

考试须知

- 考试开始前快速浏览一遍试卷，估计一下每道题的计算量，考试时先挑计算量小的题先做
- 遇到特别棘手的题先放一放（比如计算量很大的题）
- 名词解释大概花10~15分钟
- 一共七道大题，每题大概15分钟，共105分钟
- 考试一共120分钟

运算量比较大的题目：

- 稳定裕度的计算（穿越频率--幅值裕度，截止频率--相角裕度）
- 根轨迹
- 离散系统的稳定性分析（涉及到z变换，朱利判据）

复习思路

- 作业
- 例题
- 期间结合PPT内容整理知识点
- 针对特定题型总结和训练解题思路和方法
- 真题训练

概念总结

系统型别 ν

确定系统型别时，应根据开环传递函数分母中 s 的次数决定 ν 的值

开环增益 K

将开环传递函数化为星一标准形式（例如对一阶系统： $\frac{K}{\tau s + 1}$ ，高阶系统满足类似要求），系数即为所求的开环增益

根轨迹增益 K^*

开环传递函数，化为零极点形式（首1标准形）

常用拉氏变换

$$L[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (\text{单位阶跃函数})$$

$$L[t] = \frac{1}{s^2} \quad (\text{单位斜坡函数})$$

$$L[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}$$

$$L[\delta(t)] = 1 \quad (\text{单位脉冲函数})$$

$$L[1(t) \cdot e^{at}] = \frac{1}{s - a}$$

$$L[1(t) \cdot e^{-at}] = \frac{1}{s + a}$$

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{正弦函数})$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{余弦函数})$$

$$L[te^{-at}] = \frac{1}{(s + a)^2}$$

$$L\left[\frac{1}{2!}t^2e^{-at}\right] = \frac{1}{(s + a)^3}$$

$$L\left[\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}\right] = \frac{1}{(s + a)^m}$$

典型信号的拉氏变换 (1)

	Number	$F(s)$	$f(t) \quad (t \geq 0)$
✓	1	1	$\delta(t)$
✓	2	$\frac{1}{s}$	$1(t)$
✓	3	$\frac{1}{s^2}$	t
✓	4	$\frac{2!}{s^3}$	t^2
	5	$\frac{3!}{s^4}$	t^3
✓	6	$\frac{m!}{s^{m+1}}$	t^m
✓	7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
	8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t e^{-at}$
	9	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2!} t^2 e^{-at}$
	10	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-at}$

积分定理

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$L\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)$$

若 $x^{(n)}(0) = 0$, 则有:

$$L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s)$$

常用z变换

另见教材P315

拉氏变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z 变换 $E(z)$
e^{-nTs}	$\delta(t - nT)$	z^{-n}

拉氏变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z 变换 $E(z)$
1	$\delta(t)$	1
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}t^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s - \frac{1}{T} \ln a}$	$a^{\frac{t}{T}}$	$\frac{z}{z-a}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\rightarrow 1 \\
1(t) &\rightarrow \frac{z}{z-1} \\
\delta_T(t) &\rightarrow \frac{z}{z-1} \\
t &\rightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2} \\
a^{\frac{t}{T}} &\rightarrow \frac{z}{z-a} \\
e^{-at} &\rightarrow \frac{z}{z-e^{-aT}} \\
\sin \omega t &\rightarrow \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T + 1} \\
\cos \omega t &\rightarrow \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2 \cos \omega T + 1}
\end{aligned}$$

注 关于 ZOH 的变换

$$Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G(s)\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{1}{s} \cdot G(s)\right]$$

重要 z 变换的基本定理

§ 7.3.3 z变换的基本定理

1. 线性性质 $Z[a \cdot e_1^*(t) \pm b \cdot e_2^*(t)] = a \cdot E_1(z) \pm b \cdot E_2(z)$

2. 实位移定理 $\begin{cases} \text{延迟定理 } Z[e(t-nT)] = z^{-n} E(z) \\ \text{超前定理 } Z[e(t+nT)] = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e(kT) \cdot z^{-k} \right] \end{cases}$

3. 复位移定理 $Z[e(t) \cdot e^{\pm at}] = E(z \cdot e^{\pm at})$ z换下正负对调

4. 初值定理 $\lim_{n \rightarrow 0} e(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z)$

5. 终值定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot E(z)$

6. 卷积定理 $c^*(t) = e^*(t) * g^*(t) \Rightarrow C(z) = E(z) \cdot G(z)$

- 延迟定理的理解: z^{-n} 对应延迟n拍

重要公式

z 变换定义及相关公式

$$z^{-1} = e^{-Ts}$$

$$E(z) = Z[e^*(t)] = E^*(s)|_{z=e^{Ts}} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot z^{-n}$$

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot e^{-nTs}$$

事实上有:

$$\begin{aligned} E^*(s) &= L[e^*(t)] \\ L[\delta(t - nT)] &= e^{-nTs} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} E(z) &= Z[e^*(t)] \\ Z[\delta(t - nT)] &= z^{-n} \end{aligned}$$

欠阻尼二阶系统的时域响应公式 (了解即可)

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta) \end{aligned}$$

重要知识点

- 稳态误差的计算 **必考**
- 阻尼比 ζ 对特征根的分布及稳定性的影响 **记忆**
- 标准二阶系统欠阻尼过程性能指标计算 **记住公式** (第三章PPT67)
- 常规根轨迹 (起始角不作要求) (模值条件, 相角条件)
- 稳定裕度
- 离散系统的稳定性和稳态误差
- 描述函数法

赫尔维茨稳定判据

<i>n</i>	特征方程	判据
2	$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$	各系数 > 0
3	$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$	各系数 > 0 $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
4	$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$	各系数 > 0 $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ $a_1 a_2 - a_0 a_3 > a_1^2 a_4 / a_3$

时域动态性能指标

超调量 $\sigma\%$

$$\sigma = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

反过来还可以计算得出阻尼比 ξ :

$$\zeta = \frac{\ln(1/\sigma)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(1/\sigma))^2}}$$

注 超调量有时也写作 M_p , 别把它和谐振峰值 M_r 搞混了

峰值时间 t_p

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

也可以得到自然频率 ω_n :

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

上升时间 t_r

$$\begin{aligned} t_r &= \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \\ \beta &= \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \arccos \zeta \\ \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \end{aligned}$$

调节时间 t_s

$$t_s = \begin{cases} \frac{3.5}{\zeta \omega_n}, & \Delta = \pm 5\% \\ \frac{4.4}{\zeta \omega_n}, & \Delta = \pm 2\% \end{cases} \quad (0 < \zeta < 0.8)$$

谐振峰值 M_r

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

静态误差系数法

系统型别	静态误差系数			典型输入作用下的稳态误差		
	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 GH$	$r(t) = R_0 1(t)$	$r(t) = v_0 t$	$r(t) = \frac{a_0}{2} t^2$
0	K	0	0	$\frac{R_0}{1+K_p}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{v_0}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{a_0}{K}$
III	∞	∞	∞	0	0	0

① 系统型别越高，跟踪信号能力↑但稳定性↓，动态性能↓；
 注：② 静态误差系数定量描述系统对各种典型输入的跟踪能力，在设计时，在输入形式及容许误差确定后，可根据静态误差系数确定系统型别和开环增益K。

ζ 对特征根的分布及稳定性的影响 记住

一定要记住			
☆ ζ 对特征根的分布及稳定性的影响			
	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$	根的分布情况	
+	$\zeta > 1$ 过阻尼	两个不相等的负实根	稳定
+	$\zeta = 1$ 临界阻尼	两个相等的负实根	稳定
+	$0 < \zeta < 1$ 欠阻尼	一对具有负实部的共轭复根	
		共轭复根	
+	$\zeta = 0$ 无阻尼	两个纯虚根	临界稳定
+	$\zeta < 0$ 负阻尼	具有正实部的根	不稳定
参考方式：系统处于某阻尼状态时确定参数的取值范围。			

基本概念（名词解释）

重点关注

1. 控制系统的一般概念

- 自动控制：指在没有人直接参与的情况下，利用外加的设备或装置（控制装置或控制器），使机器、设备或生产过程（统称被控对象）的某个工作状态或参数（即被控量）自动地按照预定的规律运行。
- 背 自动控制系统：为了实现各种复杂的控制任务，将被控对象和控制装置按照一定的方式连接起来，组成一个有机总体。
- 背 被控量：被控对象的输出量，是严格要求加以控制的物理量。
- 背 控制装置：是对被控对象施加控制作用的机构的总体，可以采用不同的原理和方式对被控对象进行控制，最基本的是基于反馈控制原理组成的反馈控制系统。
- 背 反馈控制原理：在反馈控制系统中，控制装置对被控对象施加的控制作用，取自被控量的反馈信息，用来不断修正被控量与输入量之间的偏差，从而实现对被控对象进行控制的任务。
- 反馈：把输出量送回到输入端，并与输入信号相比较产生偏差信号的过程，称为反馈。
- 负反馈：若反馈的信号是与输入信号相减，使产生的偏差越来越小，则称之为负反馈；反之，则称为正反馈。
- 反馈控制：采用负反馈并利用偏差进行控制的过程，也称为按偏差的控制。由于引入了被控量的反馈信息，整个控制过程成为闭合过程，因此反馈过程也称闭环控制。
- 反馈控制系统的基本组成：被控对象 + 控制装置

控制装置主要由测量元件、给定元件、比较元件、放大元件、执行元件、校正元件组成。

测量元件：检测被控制的物理量

给定元件：给出与期望的被控量相对应的系统输入量

比较元件：把测量元件检测的被控量实际值与给定元件给出的输入量进行比较，求出偏差

放大元件：将比较元件给出的偏差信号放大，用来推动执行元件控制被控对象

执行元件：直接推动被控对象，使其被控量发生变化

校正元件：也称补偿元件，是结构或参数便于调整的元部件，用串联或反馈的方式连接在系统中，以改善系统的性能

- 反馈系统的两种外作用：

有用输入：决定系统被控量的变化规律

扰动：系统不希望的外作用，破坏有用输入对系统的控制

- 开环控制系统：控制装置与被控对象之间只有顺向作用而没有反向联系的控制过程，按这种方式组成的系统称为开环控制系统。
- 复合控制方式：把按偏差控制与按扰动控制结合起来。对于主要扰动采用适当的补偿装置实现按扰动控制；再组成反馈控制系统实现按偏差控制，以消除其余扰动产生的偏差。
- 自动控制系统：不需要人工直接参与，利用控制装置，使被控对象自动地按预定的要求（运行规律）运行的系统（自动调节）。
- **重要** 自动控制系统的基本要求（稳、准、快）：稳定性、快速性、准确性
- 相似系统：不同类型的元件或系统可具有形式相同的数学模型，称为相似系统。

2. 控制系统的数学模型

- 传递函数的定义：对于线性定常系统，在零初始条件下，系统输出的拉氏变换与输入拉氏变换之比
- 稳态过程：指时间趋于无穷大时，系统输出状态的表现形式。它表征系统输出量最终复现输入量的程度。

3. 线性系统的时域分析法

- 超调量 σ ：响应的最大偏离量和终值的差与终值比的百分数
- 峰值时间 t_p ：系统输出量超过稳态值达到第一个峰值所需的时间
- 上升时间 t_r ：响应从终值的10%上升到终值的90%所需的时间
- 调节时间 t_s ：响应到达并保持在终值±5%，±2%以内所需的最短时间
- 主导极点：在时间响应过程中起主导作用的极点。如果系统闭环极点中有一个极点或一对复数极点离虚轴最近且附近没有其他闭环极点，则它

在相应过程中起主导作用，称为主导极点。

4. 线性系统的根轨迹法

5. 线性系统的频域分析法

- 相角裕度 γ : 对闭环稳定系统, 如果系统的开环相频特性再滞后 γ 度, 则系统将处于临界稳定状态
- 幅值裕度 h : 对闭环稳定系统, 如果系统的开环幅频特性再增大 h 倍, 则系统将处于临界稳定状态

对最小相位系统而言, 当幅值裕度和相角裕度都是正值时, 系统才是稳定的。

- 系统的相频特性: 指输入、输出正弦信号相位差与频率的关系
- 系统的幅频特性: 指输入、输出正弦信号幅值比与频率的关系

6. 线性系统的校正方法

- 系统校正: 为了使系统达到我们的要求, 给系统加入特定的环节, 这个过程叫做系统校正

(PPT上的定义) 在系统中按某种方式, 引入一些参数可调的机构或装置, 使整个系统的特性能按需要改变, 从而满足给定的各项性能指标

- 在系统中附加一些装置改变系统的结构, 从而提高系统的性能
- 超前校正的作用: 利用相角超前特性提高系统的截止频率与相角裕度, 从而减少超调量, 还可以提高系统的动态特性, 但不利于抗高频干扰能力
- 滞后校正的作用: 利用高频衰减特性减小系统的截止频率, 提高相角裕度, 从而减少超调量, 还可以抑制高频噪声, 但不利于系统的快速性
- PID控制器: 具有比例-微分-积分控制规律的控制器, 包含一个比例、积分和微分环节

7. 线性离散系统的分析与校正

- 连续系统: 如果控制系统中所有的信号都是时间变量的函数, 一旦函数关系确定以后, 则全部时间上的函数值都是可以确定的, 这样的系统称为连续系统

- 离散系统：如果控制系统中有至少一处信号是脉冲串或数码，这些信号仅定义在离散时间上，这样的系统称为离散系统
- 脉冲传递函数：零初始条件下离散系统输出 z 变换对输入 z 变换之比
- 零阶保持器：将离散信号恢复到相应的连续信号的环节，把采样时刻的采样值恒定不变地保持到下一采样时刻

8. 非线性控制系统分析

重要解题方法与步骤

- 计算传递函数优先考虑[梅森增益公式](#)

1. 自动控制的一般概念

系统方块图的绘制

反馈控制系统的基本组成

要点：

- 被控对象 + 被控量
- 给定量（希望值）
- 控制装置，主要关注：
 1. 测量元件（一般构成反馈回路，注意反馈的极性）
 2. 放大元件（电压放大，功率放大）
 3. 执行元件（常见的有电机 + 减速器）

注 系统工作原理从简阐述即可，不要写太多

被控对象+控制装置

控制装置主要由[测量元件](#)、[给定元件](#)、[比较元件](#)、[放大元件](#)、[执行元件](#)、[校正元件](#)等组成。

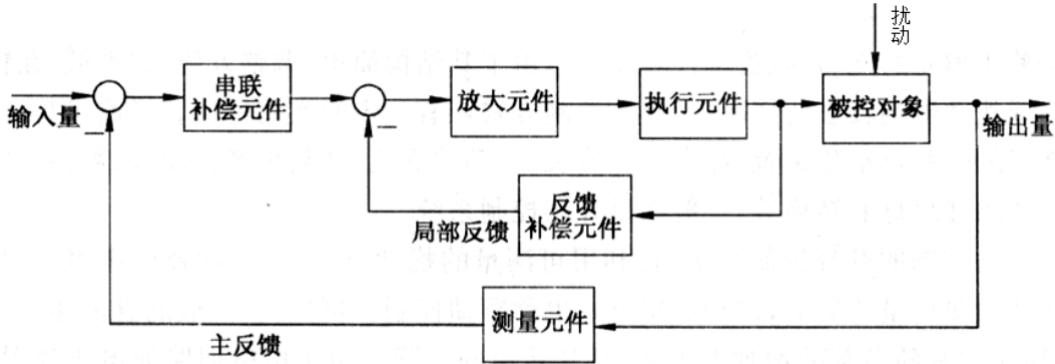


图 1-5 反馈控制系统基本组成

2. 控制系统的数学模型

求系统的微分方程

建立环节微分方程的步骤：

1. 确定输入输出量
2. 根据条件写出关系方程式
3. 整理成标准形式：

$$a_0 \frac{d^n c}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc}{dt} + a_n c = b_0 \frac{d^m r}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr}{dt} + b_m r$$

