j 和紧合映射 $\bar{f}$, 而此投影公式对 j 成立是根据取 K 的 K-平坦预解和直接计算而来, 参见Tag 0E8I. 而对 $\bar{f}$ 只需运用一般版本的命题14.11即可, 需要用命题14.9知道其相对上同调维数有限, 细节略去. □

16.3 紧支上同调

定义 16.8. 设 X 是域 k 上的分离有限型概形, 设 Λ 是环, 取 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 或 $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 其中 Λ 是挠环, 则定义

$$R\Gamma_c(X, K) := R\Gamma(\operatorname{Spec} k, Rf_! K), \quad H^n_{c,\text{ét}}(X, K) := H^n(R\Gamma_c(X, K)),$$

其中 $f : X \to \operatorname{Spec} k$ 是结构映射.

命题 16.9. 设 $f : X \to Y$ 是分离有限型映射且 Y 拟紧拟分离, 取 $K \in D^+_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 或 $K \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 其中 Λ 是挠环. 取几何点 $\bar{y} \to Y$, 我们有

$$(Rf_! K)_{\bar{y}} = R\Gamma_c(X_{\bar{y}}, K|_{X_{\bar{y}}}).$$

证明. 这根据定义和命题16.6(iii) 即可得到. □

定理 16.10. 设 $f : X \to S$ 是分离有限型映射且 S 拟紧拟分离, 取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 是挠层, 则对 $i > 2\sup_{s\in S} \dim X_s$ 都有 $R^i f_! \mathscr{F} = 0$. 若 S 诺特, 则如果 $\mathscr{F}$ 可构建, 则 $R^i f_! \mathscr{F}$ 可构建. 特别的, 若 $S = \operatorname{Spec} k$ 是可分闭域, 则 $H^i_{c,\text{ét}}(X, \mathscr{F})$ 是有限群且当 $i > 2\dim X$ 时为零.

证明. 参考 [3] 第一章 8.8, 8.10. □

17 平展上同调的 Künneth 公式

17.1 一般的 Künneth 公式

考虑纤维积

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "c"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

对于 $E \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和 $K \in D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$(无界导出范畴可以定义这些函子, 细节我们略去, 读者可以自行脑补成有界的), 注意到有典范映射

$$\begin{aligned}
&c^{-1}(Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_*K) \\
&= p^{-1}f^{-1}Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}g^{-1}Rg_*K \\
&\to p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K
\end{aligned}$$

再取伴随即可得到映射

$$Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_*K \to Rc_*(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K).$$

定理 17.1 (Künneth 公式)**.** 考虑上述纤维积, 若 Λ 挠环且 f, g 紧合, 则有

$$Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_*K \cong Rc_*(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K).$$

证明. 我们根据投影公式和紧合基变换得到

$$\begin{aligned}
&Rf_*E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_*K \\
&= Rf_*(E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda f^{-1}Rg_*K) \\
&= Rf_*(E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rp_*q^{-1}K) \\
&= Rf_*(Rp_*(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K)) \\
&= Rc_*(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K),
\end{aligned}$$

得到结论. □

17.2 紧支的 Künneth 公式

定理 17.2. 考虑拟紧拟分离概形的纤维积

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "c"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

其中 f, g 为分离有限型映射. 设挠环 Λ 和 $E \in D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ 和 $K \in D(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, 我们有

$$Rf_!E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda Rg_! * K \cong Rc_!(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda q^{-1}K).$$

证明. 根据命题16.6(iii) 和命题16.7(ii) 得到

$$\begin{aligned}
&Rf_!E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rg_!K \\
&= Rf_!(E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} f^{-1}Rg_!K) \\
&= Rf_!(E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rp_!q^{-1}K) \\
&= Rf_!(Rp_!(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} q^{-1}K)) \\
&= Rc_!(p^{-1}E \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} q^{-1}K),
\end{aligned}$$

得到结论. □

推论 17.3. *对于上述纤维积, 设挠环 Λ 和 Λ 模 $\mathscr{E}$ 以及 $\mathscr{F}$, 则可以构造 Künneth 映射*

$$\bigoplus_{p+q=n} R^p f_!\mathscr{E} \otimes_{\Lambda} R^q g_!\mathscr{F} \to R^n c_!(p^{-1}\mathscr{E} \otimes_{\Lambda} q^{-1}\mathscr{F}).$$

