考试题型

- 判断，10 * 1
- 填空，10 * 2
- 选择，10 * 2
- 计算，3 * 10
- 证明，2 * 10

9.4范式不考

重要知识点

- 蕴含等值式

$$\alpha \rightarrow \beta \quad \Leftrightarrow \quad \neg\alpha \vee \beta$$

$$\neg(P \wedge Q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \vee \neg Q \quad \Leftrightarrow \quad P \rightarrow \neg Q$$

- 判断命题的类型 & 等值演算：重言型，矛盾型，可满足型
- 重要 结点的度：有向图（出度，入度），无向图
- 重要 同构
- 重要 树和树叶：结点，定义
- 重要 判断映射类型
- 重要 证明一个代数系统是群
- 重要 阿贝尔群的定义
- 子群的判别
- 封闭，单位元，逆元
- 重要 幂集：集合间的关系
- 重要 笛卡尔集
- 重要 关系：定义（笛卡尔集的子集），关系的性质，闭包的理解
- 非常重要 关系的性质与闭包运算：判断关系的性质
- 重要 等价关系：自反，对称，可传递（如何判断）
- 重要 偏序：全序，定义，判断
- 重要 分划：两个条件，等价类

证明题

重要考点 证明代数系统是群

群需要满足的条件：

1. 运算满足结合律（在此之前还要证明运算是封闭的）
2. 存在单位元
3. 任何元素都存在逆元

证明函数是双射

即证明：

1. 函数是内射
2. 函数是满射（值域中的所有元素，在定义域中都有元素对应）

证明关系为等价关系

即证明：

1. 是自反的
2. 是对称的
3. 是可传递的

知识点

重要公式

等价式的等值转换

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\ &\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \end{aligned}$$

蕴含等值式

$$\alpha \rightarrow \beta \quad \Leftrightarrow \quad \neg \alpha \vee \beta$$

$$\neg(P \wedge Q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \vee \neg Q \quad \Leftrightarrow \quad P \rightarrow \neg Q$$

幂集的基数

若A是有限集，且$\#A = n$，则有$\#2^A = 2^{\#A} = 2^n$

笛卡尔积的基数

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

另注 集合A上不同关系的个数

$$\#(2^{A\times A}) = 2^{\#(A\times A)} = 2^{(n^2)}$$

从集合A到集合B函数的数量

记$B^A = \{f|f : A \to B\}$，则$\#(B^A) = (\#B)^{\#A}$

完全图的边数

$$\text{边数}m = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

其中，n为完全图的结点数。

另注 n个结点的图G和其补图$\overline{G}$的边数之间存在如下关系：

$$\#E(G) + \#E(\overline{G}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

图的数量关系

- 结点的度之和

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2m$$

树的数量关系

- 结点的度之和

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2m$$

- 边数 = 节点数 - 1（树独有的性质，与环相对）

$$m = n - 1$$

重要定理

- 若$f: A \to B$，$\#A = \#B$，且f为满射，则f是双射。

子群的判别

设$< G; * >$是一个群，H是G的非空子集，若：

1. 对于任意的$a, b \in H$，有$a * b \in H$（运算封闭）
2. 对任意的$a \in H$，有$a^{-1} \in H$（存在单位元和逆元）

则$< H; * >$是$< G; * >$的子群。

判定哈密尔顿图的充分条件

设G是具有n（$n \geq 3$）个结点的图，若G中任意两个不相邻的结点度数之和大于或等于n，则G是哈密尔顿图。

判定欧拉图的充要条件

一连通图G为欧拉图的充要条件是G的每一结点的度均为偶数。

复合函数的性质

- 若f和g都是内射，则$g \cdot f$也是内射
- 若f和g都是满射，则$g \cdot f$也是满射
- 若f和g都是双射，则$g \cdot f$也是双射

重点 以下定理非常重要：

若$f: A \to B$，$g: B \to C$

- 若$g \cdot f$是内射，则f是内射
- 若$g \cdot f$是满射，则g是满射
- 若$g \cdot f$是双射，则f是内射，g是满射

第一章 集合

集合

常见集合的表示符号

N:无0 自然数集 {1, 2 ,3 ,……}

Z:有0 非负整数集 {0, 1, 2 ,3 ,……}

I: 整数集 {0,-1, 1, -2, 2 , -3, 3 ,……}

P: 素数集(只能被1和自身整除,不能被其他正整数整除的大于1的正整数称为素数)

Nm (m≥1) :{1, 2 , 3 ,……,m}

Zm (m≥1) : {0, 1, 2 , 3 ,……, m-1}

R: 全体实数

C: 全体复数(形如a+bi的数, a∈R, b∈R)

Q: 全体有理数(形如i/j的数, i∈I, j∈I)

易混

- $Nm(m \geq 1):\{1,2,3,\dots,m\}$
- $Zm(m \geq 1):\{0,1,2,\dots,m-1\}$

集合的表示法

- 列举法（显示法）
- 描述法（隐式法）

关于集合的基数

- 定义1：不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。
- 定义2：集合A中不同元素的数目称为集合A的基数。记为$\#A$（或$|A|$）。
- 当$\#A$为有限数时，称A为有限集。否则称A为无限集。

集合的包含与相等

1.2 集合的包含和相等

定义1：A、B为二集合，A中的每一元素均在B中，称B包含A；或A含于B。记为$A \subseteq B$。

若$A \subseteq B$，且$B \subseteq A$，称A与B相等，记为A=B。

例A={a,b,c}，B={{a,b,c},a,b,c}，$A \subseteq B$且$A \in B$。

此例说明包含、属于并不是相互排斥的。

定义2：A、B为二集合，$A \subseteq B$且$A \neq B$。称A是B的真子集。

定理1：空集是任何集合的子集。(反证法，注意否定定义)。

定理2：空集是唯一的。(假设有两个，证明这两个相等)。

注意

- $\subseteq$：表示子集
- $\subset$：表示真子集

集合的幂集

定义：设A是一个集合，以A的所有子集为元素构成的集合，称为A的幂集，记为2^A。

注

- 空集是集合A的子集，因而$\varnothing \in 2^A$
- 一般而言，一个集合的幂集总是包含该集合本身：$A \in 2^A$
- 空集的幂集不再是空集：$\Phi \in 2^{\Phi} = \{\Phi\}$
- 幂集的二进制表示方法：见PPT，S1P13
- 定理（集合的基数）：若A是有限集，且$\#A = n$，则有$\#2^A = 2^{\#A} = 2^n$
- 幂集的补集：$(2^A)' = 2^U - 2^A$

集合的运算

二. 集合的运算

定义2：A与B的并：A∪B。即

$$A \cup B=\{u \mid u \in A \text{ or } u \in B\}$$

A与B的交：A∩B。即

$$A \cap B=\{u \mid u \in A \text{ and } u \in B\}$$

定义3：A关于B的相对补集：B－A。即

$$B-A=\{u \mid u \in B, u \notin A\}$$

B－A也称为B与A的差集.

定义4：A关于全集U的相对补集.称为A的绝对补集.记为A′.

$$A'=U-A=\{u \mid u \in U, u \notin A\}$$

集合的成员表

集合运算的定律

集合运算的十条定律

对于全集合U的任意子集A、B、C，有：

交换律 $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

同一律 $A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$

互补律	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \varnothing$
对合律	$(A')' = A$	
等幂律	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
零一律	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
吸收律	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
德•摩根律	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

集合恒等式的几种证明方法

根据定义进行证明

证明集合$S = H$，即证明：

$$S \subseteq H \text{ 且 } H \subseteq S$$

利用已有的集合恒等式证明新的恒等式

利用已有的集合运算定律证明新的恒等式。

利用集合成员表证明集合恒等式

集合的分划

分划

- 交集 = 空集
- 并集 = 全集

1.8 集合的分划

定义1: 设 $\pi=\{A_i\}_{i\in K}$ 是集合A的某些非空子集的集合。

如果集合A的每一元素在且只在其中的某一A_i中即若

1) $A_i \cap A_j = \varphi \quad i \neq j \quad i, j \in K$

2) $\bigcup_{i\in K} A_i = A$ 交集=空集，并集=全集

则称集合π是集合A的一个分划。而每个A_i称为这个分划的分划块。

细分

定义：设 $\pi' = \{A_i'\}_{i\in K'}$ 与 $\pi = \{A_i\}_{i\in K}$ 均为A的分划，如果π′中的每一A_i'都是π中的某一个A_j的子集，则称π′分划是分划π的一个细分；若π′是π的细分，且π′中至少有一个A_i'为某个A_j的真子集，则称π′是π的真细分。

分划全集U常用，事实上分划是U划分分界线，若分划π′的分界线是在分划已有的分界线上添加新的分界线，则π′是π 的真细分。

集合的标准形式

利用成员表求集合的最大集与最小集标准形式时：

- 最大集的标准形式应关注“0”所在位置，最大集标准形式为并集的交集，有0则0
- 最小集的标准形式应关注“1”所在位置，最小集标准形式为交集的并集，有1则1

最小集的标准形式

最小集表示为

$$M_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_r} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_r$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, \text{当} \overline{A}_i = A_i' \\ \\ 1, \text{当} \overline{A}_i = A_i \end{cases}$$

注

- 例如：$A_1 \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4 = M_{1101}$

- 最小集和最大集的δ_i表示方式正好相反。

1. 最小集的标准形式

定义：设$A_1,A_2,\cdots A_r$是全集U的子集，形如 $\bigcap_{i=1}^{r}\bar{A}_i$ 的集合称为由$A_1,A_2,\cdots A_r$所产生的最小集，其中每个 $\bar{A}_i$ 为A_i或A_i'（注意每个 $\bar{A}_i$ 中A_i或A_i'至少出现且只出现一个）。

例如由A，B，C产生的最小集为：

$A\cap B\cap C$、 $A\cap B\cap C'$、 $A\cap B'\cap C$、

$A\cap B'\cap C'$、 $A'\cap B\cap C$、 $A'\cap B\cap C'$、

$A'\cap B'\cap C$、 $A'\cap B'\cap C'$

由乘法原理及定义知：由$A_1, A_2, \cdots A_r$所产生的最小集共有2^r个。

定理1

定理1：由$A_1,A_2,\cdots A_r$所产生的非空最小集的集合构成U的一个分划.