左边为输出，右边为输入，按降幂排列。

拉氏变换的应用

给定某个输入下的输出响应（时域），求系统的传递函数（频域）和其他类型输入（用频域计算）时的输出响应（转换为时域）。

时域-频域的转换需要应用拉氏变换。

给出系统传递函数，求非零初始条件下某类型输入的输出响应

注意 传递函数的定义前提是**零初始条件**。若给出的初始条件非零，则需要进行相应的转换

- 利用传递函数（注意传递函数的前提一定是零初始条件）得到时域方程（微分方程）

具体操作：

$$s^2 C(s) \rightarrow c''(t)$$

$$sC(s) \rightarrow c'(t)$$

$$C(s) \rightarrow c(t)$$

因为 $c''(0) = c'(0) = c(0) = 0$

$R(s)$ 亦同理。

- 对微分方程作拉氏变换

具体操作：

$$c''(t) \rightarrow s^2 C(s) - sc(0) - c'(0)$$

$$c'(t) \rightarrow sC(s) - c(0)$$

$$c(t) \rightarrow C(s)$$

- 将非零初始条件代入

也就是题目给定的 $c'(0), c(0)$

- 整理得到给定初始条件下的传递函数 $G'(s)$
- 计算得到指定输入的输出响应： $C(s) = G'(s) \cdot R(s)$

注 留意 零输入响应 出现的情况。

给定系统结构图，求传递函数 梅森公式

有两种解法：

方法1：梅森增益公式：优先选用

应用梅森增益公式需配合信号流图（熟练的话可以跳过，但是可以算点步骤分）。

然后就是套公式了（[这个要练！](#)）

- 确定前向通道的数量 n
- 确定前向通道的增益 p_1, p_2, \dots

3. 确定单独回路的数量和增益 L_1, L_2, \dots
4. 确定特征式 $\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$

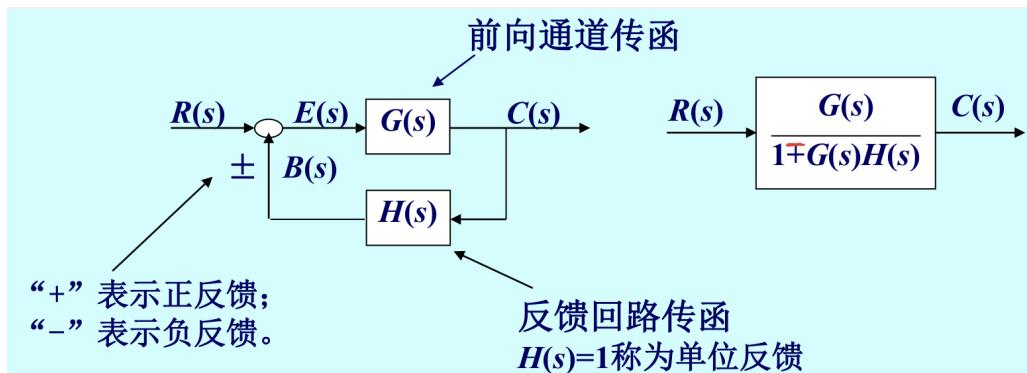
注意 留意系统中是否有**两两互不接触的回路**

5. 确定子式 Δ_k
6. 计算总增益 P :

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n p_k \Delta_k$$

方法2：结构图化简（等效变换）：建议当题目明确要求使用该方法时才用
注意：

- 看清楚反馈的极性（正/负反馈）
- 经常会见到反馈连接方框，注意它的传递函数：



**给定系统结构图，分别求响应对输入的传递函数/
对干扰的传递函数**

- 求响应对输入 $R(s)$ 的传递函数，则令干扰信号 $N(s)$ 为零
- 求响应对干扰 $N(s)$ 的传递函数，则令输入信号 $R(s)$ 为零

3. 线性系统的时域分析法

注意

- 系统的特征方程对应的是系统**闭环传递函数**的分母为零

利用劳斯判据确定系统的稳定性

1. 列劳斯表
2. 分析第一列元素的符号有无改变
3. 符号改变次数等于系统正实部根的个数 (有则不稳定)
4. 特殊情况的处理 (出现全零行--有纯虚根)

利用劳斯判据求系统的虚根值

1. 求闭环特征方程 $D(s) = 0$
2. 列劳斯表
3. 若遇到全零行, 则根据上一行系数构造辅助方程, 将求导后得到的方程系数重新填入全零行
4. 根据新的系数继续列完劳斯表
5. 对构造的辅助方程求根, 得到的虚根值即为系统的虚根值

利用劳斯判据确定系统的参数范围

1. 得到闭环系统的传递函数
2. 得到闭环系统的特征方程: $D(z) = 0$, 按降幂排列
3. 劳斯表的前两行分别由特征方程的第1, 3, 5, ...项系数和2, 4, 6项系数组成 (注意是降幂排列, 第1项系数就是最高次项的系数)
4. 逐行计算得到数值, 直到一行只剩下一个元素为止
5. 系统稳定的充要条件是劳斯表第一列元素全为正数

求系统的稳态误差

注意 求系统稳态误差前必须考察系统的稳定性

计算系统的稳态误差有两种方法:

方法1: 根据稳态误差的定义计算 (这个方法比较保险)

1. 计算误差传递函数 $\Phi_e(s)$
2. 根据终值定理计算稳态误差:

$$\begin{aligned} e_{ss}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_e(s) R(s) \end{aligned}$$

方法2：记忆 输入信号作用下的稳态误差表（能记住最好，尽量记）

表 3-5 输入信号作用下的稳态误差

系统 型别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t) = R \cdot 1(t)$	斜坡输入 $r(t) = Rt$	加速度输入 $r(t) = \frac{Rt^2}{2}$
	K_p	K_v	K_a	位置误差 $e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$	速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
I	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
II	∞	∞	∞	0	0	0

4. 线性系统的根轨迹法

给出开环传递函数，绘制系统根轨迹

- 将开环传递函数化为首1形（零极点形），得到根轨迹增益
- 确定根轨迹的分支数（根据开环传递函数分母的阶数判断）
- 确定每条分支的起点和终点（起点--开环传递函数的极点，终点--零点或无穷远处）
- 确定实轴上的根轨迹范围（“奇是偶不是”）
- 计算分离点

试探法：

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

若系统无有限零点：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = 0$$

所求得的 d 即为分离点。

- 计算虚轴交点（这里好像可以用劳斯判据）

有两种方法：

方法1：劳斯稳定判据（当某行出现全零时，特征方程可能出现纯虚根）

方法2：令 $s = j\omega$ （相当于虚轴上的根），代入闭环特征方程 $D(s) = 0$ 中，使 $D(j\omega)$ 实部、虚部分别为零，求出 ω, K^*

7. 计算渐近线

n 为极点个数, m 为零点个数, 当 $n > m$ 时, $n - m$ 条根轨迹沿渐近线趋向无穷远处。

与实轴的交点:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

与实轴的夹角:

$$\varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}$$
$$k = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

注

- 只考察常规根轨迹, 且起始角不作要求
- 根之和

法则8. 根之和

当 $n-m \geq 2$ 时: $\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i = \text{常数}$

对于任意的 K^* 闭环极点之和等于开环极点之和为常数。

表明:

当 K^* 变化时, 部分闭环极点在复平面上向右移动(变大), 则另一些极点必然向左移动(变小)。

该规则的作用:

- (1)定性判断根轨迹的走向;
- (2)已知几个闭环根可以求出其他一个或两个根。

5. 频率响应法

给出单位阶跃响应（一般是阶跃信号，时域）， 确定系统的频率特性

1. 对响应取拉氏变换
2. 结合响应/输入得到传递函数（当然是频域）
3. 得到频率特性（幅值 $A(\omega)$ + 相角 $\varphi(\omega)$ ，一般是频率 ω 的函数）

给出开环传递函数 $G(s)$ ，绘制概略开环幅相曲线 (幅相曲线就是极坐标曲线)

1. 令 $s = j\omega$ ，得到开环频率特性 $G(j\omega)$
2. 计算起点 $G(j0_+)$ 和终点 $G(j\infty)$
3. 判断范围（象限），以及是否和坐标轴有交点

必考 给出传递函数，绘制对数幅频渐进特性曲线

1. 传递函数 $G(s)$ 化为标准形（尾 1, $Ts + 1$ 型），得到 $G(j\omega)$
2. 确定开环增益 K （注意要化为标准形式 尾 1 形，得到的才是开环增益！）
3. 确定系统型别 ν
4. 确定交接频率 $\omega_1, \omega_2, \dots$

交接频率的确定法：设

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

则有：

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}$$

4. 由系统型别 ν 确定 低频段斜率 $-20 \cdot \nu \text{ dB/dec}$: 0 型系统 - 0 dB/dec , I 型系统 - -20 dB/dec , II 型系统 - -40 dB/dec
5. 由开环增益 K 确定 起始点坐标: $L(\omega)|_{\omega=1} = 20 \lg K$ ，即曲线过点 $(1, 20 \lg K)$

确定起始点处的频率 ω_0 时，还需要考虑到各交接频率的取值。如(6)的例子所示，当交接频率分别为 $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 1$ 时，应选取 $\omega_0 = 0.01$ 作为起始点处的频率为宜。

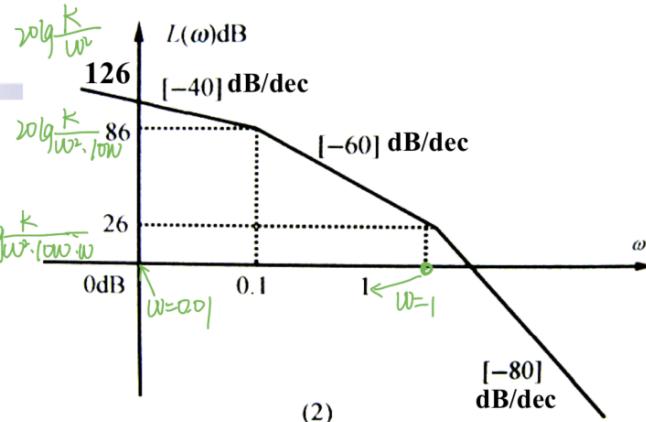
6. 确定每个交接频率处的 $L(\omega)$ （也就是确定交接点的坐标）

注 计算每个交接频率处的 $L(\omega)$ 时，可以近似计算，只让对应环节的 ω 项发挥作用，比如这个题：

$$(2) \quad G(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$$

解：该系统为II型系统，且包含两个惯性环节，交接频率依次为

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.1$$



因此，其对数幅频渐近特性曲线低频段的斜率为-40 dB/dec，起始在交接频率 ω_2 处斜率下降20 dB/dec；在交接频率 ω_1 处斜率又下降20 dB/dec，变为-80 dB/dec。系统的对数幅频渐近特性曲线如图所示

$$L(0.01) = 20 \lg \frac{K}{\omega^2} \Big|_{\omega=0.01} = 126(dB)$$

7. 由各环节对应的交接频率和斜率变化量绘制对数幅频渐进特性曲线（惯性环节：-20 dB/dec，微分环节：20 dB/dec）

给出对数幅频渐进特性曲线，确定开环传递函数

注意 看清题目要求，若要求绘制Bode图则需要分别画出幅频特性和相频特性曲线

1. 确定系统型别 ν （根据起始斜率）
2. 确定各环节的类型和数量
3. 写出传递函数的表达式 $G(s)$ （一般还剩下开环增益 K 和交接频率需要确定）

一般可以将 $G(s)$ 写为类似如下形式（具体环节数看题目，仅做示意）：

$$G(s) = \frac{K(\frac{\omega}{\omega_1} + 1)}{(\frac{\omega}{\omega_2} + 1)(\frac{\omega}{\omega_3} + 1)}$$

其中, $K, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ 即为待定参数。

4. 根据图中所给其他条件确定剩余参数

开环增益 K : 关注起始点处的条件 (如起始点的坐标, 有时还会用到曲线起始部分的斜率)

交接频率: 各环节交接点的横坐标

确定参数时还常常常用到斜率

注意 若某交接点处渐近线斜率变化为 -40 dB/dec , 则该处对应的环节为 二阶振荡环节:

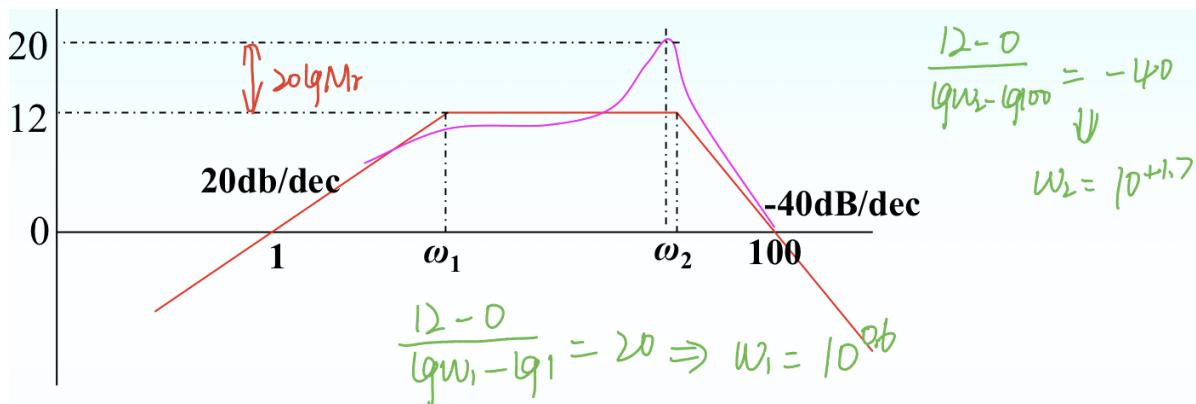
$$G(s) = \frac{1}{(s/\omega_0)^2 + 2\zeta(s/\omega_0) + 1}$$

其中 ω_0 即为该环节的交接频率, 下面介绍参数 ζ 的确定方法:

谐振峰值 M_r :

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

注 当 $0 < \zeta < 0.707$ 时, 才存在 M_r 。 M_r 的具体含义可参考下图:



即有:

$$20 \lg M_r = 20 \lg \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

稳定裕度的计算

注意 稳定裕度一般针对开环传递函数

- 计算幅值裕度

1. 计算穿越频率 ω_x : $\varphi(\omega_x) = -180^\circ$

另外，还有一种特殊条件下的计算技巧：

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$\text{相角: } \varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega T_1 - \arctan \omega T_2$$

所以：

$$\varphi(\omega_x) = -180^\circ \Rightarrow \arctan \omega T_1 + \arctan \omega T_2 = 90^\circ$$

↓

$$\frac{\omega T_1 + \omega T_2}{1 - T_1 T_2 \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_x} = \infty$$