若 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 其中有一个有 Λ-平坦的茎, 则 Künneth 映射即为如下谱序列从 $E_2^{0,n}$ 起的边际映射:

$$E_2^{r,s} = \bigoplus_{\alpha+\beta=s} \mathscr{T}or^r_{\underline{\Lambda}}(R^{\alpha} f_!\mathscr{E}, R^{\beta} g_!\mathscr{F}) \Rightarrow R^{r+s}c_!(p^{-1}\mathscr{E} \otimes_{\Lambda} q^{-1}\mathscr{F}).$$

证明. 注意到 Künneth 映射不难经过 Nagata 紧化来定义. 考虑高阶 Tor 谱序列

$$E_2^{r,s} = \bigoplus_{\alpha+\beta=s} \mathscr{T}or^r_{\underline{\Lambda}}(R^{\alpha} f_!\mathscr{E}, R^{\beta} g_!\mathscr{F}) \Rightarrow H^{r+s}(Rf_!\mathscr{E}[0] \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rg_!\mathscr{F}[0]),$$

设 α 是上述谱序列从 $E_2^{0,n}$ 起的边际映射, 考虑复合

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{p+q=n} R^p f_!\mathscr{E} \otimes_{\Lambda} R^q g_!\mathscr{F} \arrow[r, "\alpha"] & H^{r+s}(Rf_!\mathscr{E}[0] \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} Rg_!\mathscr{F}[0]) \arrow[d, "\cong{,}\kappa"] \\
R^n c_!(p^{-1}\mathscr{E} \otimes_{\Lambda} q^{-1}\mathscr{F}) & H^{r+s}(Rc_!(p^{-1}\mathscr{E}[0] \otimes^{\mathbb{L}}_{\Lambda} q^{-1}\mathscr{F}[0])) \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

其中同构 κ 由定理17.2给出. 由于 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 其中有一个有 Λ-平坦的茎, 则 β 也是同构, 故只需验证 $\beta \circ \kappa \circ \alpha$ 是 Künneth 映射. 只需经过基变换直和考虑紧支上同调的情况, 我们忽略这个无聊的验证. □

18 ℓ-进上同调和有限性定理一瞥

我们来定义非挠层的上同调!

定义 18.1. 设 X 是概形且 ℓ 是 (异于概形点剩余类域特征的) 素数, 定义 ℓ-进上同调为 $\mathbb{Z}_{\ell}$-模

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_{\ell}) := \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}).$$

可以扩展到 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_{\ell}) := H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_{\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$.

引理 18.2. 设 $M = \varprojlim_n M_n$ 其中 M_n 是有限 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, 则 M 为有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$-模当且仅当 $M/\ell M$ 有限.

证明. 如果 M 为有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$-模则显然 $M/\ell M$ 有限. 反之假设 $M/\ell M$ 有限, 要证明 M 为有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$-模. 我们断言典范映射 $\gamma : M \to \widehat{M} := \varprojlim_n M/\ell^n M$ 是同构.

因为 $\ell^n M$ 在 Hausdorff 空间 M 内紧, 故闭集. 而 $\gamma(M)$ 在 $\widehat{M}$ 内稠密且为紧集的像, 故 γ 是满射, 因此只需要证明 γ 是单的. 注意到 $\ker\gamma = \bigcap_{n=0}^{\infty} \ell^n M$, 故单射是显然的, 因此断言成立.

去连续 $\mathbb{Z}_\ell$-线性满射 $\mathbb{Z}_\ell^{\oplus r} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{\oplus r} \twoheadrightarrow M/\ell M$, 根据 Nakayama 引理不难提升到满射

$$\mathbb{Z}_\ell^{\oplus r} \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^{\oplus r} \twoheadrightarrow M/\ell^n M.$$

故类似断言证明的拓扑叙述得到连续满射 $\mathbb{Z}_\ell^{\oplus r} \twoheadrightarrow \widehat{M}$, 因此成立. □

定理 18.3 (有限性定理)**.** 设 X 是可分闭域 k 上的紧合概形, 则对于任何 i 都有 $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 是有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$-模.