1). $\bigcup_{i=1}^{2^r} s_i = U$

（其中S_i是由$A_1,A_2,\cdots A_r$所产生的最小集$i=1,2,\cdots\cdots 2^r$）

2). $S_i\cap S_j=\varphi \quad i\neq j$

定理2

由$A_1, A_2, \ldots, A_r$所产生的每个非空集S恒可表示为若干个不同的最小集的并集。

最大集的标准形式

$$\overline{M}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_r} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_r$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, \text{ 当}\overline{A}_i = A_i \\ 1, \text{ 当}\overline{A}_i = A_i' \end{cases}$$

例如，$A_1 \cup A_2 \cup A_3' \cup A_4 = \overline{M}_{0010}$

2. 最大集的标准形式

定义：设$A_1, A_2, \cdots A_r$是全集U的子集，形如$\bigcup_{i=1}^{r} \bar{A}_i$的集合为由$A_1, A_2, \cdots A_r$所产生的最大集,其中每个$\bar{A}_i$为$A_i$或$A_i'$(注意每个$\bar{A}_i$中$A_i$或$A_i'$至少出现且只出现一个)。

例如由A，B，C 产生的最大集为:

$A \cup B \cup C$ $A \cup B \cup C'$ $A \cup B' \cup C$

$A \cup B' \cup C'$ $A' \cup B \cup C$ $A' \cup B \cup C'$

$A' \cup B' \cup C$ $A' \cup B' \cup C'$

由乘法原理及定义知:由$A_1, A_2, \cdots A_r$所产生的最大集共有2^r个。

但所有的最大集不能构成U的分划。（交集非空.)

定理3

由$A_1, A_2, ..., A_r$所产生的任一集合S或为全集或为由$A_1, A_2, ..., A_r$所产生的若干不同的最大集的交。

关于集合的标准形式的进一步说明

定理4

S是$A_1, A_2, ..., A_r$产生的集合，不记次序，则其最大（小）集的标准形式是唯一的。

定理5

由$A_1, A_2, ..., A_r$产生的集合相等的充要条件是它们的最大（小）集的标准形式是一样的。

第二章 关系

笛卡尔积

有序n元组 & 序偶

定义1　由n个具有给定次序的个体$a_1, a_2, \cdots, a_n$组成序列称为有序n元组,记作$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

其中第i个元素 a_i 称为该有序n元组的第i个坐标。

当n=2时，有序二元组(a, b)又称为序偶。

注意:“序”和 n

笛卡尔积

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为任意集合，称以下集合为笛卡尔积，并记为:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

注

- 一般情况下，$A \times B \neq B \times A$
- $\phi \times B = A \times \phi = \phi$
- 记号：$A \times A = A^2$

笛卡尔积的基数

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

与笛卡尔积有关的一些恒等式

类似于分配律:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

关系的定义

定义4 笛卡尔积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的任意一个子集称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上的一个n元关系。

当n=2时，$A_1 \times A_2$ 的任意一个子集，称为由 A_1 到 A_2 的一个二元关系。

如无特殊指定，“关系”概指二元关系。

元素与“关系”

- 若$(a, b) \in \rho$，则称a与b有关系ρ，记作$a\rho b$
- 若$(a, b) \notin \rho$，则称a与b无关系ρ，记作$a\rho' b$

几种特殊的关系

空关系

对任意集合$A, B, \phi \subseteq A \times B, \phi \subseteq A \times A$，所以$\Phi$是由A到B的关系，$\Phi$也是A上的关系，称为空关系。

普遍关系

$$A \times A = U_A = \{(a_i, a_j) | a_j, a_j \in A\}$$

恒等关系

$$I_A = \{(a, a) | a \in A\}$$

关系的定义域和值域

3.关系的定义域和值域

设ρ是由A到B的一个关系，ρ的定义域记作D_ρ，ρ的值域记作R_ρ，分别定义为

$$D_\rho = \{a \mid a \in A 且存在 b \in B, 使得 a\rho b\}$$

$$R_\rho = \{b \mid b \in B 且存在 a \in A, 使得 a\rho b\}$$

显然有$D_\rho \subseteq A, R_\rho \subseteq B$

逆关系

4. 逆关系

定义5 设A、B是任意集合，ρ是由A到B的关系，定义由B到A的关系 $\tilde{\rho}=\{(b,a)\mid(a,b)\in\rho\}$

称$\tilde{\rho}$为关系ρ的逆关系。

关系的表示

集合表示法

用集合的列举法或描述法来表示关系。

矩阵表示法

定义6 设A、B都是有限集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ ，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，由A到B的关系ρ可以用一个$n\times m$的矩阵来表示，M_ρ的第i行第j列的元素r_{ij}取值如下：

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & 若a_i\rho b_j\\ 0 & 若a_i\rho' b_j\end{cases}$$

矩阵M_ρ称为ρ的关系矩阵。 1 5 7

关系图表示法

关系图由结点和边组成。

关系的运算

关系的并、交、补运算

关系的复合运算

定义7 设ρ_1是由A到B的关系，ρ_2是由B到C的关系，则ρ_1和ρ_2的复合关系是一个由A到C的关系，用 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 表示，定义为：

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(a,c) \mid a \in A, c \in C, \text{且} \exists b \in B, \ni (a\rho_1 b, b\rho_2 c)\}$$

这种由ρ_1 和 ρ_2求复合关系$\rho_1 \cdot \rho_2$的运算称为关系的复合运算。

关系复合运算的性质

定理1

设ρ是由A到B的关系，则：

$$I_A \cdot \rho = \rho \cdot I_B = \rho$$

定理2 结合律

$$(\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3 = \rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3)$$

注 不加括号的表达式$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cdots \cdot \rho_n$唯一地表示同一个关系。当$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n = \rho$时，则有如下记号：

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cdots \cdot \rho_n = \rho^n$$

求复合关系的几种方法

根据复合关系的定义求复合关系

运用关系矩阵的运算求复合关系

定理2-3 设A、B、C均是有限集，ρ_1是一由A到B的关系，ρ_2是一由B到C的关系，它们的关系矩阵分别为M_{ρ_1}和M_{ρ_2}，则复合关系$\rho_1 \cdot \rho_2$的关系矩阵

