常用公式&结论

- 看到方阵要联想到行列式

四次方差公式

$$a^4-b^4=(a-b)*(a^3+a^2*b+a*b^2+b^3)$$

矩阵的“因式分解”

若矩阵每行都有一个公因子，则该矩阵可被分解为“列向量 $\times$ 行向量”的形式：

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

例题

已知矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

求A^n：

将矩阵A进行分解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

所以有：

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]\cdots[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1}A=3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对$AB=0$的讨论

- 若A，B都是方阵，对等式两边求行列式，可得：

$$
\begin{gathered}
|AB|=|A||B|=0 \\
\therefore |A|=0 \text{ 或 } |B|=0
\end{gathered}
$$

- 若有：

$$
A_{m\times n}B_{n\times l}=0
$$

则$R(A)+R(B)\leq n$

- 若A，B都是方阵，则有

$$
\begin{gathered}
AB=0,\ A\text{可逆} \Rightarrow B=0 \\
AB=0,\ B\text{可逆} \Rightarrow A=0
\end{gathered}
$$

- 若$AB=0$，则有

$$
\begin{gathered}
A\text{列满秩} \Rightarrow B=0 \\
B\text{行满秩} \Rightarrow A=0
\end{gathered}
$$

- 将矩阵B拆分：

$$
A(b_1,b_2,\ldots,b_n)=0
$$

此时矩阵B中每一个列向量都是齐次线性方程$Ax=0$的解，由此可以和齐次线性方程解的理论联系起来。

行列式

行列式的性质

性质1

行列式与它的转置行列式相等：

$$
|A^T|=|A|
$$

性质2

对换行列式的两行（列），行列式变号.

推论 若行列式有两行（列）完全相同，则该行列式等于0.

性质3

行列式的某一行（列）中所有元素都乘同一数k，等于用数k乘此行列式.

推论 行列式某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式记号之外.

性质4

行列式中若有两行（列）对应元素成比例，则此行列式为0.

性质5

若行列式某行（列）元素都为两数之和，如：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意 和的行列式不可简单拆开，即

$$|A+B| \neq |A|+|B|$$

性质6

把行列式的某一行（列）的各元素乘同一数然后加到另一行（列）对应的元素上，行列式不变.

行列式展开

行列式按行（列）展开法则

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$
$$\text{或：}D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

推论 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$
$$\text{或：} a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$$

上述关于代数余子式的重要性质总结如下：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

特殊行列式的计算

分块下三角行列式

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}, D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

则有：

$$D=D_1D_2$$

分块对角矩阵的行列式

对于分块对角矩阵

$$A=\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix}$$

具有如下性质：

$$|A| = |A_1||A_2|\dots|A_s|$$

范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

行列式的常用结论

- 如果矩阵A，B为n阶方阵，则：

$$|AB| = |A||B|$$

- 若A为可逆方阵，则有：

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

矩阵及其运算

特殊矩阵

对称&反对称矩阵

对称矩阵

$$A^T = A$$

反对称矩阵

$$A^T = -A$$

对角矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

对角阵也记作：

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

对角矩阵的性质

对一个对角矩阵Λ有：

$$\Lambda^a = \begin{pmatrix} \lambda_1^a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^a \end{pmatrix}$$

分块矩阵

将矩阵A用若干横线和竖线分成很多小矩阵（称为A的子块），以子块为元素的矩阵称为分块矩阵。分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似。

分块矩阵的运算

加法

对同型矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$用相同的方法进行分块为$A=(A_{ij})_{s\times t}, B=(B_{ij})_{s\times t}$，其中$A_{ij}, B_{ij}$为同型矩阵，则

$$A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{s\times t}$$

数乘

将矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$分块为$A=(A_{ij})_{s\times t}$，则

$$kA=(kA_{ij})_{s\times t}$$

乘法

矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times l}$分别分块为$A=(A_{ij})_{s\times t}, B=(B_{ij})_{t\times r}$，其中$A_{ij}$是$m_i\times n_j$矩阵，$B_{ij}$是$n_i\times l_j$矩阵，则

$$C=AB=(C_{ij})_{s\times r}$$

其中

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\ldots+A_{it}B_{tj}$$
$$(i=1,2,\ldots,s;\quad j=1,2,\ldots,r)$$