证明. 根据上述引理, 只需证明有正合列

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\ell} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

考虑图表

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \ell\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ell^{n-1}\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \arrow[u, "\ell"] & &
\end{tikzcd}$$

为两个短正合列. 我们记上下的短正合列为 (1) 而左右走向的正合列为 (2). 首先注意到 $\varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, \ell^{n-1}\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) = 0$(因为转移映射全是 0), 根据短正合列 (1) 得到

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \cong \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, \ell^{n-1}\ell\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}).$$

再根据正合列 (2) 得到

$$\cdots \to H^i_{\text{ét}}(X, \ell\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\ell} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to \cdots.$$

取极限即可 (不难验证, 见 [9] 引理 10.1.3). □

19 比较定理

19.1 常值层上同调/经典 de Rham 上同调-奇异比较定理

定理 19.1 (常值层-奇异上同调比较)**.** 设 X 是局部可缩拓扑空间, 则对任何交换环 G 都有典范同构

$$H^i_{\text{sing}}(X, G) \cong H^i(X, \underline{G}).$$

证明. (摘自 [18] 定理 4.47) 定义层

$$\mathscr{C}_{\text{sing}}^q := \Big(U \mapsto C_{\text{sing}}^q(U,G)\Big)^\sharp$$

及自然的映射 $\partial : \mathscr{C}_{\text{sing}}^q \to \mathscr{C}_{\text{sing}}^{q+1}$.

• **步骤 1.** 证明有预解 $0 \to \underline{G} \to \mathscr{C}_{\text{sing}}^*$.

这是因为 X 局部可缩, 则 $\mathscr{C}_{\text{sing}}^*$ 在非零指标处正合. 又因为 X 局部道路连通, 则若 U 可缩, 对 $f \in C_{\text{sing}}^q(U,G)$ 有道路 α 连接任意两个点 $x, y \in U$, 故 $0 = \partial f(\alpha) = f(\partial\alpha) = f(x) - f(y)$, 故局部常值, 则

$$\ker(\partial : \mathscr{C}_{\text{sing}}^0 \to \mathscr{C}_{\text{sing}}^1) \cong \underline{G},$$

因此成立.

• **步骤 2.** 此预解 $0 \to \underline{G} \to \mathscr{C}_{\text{sing}}^*$ 关于 $\Gamma(X, -)$ 零调.

不难验证预层 $\Big(U \mapsto C_{\text{sing}}^q(U,G)\Big)$ 是松弛的, 而且我们断言

$$\Gamma(U, \mathscr{C}_{\text{sing}}^q) \cong C_{\text{sing}}^q(U,G)/C_{\text{sing}}^q(U,G)_0,$$

其中 $C_{\text{sing}}^q(U,G)_0 \subset C_{\text{sing}}^q(U,G)$ 由这样的 α 构成: 满足存在 U 的开覆盖 $\mathfrak{V}$ 使得对所有的 $V \in \mathfrak{V}$ 都有 $\alpha|_{C_{\text{sing}}^q(V,G)} = 0$. 事实上构造同态 $C_{\text{sing}}^q(U,G) \to \Gamma(U, \mathscr{C}_{\text{sing}}^q)$ 为 $f \mapsto f^\sharp$. 事实上根据定义不难得到同态的核为 $C_{\text{sing}}^q(U,G)_0$. 满射也不难, 取 $g \in \Gamma(U, \mathscr{C}_{\text{sing}}^q)$, 存在开覆盖 $\{U_i\}$ 和 $g_i \in C_{\text{sing}}^q(U_i, G)$ 使得 $g|_{U_i} = g_i$. 定义

$$g' := \alpha \mapsto \begin{cases} g_i(\alpha) & \mathrm{Im}\alpha \subset U_i, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

即可得到结果, 因此成立.

• **步骤 3.** 完成证明.