$$\boxed{M_{\rho_1 \cdot \rho_2} = M_{\rho_1} \cdot M_{\rho_2}}$$

注 求关系矩阵的乘积时，加法运算和乘法运算应改为布尔加和布尔乘法。

利用关系图求复合关系

见PPT，S2P42

关系的性质

重点 集合A上关系的性质

定义9 设 ρ 是集合A上的关系

(1) 若对于所有的$a \in A$，均有$a\rho a$，则称 ρ在A上是自反的。

(2) 若对于所有的$a \in A$，均有$a\rho' a$，则称ρ在A上是反自反的。

(3) 对于所有的$a, b \in A$，若每当有$a\rho b$就必有$b\rho a$，则称ρ在 A 上是对称的。

(4) 对于所有的$a, b \in A$，若每当有$a\rho b$和$b\rho a$就必有$a = b$，则称ρ在 A 上是反对称的。

(5) 对于所有的$a, b, c \in A$，若每当有$a\rho b$和 $b\rho c$就必有$a\rho c$，则称ρ在 A 上是可传递的。

注意

- 自反 & 反自反：针对所有元素
- 对称 & 反对称 & 可传递：针对部分元素
- 对称、反对称两者不矛盾，可同时存在。

利用关系矩阵和关系图判断关系的性质

关系矩阵

（1） 关系矩阵

$$M_\rho = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

若ρ是自反的，则关系矩阵的主对角线上的所有元素均为1。

若ρ是反自反的，则关系矩阵的主对角线上所有元素均为0。

若ρ是对称的，则关系矩阵关于主对角线对称。

若ρ是反对称的，则关系矩阵中，关于主对角线对称的元素不同时为1。

关系图

（2） 关系图

若ρ是自反的，则关系图中每一结点引出一个指向自身的单边环。

若ρ是反自反的，则关系图中每一结点均没有单边环。

若ρ是对称的，则在关系图中，若两结点之间存在有边，则必存在两条方向相反的边。

若ρ是反对称的，则在关系图中，任意两个不同的结点间至多只有一条边。

若ρ是可传递的，则在关系图中，若每当有边由a_i指向a_k，且又有边由a_k指向a_j，则必有一条边由a_i指向a_j。

集合A上关系的闭包

闭包的定义

自反闭包 $r(\rho) = \rho \cup I_A$

设ρ是集合A上的关系，定义A上的关系$r(\rho) = \rho \cup I_A$称为ρ的自反闭包。

对称闭包 $s(\rho) = \rho \cup \widetilde{\rho}$

设ρ是集合A上的关系，定义A上的关系$s(\rho) = \rho \cup \widetilde{\rho}$称为$\rho$的对称闭包。

传递闭包 $t(\rho)$

设ρ是集合A上的关系，由下式定义的A上的关系：

$$t(\rho) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots$$

称为ρ的传递闭包。

注 当A是有限集时，A上只有有限个不同的关系，因此，存在某个正整数m，使得：

$$t(\rho) = \bigcup_{i=1}^{m} \rho^i$$

事实上，可以证明，若$\#A = n$，则有：

$$t(\rho) = \bigcup_{i=1}^{n} \rho^i$$

闭包的性质

自反闭包

设ρ是集合A上的关系，则ρ的自反闭包$r(\rho)$具有以下性质：

1. $\rho \subseteq r(\rho)$
2. $r(\rho)$是自反的
3. 对于A上任何关系ρ_r，若ρ_r自反且$\rho \subseteq \rho_r$，则$r(\rho) \subseteq \rho_r$

对称闭包

设ρ是集合A上的关系，则ρ的对称闭包$s(\rho)$具有以下性质：

1. $\rho \subseteq s(\rho)$
2. $s(\rho)$是对称的
3. 对于A上任何关系ρ_s，若ρ_s对称且$\rho \subseteq \rho_s$，则$s(\rho) \subseteq \rho_s$

传递闭包

设ρ是集合A上的关系，则ρ的传递闭包$t(\rho)$具有以下性质：

1. $\rho \subseteq t(\rho)$
2. $t(\rho)$是可传递的
3. 对于A上任何关系ρ_t，若ρ_t可传递且$\rho \subseteq \rho_t$，则$t(\rho) \subset \rho_t$

等价关系

等价关系的定义

- 自反：$\forall a \in A$，$a \rho a$
- 对称：$\forall a, b \in A$，若$a \rho b$，则$b \rho a$
- 可传递：$\forall a, b, c \in A$，若$a \rho b$，$b \rho c$，则有$a \rho c$

集合A上的关系ρ，如果它是自反的，对称的，且可传递的，则称ρ是A上的等价关系。

等价类

定义14 设ρ是集合A上的等价关系，则A中等价于元素a的所有元素组成的集合称为 a 生成的等价类，用$[a]_\rho$表示，即

$$[a]_\rho = \{b \mid b \in A 且 a \rho b\}$$

等价类的性质

1. $\forall a \in A$，$[a]_\rho \neq \varphi$
2. $\forall a, b \in A$，若$a \rho b$，则$[a]_\rho = [b]_\rho$
3. $\forall a, b \in A$，若$a \rho' b$，则$[a]_\rho \cap [b]_\rho = \varphi$

同一等价类中的元素相互等价，不同等价类中的元素互不等价。

等价关系与分划

集合A上的等价关系与集合A上的分划具有一一对应关系。

定理7 设ρ是集合A上的一个等价关系，则集合A中所有元素产生的等价类的集合$\{[a]_\rho \mid a \in A\}$是A的一个分划。

这种由等价关系 ρ 的等价类所形成的A的分划称为A上由ρ导出的等价分划，记作 Π_ρ^A。

定理8 设 $\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_r\}$ 是集合A的一个分划，则存在A上的一个等价关系 ρ，使得∏是A上由 ρ 导出的等价分划。

偏序关系

偏序关系的定义

- 自反
- 反对称
- 可传递

定义15 集合A上的关系ρ，如果它是自反的，反对称的且可传递的，则称ρ是A上的偏序关系。偏序通常用符号“≤”表示。

偏序关系的次序图

全序和良序

全序：元素之间都存在关系

良序：所有子集存在“最小值”

定义16 设≤是集合A上的一个偏序，若对于任意元素a,b∈A，必有a≤b或b≤a，则称≤为A上的一个全序。

定义17 设≤是集合A上的一个偏序，若∀S⊆A，S≠Φ，∃a_s∈S,使得∀s∈S,必有a_s≤s，则称≤为A上的一个良序。

第三章 函数

函数

函数的概念

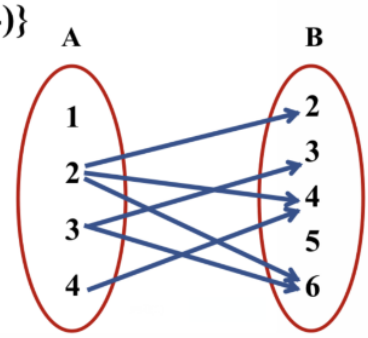
- 不允许一对多，可以多对一
- 定义域中的所有元素要有定义
- 值域中的元素可以没有原像（没有定义域中的元素对应）

函数

1. 函数

例1. 设A={1, 2, 3, 4}, B={2, 3, 4, 5, 6}，A到B的关系

ρ={(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)}



定义3-1 设有集合A、B，f是一由A到B的关系，如果对于每一个a∈A，均存在唯一的b∈B，使得afb（或(a，b)∈f），则称关系f是由A到B的一个函数。记作f：A→B。

函数的定义域和值域

2. 函数的定义域和值域

函数的定义域D_f=A，而不会是A的真子集。函数的值域满足$R_f \subseteq B$，但对于函数f，常将R_f记作 f (A)。

即 f (A)=R_f={b|b∈B且存在a∈A使f (a)=b}

函数的相等

定义3-2 设f和g都是由集合A到B的函数,如果对于所有的a∈A ,均有f(a)=g(a),则称函数f和g相等,记作f=g 。

注 从集合A到集合B函数的数量

记$B^A=\{f|f:A\rightarrow B\}$，则$\#(B^A)=(\#B)^{\#A}$

根据定义3-2，若在A中有一个元素a，使得 f(a) ≠g (a)， 则f≠g 。

设A和B都是有限集，＃A＝n，＃B＝m，设A={a_1, a_2, …, a_n}, B={b_1, b_2, …, b_m}。

A中n个元素的取值方式是 $\underbrace{m\times m\times\cdots\times m}_{n个}$ 种, 因此由A到B的函数有m^n个,

记 B^A={f | f:A→B}, 则#(B^A)=(#B)$^{\#A}$ 基数：集合中不同元素的个数

几种特殊的函数

定义3-3 设f是一由A到B的函数,

（1）若当a_i≠a_j 时，有f (a_i)≠f (a_j), (或者说当f (a_i)＝f (a_j) 时, 有a_i = a_j)

则称f是由A 到 B的内射。不允许多对一

（2）若对任意b∈B，必存在a∈A，使f(a)=b，则称f是A到B的满射。

（3）若f既是内射，又是满射，则称f是由A到B的双射。

若g. f都是双射. g·f不一定是双射

f：A→B 且是满射(内射) → 双射
且 #A = #B

函数的复合运算

复合函数

$$(g\cdot f)(a)=g(f(a))$$

一、复合函数

注意和复合关系的定义区分

定义3-4 设有函数 f:A →B 和 g:B→C，f和g的复合函数是一个由A到C的函数，记为g•f。定义为：对于任一a∈A，(g•f)(a)=g(f(a))。即如果集合B中的元素b是a在f作用下的像，且集合C中的元素c是b在g作用下的像，那么 c 就是a在函数g•f作用下的像。

注意 复合函数$g\cdot f$即复合关系$f\cdot g$，其中f为起始的关系，g为末尾的关系。

函数复合运算的性质

- 设$f: A \to B$，则有$f \cdot I_A = I_B \cdot f = f$
- 结合律：$(h \cdot g) \cdot f = h \cdot (g \cdot f)$

注 不加括号的表达式$f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n$唯一地表示一个函数。特别的有：

$$f \cdot f \cdot \cdots \cdot f = f^n$$

复合函数的性质

定理3-3

定理3-3 设有函数 f:A→B，g:B→C

（1）如果f和g都是内射，则g•f也是内射；

（2）如果f和g都是满射，则g•f也是满射；

（3）如果f和g都是双射，由g•f也是双射。

重要 定理3-4

数的复合运算

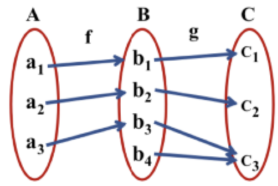
记忆

定理3-4 设有函数 f:A→B 和 g:B→C

(1) 如果g•f是内射，则f是内射；⇒ 若f非内射，则g·f非内射

(2) 如果g•f是满射，则g是满射；⇒ 若g非满射，则g·f非满射

(3) 如果g•f是双射，则f是内射而g是满射。(可由(1).(2)推导)



g·f是双射

f·g不一定是双射

逆函数

逆函数的定义

一、逆函数的定义

定义3-5 设函数 f:A→B是一个双射，定义函数 g:B→A，使得对于每一个元素b∈B，g (b)=a ，其中a是使得f (a)=b的A中的元素，**称g为f的逆函数**, 记作f^{-1}，并称f是可逆的。