↓

$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

2. 计算幅值裕度

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_x)|}$$

$$h(dB) = 20 \lg h = -L(\omega_x)$$

- 计算相角裕度

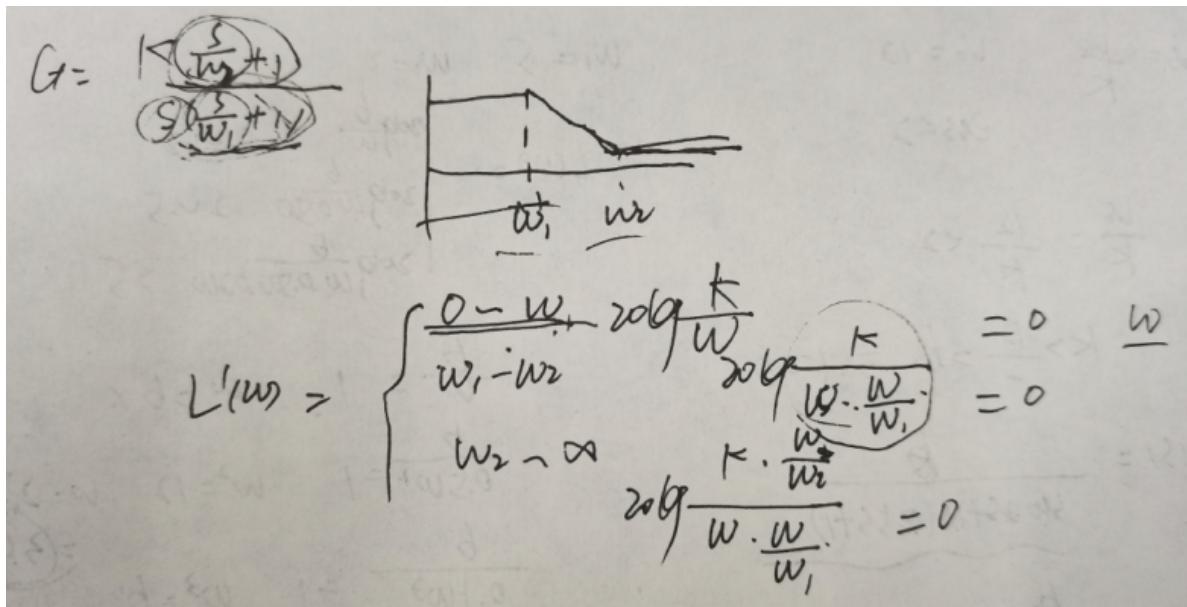
1. 计算截止频率 ω_c

有两种方法：

方法1：令 $|G(j\omega_c)| = 1$ (运算困难，一般放弃)

方法2：[分段函数法](#) (保留主要部分的近似计算，老师认可，一定要掌握！)

先丢个示意图 (凑合着看吧)：



2. 计算相角裕度

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

用奈氏判据确定系统稳定性（这个应该比较重要吧）

1. 根据开环传递函数确定其右半平面的极点数 P
2. 绘制开环幅相曲线 $\omega : 0 \rightarrow +\infty$, 判断其逆时针绕点 $(-1, j0)$ 的圈数 N (半圈算 $\frac{1}{2}$)
3. 计算闭环传递函数右半平面的极点数: $Z = P - 2N$
4. 若 $Z = 0$, 则系统稳定

注 关于补圆:

开环传递函数含有积分环节

若系统开环传递函数中包含有 v 个积分环节, 则先绘出 $\omega=0^+ \rightarrow \infty$ 的幅相频率特性曲线, 然后将曲线进行修正后, 再使用奈氏判据来判断系统的稳定性。

修正方法:

$$\begin{aligned} A(0) &= \infty \\ \theta &= 90^\circ v \end{aligned}$$

从原开环幅相曲线的起点 $\omega = 0^+$, 逆时针补画半径为无穷大的 $v \times 90^\circ$ 圆弧, 用虚线表示, 即 $\omega = 0^+ \rightarrow 0^+$ 的曲线。-----补圆

用奈氏判据确定稳定条件下，参数的范围

求出奈氏曲线与实轴的交点，再根据公式 $P = Z - 2N$ 具体讨论参数的取值范围。

6. 线性系统的校正方法

必须掌握 给出传递函数 $G_0(s)$ 和串联校正装置 $G_c(s)$ 的对数幅频渐进特性曲线，求系统的开环传递函数，并分析校正装置的作用

1. 由对数幅频渐进特性曲线分别得到 $G_0(s), G_c(s)$
2. 串联校正: $G(s) = G_0(s) \cdot G_c(s)$
3. **记忆** 校正方案分析 (都是套路，背下来就行)
 - 超前校正: 利用相角超前特性提高截止频率 ω_c 与相角裕度 γ ，从而减少超调量 $\sigma\%$ ；还可以提高系统的快速性，改善动态性能，但抗高频干扰能力较弱。
 - 滞后校正: 利用高频衰减特性减小截止频率 ω_c ，提高相角裕度 γ ，从而减少超调量 $\sigma\%$ ；还可以抑制高频噪声，但不利于系统的快速性。
 - 超前校正和滞后校正都可以提高相角裕度，减少超调量。

注 超前校正和滞后校正

- 超前校正

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (a > 1)$$

- 滞后校正

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} \quad (b < 1)$$

给定校正控制系统的结构图，根据条件求补偿/校正装置的传递函数 $G_c(s)$

- 要求系统输出 $C(s)$ 不受扰动 $N(s)$ 的影响
 - 1. 求出扰动 $N(s)$ 到输出 $C(s)$ 的传递函数 $\Phi_N(s)$ (老师强烈推荐梅森公式，那就选它了)
 - 2. 令 $\Phi_N(s) = 0$, 一般可直接解出一个 $G_{c1}(s)$
- 要求系统跟踪某类型指令的误差为零
 - 1. 用梅森公式求出误差传递函数 e_{ss} (一般可用某 $G_{c2}(s)$ 表示)
 - 2. 令 $e_{ss} = 0$, 即可求得 $G_{c2}(s)$

7. 线性离散系统的分析与校正

求函数的 z 反变换

有3种方法：

方法1：部分分式法（推荐）

这里有一个计算技巧，先求得：

$$\frac{E(z)}{z} = f(z) \quad (z\text{的分式表达式})$$

将 $f(z)$ 进行部分分式展开后，得到 $h(z)$ ，再将分子上的 z 乘过去：

$$E(z) = z \cdot h(z)$$

然后是 z 的反变换：

$$e(t) = Z^{-1}[z \cdot h(z)]$$

最后得到像 $E(z)$ 的原像 $e^*(t)$ ：

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

方法2：幂级数法（多项式长除法）

方法3：反演积分法（留数定理）

给出离散系统结构图，求脉冲传递函数（跟脉冲信号没关系，不要被骗了）

先贴个脉冲传递函数的定义吧：

脉冲传递函数定义为零初始条件下离散系统输出 z 变换对输入 z 变换之比，即

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

貌似没有固定的解题步骤，说说几点注意事项：

1. 若两个环节 $G_1(s)$, $G_2(s)$ 之间没有采样开关，则需要对 $G_1(s) \cdot G_2(s)$ 整体进行 z 变换 $Z[G_1(s) \cdot G_2(s)]$
2. 若两个环节 $G_1(s)$, $G_2(s)$ 之间存在采样开关，则需要对 $G_1(s)$, $G_2(s)$ 分别进行 z 变换 $Z[G_1(s)] \cdot Z[G_2(s)]$
3. 零阶保持器 (ZOH) 出现频率很高，这里给出它的传递函数（要记住！）：

$$G(s)_{ZOH} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

关于 ZOH 的 z 变换还有一个计算技巧：

$$Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G(s)\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{1}{s} \cdot G(s)\right]$$

重点 判断闭环离散系统的稳定性

有3种方法：

方法1：（充要条件）闭环系统 $\Phi(z)$ 的全部极点均位于 z 平面的单位圆内，即特征方程的所有特征根的模均小于1。

只需要求出所有特征值，并判断所有特征根的模是否小于1。

方法2： w 域的劳斯稳定判据（一般运算量较大，不建议）

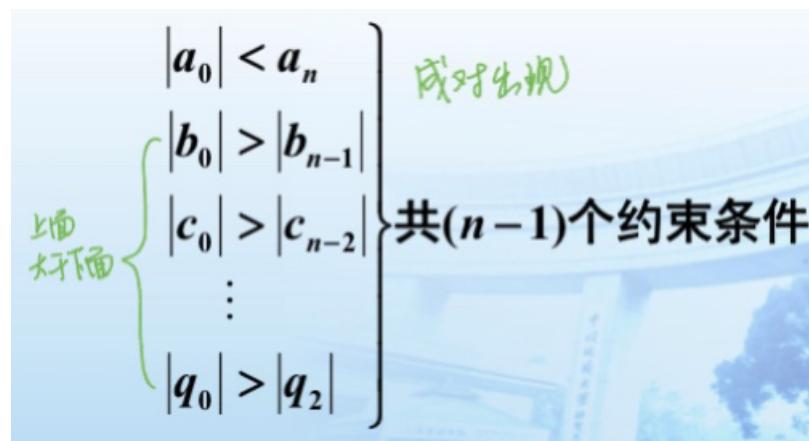
1. 将 $z = \frac{w+1}{w-1}$ 代入 z 域特征方程： $D(z) = 0$

2. 用 w 域的劳斯判据判断系统的稳定性

另注 在 w 域中判断系统的稳定性时，也可采用解出特征根，并判断特征根所在范围（存在实部根则系统不稳定，和时域分析一致）的方法

方法3：朱利判据（建议使用）

1. (求闭环系统特征方程前最好先写出闭环传递函数)，得到（闭环系统）特征方程： $D(z) = 0$ （升幂排列），特征方程的阶数记为 n
2. 判断 $D(1), D(-1)$ 是否满足： $D(1) > 0, (-1)^n D(-1) > 0$
3. 列出朱利阵列
4. 判断阵列是否满足条件：



朱利阵列的约束条件：

$$\left. \begin{array}{l} |a_0| < a_n \\ |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| \\ \vdots \\ |q_0| > |q_2| \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{成对出现} \\ \text{共}(n-1)\text{个约束条件} \end{array}$$

上面大于下面

求离散系统的稳态误差

1. 求误差脉冲传递函数
2. 得到闭环特征方程，判断系统稳定性（计算稳态误差前应先判断系统是否稳定）
3. 计算离散系统稳态误差：

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot R(z) \cdot \Phi_e(z)$$

注 静态误差系数法

§ 7.5.4 静态误差系数法

$$GH(z) = \frac{1}{(z-1)^v} GH_0(z)$$

(2-1) 对应
系统型别在这里判断

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p = \lim GH(z)$	$K_v = \lim (z-1)GH(z)$	$K_a = \lim (z-1)^2 GH(z)$	$r = A \cdot 1(t)$ $e(\infty) = \frac{A}{1+K_p}$	$r = A \cdot t$ $e(\infty) = \frac{AT}{K_v}$	$r = A \cdot t^2/2$ $e(\infty) = \frac{AT^2}{K_a}$
0	K_p	0	0	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
I	∞	K_v	0	0	$\frac{AT}{K_v}$	∞
II	∞	∞	K_a	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

8. 非线性控制系统分析

用奈氏判据确定系统的稳定性



用描述函数法确定系统是否存在自振，并确定参数

- 由非线性部分的描述函数得到其负倒描述函数 $\frac{-1}{N(A)}$
- 分别绘制幅相特性曲线：非线性部分的负倒描述函数 $\frac{-1}{N(A)}$ ，线性部分 $G(j\omega)$
- 分析系统的稳定性（是否满足自振条件：1. 有交点；2. 穿出）
- 由自振条件

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

↓

幅值: $|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{N(A)} \right|$

相角: $\angle G(j\omega) = -\pi - \angle N(A)$

联立方程组即可解得自振参数。

给出非线性系统的结构图，分析周期运动稳定性，确定其振幅和频率

1. 结构图化简 (如果需要的话)
2. 得到非线性和线性部分的传递函数
3. 绘制非线性部分负倒描述函数和线性部分的幅相特性曲线
4. 由奈氏判据分析稳定性
5. 求出自振点
6. 确定振荡的幅值和频率:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

↓

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{N(A)} \right|$$

$$\angle G(j\omega) = -\pi - \angle N(A)$$

↓

振荡幅值: A

振荡频率: ω

注意 关于自振振幅有两个容易混淆的量:

- A : 非线性环节输入端的自振振幅
- A_c : 非线性系统输出量 c 的自振振幅

若自振频率为 ω_0 , 系统输出量 c 到非线性环节输入端的传递函数为 $G(j\omega)$, 则存在如下关系:

$$A = |G(j\omega_0)| \cdot A_c$$

第一章 自动控制的一般概念 方块图

自动控制的基本原理与方式

基本概念

自动控制

所谓**自动控制**，是指在没有人直接参与的情况下，利用外加的设备或装置（**控制装置或控制器**），使机器、设备或生产过程（统称**被控对象**）的某个工作状态或参数（即**被控量**）自动地按照预定的规律运行。

反馈控制原理 记忆

3、反馈控制原理 背

自动控制系统：为了实现各种复杂的控制任务，将**被控对象和控制装置**按照一定的方式连接起来，组成一个有机总体。

被控量：即被控对象的输出量，是要求严格加以控制的物理量。可保持为恒定值（温度、压力、液位等），也可按照给定规律运行，如飞行航迹、记录曲线等。

控制装置：是对被控对象**施加控制作用**的机构的总体，它可以采用不同的原理和方式对被控对象进行控制，最基本的是基于**反馈控制原理**组成的反馈控制系统。

反馈控制原理：在反馈控制系统中，控制装置对被控对象施加的控制作用，取自被控量的反馈信息，用来不断修正被控量与输入量之间的**偏差**，从而实现对被控对象进行控制的任务。

反馈: 把取出输出量送回到输入端，并与输入信号相比较产生偏差信号的过程，称为反馈。

负反馈: 若反馈的信号是与输入信号相减，使产生的偏差越来越小，则称为负反馈；反之，则称为正反馈。

反馈控制: 采用负反馈并利用偏差进行控制的过程，也称为按偏差的控制。由于引入了被控量的反馈信息，整个控制过程成为闭合过程，因此反馈控制也称**闭环控制**。

反馈控制系统的基本组成

4、反馈控制系统的基本组成

被控对象+控制装置

控制装置主要由**测量元件、给定元件、比较元件、放大元件、执行元件、校正元件**等组成。

开环控制与闭环控制的区别

	开环控制	闭环控制
有无反馈	无	有(负)
抗干扰能力	弱(不能自动修正)	强
构造	简单，成本低	复杂
稳定性	易解决，不重要	难处理，重要
适用场合	系统控制量的变化规律预先 可知，且对系统中可能出现 的干扰可以做到有效抑制 时，或被控制量难以直接测 量	系统的控制量 与扰动量事先 无法预计

自动控制系统示例（作方块图）

自动控制系统的分类

- ◆按**控制方式**分：开环控制、反馈控制、复合控制等；
- ◆按**元件类型**分：机械系统、电气系统、机电系统、液压系统、气动系统、生物系统等；
- ◆按**系统功用**分：温度控制系统、压力控制系统、位置控制系统等；
- ◆按**系统性能**分：线性系统和非线性系统、连续系统和离散系统、定常系统和时变系统等；
- ◆按**输入量变化规律**分：恒值控制系统、随动系统和程序控制系统等。

线性连续控制系统

线性定常离散控制系统

非线性控制系统

对自动控制系统的基本要求

基本要求

- 稳定性
- 快速性
- 准确性

每一类系统的被控量变化全过程的共同基本要求：**稳定性、快速性和准确性**，即**稳、准、快**。

稳定性

快速性

准确性

典型外作用函数

阶跃函数

斜坡函数

脉冲函数

正弦函数

第二章 控制系统的数学模型

时域数学模型

建立环节微分方程的步骤

归纳建立环节微分方程的步骤：

- (1) 确定输入输出变量；
- (2) 根据相应的物理定律列写能量或物料平衡关系式；
- (3) 消除中间变量；
- (4) 增量化、线性化处理。
- (5) 写成标准形式：