矩阵的运算

矩阵的线性运算

加法

对同型矩阵$A=(a_{ij})_{s\times n},B=(b_{ij})_{s\times n}$，定义加法：

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{s\times n}$$

数乘

数k与矩阵A的乘积定义为：

$$kA=(ka_{ij})_{s\times n}$$

矩阵的乘法

设$A=(a_{ij})_{s\times n},B=(b_{ij})_{n\times m}$，则$AB=(c_{ij})_{s\times m}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\dots,s;j=1,2,\dots,m)$$

矩阵乘法满足的运算律

设A，B，C，为同型矩阵，k为数，则有：

- $(AB)C=A(BC)$
- $A(B+C)=AB+AC\ (\text{左分配率})$
 $(A+B)C=AC+AC\ (\text{右分配率})$
- $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

注意 矩阵乘法不满足交换律，即：

$$AB\neq BA$$
$$(AB)^k\neq A^kB^k$$

矩阵的转置

矩阵转置满足的运算律

设A，B为矩阵，k为数，则有：

- $(A^T)^T=A$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- $(kA)^T=kA^T$

矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换

定义 矩阵的下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

1. 对调两行（对调i, j两行，记作$r_i \leftrightarrow r_j$）
2. 以非零数k乘以某一行的所有元素（第i行乘k，记作$r_i \times k$）
3. 把某一行所有元素的k倍加到另一行的对应元素上（第j行的k倍加到第i行上，记作$r_i + k \times r_j$）

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为初等变换。显然，三种初等变换都是可逆的，初等变换的逆变换仍为初等变换且变换类型相同。

矩阵的等价

若矩阵A经过有限次初等行变换可变为矩阵B，则称A，B行等价，记作$A \sim^r B$；若矩阵A经过有限次初等列变换可变为矩阵B，则称A，B列等价，记作$A \sim^c B$；若矩阵A经过有限次初等变换可变为矩阵B，则称A，B等价，记作$A \sim B$.

矩阵之间的等价关系具有如下性质：

- 反身性：$A \sim A$
- 对称性：若$A \sim B$，则$B \sim A$
- 传递性：若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$

重要的矩阵概念

行阶梯形矩阵

设矩阵A满足以下两个条件：

1. 若矩阵有零行（每个元素都是零的行），则零行都在矩阵的最下方
2. 每个非零行的非零首元（第一个不是零的元素）都出现在上一行非零首元的右边，则称该矩阵为行阶梯形矩阵

行最简形矩阵

设矩阵A为行阶梯形矩阵，且满足以下两个条件：

1. 每个非零行的非零首元都为1
2. 每个非零行的非零首元所在的列的其他元素都是零，则称矩阵A为行最简阶梯形矩阵，简称为行最简形矩阵

注 对任何矩阵A，总可以经过有限次初等行变换把它们变为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵。

标准形

特点：标准型F的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为零

$$F=\begin{pmatrix}E_r & O \\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n}$$

注

- 任一矩阵A总可以经过初等变换化为标准形
- 标准形由m,n,r三个数唯一确定，其中r就是行阶梯形矩阵中非零行的行数

初等矩阵

定义 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵

- 把单位矩阵中第i,j两行对换（或第i,j两列对换），得到的初等矩阵记为$E(i,j)$
- 以数$k\neq 0$乘单位矩阵的第i行（或第i列），得到的初等矩阵记为$E(i(k))$
- 以k乘单位矩阵的第j行加到第i行上或以k乘单位矩阵的第i列加到第j列上，得到的初等矩阵记为$E(ij(k))$

初等矩阵的性质

1. 初等矩阵均可逆
2. n阶方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等方阵$P_1,P_2,...,P_l$，使$A=P_1P_2...P_l$
3. A和B行等价的充要条件是存在m阶可逆矩阵P，使$PA=B$
4. A和B列等价的充要条件是存在n阶可逆矩阵Q，使$AQ=B$
5. A和B等价的充要条件是存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使$PAQ=B$
6. 方阵A可逆的充要条件是A和单位矩阵E行等价

定理1

设矩阵A是一个$m\times n$矩阵，对A施行一次初等行变换相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

初等矩阵都是可逆的，且其逆矩阵是同一类型的初等矩阵：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$$
$$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$$
$$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$$