由定义3-5，若函数f使f(a)=b，则逆函数f^{-1}使f^{-1}(b)=a，即若(a,b)∈f, 则(b,a)∈f^{-1}， 因此逆函数f^{-1}就是f的逆关系。

逆函数的性质

- 逆函数是双射，双射函数才有逆函数
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- 设$f : A \to B$，则有:

$$f^{-1} \cdot f = I_A$$
$$f \cdot f^{-1} = I_B$$

- 设$f : A \to B$，$g : B \to A$，f, g之间存在如下关系:

$$g \cdot f = I_A,\ f \cdot g = I_B$$

则f, g互为逆函数。

集合的基数

集合的同基

一.集合的同基

定义3-6 设有集合A, B，如果存在一个双射函数 f: A→B, 则称A与B同基(有相同的基数), 或称A与B等势。记作A ~ B 。

集合间的同基关系具有以下三条性质：

(1) 自反性：对于任意集合A， A ~ A 。

(2) 对称性：对于任意集合A、 B, 若A ~ B ， 则必有B ~ A 。

(3) 可传递性：对于任意集合A, B和C, 若A ~ B, B ~ C,则A~C。

定义3-7 如果集合A与集合N_m = {1, 2,…,m}(m为某一正整数)同基, 则称A为有限集, 且#A=m. #Φ=0, Φ也是有限集, 不是有限集的集合称为无限集。

空集

可数集

若A是可数集，则有$A \sim N$，即A，N之间存在双射。

注

- 可数集一定是无限集。
- 所有正有理数的集合Q_+，所有负有理数的集合Q_-和所有有理数的集合Q都是可数集。整数集I是可数集。
- 可数集的基数记为χ_0（阿列夫零），有$\#N = \chi_0$。
- 推论 N^2是可数集，即$N \times N \sim N$

构造双射$h: N \times N \to N$，h的定义如下：

$$h(i,j) = \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + i$$

不可数集

实数集R是不可数集。

不可数集的基数记为χ_1（阿列夫壹），即有$\#R = \chi_1$。

第四章 代数系统

运算

定义1 设有非空集合A，函数 $f: A^n \to A$ 称为A上的一个n元运算。特别，函数 $f: A^2 \to A$ 称为A上的二元运算，$f: A \to A$ 称为A上的一元运算.。

含n个元素

运算的封闭性

二、运算的封闭性

定义2 设*是集合A上的一个二元运算，$S \subseteq A$，若对于每一个序偶 $(a_i, a_j) \in S^2$，都有 $*(a_i, a_j) \in S$，则称运算在S上*是封闭的。

注 定义在集合A上的运算在A上一定是封闭的，在A的子集上则不一定封闭。

二元运算的常见性质

- 可交换
- 可结合
- 可分配

与二元运算相关的特殊元素

单位元

1. 单位元

定义4 设*是集合A上的二元运算，若存在一元素$e_l \in A$，

使得对于任意的$a \in A$，有$e_l * a = a$

则称 e_l 是A中运算*的左单位元;

若存在一元素$e_r \in A$，使得对于任意$a \in A$，有$a * e_r = a$，

则称 e_r 是A中运算*的右单位元;

若存在一元素$e \in A$，使得对于任意 $a \in A$ ，

有$e * a = a * e = a$，则称 e是A中运算 *的单位元。

定理 单位元的唯一性

定理1 设 * 是集合A上的二元运算，e_l 和 e_r 分别是 * 的左单位元和右单位元，则 $e_l = e_r = e$，且 e 是 * 的唯一的单位元.

零元

2. 零元

定义5 设*是集合A上的二元运算，若存在一元素 $z_l \in A$，使得对于任意的 $a \in A$，有$z_l * a = z_l$，则称z_l是A中运算*的左零元; 若存在一元素 $a \in A$，使得对于任意的$z_r \in A$，$a * z_r = z_r$，则称z_r是A中运算*的右零元，若存在一元素 $z \in A$，使得对于任意的 $a \in A$，$z * a = a * z = z$，则称Z是A中运算 *的零元。

定理 零元的唯一性

定理2 设 * 是A上的二元运算，z_l 和 z_r 分别是 * 的左零元和右零元，则 $z_l = z_r = z$，

且 z 是 * 唯一的零元。

幂等元

3．幂等元

定义6 设*是集合A中的二元运算，若$a \in A$且$a*a=a$，

则称a是A中关于运算*的**幂等元**。

注 零元和单位元都是幂等元，故幂等元并不唯一。

元素的逆元

4．元素的逆元

定义7 设*是集合A上具有单位元e的二元运算，对于元素$a \in A$，若存在$a_l^{-1} \in A$，使得$a_l^{-1} * a = e$，则称a关于*是左可逆的，称a_l^{-1}是a的**左逆元**;

若存在$a_r^{-1} \in A$，使得$a * a_r^{-1} = e$，则称a关于*是右可逆的，称a_r^{-1}是a的**右逆元**;

若存在一元素$a^{-1} \in A$，使得$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$，则称$a$关于*是可逆的，称$a^{-1}$是$a$的**逆元**。

注 逆元针对集合中的每个元素。

定理 逆元的唯一性

定理3 设*是集合A上具有单位元e且可结合的二元运算，若元素$a \in A$有左逆元a_l^{-1}和右逆元a_r^{-1}，则$a_l^{-1} = a_r^{-1} = a^{-1}$，且$a^{-1}$是$a$**唯一的逆元**。

定理4

定理4 设*是集合A上的二元运算，且$\#A>1$。若运算*有单位元素e和零元z，则$e \neq z$

代数系统

4.2 代数系统

一、代数系统

非空集合
封闭

定义4-8 一个非空集合S和定义在该集合上的一个或多个运算 $\circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_n$ 所组成的系统称为代数系统。用记号 $<S;\circ_1,\circ_2,\cdots,\circ_n>$ 表示，其中S称为该代数系统的域。→ 运算的封闭性

代数系统的要素：

- 非空集合
- 封闭的运算

整环

定义4-9 设J是一非空集合，+和 · 是J上的二元运算，如果+和 · 满足下述性质：

（1） 交换律

（2） 结合律

（3） · 对+可分配

（4） 存在单位元

（5） 关于+运算存在逆元 → 运算后得到单位元

（6） 消去律

则称代数系统 $<J;+,\cdot>$ 为整环

子代数

要素：

- 非空子集
- 运算封闭

二、子代数

定义4-10 设 $<S;o_1,o_2,o_3>$ 是一个代数系统，其中运算 $o_i(i=1,2,3)$ 均是一元或二元运算，H是S的一个非空子集，如果S上的这三个运算在H上也都是封闭的，则称$<H;o_1,o_2,o_3>$是$<S;o_1,o_2,o_3>$的**子代数**或**子系统**。

一元运算的封闭性

如果 $\circ_i$ 是一元运算，所谓 $\circ_i$ 在子集H上封闭，意味着在H中任取一元素 b ，其运算结果$\circ_i(b)\in H$.

二元运算的封闭性

若 $\circ_i$是二元运算，所谓 $\circ_i$ 在子集H上封闭，意味着在H中任取两元素 a,b，其运算结果$a\circ_i b$仍属于H.

代数系统的同态和同构

同态

同态的概念

一、代数系统的同态

1．同态的概念

一般为二元运算

一般为一元运算

定义4-1 设 $V_1=<S_1;*_1,\circ_1,\sim_1>$ 和$V_2=<S_2;*_2,\circ_2,\sim_2>$

是两个代数系统，h 是从 S_1到S_2的一个函数，若对于任意的 $x,y\in S_1$，

有 $\boxed{h(x*_1 y)=h(x)*_2 h(y)}$，$h(x\circ_1 y)=h(x)\circ_2 h(y)$

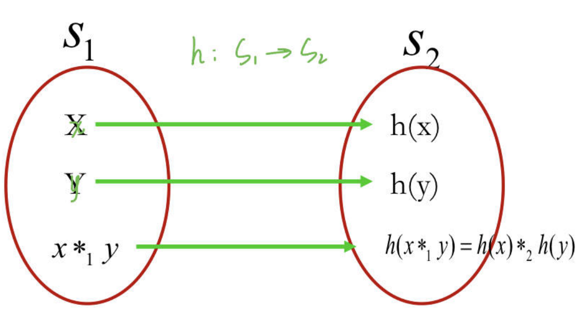
S_1 S_2

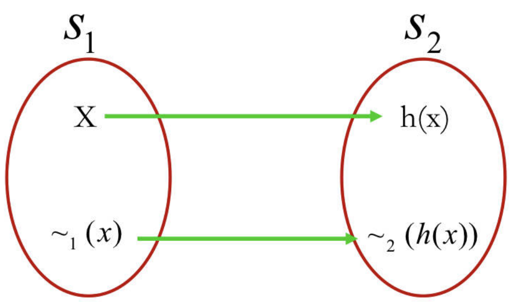
运算的像 = 像的运算

对任意 $x\in S_1$，有 $h(\sim_1(x))=\sim_2(h(x))$

则称 h 是从代数系统 V_1到V_2 的一个**同态**。

注 同态：先运算后取像 = 先取像后运算，两集合中“对应元素的运算结果仍然对应”。





特殊函数定义的特殊同态

$$\text{同态}h\begin{cases} h\text{是内射} \to \text{单一同态} \\ h\text{是满射} \to \text{满同态} \\ h\text{是双射} \to \text{同构} \end{cases}$$

