曲面曲线积分

特殊曲面积分的计算

- 计算第一型曲面积分：

$$
I=\iint_{S} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{a}{2})^2}}dS
$$

$$
\text{其中，} S: x^2+y^2+z^2=a^2, a>0.
$$

解：

由坐标变换：

$$
\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=z-\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \\ z=z'+\frac{a}{2} \end{cases}
$$

原曲面积分变为：

$$
I=\iint_{S'} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS
$$

$$
S': x^2+y^2+(z+\frac{a}{2})^2=a^2
$$

考虑如下曲线弧：

$$
y^2+(z+\frac{a}{2})^2=a^2, \quad y>0
$$

其参数方程为：

$$
\begin{cases} y=a\cos\theta \\ z=a\sin\theta-\frac{a}{2} \end{cases} \qquad \theta: -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}
$$

其对应的弧微分为：

$$
ds=\sqrt{y_\theta'^2+z_\theta'^2}d\theta=ad\theta
$$

将ds沿z轴旋转一周，得到的圆环面积微元为：

$$dS = 2\pi x ds = 2\pi a^2 \cos\theta d\theta$$

且对于该面积微元有：

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{y^2+z^2} = a\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta}$$

则：

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S'} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi a^2 \cos\theta}{a\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta}} d\theta \\ &= -4\pi a \sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta} \quad |_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi a \end{aligned}$$

积分坐标变换

- 求由抛物线$y^2 = px, y^2 = qx (0 < p < q)$和双曲线$xy = a, xy = b (0 < a < b)$所围成的闭区域的面积.

解：考虑利用积分坐标变换，令

$$\begin{aligned} u &= \frac{y^2}{x} \\ v &= xy \end{aligned}$$

由雅各布行列式有：

$$J = |\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}| = |\begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix}| = \frac{3y^2}{x} = 3u$$

所以

$$dudv = 3udxdy, \quad dxdy = \frac{1}{3u}dudv$$

所求面积为：

$$S=\iint_{D_{uv}} dudv=\int_p^q du\int_a^b \frac{1}{3u}dv=\frac{b-a}{3}\ln\frac{q}{p}$$

无穷级数

判断级数敛散性

- 判断级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$$

在$x=4$处的敛散性.

解：注意到有

$$\begin{aligned}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n&=\frac{n!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}2^n\cdot 2^n\\&=\frac{n!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{n!\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\\&=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}>1\end{aligned}$$

所以该级数在$x=4$处发散。