扩展 可以证明，矩阵

$$A=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

的逆是它本身，即有：

$$A^2=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}=E$$

定理2

设矩阵A是一个$m\times n$矩阵，则存在行最简形矩阵B和m阶初等矩阵$P_1,P_2,\dots,P_s$满足

$$P_1P_2\dots P_sA=B$$

定理3

设矩阵A是一个$m\times n$矩阵，则存在m阶初等矩阵$P_1,P_2,\dots,P_s$和n阶初等矩阵$Q_1,Q_2,\dots,Q_l$满足

$$P_1P_2\dots P_sAQ_1Q_2\dots Q_l=F$$

其中，F为A的标准形。

逆矩阵

定义 对于n阶方阵A，如果存在一个n阶方阵B，使得：

$$AB=BA=E$$

则称矩阵A是可逆的，并称矩阵B是A的逆矩阵，A的逆矩阵记作A^{-1}

伴随矩阵

定义 行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的如下矩阵：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵（注意其中元素的顺序）

伴随矩阵的性质

$$AA^*=A^*A=|A|E$$
$$|A^*|=|A|^{n-1}$$

矩阵可逆的充要条件

矩阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$，且有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

其中A^*为矩阵A的伴随矩阵。

- 当$|A| = 0$时，称A为奇异矩阵，否则称A为非奇异矩阵。由此可得，A是可逆矩阵的充要条件是A为非奇异矩阵

推论 若$AB = E(或BA = E)$，则$B = A^{-1}$

逆矩阵的运算性质

- 若矩阵A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$
- 若矩阵A可逆，且$\lambda \neq 0$，则λA亦可逆，且

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

- 若A，B为同阶可逆方阵，则AB亦可逆（可逆矩阵的乘积仍为可逆矩阵），且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

- 若A为可逆方阵，则有：

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

证明：

$$\begin{cases} A^* A = |A|E \\ A^* = |A|A^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A^*| \cdot |A| = |A|^n \\ |A^*| = |A|^n \cdot |A^{-1}| \end{cases} \Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

- 若A为可逆矩阵，则A^{-1}可逆，且

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

推论 可逆的对称矩阵的逆矩阵，仍为对称矩阵

证明：

$$\begin{cases} A^T = A \\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

- 若A为可逆矩阵，则A^*可逆，且

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

注意 矩阵之和的逆不可简单拆开，即

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

求二阶矩阵的逆

用“两调一除”的方法求二阶矩阵的逆：

先将矩阵A中的主对角元素调换其位置，再将副对角元素位置不换，加负号，最后用A的行列式$|A|$除矩阵A的每一个元素，即可得A的逆矩阵A^{-1}.

用初等变换求逆矩阵

需了解的性质和定理

- 方阵A可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_l$，使$A = P_1P_2\ldots P_l$
- 方阵A可逆的充分必要条件是$A \cong^r E$

利用初等变换求逆矩阵的方法

当$|A| \neq 0$时，则由$A = P_1P_2\ldots P_l$，得：

$$
\begin{gathered}
P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\ldots P_1^{-1}A = E \\
P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\ldots P_1^{-1}E = A^{-1} \\
\text{注：} P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\ldots P_1^{-1}\text{和}A\text{互逆}
\end{gathered}
$$

对$n \times 2n$矩阵$(A\ E)$分块为$(A|B)$，则：

$$
P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\ldots P_1^{-1}(A, E) = (E, A^{-1})
$$

即，对矩阵(A, E)施行[初等行变换]，当把A变成E的同时，原来的E就变成了A^{-1}

注 用此方法求逆矩阵的前提是矩阵可逆

扩展1

对矩阵方程$AX = B$，其中A为n阶方阵，B为$n \times s$阶矩阵，如果A可逆，则$X = A^{-1}B$。当一系列初等行变换将A化为E的同时也将B化为了$A^{-1}B$，即有：

$$
P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\ldots P_1^{-1}(A, B) = (E, A^{-1}B)
$$

对于有n个未知数n个方程的线性方程组$Ax = b$，若增广矩阵$B = (A, b)$经初等行变换 可化为(E, x)时，则系数矩阵A可逆，且$x = A^{-1}b$为方程$Ax = b$的唯一解（向量）.

扩展2

如果A经过一系列初等行变换变成B，则有可逆矩阵P，使得$PA = B$，则有：

$$
P(A|E) = (B|P)
$$

即，当一系列初等行变换将A化为B的同时也将E化为了P.

分块对角矩阵的逆矩阵

设分块对角矩阵A，若$|A_i| \neq 0 (i=1,2,\ldots,s)$，则

$$|A| \neq 0, \text{且}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

另外，一般分块矩阵的逆矩阵可用待定系数法求得.