满同态的性质

二、满同态的性质

定理4-5 设 h 是从代数系统 $V_1 = < S_1, *_1, \circ_1, \sim_1 >$ 到 $V_2 = < S_2, *_2, \circ_2, \sim_2 >$ 的一个满同态，则

(1) 若 $*_1(\circ_1)$ 是可交换的，则 $*_2(\circ_2)$ 也是可交换的；

(2) 若 $*_1(\circ_1)$ 是可结合的，则 $*_2(\circ_2)$ 也是可结合的；

(3) 若 $*_1$ 对 $\circ_1$ 是可分配的，则 $*_2$ 对 $\circ_2$ 也是可分配的；

(4) 在 V_1 中若 $*_1(\circ_1)$ 具有单位元 e，则 V_2 中 $*_2(\circ_2)$ 也具有 单位元 $h(e)$;

(5) 在 V_1 中若 $*_1(\circ_1)$ 具有零元 z，则 V_2 中 $*_2(\circ_2)$ 也具有零元 $h(z)$；

(6) 若对于 $*_1(\circ_1)$，S_1 元素 x 具有逆元 x^{-1}，则对于 $*_2(\circ_2)$ x 的像 $h(x)$ 也具有逆元 $h(x^{-1})$。

注 e是V_1的单位元，猜想：$h(e)$是V_2的单位元。

同构

三、同构

设 h 是从代数系统 $V_1=<S_1;*_1,\circ_1,\sim_1>$ 到 $V_2=<S_2;*_2,\circ_2,\sim_2>$ 的同构，

那么 h是从S_1到 S_2的双射，此时 h 存在有逆函数 $h^{-1}:S_2\to S_1$ 。 也是双射

可以证明h^{-1}也必是从V_2 到 V_1 的同构. 即对于任意$(y_1,y_2)\in S_2{}^2$

$h^{-1}(y_1*_2 y_2)=h^{-1}(y_1)*_1 h^{-1}(y_2), h^{-1}(y_1\circ_2 y_2)=h^{-1}(y_1)\circ_1 h^{-1}(y_2)$

对于任意的$y\in S_2$, $h^{-1}(\sim_2(y))=\sim_1(h^{-1}(y))$

这样一来，代数系统 V_1和 V_2 彼此同构。

从抽象的观点来看，两个同构的代数系统可以看作同一个代数系统来加以研究。

具有许多类似的性质

注 构成同构的两个条件:

1. 同态
2. 双射

第五章 群

半群和独异点

半群

- 非空集合
- 二元运算满足结合律
- 代数系统（半群是一个代数系统）

独异点

- 半群
- 运算有单位元

注 对独异点$<S;*>$，$\forall a\in S$，$a^0=e$，$a^{n+1}=a^n*a$。

子半群和子独异点

- 子代数（非空子集，运算封闭）
- 包含单位元（针对子独异点）

注 证明子集合为子独异点（PPT S5P44）

- 证明是子代数，运算封闭
- 证明子集中存在单位元

循环独异点

定义5-4 在独异点$<S; *; e>$中，如果$\exists\, g\in S$，$\forall a \in S$，都可以表示成 g^i $(i \geq 0)$ 的形式，则称此独异点为由g生成的**循环独异点**，称g为**生成元**。

定理5-1 循环独异点是可交换独异点。

? **定理5-2** 设$<S;*>$是一有限独异点，则$\forall a\in S$，$\exists\, r\geq 1$，使 a^r 为一幂等元。

群的定义

群

一、群的定义

定义5-5 设<G; ∗ >是一个代数系统，如果运算*满足结合率，存在单位元e，且G中任何元素a都有逆元a^{-1}，则称<G; ∗ >是一个群。如果运算是可交换的，又称该群为**Abel群**。

结合率

(1) 对于任意的a, b, c ∈ G，有a*(b*c)= (a*b)*c；

单位元

(2) 存在一元素 e∈ G，使得对于任意的 a∈G， 有e*a=a*e=a；

逆元(前提是存在单位元)

(3) 对任意 a∈ G，相应存在一元素 a^{-1}∈G，使得 $a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$

群需要满足的条件：

1. 运算满足结合律（运算要封闭，即群是一个代数系统）
2. 存在单位元
3. 任何元素都存在逆元

注 若群的运算可交换，则称为阿贝尔群。

循环群

群中元素的幂

1．群中元素的幂

单位元存在

对于任意a∈G，$a^0=e$，$a^{n+1}=a^n * a$ (n = 0, 1 , 2, …)

$(a^{-1})^0=e$，$(a^{-1})^{n+1}=(a^{-1})^n * a^{-1}$ (n=0,1,2,…) (*)

引进记号 $a^{-n}=(a^{-1})^n=a^{-1}*a^{-1}*\cdots*a^{-1}$ (n个a^{-1})

因此（*）式可表示为

$$(a^{-1})^0=e,\ a^{-n-1}=a^{-n}*a^{-1}\ (n=0,1,2\cdots)$$

对于任意整数m和n，下式仍然成立：

$$a^m * a^n = a^{m+n};\qquad (a^m)^n=a^{mn}\qquad \therefore\ a^{-n}=(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}$$

抽象的二元运算（非乘法）

循环群

2．循环群

定义5-6 在群<G; * >中，如果存在一元素g ∈G，使得每一元素 a ∈G 都能表示成 g^i(i ∈I)的形式，则称群 <G ; * >为循环群，称 g 为该循环群的生成元，并称群 <G; * >由 g 生成。

注 生成元不唯一。

群的阶和元素的周期

三、群的阶和元素的周期

定义5-7 设<G; *>是一个群，如果G是有限集，则称<G; *>是有限群，G中元素的个数称为群<G; *>的阶；若G是无限集，则称<G; *>是无限群。

定义5-8 设<G;*>是一个群，a ∈ G，若存在正整数 r，使得 $a^r=e$，则称元素 a 具有有限周期。使$a^r=e$成立的最小的正整数 r 称为 a 的周期。如果对于任何正整数r，均有 $a^r \neq e$，则称 a 的周期为无限。

针对元素(不是g)

定理

定理5-3 设<G; ∗>是一由元素 g 生成的循环群，则

（1）若 g 的周期为 n，则<G; ∗>是一个阶为 n 元素个数 的有限循环群；→阶数=周期(g)

（2）若 g 的周期为无限，则<G; ∗>是一个无限阶的循环群。

群的性质

相约性

- 设$< G; * >$是一个群，则对任意的$a, b \in G$:

存在唯一的元素$x \in G$，使$a * x = b$;

存在唯一的元素$y \in G$，使$y * a = b$。

- 设$< G; * >$是一个群，则对任意的$a, b, c \in G$:

若$a * c = a * c$，则$b = c$;

若$b * a = c * a$，则$b = c$。

元素运算后求逆元等于元素分别求逆元后颠倒次序相运算

设$< G; * >$是一个群，则对任意的$a, b \in G$，有:

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

对任意$a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$，有：

$$(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \ldots * a_1^{-1}$$

元素的周期

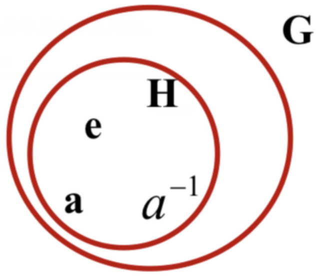
- 群$< G; * >$中的元素a若具有有限周期r，则当且仅当k是r的整数倍时，$a^k = e$。
- 群中任一元素与它的逆元具有相同的周期，$T(a) = T(a^{-1})$。
- 在有限群中，每个元素均具有有限周期，且周期不超过群的阶（即元素的个数）。

子群及其陪集

子群的定义

一、子群的定义

定义5-9 设<G；*>是一个群，若<H；*>是<G；*>的子代数，单位元e ∈ H，且对于任意的a ∈ H，有a^{-1} ∈ H，则称<H；*>是<G；*>的子群。



若<H；*>是<G；*>的子群，则<H；*>也是群.