输出在方程的左边，输入在方程的右边，并且按降幂次排列。

非线性微分方程的线性化

小结：

- 1、微分方程的阶次 n 由系统中独立的储能元件的个数决定。
- 2、不同类型的元件或系统可具有形式相同的数学模型，称为相似系统。
- 3、微分方程的标准形式：与输入量有关的项写在方程的右端，与输出量有关的项写在方程的左端，方程两端变量的导数项均按降幂排列，各项系数化为具有一定物理意义的系统参数。

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\ & = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned}$$

注意：对实际存在的物理系统，均有 $m \leq n$

列写元件微分方程的步骤

列写元件微分方程的步骤可归纳如下：

- 1) 根据元件的工作原理及其在控制系统中的作用，确定其输入量和输出量；
- 2) 分析元件工作中所遵循的物理规律或化学规律，列写相应的微分方程；
- 3) 消去中间变量，得到输出量与输入量之间关系的微分方程，便是元件时域的数学模型。

一般情况下，应将微分方程写为标准形式。

控制系统数学模型的建立

系统数学模型建立的一般步骤

- (1) 确定系统输入输出变量；
- (2) 根据各环节相应的物理定律建立各环节的数学模型；
- (3) 消除中间变量，写出系统输入变量与输出变量之间的微分方程。

列写系统各环节微分方程时要注意的问题：

- (1) 信号传递的单向性，前一个元件的输出是后一个元件的输入。
- (2) 前后连接的两个元件中，后级对前级的负载效应问题（如齿轮系对电动机转动惯量的影响）。

复数域数学模型

传递函数

定义 线性定常系统的传递函数，定义为零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

1、传递函数的定义

线性定常系统的传递函数，定义为零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \dots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t) \end{aligned}$$

$c(t)$ 是系统输出量； $r(t)$ 是系统输入量； $a_i(i=0,1,\dots,n)$ 和 $b_j(j=0,1,\dots,m)$ 是与系统结构和参数有关的常系数。

传递函数的性质与定理

2、传递函数的性质

- ◆ 传递函数是复变量 s 的有理真分式函数，具有复变函数的所有性质； $n \geq m$ 且所有系数均为实数。
- ◆ 传递函数只取决于系统或元件的结构和参数，与输入量的形式无关。
- ◆ 传递函数只反映输入与输出之间的关系，不反映系统内部的任何信息（是外部模型，没有反映内部状态变量之间关系）。

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{(LCs^2 + RCs + 1)}$$

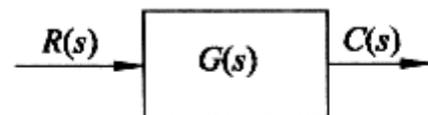


图 2-8 传递函数的图示

线性性质

$$L[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(s) + bX_2(s)$$

微分定理

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$L\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

若 $x^{(n)}(0) = 0$, 则有:

$$L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s)$$

终值定理

若 $x(t)$ 及其一阶导数都是可拉氏变换的, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 存在, 则函数 $x(t)$ 的终值为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

典型环节的传递函数

典型环节传递函数

环节名称	时域方程	传递函数	主要参数	常见环节
比例环节	$y(t) = Kx(t)$	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K$	放大倍数 K	放大器、电位器
微分环节	$u(t) = T \frac{d\theta(t)}{dt}$	$G(s) = \frac{U(s)}{\Theta(s)} = Ts$	微分时间 T	测速发电机
一阶环节	$T \frac{dy}{dt} + y = x$	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$	时间常数 T	一阶 RC 电路
二阶环节	$LC \frac{d^2 c}{dt^2} + RC \frac{dc}{dt} + c = r$	$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	阻尼系数, 自然振荡频率	RLC 网络
纯滞后环节	$y(t) = x(t - \tau)$	$G(s) = e^{-\tau s}$	纯滞后时间 τ	物料传输滞后

常用的拉氏变换

$$L[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (\text{单位阶跃函数})$$

$$L[t] = \frac{1}{s^2} \quad (\text{单位斜坡函数})$$

$$L[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}$$

$$L[\delta(t)] = 1 \quad (\text{单位脉冲函数})$$

$$L[1(t) \cdot e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

$$L[1(t) \cdot e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{正弦函数})$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{余弦函数})$$

典型信号的拉氏变换

典型信号的拉氏变换 (1)

	Number	$F(s)$	$f(t) \quad (t \geq 0)$
✓	1	1	$\delta(t)$
✓	2	$\frac{1}{s}$	$1(t)$
✓	3	$\frac{1}{s^2}$	t
✓	4	$\frac{2!}{s^3}$	t^2
	5	$\frac{3!}{s^4}$	t^3
✓	6	$\frac{m!}{s^{m+1}}$	t^m
✓	7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
	8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t e^{-at}$
	9	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2!} t^2 e^{-at}$
	10	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-at}$

部分分式展开法

③ 部分分式法

一般，象函数 $X(s)$ 是复变量 s 的有理代数公式，即

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

通常 $m < n$, a_1, \dots, a_n ; b_0, \dots, b_m 均为实数。首先将 $X(s)$ 的分母因式分解，则有

$$X(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

式中 p_1, \dots, p_n 是 $D(s) = 0$ 的根，称为 $X(s)$ 的极点。

分两种情况讨论：（1） $D(s) = 0$ 无重根。

$$X(s) = \frac{c_1}{(s - p_1)} + \frac{c_2}{(s - p_2)} + \cdots + \frac{c_n}{(s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(s - p_i)}$$

式中 c_i 是待定常数，称为 $X(s)$ 在极点 p_i 处的留数。

$$c_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) X(s)$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(s - p_i)} \right] = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}$$

（2） $D(s) = 0$ 有重根。设有 r 个重根 p_1 ，则

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{N(s)}{(s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{c_1}{(s - p_1)^r} + \frac{c_2}{(s - p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{c_r}{(s - p_1)} + \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i}{(s - p_i)} \end{aligned}$$

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow p_1} [(s - p_1)^r X(s)]$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} [(s - p_1)^r X(s)]$$

$$c_3 = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{(2)}}{ds^{(2)}} [(s - p_1)^r X(s)]$$

...

$$c_r = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}} [(s - p_1)^r X(s)]$$

$$c_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) X(s) \quad i = r+1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}[X(s)] \\ &= \left[\frac{c_1}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{c_2}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + c_{r-1} t + c_r \right] e^{p_1 t} + \sum_{i=r+1}^n c_i e^{p_i t} \end{aligned}$$

控制系统的结构图与信号流图

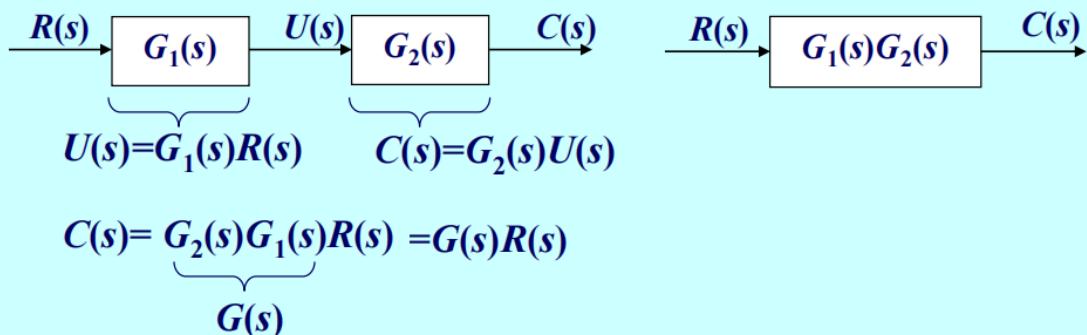
结构图的等效变换与简化

基本环节的变换

1 基本环节的变换

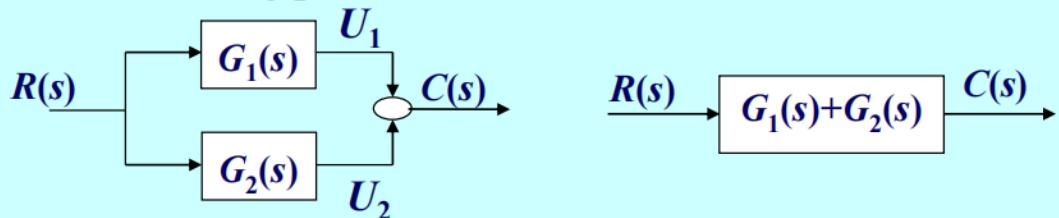
基本原则：变换前后变量关系保持等效。

(1) 方框的串联及运算（等效变换）(combining serial blocks)



结论：方框串联连接总传递函数等于各个方框传递函数的乘积。

(2) 方框的并联及运算 (等效变换) (combining parallel blocks)



$$U_1(s) = G_1(s)R(s)$$

$$U_2(s) = G_2(s)R(s)$$

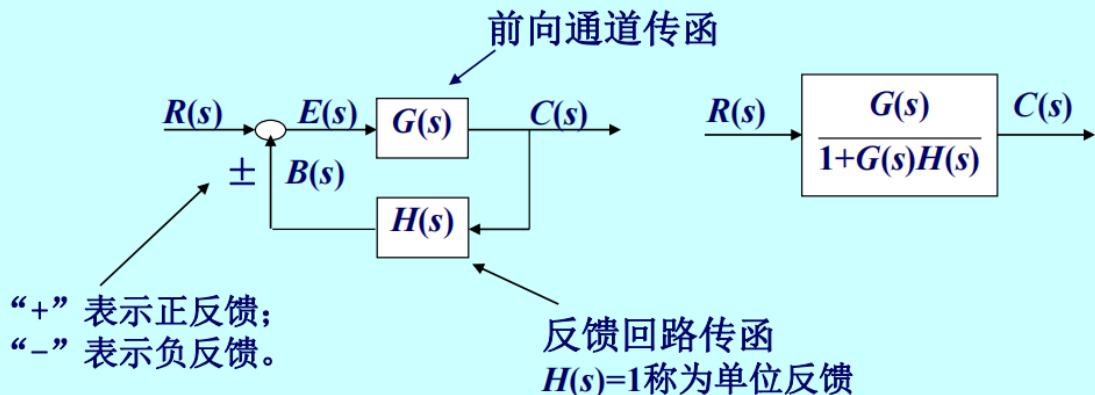
$$C(s) = U_1(s) + U_2(s)$$

$$= (G_1(s) + G_2(s))R(s)$$

$$= G(s)R(s)$$

结论：并联的总传递函数等于各个方框传递函数的代数和。

(3) 反馈连接方框的运算 (等效变换) (feedback system)



$$C(s) = G(s)E(s)$$

闭环传递函数:

$$E(s) = R(s) \pm B(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

$$B(s) = H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)(R(s) \pm H(s)C(s))$$

闭环系统的开环传递函数

结构图的化简

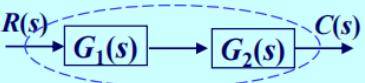
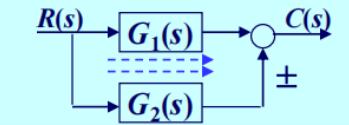
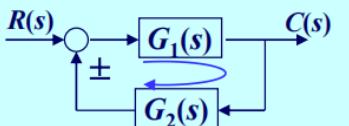
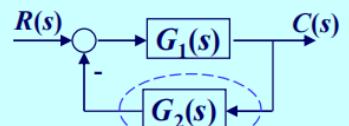
2 结构图化简

一般方法：移动引出点或比较点，交换比较点，将串联、并联和反馈方框合并。

化简原则：输入输出变量间关系等效。

- 1) 前向通道的传递函数总乘积不变；
- 2) 回路传递函数的总乘积不变；
- 3) 不能将交错回路变为不接触回路（相互独立的回路），反之亦然；
- 4) 相加点和分支点位置**不宜交换**，即一般相加点移动时不能越过分支点，分支点移动时不能越过相加点。

结构图化简规则表

原方块图	等效方块图	等效运算关系
	$\frac{R(s)}{G_1(s)G_2(s)} \rightarrow C(s)$	串联等效 $\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)$
	$\frac{R(s)}{G_1(s) \pm G_2(s)} \rightarrow C(s)$	并联等效 $\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) \pm G_2(s)$
	$\frac{R(s)}{\frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}} \rightarrow C(s)$	反馈等效 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$
	$\frac{R(s)}{1/G_2(s)} \rightarrow \frac{R(s)}{G_1(s)G_2(s)} \rightarrow C(s)$	等效单位反馈 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{G_2(s)} \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$

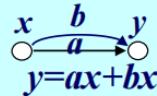
原方块图	等效方块图	等效运算关系
		比较点前移 $C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)$ $= [R(s) \pm \frac{Q(s)}{G(s)}]G(s)$
		比较点后移 $C(s) = [R(s) \pm Q(s)]G(s)$ $= R(s)G(s) \pm Q(s)G(s)$
		引出点前移 $C(s) = R(s)G(s)$
		引出点后移 $R(s) = R(s)G(s) \frac{1}{G(s)}$ $C(s) = R(s)G(s)$

原方块图	等效方块图	等效运算关系
		变换或合并比较点 $C(s) = E_1(s) \pm R_3(s)$ $= R_1(s) \pm R_2(s) \pm R_3(s)$
		交换比较点或引出点 (一般不采用) $C(s) = R_1(s) - R_2(s)$
		负号在支路上移动 $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$ $= R(s) + [-H(s)]C(s)$

信号流图的组成与性质

信号流图的基本性质

2、信号流图的基本性质



- ◆ 节点标志系统的变量。每个节点标志的变量是所有流向该节点的信号之代数和，而从同一节点流向各支路的信号均用该节点的变量表示。
- ◆ 支路相当于乘法器，信号流经支路时，被乘以支路增益而得变换的信号。
- ◆ 信号在支路上只能沿箭头单向传递。
- ◆ 给定系统设置节点变量是任意的，因此信号流图不唯一。