克拉默法则

对于含有n个未知数$x_1, x_2, \ldots, x_n$的n个线性方程的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

它的解可以用n阶行列式表示，即有：

克拉默法则：如果上述线性方程组的系数矩阵A的行列式不等于零，即：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么，该方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

其中$A_j (j=1,2,\ldots,n)$是把系数矩阵A中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶矩阵，即：

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

关于线性方程组解的定理

定理1

如果线性方程组的系数行列式$D \neq 0$，则方程组一定有解，且解是唯一的

定理2

如果线性方程组无解或有解但不唯一，则它的系数行列式必为零

定理3

如果齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$，则该齐次线性方程组没有非零解（如果系数行列式$D = 0$，则它有且仅有一个零解）

定理4

如果齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式D必为零

矩阵的秩

定义 在$m \times n$矩阵A中任取k行k列$k \leq m, k \leq n$，位于这k行k列交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中所处的位置次序得到的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式。若在矩阵A中有一个r阶子式D非零（此时低阶子式不可能都为零），且所有的$r+1$阶子式（如果存在的话）都为零，则称D为矩阵A的一个最高阶非零子式，称数r为矩阵A的秩，记作$R(A)$.

- 规定零矩阵的秩为零
- $R(A^T) = R(A)$
- 可逆矩阵的秩等于阶数，称可逆（非奇异）矩阵为满秩矩阵，称奇异矩阵为降秩矩阵

矩阵秩的求法

定理 若$A \cong B$，则$R(A) = R(B)$

初等变换求矩阵秩

用初等行变换把矩阵变成行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数即为矩阵的秩.

矩阵秩的性质

- $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$
- $R(A^T) = R(A)$
- 若$A \cong B$，则$R(A) = R(B)$
- 若P，Q可逆，则$R(PAQ) = R(A)$（可逆）

- $\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$，特别当$B=b$时，$R(A) \le R(A,b) \le R(A)+1$
- $R(A+B) \le R(A)+R(B)$
- $R(AB) \le \min\{R(A),R(B)\}$
- 若$A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则$R(A)+R(B) \le n$
- 若$A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且$R(A)=n$（列满秩矩阵），则$R(B)=R(C)$

特殊情形 矩阵乘法的消去律（$AB=0$情形的讨论）

- 由$AB=0$不能推出$A=0$或$B=0$
- 若A，B都是方阵，则有

$$AB=0,\ A\text{可逆} \Rightarrow B=0$$
$$AB=0,\ B\text{可逆} \Rightarrow A=0$$

- 设$AB=0$，则有

$$A\text{列满秩} \Rightarrow B=0$$
$$B\text{行满秩} \Rightarrow A=0$$

矩阵秩与线性方程组解的关系

n元线性方程组$Ax=b$

- $$\text{有解} \Leftrightarrow R(A)=A(A,b)$$
- $$\text{有唯一解} \Leftrightarrow R(A)=R(A,b)=n \quad (n\text{为未知数的个数}).$$
  $$\text{特别地，当方程个数等于未知数个数时，}Ax=b\text{有唯一解} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \quad (\text{此时为克拉默法则})$$
- $$\text{有无穷多个解} \Leftrightarrow R(A)=R(A,b)<n$$
- $$\text{无解} \Leftrightarrow R(A)<R(A,b) \quad \text{或} \quad R(A)=R(A,b)-1$$

齐次线性方程组

齐次线性方程组$Ax=b$有非零解$\Leftrightarrow$方程组$R(A)<n$（n为未知数的个数，也是A的列数）

矩阵方程

矩阵方程$AX=B$有解$\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$

有关矩阵秩的重要结论

伴随矩阵的秩和原矩阵秩的关系

设A为n阶矩阵，则有：

$$\begin{aligned} R(A) = n: &\quad R(A^*) = n \\ R(A) = n-1: &\quad R(A^*) = 1 \\ R(A) < n-1: &\quad R(A^*) = 0 \end{aligned}$$

向量组的线性相关性

线性相关

线性相关的定义

给定向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，如果存在不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = O$$

则称向量组A是线性相关的，否则称它是线性无关

注

1. 若$A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，则只有当$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$时，才有$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_m\alpha_m = O$成立
2. 向量组只包含一个向量α时，若$\alpha = O$则说α线性相关；若$\alpha \neq O$，则说α线性无关
3. 包含零向量的任何向量组都是线性相关的
4. 对于含有两个向量的向量组，它线性相关的充要条件是两向量的分量对应成比例，几何意义是两向量共线；三个向量线性相关的几何意义是三向量共面