半群，独异点和群这三个概念之间的区别：半群<N；+>，独异点<Z；+>，群<I；+>。

没有单位元

有单位元　　有逆元

子群的判别

二、子群的判别

要判断H对于运算能否构成<G; * >的子群，需要弄清以下三个问题。

1 封闭性：对于任意a, b∈H，是否有a * b∈H；

2 单位元：是否有e∈ H；

3 可逆性：对于任意a∈ H，是否有a^{-1}∈ H；

定理5-8 设<G; *>是群，H是G的非空子集，若

(1) 对于任意的a, b∈H，有$a*b$∈H；

(2) 对任意的a∈H，有a^{-1}∈H，→ 有单位元 和逆元

则<H; *>是<G; *>的子群。

- 设$< G; * >$是一个群，H是G的非空子集，若：

1. 对于任意的$a, b \in H$，有$a * b \in H$（运算封闭）
2. 对任意的$a \in H$，有$a^{-1} \in H$（存在单位元和逆元）

则$< H; * >$是$< G; * >$的子群。

定理5-9 设$<G;*>$是一个群，H是G的一个非空子集，若对于任意$a,b \in H$，有$a*b^{-1} \in H$，则$<H;*>$是$<G;*>$的子群。

- 设$< G; * >$是一有限群，若$< H; * >$是$< G; * >$的子代数，则$< H; * >$是$< G; * >$的子群。
- 设$< G; * >$是一个群，若$< H; * >$是$< G; * >$的有限子代数，则$< H; * >$是$< G; * >$的子群。

子群的等价定义

三、子群的等价定义

如前所述，若<H; ∗ >是群<G;∗ >的子群，则<H; ∗ >自身也必是群。

反之，设<G; ∗>是一个群，H 是 G的非空子集，若<H; ∗ >也是群，则<H; ∗>必是<G;∗ >的子群。

陪集

定义5-10 设$<H;*>$是群$<G;*>$的子群，a是G的任意一个元素，称集合$H*a=\{h*a|h\in H\}$为子群$<H;*>$在群$<G;*>$中的一个右陪集。集合$a*H=\{a*h|h\in H\}$为子群$<H;*>$在群$<G;*>$中的一个左陪集。

若$\forall\ a \in G$，有$H*a=a*H$，则称子群$<H;*>$是群$<G;*>$的正规子群，此时左(右)陪集简称为陪集。

定理5-11 设$<H;*>$是群$<G;*>$的一个子群，当且仅当$\forall a\in G, h\in H$,都有$a*h*a^{-1}\in H$时，$<H;*>$是群$<G;*>$的正规子群。

$aHa^{-1}=H$

$aH=Ha$

定理5-12 设$<H;*>$是群$<G;*>$的一个子群，a,b是G的任意两个元素，则有：

（1）$H*a=H*b$，或$(H*a)\cap(H*b)=\Phi$;

（2）当且仅当$b\in H*a$时，$H*a=H*b$;

（3）$<G;*>$中$<H;*>$的所有相异的右陪集组成G的一个分划。

定理5-13 设$<H;*>$是群$<G;*>$的一个子群，定义集合$S_L=\{a*H|a\in G\}$, $S_R=\{H*a|a\in G\}$，则存在S_L到S_R的双射。

该定理说明S_L与S_R等势，当G为有限集时，$\#S_L=\#S_R$,称$\#S_L$或$\#S_R$为$<H;*>$在$<G;*>$中的指数，记为[G: H]。

定理5-14 (Lagrange定理) 设$<H;*>$是有限群$<G;*>$的一个子群，则$\#G=[G:H]\bullet\#H$

推论 在有限群$<G;*>$中，每个元素的周期是#G的因子。

第八章 图论

图的基本概念

图的定义及其表示

图的定义

1. 图的定义

定义8-1 图G是一个有序二元组(V, E)，其中V={v_1，v_2，…，v_n}是一个有限非空的集合。V中的元素称为G的**结点**，V称为图G的**结点集**，常记作**V(G)**；

E是V中不同元素的非有序对偶的集合，E中的元素称为G的**边**，E称为图G的**边集**，常记作**E(G)**。

图的表示方法

- 图解表示法
- 矩阵表示法

完全图与补图

完全图

有边相连

定义8-2 在n个结点的图G中，如果任意两个不同的结点都是邻接的，则称图G是**完全图**。记作K_n。

注

- 完全图记作K_n。
- 单独一个结点也是完全图。
- 完全图的边数

K_n

设G是n个结点的完全图，则G的边数

$$\boxed{m = \underbrace{C_n^2}_{\text{组合个数}} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}}$$

(记住)

n个结点的图G与其补图$\overline{G}$的边数

$$\#(E(G)) + \#(E(\overline{G})) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

补图

结点数：原图=补图

定义8-3 图G的补图是由G的所有结点和为了使G成为完全图所需添加的那些边组成的图，用$\overline{G}$表示。

注 n个结点的图G和其补图$\overline{G}$的边数之间存在如下关系：

$$\#E(G)+\#E(\overline{G})=\frac{n(n-1)}{2}$$

连通图

结点的度

1．结点的度

针对某个结点

定理8-1 节点的度是指与该节点相关联的边的条数，设图G具有结点集$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$和m条边，则G中所有结点的度之和 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$. (记住)

注 图G中所有结点的度之和是边数m的两倍，即有：

$$\sum_{i=1}^{n}deg(v_i)=2m$$

推论 在任何图中，度为奇数的结点个数为偶数。

其他概念

2．路：图G中l条边的序列$\{v_0, v_1\}\{v_1, v_2\}\ldots\{v_{l-1}, v_l\}$称为连接$v_0$到$v_l$的一条长为 l 的路。它常简单地用结点的序列$v_0v_1v_2\ldots v_{l-1}v_l$来表示。

3．开路：若$v_0\neq v_l$，则称路$v_0v_1v_2\ldots v_{l-1}v_l$为开路。

4．回路：若$v_0=v_l$，则称路$v_0v_1v_2\ldots v_{l-1}v_l$为回路。

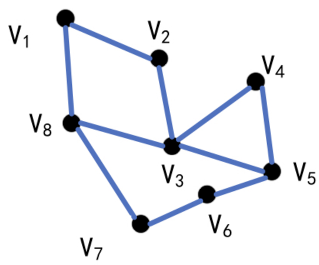
结点可重复

5．真路：若开路$v_0v_1v_2\ldots v_{l-1}v_l$中，所有结点互不相同（此时所有边也互不相同），则称该路为真路。

6．环：在回路$v_0v_1v_2\ldots v_{l-1}v_0$中，若$v_0$，$v_1$，$v_2$，…，$v_{l-1}$各不相同（此时所有边也互不相同），则称该回路为环。

7．两结点是连接的：在图G中，若存在一条路连接v_i和v_j，则称结点v_i与v_j是连接的.

例5



注 开路和回路中的结点可以重复，真路和环中的结点不可以重复。

连通图

在图G中，若任意两个结点都是连接的，则称G是连通图。否则，称G为非连通图。

仅有一个结点的图定义为连通图。

子图与分图

子图

定义8-5 设有图$G_1=(V_1, E_1)$和图$G_2=(V_2, E_2)$

（1） 若$V_2 \subseteq V_1$，$E_2 \subseteq E_1$，则称G_2是G_1的子图，记作$G_2 \subseteq G_1$；

（2） 若$V_2 \subseteq V_1$，$E_2 \overset{\text{真子集}}{\subset} E_1$，则称$G_2$是$G_1$的真子图；

（3） 若$V_2 = V_1$，$E_2 \subseteq E_1$，则称G_2是G_1的生成子图。

结点数一致

注 生成子图与原图的结点集保持一致。

分图

无连接的部分

定义8-6 设H是图G的子图，如果H满足以下条件，则称H是G的分图。

（1）H是连通的；

加一条边(点)

（2）对G的任意其它子图 G'，若$H \subseteq G'$，则G'一定不连通。

割点与割边

1．割点：如果在图G中删去结点v（及与其相关联的所有边后），图G的分图数增加，则称结点v是G的割点。

2．割边：如果在图G中删去边$\{v_i, v_j\}$后，图G的分图数增加，则称边$\{v_i, v_j\}$是G的割边。

定理8-2 在图G中边$\{v_i, v_j\}$为割边的充要条件是边$\{v_i, v_j\}$不在G的任何环上出现。

短程与距离

1．短程：在图G中，结点v_i和v_j若由一条或更多条路相连接，则其中必有长度最短的路，称它为从v_i到v_j的短程.

2．距离：结点v_i和v_j间的短程的长度称为v_i和v_j间的距离.用$d(v_i, v_j)$表示.

定理

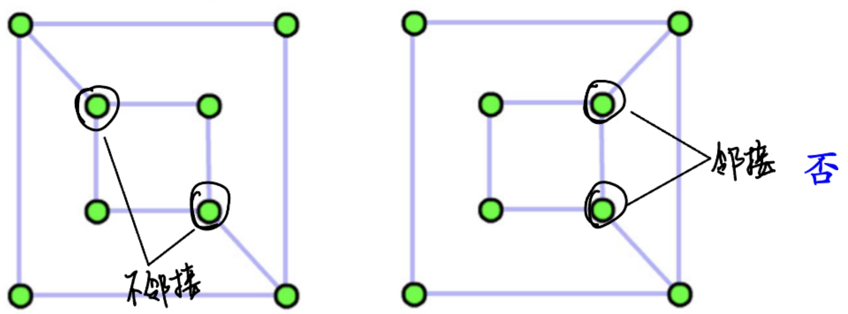
定理8-3 设G是具有结点集V={ v_1，v_2，…，v_n}的图，则对于G中任意两个相连接的结点v_i，v_j($v_i \neq v_j$)，其短程是一条长度不大于n–1的真路。

图的同构

8.1.6 图的同构 ?