根据步骤 2 得到 $H^q(X, \underline{G}) = H^q\Gamma(X, \mathscr{C}_{\text{sing}}^*)$. 因此只需证明

$$\Gamma(U, \mathscr{C}_{\text{sing}}^*) = C_{\text{sing}}^*(U,G)/C_{\text{sing}}^*(U,G)_0 \sim_{\text{qis}} C_{\text{sing}}^*(U,G)$$

即可. 这是纯代数拓扑的, 对 X 的开覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, 定义复形 $C_*^{\mathfrak{U}}(X,G)$ 为

$$C_q^{\mathfrak{U}}(X,G) = \{\sigma : \Delta^q \to X : \mathrm{Im}\sigma \subset \text{某个}U_i\}.$$

根据 [6] 第 178 页的结论, 我们有链同伦 $C_*^{\mathfrak{U}}(X,G) \sim_{\text{ChainHomotopy}} C_{*,\text{sing}}(X,G)$, 因此取对偶得到同伦

$$\pi_{\mathfrak{U}} : C_{\text{sing}}^*(X,G) \sim_{\text{ChainHomotopy}} C_{\text{sing}}^{\mathfrak{U},*}(X,G).$$

故有正合列 $0 \to \ker \pi_{\mathfrak{U}} \to C_{\text{sing}}^*(X,G) \to C_{\text{sing}}^{\mathfrak{U},*}(X,G) \to 0$, 其中 $\ker \pi_{\mathfrak{U}}$ 零调. 对覆盖取余极限得到结论. □

定理 19.2 (经典 de Rham-奇异上同调比较)**.** *对流形 M 和复流形 X, 我们有*

$$H_{\text{dR}}^i(M, \mathbb{R}) \cong H_{\text{sing}}^i(M, \mathbb{R}), \quad H_{\text{dR}}^i(X, \mathbb{C}) \cong H_{\text{sing}}^i(X, \mathbb{C}).$$

证明. 只需证明 $H^i_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})\cong H^i_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R})$ 即可. 首先我们需要如下比较定理:

• **步骤 0. 光滑奇异上同调比较.**(参考 [10] 定理 18.7) 定义光滑奇异单形为 $\sigma:\Delta^p\to M$ 满足在每个点都有光滑扩展, 定义出光滑奇异上同调群 $H^p_{\mathrm{sm}}(M,\mathbb{R})$ 且有自然同构

$$H^p_{\mathrm{sm}}(M,\mathbb{R})\cong H^p(M,\mathbb{R}).$$

回到命题. 定义同态 (de Rham 同态) 为

$$\gamma_k: H^k_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})\to H^p_{\mathrm{sm}}(M,\mathbb{R})\cong H^p(M,\mathbb{R}),[\omega]\mapsto\left([c]\mapsto\int_c\omega\right).$$

根据 Stokes 定理不难得知同态良定义. 接下来的证明都是经典的 MV-讨论, 为了方便我们称满足 γ_k 皆为同构的空间称为 de Rham 空间, 称一个开覆盖为 de Rham 覆盖, 如果其每一个元素都是 de Rham 的且有限交也是 de Rham 的.

• **步骤 1.** 欧氏空间内的凸开子集都是 de Rham 空间.

平凡, 略去讨论.

• **步骤 2.** 若 M 有有限的 de Rham 覆盖, 则 M 也是 de Rham 空间.

标准的 MV-讨论, 简述如下 (不会的读者请复习代数拓扑): 先对两个空间的覆盖证明. 列出两种上同调的 MV 序列, 不难证明交换性. 根据 5 引理即可得到证明. 对于一般情况对覆盖的空间个数归纳即可.

• **步骤 3.** 若 M 有 de Rham 覆盖构成的基, 则 M 也是 de Rham 空间.

假设 M 有 de Rham 空间构成的基 $\mathfrak{M}$, 考虑光滑函数 $f:M\to\mathbb{R}$ 满足对任何 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $f^{-1}((-\infty,c])$ 是紧集 (存在性参考 [10] 命题 2.2.8). 定义

$$A_m:=\{q\in M:m\le f(q)\le m+1\},A'_m:=\{q\in M:m-1/2<f(q)<m+3/2\}.$$

取 $\mathfrak{M}$ 内元素覆盖 A_m 且在 A'_m 内, 因为 A_m 紧, 故可取有限覆盖. 设 B_m 是这些元素的并, 根据步骤 2 得知 B_m 是 de Rham 的. 注意到 $B_m\subset A'_m$ 且当 $l=m-1,m$ 或 $m+1$ 时 $B_m\cap B_l\neq\emptyset$, 设

$$U=\bigcup_{m=2a+1,a\in\mathbb{Z}}B_m,V=\bigcup_{m=2a,a\in\mathbb{Z}}B_m,$$

则由于其都为 de Rham 空间的无交并, 因此也是 de Rham 的. 而 $U\cap V=\coprod_{m\in\mathbb{Z}}B_m\cap B_{m+1}$, 因此也 de Rham 的. 再次运用 MV-讨论得到结论.