信号流图的绘制

由系统结构图绘制信号流图

2、由系统结构图绘制信号流图

- ◆ 在结构图的信号线上用小圆圈标志出传递的信号，便得到节点；
- ◆ 用标有传递函数的线段代替结构图中的方框，便得到支路。

节点——信号线

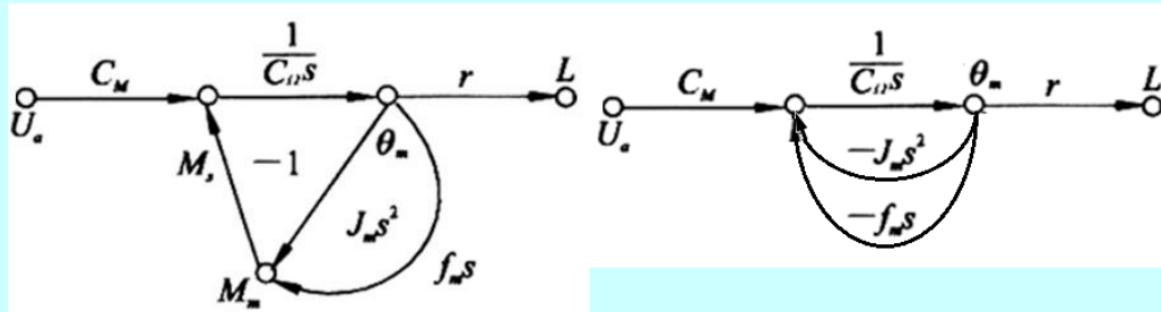


支路——方框



注意：

- ◆由系统结构图绘制信号流图时应尽量精简节点的数目。
- ◆支路增益为1的相邻两个节点，一般可以合并为一个节点，但对于源节点或阱节点却不能合并掉。



梅森增益公式

梅森（Mason）增益公式可直接求取从源节点到阱节点的传递函数，而不需简化信号流图。梅森增益公式记为

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n p_k \Delta_k$$

P 为从源节点到阱节点的传递函数(或总增益)；

n 为从源节点到阱节点的前向通路总数；

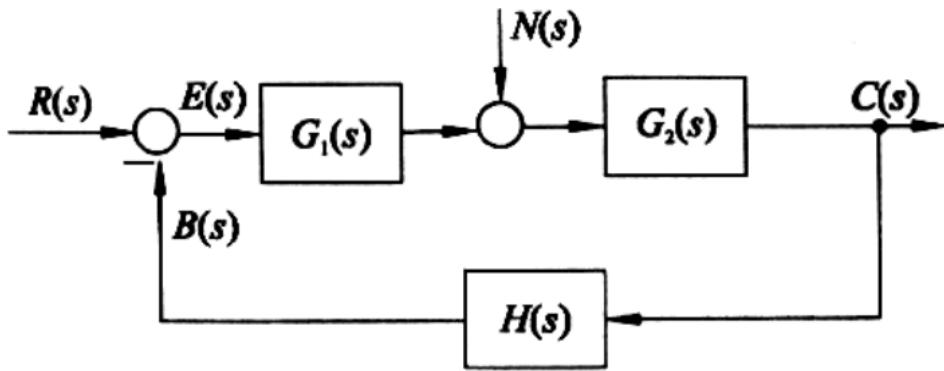
p_k 为从源节点到阱节点的第 k 条前向通路总增益；

Δ 称为流图特征式， $\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$ ； $\sum L_a$ 为所有单独回路增益和； $\sum L_b L_c$ 为所有2个互不接触回路中增益的乘积之和； $\sum L_d L_e L_f$ 为所有互3个不接触的回路增益的乘积之和；

Δ_k 为流图余因子式， Δ 中除去与第 k 条前向通路接触的回路增益项的余项式。

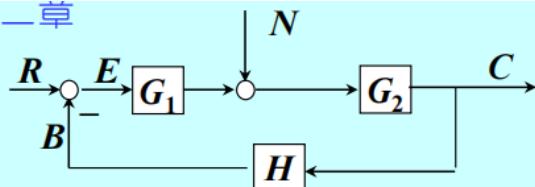
闭环系统的传递函数

典型的反馈控制系统



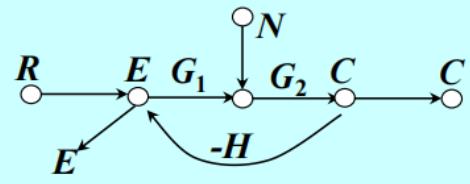
原理I第一章

中国地质大学自动化



1 输入 $R(s)$ 作用下的闭环传递函数

令 $N(s)=0$



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} \quad C(s) = \Phi(s) R(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} R(s)$$

2 扰动 $N(s)$ 作用下的闭环传递函数

令 $R(s)=0$

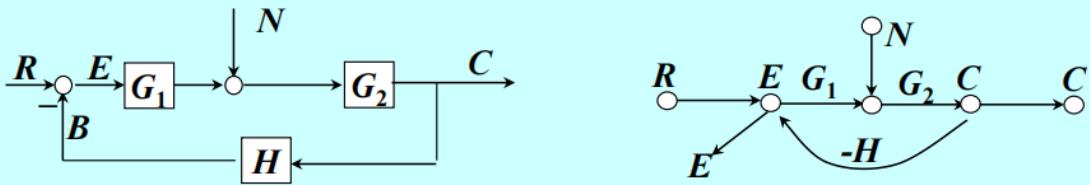
$$\Phi_N(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} \quad C(s) = \Phi_N(s) N(s) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

3 两输入同时作用下，系统总输出

$$C(s) = \Phi_N(s) N(s) + \Phi(s) R(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2 H} (G_1 G_2 R + G_2 N)$$

当 $|G_1 G_2 H| \gg 1$ 和 $|G_1 H| \gg 1$ 时，有 $C(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s)$

4 误差传递函数



以误差 $E(s)$ 作为输出量的传递函数称为误差传递函数。

$$E(s) \sim R(s) \rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = \Phi_e(s) \quad \Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1 G_2 H}$$

$$E(s) \sim N(s) \rightarrow \frac{E(s)}{N(s)} = \Phi_{eN}(s) \quad \Phi_{eN}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2 H}{1 + G_1 G_2 H}$$

$G_1 G_2 H$ ——系统的开环传递函数

结论：各闭环系统传递函数的分母形式均相同。

它们都是同一个信号流图的特征式（或称为闭环系统的特征多项式），即

$$\Delta = 1 + G_1(s) G_2(s) H(s)$$

$G_1(s) G_2(s) H(s)$ 称为系统的开环传递函数。

第三章 线性系统的时域分析法

系统时间响应的性能指标

典型输入信号

表 3-1 典型输入信号

名 称	时域表达式	复域表达式
单位阶跃函数	$1(t), t \geq 0$	$\frac{1}{s}$
单位斜坡函数	$t, t \geq 0$	$\frac{1}{s^2}$
单位加速度函数	$\frac{1}{2}t^2, t \geq 0$	$\frac{1}{s^3}$
单位脉冲函数	$\delta(t), t = 0$	1
正弦函数	$A \sin \omega t$	$\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$

动态过程与稳态过程

1、动态过程

- ◆ 又称过渡过程或瞬态过程，是指系统在输入信号作用下，系统输出量从初始状态到最终状态的响应过程。
- ◆ 根据系统结构和参数选择情况，动态过程可能表现为衰减、发散或等幅振荡形式。
- ◆ 动态过程除了提供系统稳定性的信息外，还能提供响应速度及阻尼情况等信息。

2、稳态过程

- ◆ 指系统在输入信号作用下，当时间 t 趋于无穷时，系统输出量的表现方式。
- ◆ 稳态过程又称稳态响应，它表征系统输出量最终复现输入量的程度，可提供系统有关稳态误差的信息。
- ◆ 控制系统在典型输入信号作用下的性能指标，通常由动态性能和稳态性能两部分组成。

动态性能与稳态性能

动态性能

注意

稳定是控制系统能够运行的首要条件，只有当动态过程收敛时，研究系统的动态性能才有意义。

1、动态性能

- ◆通常在阶跃信号作用下去测定系统的动态性能。
- ◆描述稳定的系统在单位阶跃信号作用下，动态过程随时间 t 变化状况的指标，称为动态性能指标。

动态性能指标

- ◆*延迟时间 t_d ：响应曲线第一次达到其终值一半所需的时间。
- ◆上升时间 t_r ：响应从终值的10%上升到终值的90%所需的时间；对于有振荡的系统，也可定义为响应从零开始第一次上升到终值所需的时间。上升时间越短，说明系统的响应速度越快。
- ◆峰值时间 t_p ：响应超过其终值后到达第一个峰值所需的时间。
- ◆调节时间 t_s ：响应到达并保持在终值 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$ 以内所需的最短时间。

◆超调量 $\sigma\%$ ：响应的最大偏离量 $c(t_p)$ 与终值 $c(\infty)$ 的差与终值 $c(\infty)$ 比的百分数，即

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

若 $c(t_p) < c(\infty)$ ，则响应无超调。（发散）

◆常用的动态性能指标多为上升时间、调节时间、超调量。

◆用 t_r 或 t_p 评价系统的响应速度；用 $\sigma\%$ 评价系统的阻尼程度； t_s 是同时反映响应速度和阻尼程度的综合性指标。

注意 常用的动态性能指标

- 上升时间 t_r
- 调节时间 t_s
- 超调量 $\sigma\%$

稳态性能

2、稳态性能

◆稳态误差是描述系统稳态性能的一种性能指标，通常在阶跃函数、斜坡函数或加速度函数作用下进行测定或计算。

◆如果时间趋于无穷时，系统的输出量不等于它的期望值，则系统存在**稳态误差**。稳态误差是系统控制精度或抗扰动能力的一种度量。

一阶系统的时域分析

一阶系统的数学模型

微分方程

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad T \text{ 为时间常数}$$

传递函数 (零初始条件)

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \quad T > 0$$

一阶系统的单位阶跃响应

时间常数T的确定

将一阶系统的传递函数化为尾一标准形式（分母的常数项为1）：

$$\frac{K}{Ts + 1}$$

则s前的系数即为时间常数T

◆ 由于时间常数 T 反映系统的**惯性**，所以一阶系统的惯性越小，其响应过程越快；反之，惯性越大，响应越慢。

单位阶跃响应

设系统传递函数：

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

输入信号（单位阶跃函数）：

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

则一阶系统的单位阶跃响应：

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad t \geq 0$$

可利用初始斜率特性确定时间常数：

$$\frac{dc(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

动态性能指标的计算

◆ 根据动态性能指标的定义，一阶系统动态性能指标为

$$t_r = 2.20T \quad t_s = 3T \text{ (5%)} \quad t_s = 4T \text{ (2%)}$$

峰值时间 t_p 和超调量 $\sigma\%$ 不存在

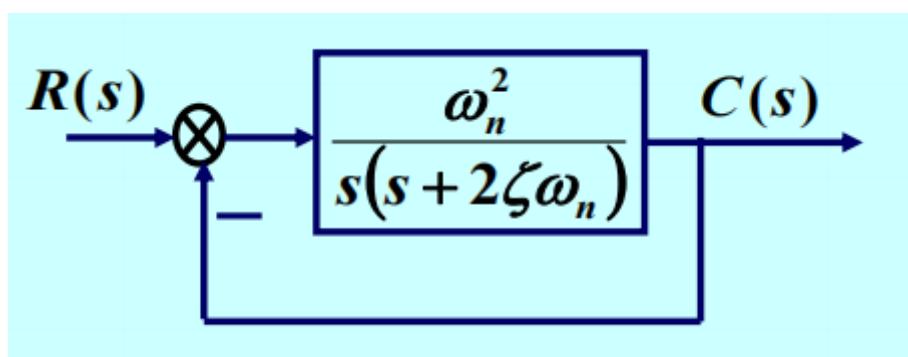
一阶系统的单位脉冲响应

一阶系统的单位斜坡响应

一阶系统的单位加速度响应

二阶系统的时域分析

二阶系统的数学模型



开环传递函数：

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

开环增益：

$$K = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

闭环传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- ζ : 阻尼比
- ω_n : 无阻尼自然频率

特征方程：

特征方程 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

极点 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

二阶系统的单位阶跃响应

ζ 对特征根的分布及稳定性的影响

1、 ζ 对特征根的分布及稳定性的影响

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- + $\zeta > 1$ 过阻尼 两个不相等的负实根 稳定
- + $\zeta = 1$ 临界阻尼 两个相等的负实根 稳定
- + $0 < \zeta < 1$ 欠阻尼 一对具有负实部的共轭复根 稳定
- + $\zeta = 0$ 无阻尼 两个纯虚根 临界稳定
- + $\zeta < 0$ 负阻尼 具有正实部的根 不稳定

欠阻尼二阶系统的动态过程分析

标准二阶系统欠阻尼过程性能指标计算

性能指标	计算公式	与特征根分布的关系
上升时间 t_r	$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$	与 β 及虚部有关, 当 ζ 一定时, 与 ω_n 成反比
峰值时间 t_p	$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$	与根的虚部成反比
调节时间 t_s	$t_s = \frac{3.5(4.4)}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5(4.4)}{\sigma}$	与根的实部成反比
延迟时间 t_d	$t_d \approx \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n}$	当 ζ 一定时, 与 ω_n 成反比
超调量 $\sigma\%$	$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$	只与 ζ 有关, ζ 越大, 超调量越小

二阶系统性能的改善

高阶系统的时域分析

高阶系统闭环主导极点及其动态性能分析

线性系统的稳定性分析

稳定性的基本概念

线性系统稳定的充分必要条件

劳斯-赫尔维茨稳定判据

劳斯稳定判据

- 线性系统稳定的必要条件

在线性闭环系统的特征方程中各项系数为正数

- 劳斯表的计算

设系统的特征方程为

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

根据特征方程的各项系数排列成劳斯表：

s^n	a_0	a_2	a_4	\dots	$A_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	\dots	$A_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$
s^{n-2}	A_1	A_2	A_3	\dots	
s^{n-3}	B_1	B_2	B_3	\dots	$B_1 = \frac{A_1a_3 - A_2a_1}{A_1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
s^0	D_1				$B_2 = \frac{A_1a_5 - A_3a_1}{A_1}$

列写劳斯表：

- ◆ 劳斯表的前两行由系统特征方程的系数直接构成。劳斯表中的第 1 行由特征方程的第 1,3,5,... 项系数组成；第2行由第2,4,6,...项系数组成；
- ◆ 劳斯表中第 2 行以后各行的数值，需逐行计算，在运算过程中出现空位均置以零，直到第 n 行为止。第 $n+1$ 行仅第一列有值，且正好等于特征方程最后一项系数 a_n 。
- ◆ 表中系数排列呈上三角形。

- 根据劳斯表判断系统稳定性

- ◆ 劳斯稳定判据：由特征方程所表征的线性系统稳定的充分且必要条件是：劳斯表中第一列系数都为正。
- ◆ 如果劳斯表第一列中出现小于零的数值，则系统就不稳定，且第一列各系数符号改变的次数，就代表特征方程的正实部根的数目（即系统不稳定极点的个数）。

赫尔维茨稳定判据

n	特征方程	判据
2	$a_0s^2+a_1s+a_2=0$	各系数 >0
3	$a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0$	各系数 >0 $a_1a_2-a_0a_3 >0$
4	$a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4=0$	各系数 >0 $a_1a_2-a_0a_3 >0$ $a_1a_2-a_0a_3 > a_1^2a_4/a_3$

劳斯稳定判据的特殊情况

- 若某行第一列元素为0，而该行元素不全为0时：将此0改为 ε （大于零的微小量），继续运算
- 出现全零行时：用上一行元素组成辅助方程，将其对s求导一次，用新方程的系数代替全零行系数，之后继续运算。

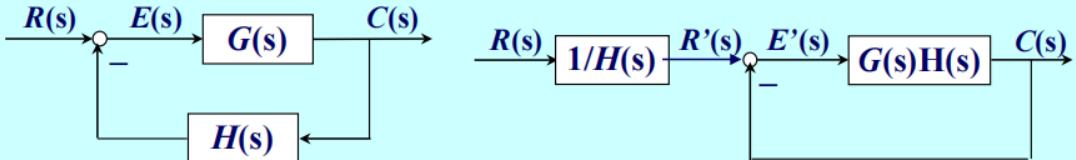
注 出现全零行时，系统可能会出现一对纯虚根；或一对符号相反的实根；或两对实部符号相异、虚部相同的复根。对辅助方程求解可能得到位于虚轴上的根。

劳斯稳定判据的应用

线性系统的稳态误差计算

误差定义及稳态误差计算

注意 对稳定的系统研究稳态误差才有意义，所以计算稳态误差以系统稳定为前提



1 两种误差的定义

定义1：从输入端定义误差： $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$ （给定-测量）

定义2：从输出端定义误差： $E'(s) = R'(s) - C(s)$ （希望的输出-实际输出）
应指出： $E(s)$ 是有实际意义的，而 $E'(s)$ 只有数学意义。

2 两种误差的关系

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$E'(s) = R'(s) - C(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - C(s) = \frac{1}{H(s)}[R(s) - H(s)C(s)] = \frac{1}{H(s)}E(s)$$