定义8-7 设G和G′是分别具有结点集V和V′的两个图。若存在一个双射h: V→V′，使得当且仅当{v_i, v_j}是G的边时, {h(v_i), h(v_j)}是G′的边, 则称图G与G′同构。

例12 下图中G=（V，E）与G′=（V′，E′）同构吗?



G　　　　　　G′

图的矩阵表示

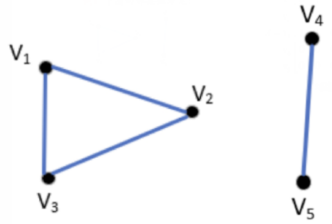
图的邻接矩阵

8.2.1 图的邻接矩阵 邻接矩阵、连接矩阵（注意区分）

定义8-8 设图G=(V, E)，其中V={v_1, v_2, …, v_n}，n阶方阵A=(a_{ij})，称为G的邻接矩阵. 其中第i行j列的元素

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 若\{v_i, v_j\}\in E\\ 0 & 否则\end{cases}$$

例1 下图的邻接矩阵是：



5个结点

$$A=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\overbrace{\begin{array}{ccccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{array}}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

对称

定理

设G是具有结点集$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$和邻接矩阵A的图，则矩阵$A^l\ (l=1,2,...)$的第i行j列的元素$a_{ij}^{(l)}$表示图G中连接结点v_i到v_j长度为l的路的数目。

邻接矩阵的作用：

1. 判断G中任意两个结点是否相连接
2. 计算两结点之间的距离

图的连接矩阵

定义8-9 设图G=(V, E)，其中V={v_1, v_2, …, v_n}，n阶方阵C=(c_{ij})，称为图G的连接矩阵，其中第i行j列的元素

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & 存在连接v_i和v_j的路\\ 0 & 否则\end{cases}$$

可以通过图G的邻接矩阵A得到连接矩阵C（见PPT，S8P25）。

欧拉图和哈密尔顿图

欧拉图

欧拉图：通过图G的每条边一次且仅一次的回路称为欧拉回路。存在欧拉回路的图，称为欧拉图。

欧拉路：通过图G的每条边一次且仅一次的开路称为欧拉路。

定理

- 一连通图G为欧拉图的充要条件是G的每一结点的度均为偶数。
- 连通图G具有连接结点v_i到v_j的欧拉路的充要条件是，v_i和v_j是G中仅有的具有奇数度的结点。

哈密尔顿图

- 哈密尔顿图：通过图G的每个结点一次且仅一次的环称为哈密尔顿环。具有哈密尔顿环的图称为哈密尔顿图。
- 哈密尔顿路：通过图G的每个结点一次且仅一次的开路称为哈密尔顿路。

定理

判定哈密尔顿图的必要条件

定理8-7　若图G=(V, E)是哈密尔顿图，则对于V的任意一个非空子集S, 有W(G–S)≤ #S → 判断是否为哈密顿图

这里W(G–S)表示从G中删除S（删除S中的各结点及相关联的边）后所剩图的分图数。#S表示S中的结点数。

该定理给出了判断哈密尔顿图的必要条件，若一个图不满足该条件，则它不是哈密尔顿图。

判定哈密尔顿图（路）的充分条件

- 设G是具有n个结点的图，若G中任意两个不相邻的结点度数之和大于或等于$n-1$，则G中存在哈密尔顿路。
- 设G是具有n（$n \geq 3$）个结点的图，若G中任意两个不相邻的结点度数之和大于或等于n，则G是哈密尔顿图。

上述两定理分别给出了判断哈密尔顿路和哈密尔顿图的充分条件，不是必要条件。

树

树的定义

定义8-13 不包含环的连通图称为树，不包含环的图称为树林。

树的有些性质可用来作为树的定义。

我们列出下面三条：

相互等价

(1) 每两个结点间由唯一的真路相连接的图是树；

(2) m=n–1的连通图是树；

(3) m=n–1且无环的图是树。

树的性质

- 若T是一(n,m)（n表示结点数，m表示边数）树，则$m=n-1$
- **定理8-10** 设T是一棵树，v_i和v_j是T中任意两个不同的结点，则v_i和v_j由唯一条真路相连接。若v_i和v_j不相邻接，那么当给T添加一条边$\{v_i, v_j\}$后形成的图恰有一个环。

  否则存在环　结点无重复

- 具有两个或更多结点的树至少有两片树叶（度为1的结点）。

生成树与最小生成树

生成树

1．生成树

结点数相同

定义8-14 若连通图G的生成子图T是一棵树，则称T为G的生成树。

构造连通图的生成树的方法

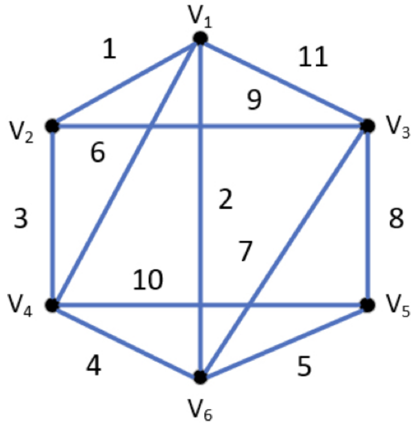
- 破环法
- 避环法

最小生成树

带权图

定义8-15 每条边都以实数赋权的图称为带权图。

例8 下图是一连通带权图。



当G是一带权图时，常将其表示为有序三元组G=（V，E，f），这里f是一由边集E到实数集R的函数 f：E→R.

边集

最小生成树

定义8-16 设G=（V，E，f）是一连通带权图，T是G的一棵生成树，T的边集用E(T)表示，T的各边权值之和W(T)= $\sum_{e \in E(T)} f(e)$ 称为T的权。G的所有生成树中权最小的生成树称为G的最小生成树。

注 最小生成树通常不唯一。

二部图

二部图的定义

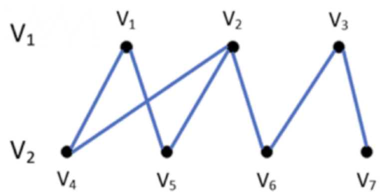
8.5.1 二部图

定义8-17 若一个图G的结点集V能分划为两个子集V_1和V_2，使得G的每一条边$\{v_i, v_j\}$满足$v_i \in V_1$，$v_j \in V_2$，则称G是一个二部图，V_1和V_2称为G的互补结点子集。此时可将G记作G=（V_1，V_2，E）。

若V_1中任一结点与V_2中每一结点均有边相连接，则称二部图为完全二部图。

若$\#V_1=r$，$\#V_2=t$，则记完全二部图G为$K_{r,t}$。

例



注

- 二部图记作$K_{r,t}$
- 二部图不一定是连通图。

定理

定理8-13 图G为二部图的充要条件是G的所有回路均为偶数长。

匹配

8.5.2 匹配

定义8-18 设G是具有互补结点子集V_1和V_2的二部图，其中$V_1=\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$，$V_1$对$V_2$的匹配是G的一个子图，它由r条边$\{v_1, v'_1\}$，$\{v_2, v'_2\}$，…，$\{v_r, v'_r\}$组成，其中，$v'_1$，$v'_2$，…，$v'_r$是$V_2$中r个不同的元素。

二部图存在匹配的充要条件（相异性条件）：

定理 设G是具有互补结点子集V_1和V_2的二部图，则G中存在一V_1对V_2的匹配的充要条件是：V_1中每k个结点（$k=1,2,\ldots,\#V_1$）至少和V_2中k个结点相连接。

二部图存在匹配的充分条件：

定理 设G是具有互补结点子集V_1和V_2的二部图，若存在一整数$t>0$，

(1) 对v_1中的每个结点，至少有t条边与其相关联；

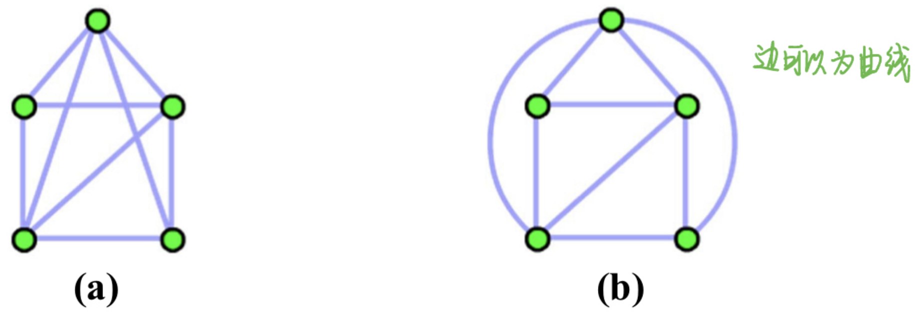
(2) 对v_2中的每个结点，至多有t条边与其相关联。

则G中存在v_1对v_2的匹配。

平面图

8.6.1 平面图的定义

定义8-19 一个图G若能画在平面上，它的边除在端点处外互不交叉，则称G为平面图。画出的没有边交叉的图解称为G的一个平面嵌入。



例1 图(a)是平面图，(b)是该图的一个平面嵌入。

平面图的判别

- 观察法
- 欧拉公式判断法

连通图G为平面图的两个必要条件（不具有充分性）：

1. $n-m+k=2$
2. $m \leq 3n-6\ (m \geq 2)$

其中，n为结点数，m为边数，k为面数。

定义8-20 设G是一个连通平面图，G的边将G所在的平面划分成若干个区域，每一个区域称为G的一个面。其中面积无限的区域称为无限面。面积有限的区域称为有限面。包围面的所有边构成的回路称为该面的边界。

