Однофакторная модель с учётом сезонности

Д. Мартынов, Д. Девяткин, М. Петров

ООО "Газпром Экспорт"
Департамент трейдинговых операций и аукционной торговли
Отдел квантовой оптимизации

16 января 2023 г.

Содержание

1 Описание

За основу взята однофакторная модель для товарных рынков, предложенная Шварцем в 1997 году. В модель добавлена сезонность, характерная для газового рынка.

Пусть P_t – спот цена базового актива (в нашем случае цена DA газа на одном из хабов : TTF, $GASPOOL$ и т.д. Цена без учета сезонности - D_t ($deseasonalized\, price$), тогда:

$$P_t = f_t D_t \tag{1}$$

где f_t – сезонный фактор со следующим свойством:

$$\sum_{i=1}^{i=12} f_{\frac{i}{12}} = 12 \tag{2}$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=12} \ln(f_{\frac{i}{12}}) = 0. \tag{3}$$

Модель предполагает, что цена без учета сезонности – D_t подчиняется стохастическому экспоненциальному процессу Орнштейна–Уленбека:

$$dD_t = k(\mu - \ln D_t)D_t dt + \sigma D_t dZ_t. \tag{4}$$

Произведя замену $X_t = \ln D_t$ и применяя лемму Ито получим, что логарифм цены подчиняется стандартному процессу Орнштейна–Уленбека:

$$\begin{aligned} &dX_t = k(\alpha - X_t)dt + \sigma dZ_t \\ &\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2k}. \end{aligned} \tag{5}$$

Коэффициент $k > 0$ показывает скорость возвращения к долгосрочному среднему логарифму цены базового актива α.

Распределение случайной величины X_t в риск-нейтральных условиях починяется нормальному распределению с параметрами:

$$E(X_t|X_0) = e^{-kt}X_0 + \alpha(1 - e^{-kt}) \tag{6}$$

$$Var(X_t|X_0) = (1 - e^{-2kt})\frac{\sigma^2}{2k}. \tag{7}$$

Соответственно, цена без учета сезонности – D_t (а также цена базового актива – P_t) имеет параметры среднего и дисперсии [1]:

$$\begin{aligned} &E(D_t|X_0) = e^{E(X_t|X_0) + \frac{1}{2}Var(X_t|X_0)} = e^{e^{-kt}X_0 + \alpha(1-e^{-kt}) + \frac{1}{2}Var(X_t|X_0)} \\ &Var(D_t|X_0) = Var(P_t|X_0) = Var(X_t|X_0) = (1 - e^{-2kt})\frac{\sigma^2}{2k} \\ &E(P_t|X_0) = f_t E(D_t|X_0). \end{aligned} \tag{8}$$

Предполагая, что процентные ставки постоянны, в риск-нейтральной мере форвардная (или фьючерсная) цена $F(P_t, T)$ на срок T, будет в точности совпадать с ожидаемой ценой P_t для любого момента времени t:

$$F(P_t, T) = E(P_t) = f_t e^{e^{-k(T-t)}X_t + \alpha(1-e^{-k(T-t)}) + \frac{1}{2}Var(X_t|X_0)} \tag{9}$$

или в логформе, с учетом $X_t = \ln(D_t)$, а также (А) и (Б):

$$\begin{aligned} \ln F(P_t, T) = \ln f_t + e^{-k(T-t)} \ln D_t + \\ (\mu - \frac{\sigma^2}{2k})(1 - e^{-k(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{4k}(1 - e^{-2k(T-t)}). \end{aligned} \tag{10}$$

[1] В силу свойств логнормального распределения

Калибровка параметров для моделирования P_t достигается путем подстановки в уравнение (NN) текущих значений форвардных цен (12, 24 или 36 ближайших месяцев) и минимизации целевой функции. Целевая функция определяется как сумма абсолютных разниц между подобранными и фактическими форвардными ценами на все имеющиеся даты (12, 24 или 36 ближайших месяцев).

$$\sum_{i=1}^{N} |F(P_t, T_i) - F(T)| \to \min \tag{11}$$

где N=12/24/36 ближайших месяцев.

Дополнительные ограничения при оптимизации целевой функции:

$$\sum_{i=1}^{12} \ln f_{\frac{i}{12}} = 0 \tag{12}$$

$$\sigma^2_{implied} = (1 - e^{-2k\Delta t})\frac{\sigma^2}{2k\Delta t} \tag{13}$$

Ограничение вводимое уравнением (NN) можно использовать на все имеющиеся месяца, для которых определена $\sigma_{implied}$. В этом случае моделируемые спот- и форвардные цены имеют большую волатильность на коротких сроках, что более приближенно к реальному рынку.

Для определения спот-цены P_t на любой момент времени t, аналитическое решение уравнения (N) для $\ln D_t$, с учетом (4), (7) и (8), может быть представлено в виде дискретного процесса (где $\Delta t = \frac{1}{365}$):

$$\ln D_t = e^{-k\Delta t} \ln D_{t-1} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2k})(1 - e^{-k\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2k\Delta t}}{2k}}\epsilon \tag{14}$$

Откуда P_t определяется по уравнению (1).

Дискретное решение (NN) позволяет моделировать риск-нейтральную (мартингальную) оценку базового актива и его форвардных цен на любой момент времени $t > t_0$, при известных форвардных ценах $F(P_{t=0}, T)$ и $\sigma_{implied}$ в момент времени t_0. Под риск-нейтральной (мартингальной) понимается как соответствие текущих цен европейских опционов $Call$ и Put, ценам опционов полученным на базе ценовой модели на соответствующий срок.

Модель предназначена для прайсинга любых контрактов с гибкостью, расчетная цена которых зависит от спот-цен базового актива, форвардных цен или их комбинации ($MA\ index$, $QA\ index$ и т.д.).

Проверка модели на прайсинге $swing$-опциона $GUNVOR$ от 17.07.2020 со следующими условиями контракта:

Gazprom Export is selling
Gunvor is buying
Gaspool
01.10.20 06:00 – 01.04.21 06:00 CET
Max TCQ: 3.672 TWh (1000*24*153)
Min TCQ: 2.5704 TWh (70% of Max TCQ)
Max DCQ: 1000 MWh/h
Min DCQ: 500 MWh/h (50% of max DCQ)
Heren GPL MA index

Все цены в *eur* (модели - 10 000 итераций)

Price_counterparty	964 000 – 1 250 000
Model Risk	1 261 500
Model TRD (Implied Vol; N_frd=12)	1 112 200
Model TRD (model Vol; N_frd=12)	1 190 800
Model TRD (Implied Vol; N_frd=36)	1 325 300
Model TRD (model Vol; N_frd=36)	938 900

2 Программная реализация

Здесь будет приведён код на *Python*.