定理

设向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m \geq 2)$，令$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$，则下列命题等价：

1. 向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关
2. 线性方程组$Ax = O$有非零解
3. $R(A) < m$
4. 向量组A中至少有一个向量能由其余$m-1$个向量线性表示

与之相对有下列命题等价：

1. 向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关
2. 线性方程组$Ax = O$只有零解
3. $R(A) = m$
4. 向量组A中任何一个向量都不能由其余$m-1$个向量线性表示

相关结论

- n维单位坐标向量组是线性无关的

线性相关的重要结论

1. 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性相关，则向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$也线性相关；反之，若向量组B线性无关，则向量组A也线性无关
2. m个n维向量组成的向量组，当$n<m$时一定线性相关（向量个数大于维数一定线性相关）。特别地，$n+1$个n维相关一定线性相关
3. 设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关，而向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\beta$线性相关，则向量$\beta$必能由向量组A线性表示，且表示式是唯一的
4. 设

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\end{pmatrix},\quad \beta_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{rj}\\a_{r+1,j}\end{pmatrix},\quad (j=1,2,\dots,m)$$

即α_j添上一个分量后得向量β_j，若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关，则向量组$B:\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$也线性无关；反之，若向量组B线性相关，则向量组A也线性相关

注 结论1可推广为：一个向量组若有线性相关的部分组，则该向量组必线性相关。特别地，含有零向量的向量组必线性相关；反之，若一个向量组线性无关，则它的任何部分都线性无关

向量组的秩

向量组的秩和最大线性无关组

定义 设有向量组A，如果在A中能选出r个向量$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$，满足

1. 向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$线性无关
2. 向量组A中任意$r+1$个向量（如果存在的话）都线性相关

则称向量组A_0是向量组A的一个最大线性无关向量组（简称最大无关组）。最大无关组所含向量的个数r称为向量组的秩，记作R_A.

注

- 只含零向量的向量组没有最大无关组，规定它的秩为0
- 最大无关组不唯一
- 向量组与它的最大无关组等价

最大无关组的等价定义

设有向量组$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$是向量组A的一个部分组，且满足：

1. 向量组$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$线性无关
2. 向量组A的任意向量都能由向量组A_0线性表示

则向量组A_0是向量组A的一个最大无关组

矩阵与向量组秩的关系

矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩，即：

$$\text{矩阵的秩} = \text{矩阵列向量组的秩} = \text{矩阵行向量组的秩}$$

若D_r是矩阵A的一个最高阶非零子式，则D_r所在的r列即为A的列向量组的一个最大无关组，D_r所在的行即为A的行向量组的一个最大无关组

向量组秩的重要结论

定理1

向量b能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性表示的充要条件是

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, b)$$

定理2

向量组$B:\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$能由向量组$A:\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性表示的充要条件是

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$

推论 向量组$A:\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$与向量组$B:\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

等价的充要条件是

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$

（向量组等价：若向量组A，B等价，则A，B可相互线性表示）

定理3

若向量组$B:\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$能由向量组$A:\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性表示，则

$$R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

定理4

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性相关的充要条件是$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < m$；向量组线性无关的充要条件是$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m$

线性方程组解的结构

定理 若矩阵$A_{m\times n}$的秩$R(A) = r$，则齐次线性方程组$Ax = 0$解集S的秩$R_S = n - r$

齐次线性方程组

齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该齐次线性方程组的基础解系

齐次线性方程组解向量的性质

- 若$x_1=\xi_1,x_2=\xi_2$是齐次线性方程组$Ax=0$的解，则$x=\xi_1+\xi_2$也是$Ax=0$的解
- 若$x_1=\xi_1$是齐次线性方程组$Ax=0$的解，则$x=k\xi\ (k\in R)$也是$Ax=0$的解

齐次线性方程组的基础解系

对齐次线性方程组$Ax=0$，设$R(A)=r$，则A的行最简形矩阵为：

$$B=\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1,n-r}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & b_{r1} & \dots & b_{r,n-r}\\ 0 & & & \dots & & 0\\ \vdots & & & & & \vdots\\ 0 & & & \dots & & 0\end{pmatrix}$$