• **步骤 4.** 所有 $\mathbb{R}^n$ 的开子集都是 de Rham 空间, 因此所有光滑流形也是.

运用步骤 3 和步骤 1 可以得到所有 $\mathbb{R}^n$ 的开子集都是 de Rham 空间, 而所有光滑流形都有 $\mathbb{R}^n$ 的开子集组成的基, 再次根据步骤 3 得到结论. □

19.2 GAGA 一瞥

基本定义

GAGA(Géométrie algébrique et géométrie analytique) 是横跨复几何和代数几何的桥梁, 是非常重要的结论之一. 最初的 GAGA 来源于 J.P.Serre 的奠基性论文 [17](后世有一本很基础的书 [14] 讲这个), 他解决了复射影簇的情况. 而我们聚焦的是著作 [5] 里的推广版本, 其推广到了一般的紧合 $\mathbb{C}$ 概形上. 事实上 GAGA 也早已有了更多的发展, 例如刚性几何里的刚性 GAGA, 还有代数叠上的 GAGA 等. 这里我们参考 Yan Zhao 的笔记来对 GAGA 做一个简单的介绍, 大部分定理也不给出证明.

定义 19.3. 对开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 和其上的全纯函数 $f_1, ..., f_k$, 设其定义的凝聚理想为 $\mathscr{I}$. 定义仿射解析空间 $(X, \mathscr{O}_X^{\mathrm{Hol}})$ 为

$$X = \{y \in U : f_1(y) = \cdots = f_k(y) = 0\} \subset U$$

和 $i^{-1}\mathscr{O}_U^{\mathrm{Hol}}/\mathscr{I}$, 其中 $i : X \to U$.

一个解析空间 $(X, \mathscr{O}_X^{\mathrm{Hol}})$ 为局部环层空间使得 X 是 *Hausdorff* 的且存在开覆盖使得局部上同构于仿射解析空间.

注 19.4. 对于正则函数层 $\mathscr{O}_X^{\mathrm{Reg}} \subset \mathscr{O}_X^{\mathrm{Hol}}$, 可以证明 $\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Reg}} \to \mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Hol}}$ 忠实平坦且有同构 $\widehat{\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Reg}}} \to \widehat{\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Hol}}}$, 见 *[17]*. 进而得到 $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Hol}}$ 忠实平坦.

定义 19.5. 给定 $\mathbb{C}$ 上的局部有限型概形 X 和其有理点空间 $(X(\mathbb{C}), \mathscr{O}_X|_{X(\mathbb{C})})$, 若局部上为 $U = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/I$, 定义 $X(\mathbb{C})$ 局部上赋予拓扑为 $\mathbb{C}^n$ 的子空间拓扑且为 I 内元素的零点, 记为 X^{an}, 设局部上 $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}}|_{U^{\mathrm{an}}} := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}^{\mathrm{Hol}}/I\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}^{\mathrm{Hol}}$, 从而得到解析化 $(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}})$.

因此我们有典范映射 $\phi_X : X \to X^{\mathrm{an}}$ 为 $X^{\mathrm{an}} \to X(\mathbb{C}) \subset X$ 且层映射为 $\phi^{-1}\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}}$ 为 $f \mapsto f \circ \phi_X$.

命题 19.6. 给定 $\mathbb{C}$ 上的局部有限型概形 X, 考虑函子

$$\Phi_X : \mathrm{AnSp} \to \mathrm{Sets}, \mathcal{X} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X)$$

其中后者为局部环层空间的映射. 则 Φ_X 被 X^{an} 表示.

证明思路. 不妨设 X 仿射, 注意到:

(i) 若 $X \subset Y$ 是开子概形且 Y 满足该性质, 则 X 也满足;

(ii) 若 $X \subset Y$ 是闭子概形且 Y 满足该性质, 则 X 也满足;

(iii) 有 $(X \times Y)^{\mathrm{an}} \cong X^{\mathrm{an}} \times Y^{\mathrm{an}}$.