对单位反馈系统，有： $E(s) = E'(s)$

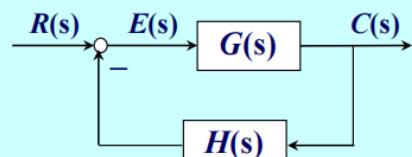
按输入端定义的误差传递函数及稳态误差的计算

3 误差传递函数及稳态误差计算

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + H(s)G(s)}$$

$$E(s) = \Phi_e(s)R(s) = \frac{1}{1 + H(s)G(s)}R(s)$$

$$e(t) = L^{-1}[E(s)] = L^{-1}[\Phi_e(s)R(s)] = e_{ss}(t) + e_{ts}(t)$$



瞬态分量

稳态误差

应用条件：
 $sE(s)$ 除原点外，在虚轴和右半平面解析

显然，利用 L 变换终值定理只能求出误差终值（确定值或 ∞ ），无法获得稳态误差随时间的变化 $e_{ss}(t)$ 。

计算稳态误差的一般方法

1. 判定系统的稳定性
2. 求误差传递函数：

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$$

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)}$$

注 可用梅森增益公式求解

3. 用终值定理求稳态误差：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[\Phi_e(s)R(s) + \Phi_{en}(s)N(s)]$$

系统类型

设系统开环传递函数：

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} (T_j s + 1)} \quad (n \geq m)$$

- K : 开环增益
- τ_i, T_j : 一阶微分环节和惯性环节的时间常数
- ν : 开环传递函数包含的积分环节个数 (即原点处开环极点的个数)

典型输入作用下的稳态误差及静态误差系数

- 静态位置误差系数 K_p ：

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$

- 静态速度误差系数 K_v ：

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)$$

- 静态加速度误差系数 K_a ：

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)H(s)$$

系统型别	静态误差系数			典型输入作用下的稳态误差		
	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sGH$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 GH$	$r(t) = R_0 1(t)$	$r(t) = v_0 t$	$r(t) = \frac{a_0}{2} t^2$
0	K	0	0	$\frac{R_0}{1+K_p}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{v_0}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{a_0}{K}$
III	∞	∞	∞	0	0	0

① 系统型别越高，跟踪信号能力↑但稳定性↓，动态性能↓；
注：② 静态误差系数定量描述系统对各种典型输入的跟踪能力，在设计时，在输入形式及容许误差确定后，可根据静态误差系数确定系统型别和开环增益K。

注 影响 e_{ss} 的因素

- 系统自身的结构参数
- 外作用的类型（控制量，扰动量及作用点）
- 外作用的形式（阶跃、斜坡或加速度等）

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_1 H = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^V}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1 H = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{V-1}}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_1 H = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{V-2}}$	$r = A \cdot 1(t)$	$r = A \cdot t$	$r = A \cdot t^2 / 2$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

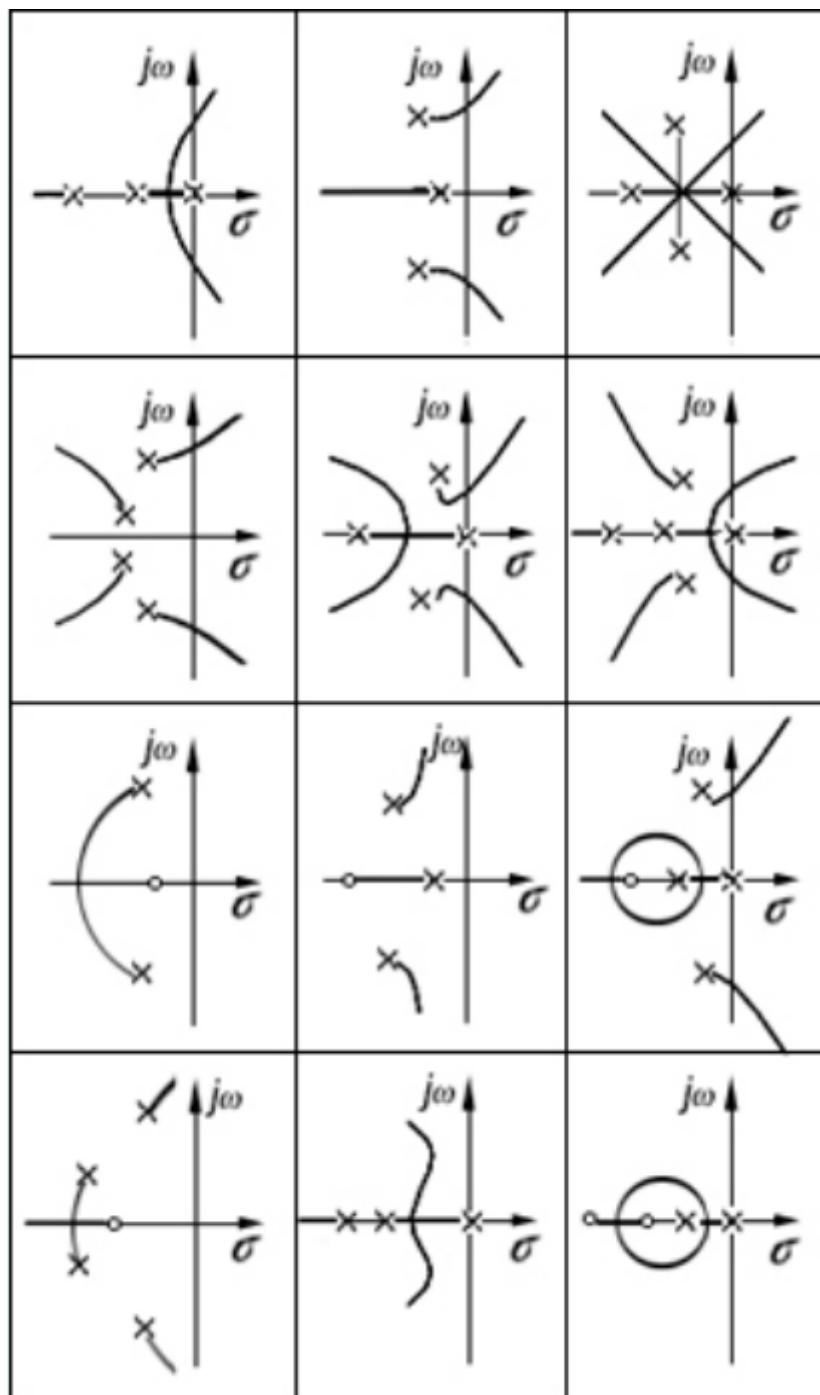
- K : 开环增益
- K_p : 位置误差系数
- K_v : 速度误差系数
- K_a : 加速度误差系数

- 当系统的型别确定时，稳态误差随着输入档次的提高而增加
- 当输入的档次确定时，稳态误差随着系统型别的提高而降低
- 当系统的型别和输入的档次对等时，稳态误差是一个非零的常值
- 当系统的型别高而输入档次低，稳态误差全为0；当系统的型别低而输入档次高，稳态误差全为 ∞

扰动作用下的稳态误差

第四章 线性系统的根轨迹法

开环极点、零点分布及其相应的根轨迹



注 在根轨迹图中，"×"表示开环极点，"○"表示开环零点。粗线表示根轨迹，箭头表示某一参数增加的方向，"·"表示根轨迹上的点

根轨迹法的基本概念

- n阶系统有n个根，有n条根轨迹分支
- 每条根轨迹的起点($K_g = 0$)位于开环极点处
- 每条根轨迹的终点($K_g = \infty$)或为开环零点处，或为无穷远处
- 重根点，称为分离点或汇合点

根轨迹增益

将系统的开环传递函数写为首1标准形，得到的系数 K_g 称为（开环）系统的根轨迹增益。（相对的，将系统的开环传递函数写为尾1标准形，得到的系数 K 称为系统的开环增益）

闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

- 闭环系统根轨迹增益，等于开环系统前向通路根轨迹增益。对于单位反馈系统，闭环系统根轨迹增益就等于开环系统根轨迹增益。
- 闭环零点由开环前向通路传递函数的零点和反馈通路传递函数的极点所组成。对于单位反馈系统，闭环零点就是开环零点。闭环零点不随根轨迹增益的改变而变化。

$$\text{闭环零点} = \text{前向通道开环零点} + \text{反馈通道开环极点}$$

- 闭环极点与开环零点、开环极点以及根轨迹增益 K^* 均有关

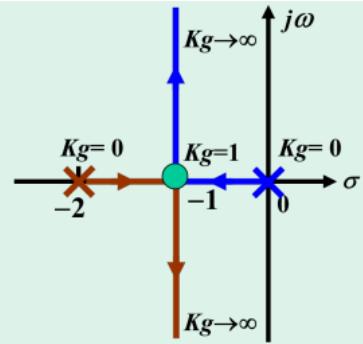
根轨迹与系统性能

稳定性

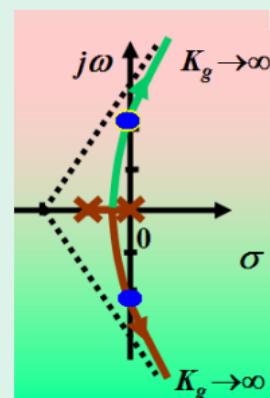
2. 根轨迹与系统性能

(1) 稳定性

当 K_g 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，如系统的根轨迹不会越过虚轴进入右半 s 平面，则该系统对所有的 K_g 值都是稳定的。



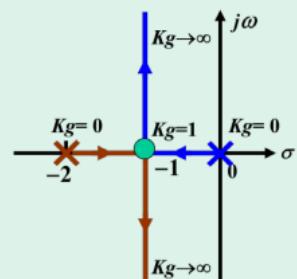
如果系统的根轨迹有可能进入右半 s 平面，此时根迹与虚轴交点处的 K_g 值，称为临界开环增益。



稳态性能

(2) 稳态性能

由原点处的开环极点数 γ 可确定系统的型别 (γ -型, $\gamma=0,1,2,3,\dots$)。



- 如果给定系统对稳态误差的要求，则对 $K_g(K)$ 有要求；
- 由根迹图可以确定闭环极点位置的容许范围。

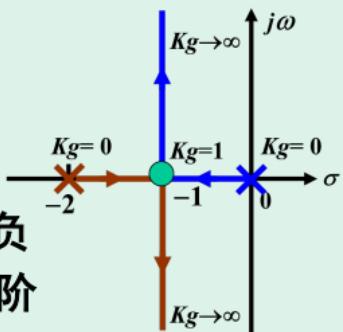
动态性能

(3) 动态性能

当 $0 < K_g < 1$ 时，闭环极点均位于负实轴上，系统为过阻尼系统，单位阶跃响应为非周期过程。

当 $K_g = 1$ 时，闭环两个实极点重合，系统为临界阻尼系统，单位阶跃响应为非周期过程。

当 $K_g > 1$ 时，闭环极点为一对共轭复数极点，系统为欠阻尼系统，单位阶跃响应为阻尼振荡过程。



注意

- 过阻尼系统：闭环极点均位于负实轴上
- 临界阻尼系统：闭环两个实极点重合
- 欠阻尼系统：闭环极点为一对共轭复数极点

根轨迹方程

系统开环传递函数：

$$G(s)H(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

(零极点表达式)

由闭环特征方程：

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

得到系统的根轨迹方程：

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \mp \frac{1}{K_g}$$

式中 K_g 为系统的根轨迹增益， z_i 为系统的开环零点， p_j 为系统的开环极点，“-”对应负反馈（ 180° 根轨迹），“+”对应正反馈（ 0° 度根轨迹）。

由根轨迹方程可以得到模值条件和相角条件：

$$\text{模值条件: } K^* \cdot \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = 1$$

$$\begin{aligned}\text{相角条件: } & \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi \\ & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)\end{aligned}$$

根轨迹绘制的基本法则

绘制根轨迹的8个准则

定理

若系统有 n 个开环极点， m 个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。

法则1 根轨迹的起点和终点

起点：对应 n 个开环极点 p_i

终点：对应 m 个开环零点 z_j

- 根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点，若 $n > m$ ，则有 $n - m$ 条根轨迹终止于无穷远处
- 若把有限数值零点称为有限零点，把无穷远处的点称为无限零点，可以说根轨迹起始于开环极点，必终止于开环零点

法则2 根轨迹的分支数、对称性和连续性

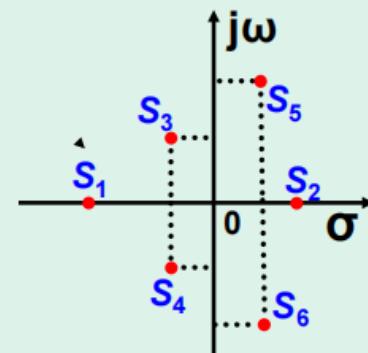
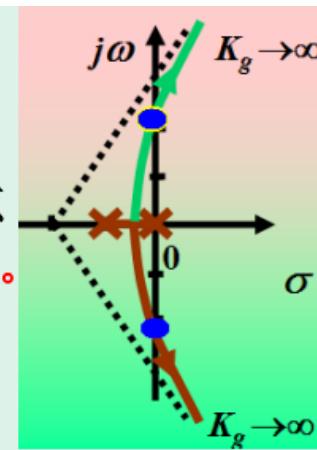
法则2. 根轨迹的分支数、对称性和连续性

根轨迹的分支数与开环有限零点 m 和有限极点 n 中的**大者相等**，它们是**连续的且对称于实轴**。

- 根轨迹的分支数与开环极点数 n 相等 ($n > m$)，或与开环有限零点数 m 相等 ($n < m$)。

➤ 根轨迹连续：根轨迹增益是**连续变化**导致特征根也**连续变化**。

➤ 实轴对称：特征方程的系数为实数，特征根必为**实数或共轭复数**。



- 根轨迹的分支数 = 系统阶数
- 根轨迹连续且对称于实轴

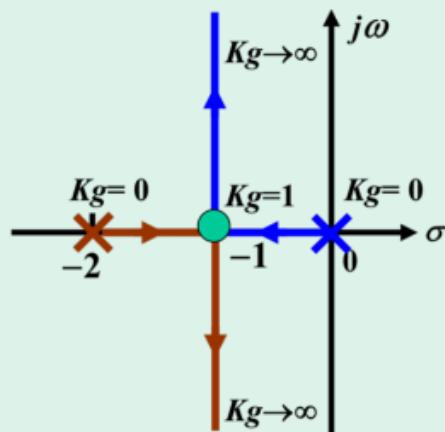
法则3 实轴上根轨迹

法则4. 实轴上的根轨迹

如果实轴上某一**区域的右侧**的实数开环零点、极点个数之和为**奇数**，则该区域实轴必是根轨迹。

结论：“奇是偶不是”

因此，只有当 s 点右侧开环零极数之和为奇数时，才能**满足相角条件**，也就是说，只有这样的 s 点，**才是根轨迹上的点**。



从实轴上最右端的开环零点或极点向左算起，奇数开环零、极点到偶数开环零、极点之间的区域必定是根轨迹。

法则4 根轨迹的渐近线

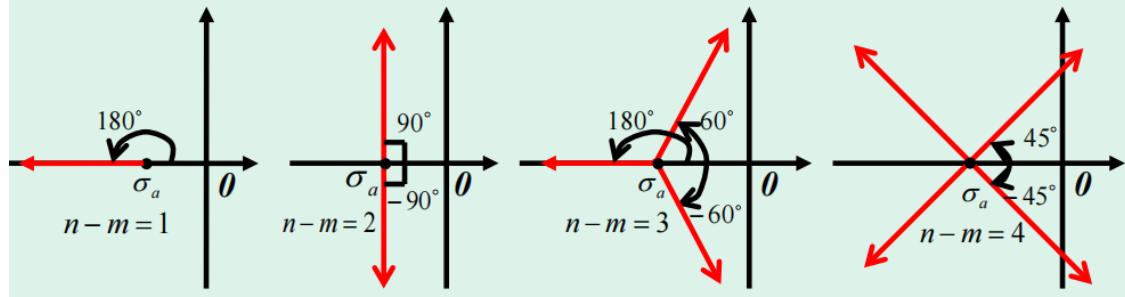
法则3. 根轨迹的渐近线

$n > m$ 时： $n-m$ 条根轨迹沿着渐近线趋向无穷远处。

与实轴的交点：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

与实轴的夹角： $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$ 或 $\frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}$, $k = 0, 1, \dots, n-m-1$