则$Ax=0$的基础解系为：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-b_{11}\\ \vdots\\ -b_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-b_{12}\\ \vdots\\ -b_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad \xi_{n-r}=\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\ \vdots\\ -b_{r,n-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

则齐次线性方程组$Ax=0$的通解为：

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}\quad (k_i\in R)$$

易错 写出通解后要注意带上任意实数k_i的范围

非齐次线性方程组

非齐次线性方程解的结构：

非齐次方程的通解 = 对应齐次方程的通解 + 非齐次方程的一个特解

即：

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*\quad (k_i\in R)$$

其中，η^*为非齐次方程的一个特解

非齐次线性方程组解的性质

- 若$x_1=\eta_1$，$x_2=\eta_2$都是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，则$x=\eta_1-\eta_2$是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的解
- 若$x=\eta$是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，$x=\xi$是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的解，则$x=\eta+\xi$是$Ax=b$的解

相似矩阵及二次型

向量的内积、长度及正交性

定义 设n维向量$e_1,e_2,...,e_r$是向量空间V的一个基，若$e_1,e_2,...,e_r$两两正交且都是单位向量，则称$e_1,e_2,...,e_r$是V的一个标准正交基

正交矩阵

$$A^TA=E \quad (\text{即}A^{-1}=A^T)$$

正交矩阵的判定

- 方阵A为正交矩阵的充要条件是：A的列向量都是单位向量，且两两正交

正交矩阵的性质

- 若A为正交矩阵，则$A^{-1}=A^T$也是正交矩阵，且$|A|=1$或(-1)，进而可得正交矩阵A的特征值只能取1或-1
- 若A，B都是正交矩阵，则AB也是正交矩阵
- 对正交变换$y=Px$，有

$$\parallel y \parallel=\sqrt{y^Ty}=\sqrt{x^TP^TPx}=\sqrt{x^Tx}=\parallel x \parallel$$

说明经过正交变换向量长度保持不变

基的标准正交化

将基$a_1,...,a_r$标准正交化，取

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_2-\frac{[b_1,a_2]}{\parallel b_1 \parallel^2}b_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_r &= a_r-\frac{[b_1,a_r]}{\parallel b_1 \parallel^2}b_1-\frac{[b_2,a_r]}{\parallel b_2 \parallel^2}b_2-...-\frac{[b_{r-1},a_r]}{\parallel b_{r-1} \parallel^2}b_{r-1} \end{aligned}$$

然后将正交向量组$b_1,b_2,...,b_r$单位化：

$$e_1 = \frac{b_1}{\| b_1 \|},$$
$$e_2 = \frac{b_2}{\| b_2 \|},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$e_r = \frac{b_r}{\| b_r \|}$$

得到标准正交基.

方阵的特征值与特征向量

对于矩阵A，其特征方程为：

$$|A - \lambda E| = 0$$

特征值的性质

- 设n阶矩阵$A = (a_{ij})$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则有：

A的特征多项式：

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$$

矩阵的迹：

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

矩阵行列式与特征值的关系：

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$$

由此还可推知A是可逆矩阵的充要条件是它的n个特征值全不为零

- 若λ是A的特征值，则λ^k是A^k的特征值（特别的，当A可逆时，$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值）；$\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值（其中$\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m$是λ的多项式，$\varphi(A) = a_0E + a_1A + \ldots + a_mA^m$是矩阵A的多项式）

特征值的相关定理

- 设$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$是方阵A的m个特征值，$p_1, p_2, \ldots, p_m$依次是与之对应的特征向量，若$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$互不相等，则$p_1, p_2, \ldots, p_m$线性无关（特征向量忠于特征值）

推论 设λ_1, λ_2是方阵A的两不同特征值，$xi_1, xi_2, \ldots, \xi_s$和$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$分别是对应于$\lambda_1, \lambda_2$的线性无关的特征向量，则$xi_1, xi_2, \ldots, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$线性无关

相似矩阵

$$P^{-1}AP = B \quad （P\text{为可逆矩阵}）$$

矩阵A，B相似

相关定理

- 若n阶矩阵A和B相似，则A与B的特征多项式相等，从而A与B的特征值相同.

推论 若n阶矩阵A与对角矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似，则$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$是A的n个特征值

- 由$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$知相似变换下矩阵的行列式不变

矩阵相似的判定

- 若矩阵A，B都和同一个对角矩阵Λ相似，则A，B相似.