回到命题. 故不妨设 $X = \mathbb{A}^1$, 注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, \mathbb{A}^1) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x], \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{Hol}})) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x\}, \Gamma(\mathcal{X}, \mathscr{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{Hol}})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}),\end{aligned}$$

即可. □

推论 19.7. 对复局部有限型概形映射 $f : X \to Y$ 而言, 可以唯一提升为 $f^{\mathrm{an}} : X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ 满足 $f \circ \phi_X = \phi_Y \circ f^{\mathrm{an}}$. 另外我们还有 $(X \times_Z Y)^{\mathrm{an}} \cong X^{\mathrm{an}} \times_{Z^{\mathrm{an}}} Y^{\mathrm{an}}$.

注 19.8. 事实上大部分 X 和 f 本身的性质都可以遗传到 X^{an} 和 f^{an} 上, 参考 *[5]*. 例如平展对应局部同构, 光滑对应光滑. 事实上还有 $\mathrm{Hom}_S(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}, Y^{\mathrm{an}})$.

定义 19.9. 对于 $\phi_X : X^{\mathrm{an}} \to X$ 和凝聚层 $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, 定义其解析化为

$$\mathscr{F}^{\mathrm{an}} := \phi_X^* \mathscr{F} = \phi_X^{-1}\mathscr{F} \otimes_{\phi_X^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}}.$$

因此得到函子 $\phi_X^* : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}}), \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$.

注 19.10. *(i)* 有伴随函子 $(\phi_X^*, \phi_{X,*})$;

(ii) 函子 ϕ_X^* 是正合, 忠实且保守的. 正合性不难由 ϕ_X^{-1} 正合且 $\mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Reg}} \to \mathscr{O}_{X,x}^{\mathrm{Hol}}$ 平坦得到. 忠实性由 $X(\mathbb{C}) \subset X$ 稠密且 $\phi_X^{-1}\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{Hol}}$ 忠实平坦得到, 保守性根据忠实性和平坦性得到.

主要定理

首先给出一些构造. 考虑图表

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{an}}} & Y^{\mathrm{an}} \\ {\scriptstyle \phi_X}\downarrow & & {\scriptstyle \phi_Y}\downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

任取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, 由 ϕ_Y^* 正合, 我们有

$$\begin{aligned}(Rf_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} &= \phi_Y^* Rf_*\mathscr{F} \to \phi_Y^* Rf_*\phi_{X,*}\mathscr{F}^{\mathrm{an}} \\ &\to \phi_Y^* R(f\circ\phi_X)_*\mathscr{F}^{\mathrm{an}} = \phi_Y^* R(\phi_Y \circ f^{\mathrm{an}})_*\mathscr{F}^{\mathrm{an}} \\ &= R(\phi_Y^*\circ\phi_Y\circ f^{\mathrm{an}})_*\mathscr{F}^{\mathrm{an}} \to Rf_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}},\end{aligned}$$

故得到

$$\theta^i : (R^i f_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \to R^i f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

定理 19.11 (GAGA 第一定理)**.** *设 $f : X \to Y$ 是局部有限型 $\mathbb{C}$-概形间的紧合映射, 任取 $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ 和 $i \geq 0$ 都有*

$$\theta^i : (R^i f_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \cong R^i f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

证明思路. 对于一般情况需要用 lemme de dévissage 和 Chow 引理, 我们略去, 参考 [5] 定理 XII.4.2. 我们只给出射影的证明. 首先闭浸入的情况不难验证茎得到, 故假设 $X = \mathbb{P}^n_Y$. 不难证明 $\mathscr{F} = \mathscr{O}(n)$ 的情况 (先 $\mathscr{O}_X$, 再归纳法证明 $\mathscr{O}(n)$). 对一般的 $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(X)$, 不难得知存在正合列

$$0 \to \mathscr{G} \to \bigoplus \mathscr{O}_X(n_i) \to \mathscr{F} \to 0.$$

然后用凝聚层的秩归纳, 再用长正合列即可. □

定理 19.12 (GAGA 第二定理)**.** *设 X 是紧合 $\mathbb{C}$ 概形和典范映射 $\phi_X : X \to X^{\mathrm{an}}$, 则函子*

$$\phi_X^* : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}}), \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$$

是范畴等价.