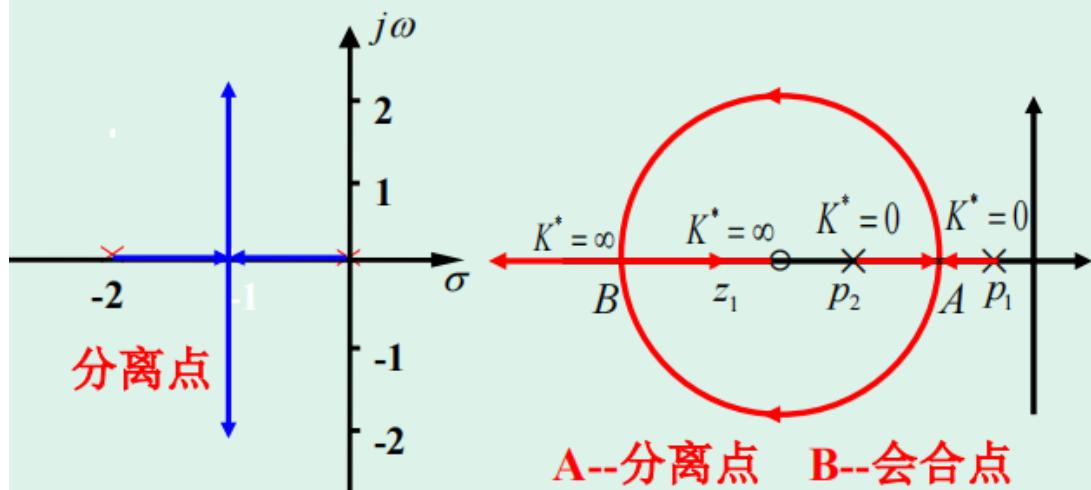


法则5 根轨迹的分离点和分离角

法则5. 根轨迹的分离点与分离角

若干根轨迹在复平面上某一点相遇后又分开，称该点为分离点或会合点。

分离点在两极点之间，**会合点**在两零点之间。闭环特征方程**有重根**。



$$\text{分离角: } \theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l} \quad l-\text{根轨迹分支数}$$

求取分离点的方法

试探法（常用）

$$(1) \text{ 试探法: } \sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

$$\text{若系统无有限零点: } \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = 0$$

极值法

$$\frac{dK^*}{ds} = 0$$

牛顿余数定理法

(3)牛顿余数定理法

步骤：

(1)求出 $\frac{dK^*}{ds}$; $\frac{dK^*}{ds} = -\frac{D'(s)N(s) - N'(s)D(s)}{N^2(s)} = 0$

(2)设 $P(s) = D'(s)N(s) - N'(s)D(s)$;

(3)在其分离点可能出现的实轴坐标附近找一试探点 s_1 ;

(4)用 $(s-s_1)$ 去除 $P(s)$, 得到商 $Q(s)$ 、余数 R_1 ;

(5)用 $(s-s_1)$ 去除 $Q(s)$, 得到余数 R_2 ;

(6)计算 $s_2 = s_1 - R_1/R_2$;

(7)将 s_2 作为新的试探点重复步骤(4)~(6)。

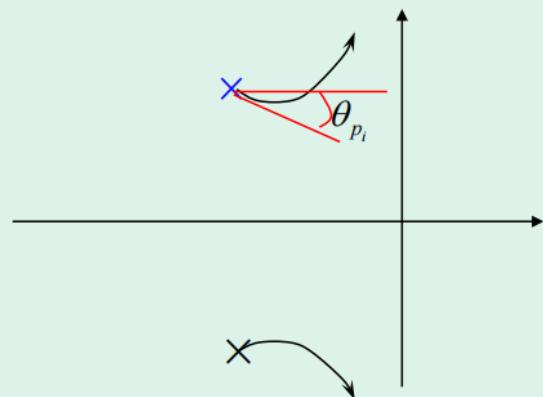
法则6 根轨迹的起始角和终止角

起始角

法则6. 根轨迹的起始角和终止角

起始(出射)角 θ_{p_i} :

起始于开环复数极点的根轨迹在起点处的切线与正实轴的夹角。



$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \theta_{p_j p_i} \right); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

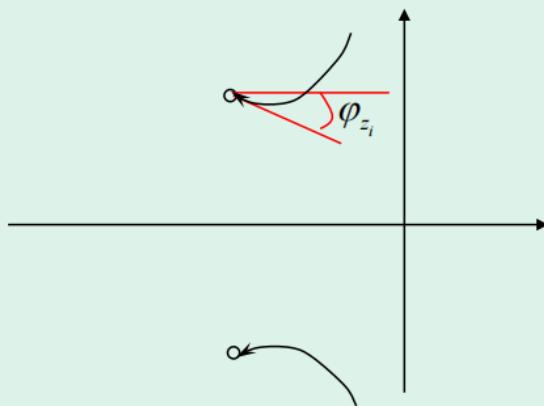
- θ_{p_i} : 起点 p_i 的起始角

- $\varphi_{z_j p_i}$: 开环零点 z_j 与开环极点 p_i 的连线和实轴的夹角
- $\theta_{p_j p_i}$: 开环极点 p_j 与开环极点 p_i 的连线和实轴的夹角

终止角

终止(入射)角 φ_{z_i} :

终止于**开环复数零点**的根轨迹在终点处的切线与**正实轴**的夹角。



$$\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^n \theta_{p_j z_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \varphi_{z_j z_i} \right); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

法则7 根轨迹与虚轴的交点

法则7. 根轨迹与虚轴的交点

根轨迹和虚轴相交时，系统处于临界稳定状态。则闭环特征方程至少有一对纯虚根，这时的增益称为临界根轨迹增益。

交点和临界根轨迹增益的求法：

(1)由劳斯稳定判据求解；

(2)令 $s=j\omega$ ，代入闭环特征方程中，使实、虚部分别为零，求出 ω 和 K^* 。

$$D(j\omega) = 0$$



$$D(j\omega)_{\text{实部}, \text{虚部都为零}} = 0$$



法则8 根之和

法则8. 根之和

$$\text{当 } n-m \geq 2 \text{ 时: } \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i = \text{常数}$$

对于任意的 K^* 闭环极点之和等于开环极点之和为常数。

表明：

当 K^* 变化时，部分闭环极点在复平面上向右移动(变大)，则另一些极点必然向左移动(变小)。

该规则的作用：

(1)定性判断根轨迹的走向；

(2)已知几个闭环根可以求出其他一个或两个根。

$n - m \geq 2$ 时，闭环根之和为常数

根轨迹作图步骤

1. 标注开环极点和零点 (纵、横坐标用相同的比例尺)
2. 实轴上的根轨迹
3. $n - m$ 条渐近线
4. 根轨迹的起始角和终止角
5. 根轨迹与虚轴的焦点
6. 根轨迹的分离点

结合根轨迹的连续性、对称性、根轨迹的分支数、起始点和终点、根之和等性质画出根轨迹

第五章 频率响应法

频率特性

□系统的频率特性 $G(j\omega)$ 是指在正弦输入信号 $A \sin \omega t$ 作用下，
稳态响应的幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\varphi(\omega)$ 随输入频率 ω 变化的规律。

频率特性的基本概念

§ 5.1.1 频率特性 $G(j\omega)$ 的定义

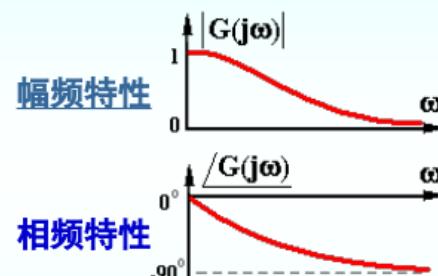
$$\begin{cases} r(t) = A \sin \omega t \\ c_s(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T) \end{cases}$$

$$G(j\omega) \text{ 定义 I: } G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{|c_s(t)|}{|r(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \text{ 幅频特性} \\ \angle G(j\omega) = \angle c_s(t) - \angle r(t) = -\arctan \omega T \text{ 相频特性} \end{cases}$$

$$G(j\omega) \text{ 定义 II: } G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\arctan \omega T = \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| \angle \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{Ts+1} \Big|_{s=j\omega}$$



■ 幅频特性

为稳态输出与输入的振幅比 $A(\omega) = \frac{A_c}{A_r} = |G(j\omega)|$

■ 相频特性

稳态输出与输入正弦信号的相位差 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$

■ 幅相频率特性

幅相频率特性又称为奈奎斯特曲线或极坐标图

把频率特性用模值和幅角的形式表示成复合函数

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

频率特性的描述方法

□ 系统的频率特性 $G(j\omega)$ 是指在正弦输入信号 $A \sin \omega t$ 作用下，稳态响应的幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\varphi(\omega)$ 随输入频率 ω 变化的规律。

公式: $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

□ 频率特性 $G(j\omega)$ 的另一种方法：实频 $U(\omega)$ 和虚频 $V(\omega)$ 。

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega)$$

□ 两种描述方式方法：实频和虚频的组合与幅值和相角的组合之间的联系：

■ 幅频特性 $A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$

■ 相频特性 $\varphi(\omega) = \angle G(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$

◆ 实频特性 $U(\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$

◆ 虚频特性 $V(\omega) = \operatorname{Im}[G(j\omega)] = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$

频率特性与传递函数的关系

➤频率特性表达式

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

➤传递函数表达式

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

➤频率特性—传递函数

$$\frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + Ts} \Big|_{s=j\omega}$$

频率特性的几何表示

幅相频率特性曲线 (幅相曲线, 极坐标图)

■ 绘制幅相特性曲线有两种方法:

➤第一种方法:

对每一个频率值 ω 计算对应的幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\varphi(\omega)$, 然后将这些点连成光滑曲线;

➤第二种方法:

对每一个频率值 ω 计算 $U(\omega)$ 和 $V(\omega)$, 然后连接成光滑曲线.

对数频率特性曲线 (对数坐标图, 波特图)

□ 对数频率特性曲线包括对数幅频特性和对数相频特性两条曲线

■ 由频率特性 $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

对数幅频特性 $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg (\sqrt{1 + T^2 \omega^2})$

对数相频特性 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(-\omega T)$

➤绘制伯德图时需要用半对数坐标纸。

➤对数频率特性曲线的横坐标是频率 ω , 采用对数分度 $\lg \omega$, 单位是 [rad/s]。

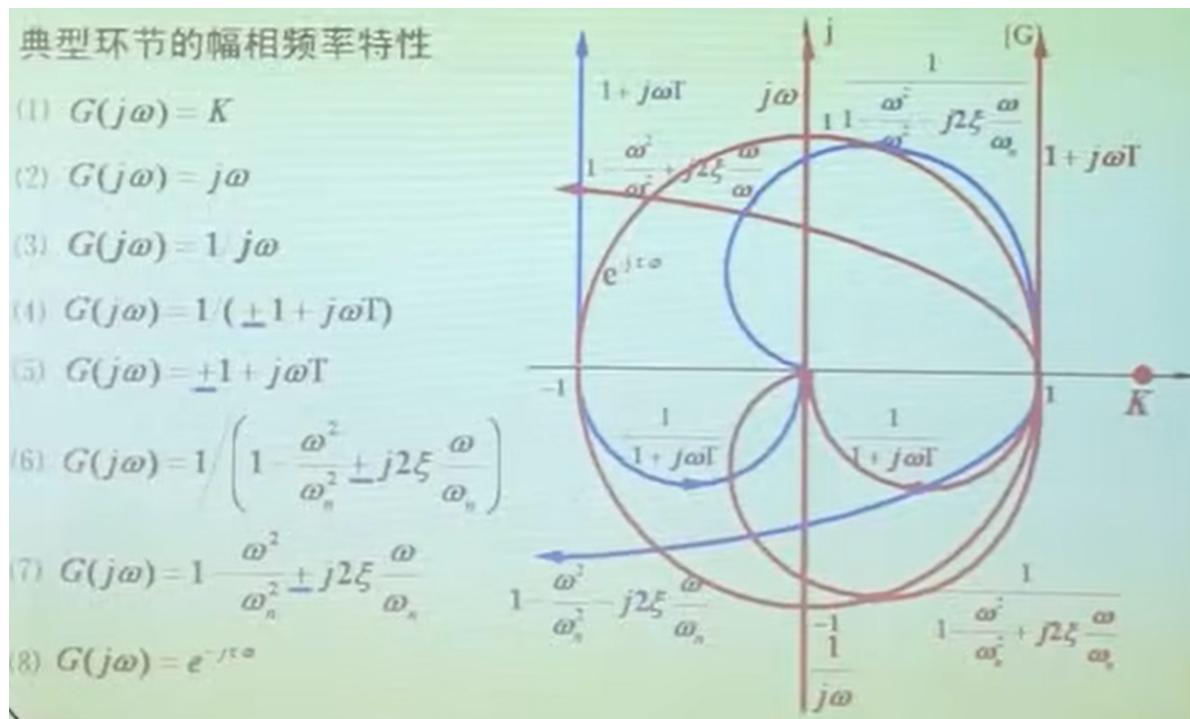
➤对数幅频特性曲线的纵坐标为对数幅频特性的函数值 $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$, 单位是分贝 [dB]。

➤对数相频特性曲线的纵坐标为相频特性的函数值 $\Phi(\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega T)$, 单位是 [°]。

对数幅相特性曲线 (尼科尔斯图)

频率特性的数学表示法

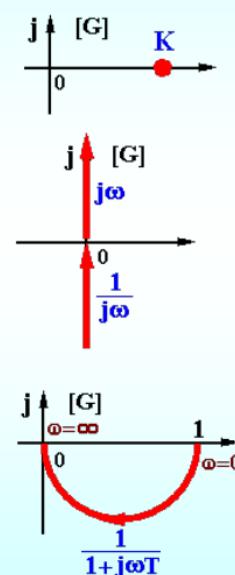
典型环节与开环系统的频率特性



典型环节的幅相频率特性曲线

§ 5.2.1 典型环节的幅相频率特性

- | | | | |
|----------|---------------------------|--|---|
| (1) 比例环节 | $G(s) = K$ | $G(j\omega) = K$ | $\begin{cases} G = K \\ \angle G = 0^\circ \end{cases}$ |
| (2) 微分环节 | $G(s) = s$ | $G(j\omega) = j\omega$ | $\begin{cases} G = \omega \\ \angle G = 90^\circ \end{cases}$ |
| (3) 积分环节 | $G(s) = \frac{1}{s}$ | $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ | $\begin{cases} G = 1/\omega \\ \angle G = -90^\circ \end{cases}$ |
| (4) 惯性环节 | $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ | $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ | $\begin{cases} G = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \angle G = -\arctan \omega T \end{cases}$ |