对角化条件

n阶矩阵A与对角矩阵相似（即A能对角化）的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。

推论 若n阶矩阵A的n个特征值互不相等，则A与对角矩阵相似（反之不一定成立）

对称矩阵的对角化

对称矩阵特征值与特征向量的性质

性质1

对称矩阵的特征值为实数

性质2

设λ_1, λ_2是对称矩阵A的两个特征值，p_1, p_2是对应的特征向量.若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则p_1, p_2正交

注意 非对称矩阵不同特征值对应的特征向量线性无关，但不一定正交

定理（P128）

设A为n阶对称矩阵，则必有正交矩阵P，使$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$，其中$\Lambda$是以A的n个特征值为对角元的对角矩阵

推论 设A为n阶对称矩阵，λ是A的特征方程的k重根（即k重特征值），则矩阵$A-\lambda E$的秩$R(A-\lambda E)=n-k$（$R(A-\lambda E)=R(\Lambda-\lambda E)$，两矩阵相似，秩相等），从而对应特征值λ恰有k个线性无关的特征向量

对称矩阵对角化的步骤

1. 求出A的全部互不相等的特征值$\lambda_1,\ldots,\lambda_s$，它们的重数依次为$k_1,\ldots,k_s(k_1+\ldots+k_s=n)$
2. 对每个k_i重特征值λ_i，求方程$(A-\lambda_i E)x=0$的基础解系，得k_i个线性无关的特征向量.再把它们正交化、单位化，得k_i个两两正交的单位特征向量.因$k_1+\ldots+k_s=n$，故总共可得到n个两两正交的单位特征向量
3. 把这n个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵P，便有$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$。注意Λ中对角元的排列次序应与P中列向量的排列次序相对应

利用对角矩阵计算矩阵的n次方

若矩阵A与对角矩阵Λ相似，且有$P^{-1}AP=\Lambda$，则

$$\begin{aligned}A^n&=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\ldots P^{-1}AP\\&=P^{-1}\Lambda^nP\end{aligned}$$

（对角矩阵n次方的计算）其中，设对角矩阵Λ：

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_r\end{pmatrix}$$

则有：

$$\Lambda^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&&&\\&\lambda_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_r^n\end{pmatrix}$$

二次型及其标准形

定义

标准形

$$f(x)=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\ldots+k_ny_n^2$$

将这种只含平方项的二次型称为二次型的标准形（或法式）

规范形

若标准形的系数$k_1, k_2, \ldots, k_n$只在$0, 1, -1$内取值，即有

$$f(x) = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$$

则称上式为二次型的规范形

定理

任给二次型

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ji})$$

总有正交变换$x = Py$，使f化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$是$f(x)$的矩阵$A = (a_{ij})$的特征值

注意 通过普通可逆变换得到的标准形的系数不一定是原矩阵的特征值

推论 任给n元二次型$f(x) = x^T A x (A^T = A)$，总有可逆变换$x = Cz$，使$f(Cz)$为规范型.

正定二次型

定义 设二次型$f(x) = x^T A x$，若对任何$x \neq 0$，都有$f(x) > 0$（显然$f(0) = 0$，则称$f(x)$为正定二次型，并称对称矩阵A是正定的；若对任何$x \neq 0$，都有$f(x) < 0$，则称$f(x)$为负定二次型，并称对称矩阵A是负定的.

注意 正定矩阵一般默认为对称矩阵.

惯性定理 设二次型$f(x) = x^T A x$的秩为r，且有两个可逆变换

$$x = Cy, \quad x = Pz$$

使得

$$\begin{aligned} f &= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \ldots + k_r y_r^2 \quad (k_i \neq 0) \\ f &= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 \quad (\lambda_i \neq 0) \end{aligned}$$

则$k_1, \ldots, k_r$中正数的个数与$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$中正数的个数相等.

说明 二次型的标准形中正系数的个数称为二次型的正惯性系数，负系数的个数称为负惯性系数

正定二次型的判定

- n元二次型$f(x)=x^TAx$为正定的充要条件是：它的标准形的n个系数全为正，即它的规范形的n个系数全为1，亦即它的正惯性指数等于n.

推论 对称矩阵A为正定的充要条件是：A的特征值全为正.

- 赫尔维茨定理 对称矩阵A为正定的充要条件是：A的各阶主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

对称矩阵A为负定的充要条件是：奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0 \quad (r=1,2,\ldots,n)$$