证明. 我们只证明满忠实的, 本质满性比较复杂, 参考 [5] 定理 XII.4.4. 根据定理19.11, 对任何 $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathrm{Coh}(X)$ 都有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \cong H^0(X, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})) \\ &\cong H^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})^{\mathrm{an}}) \\ &\cong H^0(X^{\mathrm{an}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}^{\mathrm{Hol}}_{X^{\mathrm{an}}}}(\mathscr{F}^{\mathrm{an}},\mathscr{G}^{\mathrm{an}})) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}^{\mathrm{Hol}}_{X^{\mathrm{an}}}}(\mathscr{F}^{\mathrm{an}},\mathscr{G}^{\mathrm{an}})\end{aligned}$$

其中最后一个等式因为凝聚性和 $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}^{\mathrm{Hol}}_{X,x}$ 平坦. □

推论 19.13 (推广 Chow 定理)**.** *若 X 是分离局部有限型 $\mathbb{C}$ 概形, 则 X^{an} 的任何闭解析子空间都是 X 闭子概形的解析化.*

证明. 由于是局部的, 不妨设其有限型, 根据 Nagata 紧化不妨设其紧合. 然后根据定理19.12即可得到凝聚理想的对应. □

19.3 平展-奇异比较定理

设 $(X^{\mathrm{an}})_{\text{ét}}$ 是解析空间间的局部同构构成的景, 对应意象为 $\text{Ét}(X^{\mathrm{an}})$. 类似于 GAGA 我们定义函子 $\phi_{X,*}:\text{Ét}(X^{\mathrm{an}})\to\text{Ét}(X)$ 和 $\phi_X^*:\text{Ét}(X)\to\text{Ét}(X^{\mathrm{an}})$ 如下.

定义 $\phi_{X,*}:\mathscr{G}\mapsto(U'\mapsto\mathscr{G}((U')^{\mathrm{an}}))$ 和

$$\phi_X^*:\mathscr{F}\mapsto\mathscr{F}^{\mathrm{an}}:=\left(U\mapsto\varinjlim\mathscr{F}(U'\to X)\right)^\sharp,$$

其中余极限取自如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\phi_X} & X \end{array}$$

其中 $U\to X^{\mathrm{an}}$ 平展且 $U'\to X$ 局部同构. 不难验证有伴随性 $(\phi_X^*,\phi_{X,*})$ 且 ϕ_X^* 正合.

考虑代数 $\mathbb{C}$ 概形和交换图

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\phi_X} & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle f^{\mathrm{an}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ S^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\phi_S} & S \end{array}$$

任取 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}(X_{\text{ét}})$ 和 $V\in X_{\text{ét}}$ 得到 $\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}^{\mathrm{an}}(V^{\mathrm{an}})$. 对平展映射 $U\to S$ 取 $V=f^{-1}(U)$ 得到 $f_*\mathscr{F}\to\phi_{S,*}(f^{\mathrm{an}}_{\text{ét},*}\mathscr{F}^{\mathrm{an}})$, 根据伴随性得到 $(f_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}}\to f^{\mathrm{an}}_{\text{ét},*}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$. 根据 ϕ_X^* 正合, 不难诱导

$$(Rf_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}}\to R_{\text{ét}}f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

若 f 分离有限型, 同理诱导

$$(Rf_!\mathscr{F})^{\mathrm{an}}\to R_{\text{ét}}f_!^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

定理 19.14. *设 $f:X\to S$ 是代数 $\mathbb{C}$ 概形间的分离有限型映射, 则有:*

(i) 对任何 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}_{\mathrm{tor}}(X_{\text{ét}})$, 都有

$$(Rf_!\mathscr{F})^{\mathrm{an}}\cong R_{\text{ét}}f_!^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}\cong Rf_!^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}};$$

(ii) 对任何 $\mathscr{F}\in\mathrm{Ab}_{\mathrm{cons}}(X_{\text{ét}})$, 都有

$$(Rf_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}}\cong R_{\text{ét}}f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}\cong Rf_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}}.$$