定理8-14 设G是一连通平面图，有n个结点，m条边，K个面，则 n–m+K=2，此定理中的公式称为欧拉公式。

- 库拉托斯基定理判别法

有向图

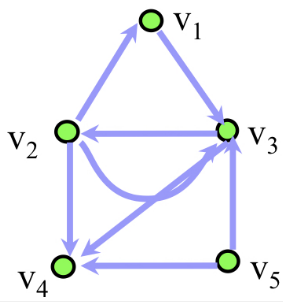
定义8-22 有向图G是一个有序二元组（V，E），其中结点集V是一有限非空集合，边集E是V中不同元素的有序对偶的集合。

与无向图类似的概念

可达

定义8-23 在有向图G=（V，E）中，若存在一条从结点v_i到结点v_j的有向路，则称从v_i到v_j是可达的。

在有向图中从v_i到v_j可达，并不意味着从v_j到v_i也可达。



可达矩阵

与无向图中的连接矩阵相对应。

结点的度

- 结点v的出度，记作$deg^+(v)$
- 结点v的入度，记作$deg^-(v)$
- 结点v的度：$deg(v) = deg^+(v) + deg^-(v)$

连通性

- 连通或弱连通
- 单向连通
- 强连通

5．连通性

定义8-24 在有向图G中，如果略去边的方向，将其看作无向图时，G是连通的，则称G是连通的或弱连通的；如果对于任意两个结点，至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称G是单向连通的；如果对于任意两个结点，两者之间是相互可达的，则称G是强连通的。

与无向图类似的性质

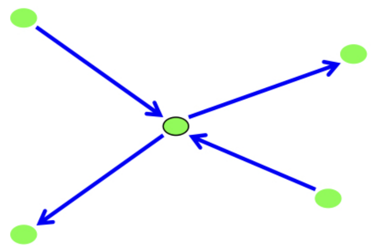
- 设G是具有n个结点的有向图，若从结点v_i到v_j可达，则其短程是一条长度不大于$n-1$的真路。
- 记忆 设G是具有n个结点和邻接矩阵A的有向图，则$A^l\ (l=1,2,\dots)$的第i行第j列的元素表示从结点v_i到v_j长为l的路的条数。

- 一个连通（弱连通）有向图具有欧拉回路的充要条件是G的每一个结点的入度和出度相等。具有欧拉路的充要条件是除两个结点外，每个结点的入度等于出度。对于这两个结点，一个结点的出度比入度多一，另一个结点的出度比入度少一。

有向树

8.8.1 有向树的定义

定义8-25 一个有向图D，如果略去有向边的方向所得的无向图是一棵树，则称D是有向树。



D_1

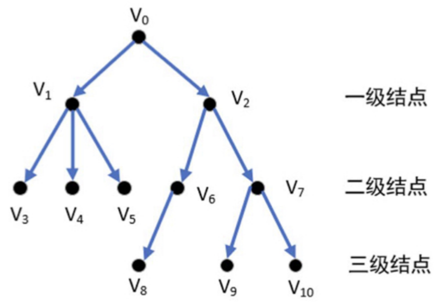
一个孤立结点也是一棵有向树。

例如 有向图D_1是一棵有向树，

定义8-26 若一棵有向树恰有一个结点的入度为0，而其它所有结点的入度都等于1，则称该有向树为根树。入度为0的结点称为树的根。

有向树中的一些概念

8.8.2 有向树中的一些概念



（1）树叶 出度=0

（2）分枝结点

（3）儿子、父亲、兄弟、祖先和子孙（后代）

（4）以v为根的子树：设v是根树T的分枝结点，由结点v和它的所有子孙构成的结点集V′，以及从v出发的所有有向路中的边构成的边集E′组成T的子图T′=（V′，E′）称为是以v为根的T的子树。

（5）v的子树：以v的儿子为根的子树。

二元树

8.8.3 二元树

入度只能≤1，否则会出现环

定义8-26 在一有向树中，若每一结点的出度都小于或等于m，则称这棵树为m元树。若每一个结点的出度恰好等于m或零，则称这棵树为完全m元树。当m=2时，分别称其为二元树和完全二元树。若二元树的所有树叶结点在同一级，则称它为满二元树。

定义8-27 在有向树中，若规定了每一级上结点的次序，则称这样的根树为有序树。

周游二元树

- 先根周游：根 $\to$ 左子树 $\to$ 右子树
- 中根周游：左子树 $\to$ 根 $\to$ 右子树
- 后根周游：左子树 $\to$ 右子树 $\to$ 根

有向树中的一些数量关系

- $m = n - 1$，即边数 = 结点数 - 1（和无向树一致）
- 设T是一棵完全m元树，树叶结点数为n_0，分支结点（有分支的结点）数为t，则有：

$$(m-1)t = n_0 - 1$$

8.8.5 有向树中的一些数量关系

有向树和无向树一样，满足关系式 $\underbrace{m}_{\text{边数}} = \underbrace{n}_{\text{结点数}}-1$

定理8-20 设T是一棵完全m元树，树叶结点数为n_0，分枝结点数为t，则$(m-1)t = n_0-1$。

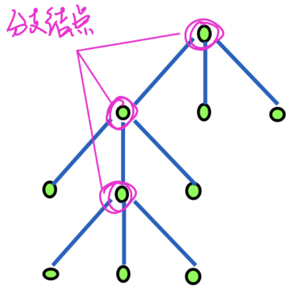
有分枝的结点

证明 由完全m元树的定义知，T的边数=mt，结点数为 n_0+t，

树叶结点 分支结点

于是 $mt=n_0+t-1$ 即 $(m-1)t = n_0-1$

边数=结点数-1



$n_0 = 7, t=3$

$m = 3$

$(m-1)t = 2*3 = 6$

$n_0-1=7-1=6$

- 设T是一棵二元树，n_0表示树叶结点数（出度为1的结点数），n_2表示出度为2的结点数，则有：

$$n_0 = n_2 + 1$$

- 完全二元树有奇数个结点。

注 完全二元树的边数为偶数。

第九章 命题逻辑

命题

命题公式

命题的类型

- 重言式/永真式：若公式α的所有完全指派均是成真指派，则公式α称为重言式或永真式。
- 矛盾式/永假式：若公式α的所有完全指派均是成假指派，则公式α称为矛盾式或永假式。
- 可满足式：若公式α中有成真指派，则公式α称为可满足式。

注

- α是可满足式的等价定义是：α至少存在一个成真指派。
- 重言式一定是可满足式，但反之不真。若公式α是可满足式，且它至少存在一个可满足式，则称α为非重言式的可满足式。

等值演算

经验 把合取$\wedge$看做加法$+$，析取$\vee$看做乘法$\times$。

等值式

设α，β是两个命题公式，若α，β构成的等价式$\alpha \leftrightarrow \beta$为重言式，则称公式$\alpha$，$\beta$是等值的，记作$\alpha \Leftrightarrow \beta$。

注 判断两公式α，β是否等值，可以用真值表法判断$\alpha \leftrightarrow \beta$是否为重言式。

16组重要的等值式

1）双重否定律

$$\alpha \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha)$$

否定的否定 = 本身

2）等幂律

$$\alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \alpha, \quad \alpha \Leftrightarrow \alpha \wedge \alpha$$

3）交换律

$$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha, \quad \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$$

4）结合律

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

5）分配律

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$$
$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$$

6）德摩根律

$$\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$$
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$$

7）吸收律

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha$$
$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \alpha$$

8）零一律

$$\alpha \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad \alpha \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

9）同一律

$$\alpha \vee 0 \Leftrightarrow \alpha, \quad \alpha \wedge 1 \Leftrightarrow \alpha$$

10）排中律

$$\alpha \vee \neg\alpha \Leftrightarrow 1$$

11）矛盾律

$$\alpha \wedge \neg\alpha \Leftrightarrow 0$$

12）蕴含等值式 重点

$$\alpha \to \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$$

13）假言易位

$$\alpha \to \beta \Leftrightarrow \neg\beta \to \neg\alpha$$

14）等价等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

15）等价否定等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta$$

16）归谬论

$$(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \neg\beta) \Leftrightarrow \neg\alpha$$