- 第2章 状态空间表达式的解
  - 线性定常齐次状态方程的解（自由解）
    - 系统的自由解：系统输入为零时，由初始状态引起的自由运动
    - 状态方程：$\dot{x} = Ax$
    - 初始状态：$x(t_0) = x_0$
    - 唯一确定解：$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0,\ t \geq t_0$
  - 矩阵指数函数-状态转移矩阵
    - 状态转移矩阵 $\Phi(t) = e^{At}$
      - $x(t) = e^{At}x_0$ 初始时刻的状态向量x_0 ⇒任意时刻的状态向量$x(t)$
      - 几何意义：状态空间中的运动轨线
      - 矩阵微分方程的解，在时间上可以任意分段求取
    - 状态转移矩阵（矩阵指数函数）的基本性质
      - 1. $\Phi(t)$时间组合性
        - $\begin{cases} \Phi(t)\Phi(\tau) = \Phi(t+\tau) \\ e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)} \end{cases}$
      - 2. $\Phi(t)$零时不变性
        - $\begin{cases} \Phi(t-t) = \Phi(0) = I \\ e^{A(t-t)} = I \end{cases}$
      - 3. $\Phi(t)$可逆性
        - $\begin{cases} [\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t) \\ [e^{At}]^{-1} = e^{-At} \end{cases}$
      - 4. $\Phi(t)$与A交换性与可导性
        - $\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A \\ \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A \end{cases}$
          - 重要结论 $A = \dot{\Phi}(t)|_{t=0}$
      - 5. 可交换矩阵组合性
        - 当仅当$AB = BA$时：$e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$
    - 几个特殊的矩阵指数函数
      - A为对角矩阵：$A = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$
        - $e^{At} = \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
      - A能通过非奇异变换实现对角线化：$T^{-1}AT = \Lambda$
        - $e^{At} = \Phi(t) = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T^{-1}$
      - A为约旦矩阵：$A = J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n}$
        - $e^{Jt} = \Phi(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$（↓ 每行向下求导）
      - $A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$
        - $e^{At} = \Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}e^{\sigma t}$
    - $\Phi(t)$或e^{At}的计算
      - 由e^{At}或$\Phi(t)$的定义直接计算
        - $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \dots$ 注意 此方法难以获得解析解
      - 变换A为约旦标准形
        - A特征值互异：$\Lambda = T^{-1}AT$
          - $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T^{-1}$
        - A特征值有重根：$J = T^{-1}AT$
          - $\begin{cases} e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} \\ e^{Jt} = \Phi(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$
      - 利用拉氏变换法求e^{At}
        - $e^{At} = \Phi(t) = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$
      - 应用凯莱-哈密顿定理求e^{At}
        - 所有等于或高于n次的项均可以表示为低次项之和：$e^{At} = a_{n-1}(t)A^{n-1} + a_{n-2}(t)A^{n-2} + \dots + a_1(t)A + a_0(t)I$ 注意 n为特征方程最高次项的阶数，也即方阵A的阶数
        - $a_i(t)$的计算公式
          - A的特征值互异：$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ & & \dots & \dots & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
          - A的特征值均相同（$=\lambda_1$）：$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \dots & & \frac{(n-1)\lambda_1^{n-2}}{1!} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$
  - 线性定常系统非齐次方程的解
    - 线性定常系统在控制作用$u(t)$作用下的强制运动
    - 状态方程：$\dot{x} = Ax + Bu$
    - 初始状态：$x(t_0) = x_0$
    - 解：$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ \Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)} \end{cases}$
    - 解由两部分组成：
      1 表示由初始状态引起的自由运动
      2 表示由控制激励作用引起的强制运动