证明. (i)(ii) 的前一个同构略去, 参考 [4]XVI.4 和 [3]I.11.6. 后一个同构是因为局部同构根据反函数定理得知存在开覆盖是其加细, 因此成立. □

推论 19.15 (平展-奇异比较定理)**.** *对于代数 $\mathbb{C}$ 概形 X 和有限 Abel 群 G, 我们有*

$$H^i_{\text{ét}}(X,\underline{G})\cong H^i_{\mathrm{sing}}(X^{\mathrm{an}},G),\quad H^i_{c,\text{ét}}(X,\underline{G})\cong H^i_{c,\mathrm{sing}}(X^{\mathrm{an}},G).$$

证明. 根据定理19.14和定理19.1即可得到结论. □

19.4 其他比较定理

定义 19.16 (代数 de Rham 上同调)**.** 设 $f: X \to S$ 是概形映射, 考虑 *de Rham* 复形 $\Omega^*_{X/S}$ 为 $\Omega^q_{X/S} = \bigwedge^q \Omega_{X/S}$ 且微分映射为局部定义成

$$d: b_0 db_1 \wedge \cdots \wedge db_q \mapsto ab_0 \wedge db_1 \wedge \cdots \wedge db_q.$$

定义 X 在 S 上的代数 *de Rham* 上同调为

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/S) := H^i(R\Gamma(X, \Omega^*_{X/S})).$$

定理 19.17 (经典-代数 de Rham 比较)**.** 若 X 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑紧合簇, 则

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \cong H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}).$$

证明. 此时 X^{an} 是紧复流形, 根据 Poincaré 引理知有预解 $0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \Omega^*_{X^{\mathrm{an}}}$. 因此

$$H^i(X^{\mathrm{an}}, \underline{\mathbb{C}}) = R^i\Gamma(X^{\mathrm{an}}, \Omega^*_{X^{\mathrm{an}}}).$$

根据 GAGA 得到

$$R^i\Gamma(X^{\mathrm{an}}, \Omega^*_{X^{\mathrm{an}}}) = R^i\Gamma(X, \Omega^*_X) = H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}).$$

由于再根据定理19.2和定理19.1得到

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = H^i_{\mathrm{sing}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = H^i(X^{\mathrm{an}}, \underline{\mathbb{C}}) = H^i_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}),$$

即可得到结论. □

20 上叹号函子

21 上同调纯性和 Gysin 序列

22 链映射和 Chern 类

23 Poincaré 对偶

24 Lefchetz 迹公式

25 Weil 上同调理论

26 平展上同调的一些应用 I——代数曲面的应用

26.1 待添加

27 平展上同调的一些应用 II——Abel 簇相关

27.1 Abel 簇的平展上同调

27.2 Abel 簇和 Jacobi 簇

27.3 Mordell-Weil 定理

28 平展上同调的一些应用 III——相关大定理和猜想一瞥

28.1 Mordell 猜想

28.2 p 进 Hodge 理论

28.3 双有理几何

索引

参考文献

[1] Brian Conrad. Deligne's notes on nagata compactifications. *Journal of the Ramanujan Mathematical Society*, 22(3), 2007.

[2] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained*. AMS, 2005.

[3] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale Cohomology and the Weil Conjecture*. Springer Berlin, Heidelberg, 1988.

[4] Alexander Grothendieck, Micheal Artin, and J.-L. Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas (SGA 4). Tome 2*. Springer-Verlag, 1972.

[5] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Springer-Verlag, 1971.

[6] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, 1966.

[7] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

[8] Fu Lei. *Algebraic geometry*. TsingHua and Springer, 2006.

[9] Fu Lei. *Étale Cohomology Theory, Revised Version*. World Scientific, 2015.

[10] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, NY, 2012.

[11] James S. Milne. *Étale Cohomology*. Princeton university press, 1980.

[12] James S. Milne. Lectures on étale cohomology, 2013.

[13] James S. Milne. Class field theory, 2020.

[14] Amnon Neeman. *Algebraic and Analytic Geometry*. Cambridge University Press, 2007.

[15] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. AMS, 2016.

[16] Stacks project collaborators. The stacks project, 2023.

[17] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Annales de l'Institut Fourier*, 6, 1956.

[18] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*. Cambridge University Press, 2002.