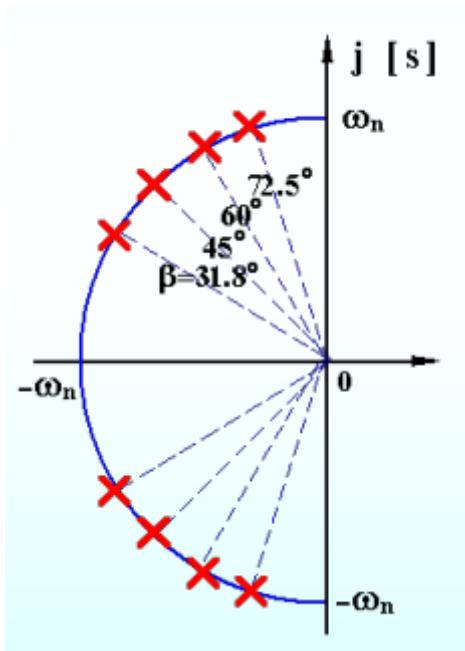


注意 惯性环节的幅相特性曲线为半圆

振荡环节

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

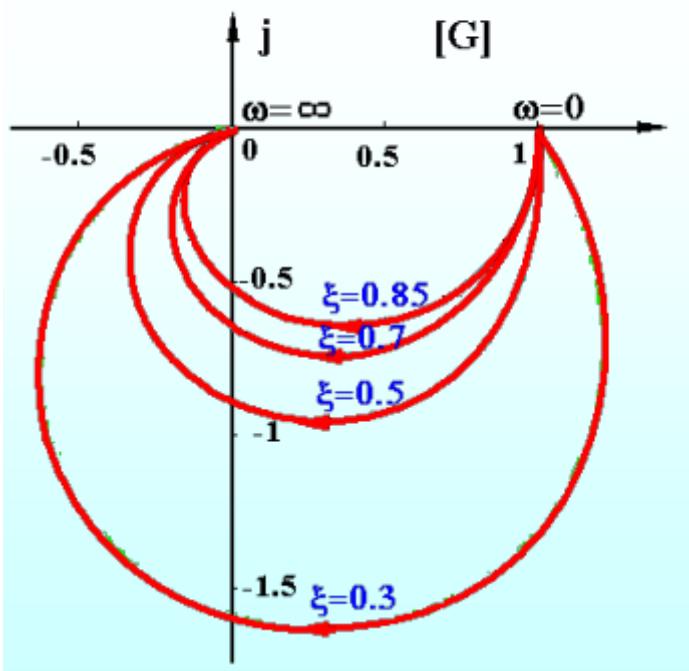
闭环极点的取值范围：



幅相频率特性：

$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$



模值和相角：

$$|G| = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right] + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

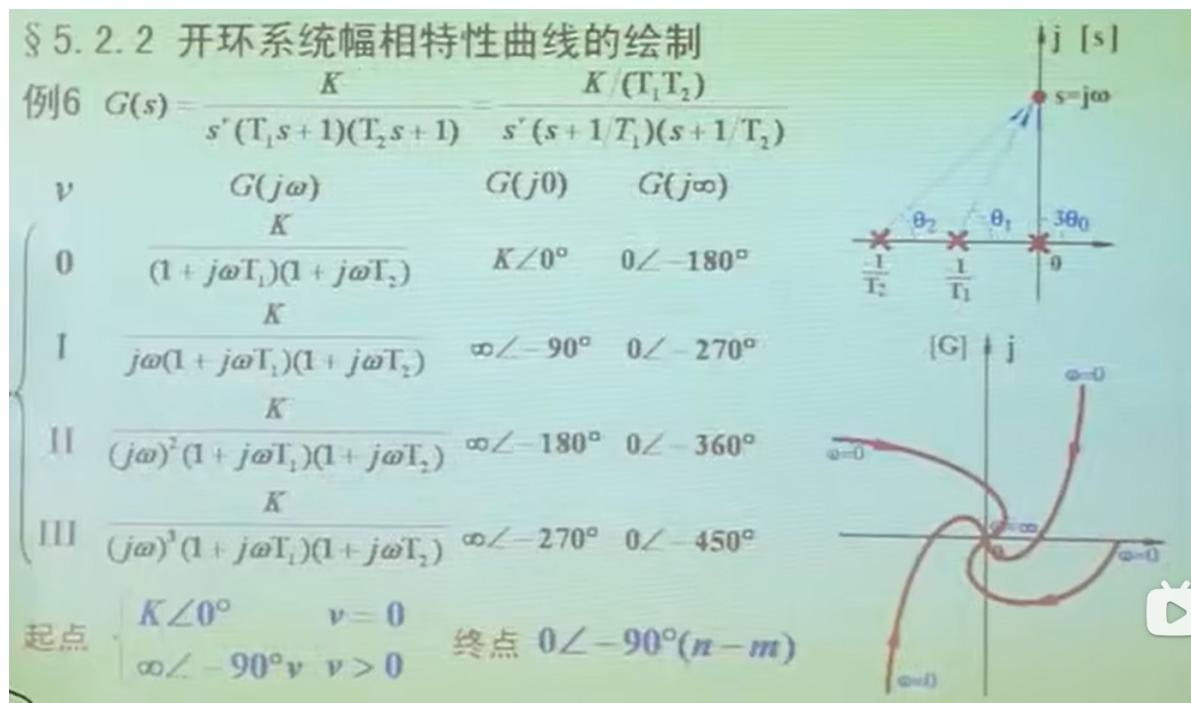
$$\angle G = -\arctan \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

谐振频率 ω_r 和谐振峰值 M_r :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

利用s平面判断幅相特性曲线的变换趋势



其中, n 为分母的阶数, m 为分子的阶数。

最小相位系统与非最小相位系统

开环频率特性的绘制

开环对数频率曲线 (Bode图) 的绘制

5.2 开环对数频率曲线(Bode图)的绘制

1 思路：将复杂的 $G(s)H(s)$ 分解为典型环节的串联

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)\dots\dots G_k(s)$$

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)H(j\omega)| = 20 \lg |G_1| + 20 \lg |G_2| + \dots + 20 \lg |G_k| \\ \varphi(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega) = \angle G_1 + \angle G_2 + \dots + \angle G_k \end{cases}$$

即总的 $L(\omega), \varphi(\omega)$ 曲线等于各典型环节的叠加。

2 步骤

1) 分解 $G(s)H(s)$

比例	}	积分、微分
一阶惯性、一阶微分		
二阶振荡、二阶微分		

2) 求各环节转折频率，并从小到大排列：

最小的转折频率 ω_{min} 和最大的 ω_{max} 。

3) 低频段

$\omega < \omega_{min}$: $\begin{cases} L_a(\omega) \\ \varphi_a(\omega) \end{cases}$ 由 K 和积分环节决定.

$L_a(\omega)$ $\begin{cases} 20 \lg K \rightarrow \text{水平线} \\ \frac{1}{s^\nu} \rightarrow -20 \times \nu dB / dec \text{ 斜线} \end{cases}$ $\varphi(\omega)$ $\begin{cases} 0^\circ \text{ 线} \\ -90^\circ \times \nu \text{ 线} \end{cases}$

位置确定：
(三种方法) ① 在 $\omega < \omega_{min}$ 上任取 ω_0 , 计算 $20 \lg K - 20 \lg \omega_0^\nu$

② $\omega_0 = 1: L_a(1) = 20 \lg K$

③ 取 $L_a(\omega_0) = 0$ 即 $K / \omega_0^\nu = 1 \quad \omega_0 = K^{\frac{1}{\nu}}$

4) $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$: 按转折频率对应的环节绘制

5) 必要时作修正.

顺序斜率法 **重要**

(2) 顺序斜率法

分析表明

若系统频率特性 $G(j\omega) = \frac{K(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)\cdots(1+j\tau_m\omega)}{(j\omega)^v(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)\cdots(1+jT_{n-v}\omega)}$

系统的Bode图具有以下特点：

1) 系统在低频段的频率特性为 $\frac{K}{(j\omega)^v}$

因此，其对数幅频特性在低频段表现为过点 $(1, 20\lg K)$ ，斜率为 $-20v \text{ dB/dec}$ 的直线

计算取近似值，低频时捨弃 T 的次项忽略

2) 在各环节的转角频率处，对数幅频特性渐近线的斜率发生变化，其变化量等于相应的典型环节在其转角频率处斜率的变化量（即其高频渐近线的斜率）。

顺序斜率法绘制对数幅频特性的步骤：

第1步化简

1) $G(s) \rightarrow$ 标准形式（常数项为1） $\rightarrow G(j\omega)$ ；

2) 确定各典型环节的转角频率，标在横坐标轴上；

3) 过点 $(1, 20\lg K)$ ，作斜率为 $-20v \text{ dB/dec}$ 的直线；

4) 延长该直线，每遇到一个转角频率改变一次斜率。

惯性环节 减小 -20 dB/dec

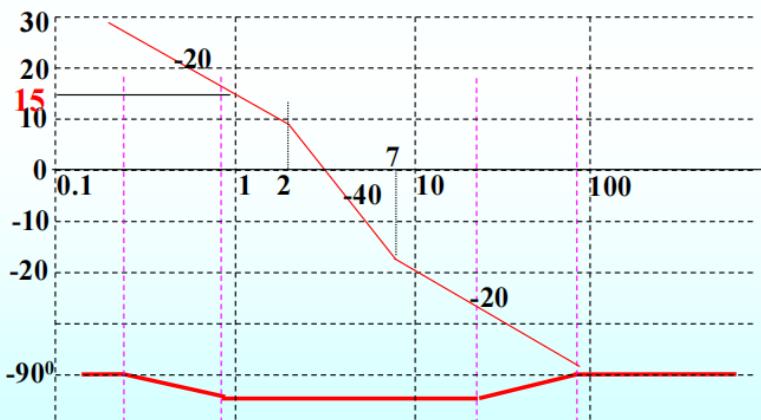
一阶微分环节 增加 $+20 \text{ dB/dec}$

二阶微分环节 增加 $+40 \text{ dB/dec}$

二阶振荡环节 增加 -40 dB/dec

注 顺序斜率法也可用来根据对数幅频曲线计算 $G(s)$ ：

例5-9 已知某最小相位系统近似幅频曲线，求 $G(s)$ ，并绘制相频曲线。



$$G(s) = \frac{K \left(\frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}$$

$$20 \lg K = 15 \quad K = 5.6$$

$$\omega_1 = 2 \quad \omega_2 = 7$$

$$G(s) = \frac{5.6 \left(\frac{s}{7} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}$$

重点 频域稳定性判据

奈氏稳定判据

奈奎斯特 (Nyquist) 稳定判据

系统稳定的充要条件: 奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 的周数 R 等于开环传递函数 $G(s)H(s)$ 右半 S 平面极点数 P ，即 $R=P$ ；否则闭环系统不稳定。

用公式表示: $Z = P - R$

各个字母代表的含义:

Z 为 闭环特征根 $D(s)=1+G(s)H(s)=0$ 在 s 右半平面的个数；
 P 为 开环传递函数 $G(s)H(s)$ 在 右半 S 平面 极点数；
 R 为奈氏曲线 逆时针包围 $(-1, j0)$ 的周数。

1. 系统稳定的充要条件: $\omega: -\infty \rightarrow +\infty$ 的开环幅

相曲线在 $[GH]$ 平面上逆时针包围 $(-1, j0)$ 圈数 R

等于开环不稳定极点个数 P 。即: $Z = P - R = 0$

2. 当系统不稳定时, 右半平面特征根数 $Z = P - R \neq 0$ 。

注意

- 此处绘制开环幅相曲线时，应注意频率 ω 的变换范围为 $-\infty \rightarrow +\infty$ 。通常可以先画出 $\omega : 0 \rightarrow +\infty$ 对应的开环幅相曲线，然后根据实轴画出对称的 $\omega : -\infty \rightarrow 0$ 部分。
- 当奈氏曲线经过 $(-1, j0)$ 时，系统恰好为临界稳定
- 关于补圆：

开环传递函数含有积分环节

若系统开环传递函数中包含有 v 个积分环节，则先绘出 $\omega=0^+ \rightarrow \infty$ 的幅相频率特性曲线，然后将曲线进行修正后，再使用奈氏判据来判断系统的稳定性。

修正方法：

$$\begin{aligned} A(0) &= 0^\circ \\ \Delta\varphi &= 90^\circ v \end{aligned}$$

从原开环幅相曲线的起点 $\omega = 0^+$ ，逆时针补画半径为无穷大的 $v \times 90^\circ$ 圆弧，用虚线表示，即 $\omega = 0^+ \rightarrow 0^+$ 的曲线。----- 补圆

Nyquist判据的另一种形式（这个好像更好用一点）

闭环特征根 $D(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$ 在 s 右半平面的个数

$$Z = p - 2N$$

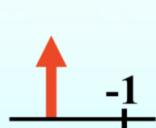
$z=0$
系统稳定

开环极点 $G(s)H(s)$ 在 s 右半平面的个数

向下穿过多为正 $-N_+$ 向上穿过多为负 $-N_-$

开环幅相曲线穿越 -1 之左实轴的次数

$G(j\omega)H(j\omega)$ 起于 -1 之左实轴，为半次穿越



$$N_- = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-1}{+}$$

$$N_+ = \frac{1}{2}$$

$$N = N_+ - N_-$$

定义: $GH(j\omega)$ 包围 $(-1, j0)$ 点圈数 R 等于 $GH(\omega: 0 \rightarrow 0^+ \rightarrow \infty)$ 时, 在 $(-1, j0)$ 点左侧穿过负实轴的次数, 即 $R = 2(N_+ - N_-)$

负穿越:从下向上

正穿越:从上向下

系统稳定 $\leftarrow \rightarrow Z = P - R = 0$

图a①: $N_+ = 0, N_- = 1, R = -2$

②: $N_+ = 0, N_- = 0, R = 0$

图b①: $N_+ = 0, N_- = 1, R = -2$

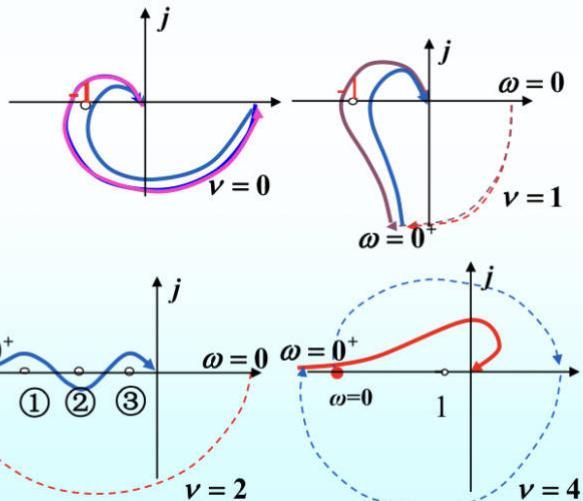
②: $N_+ = 0, N_- = 0, R = 0$

图c①: $N_+ = 0, N_- = 1, R = -2$

②: $N_+ = 1, N_- = 1, R = 0$

③: $N_+ = 1, N_- = 2, R = -2$

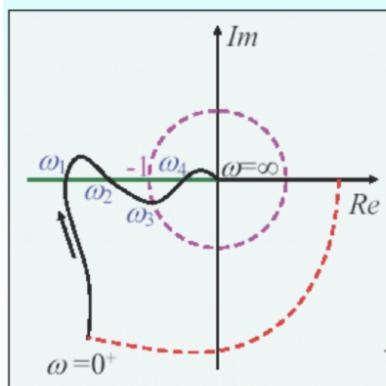
图d: $N_+ = 0, N_- = 1.5, R = -3$



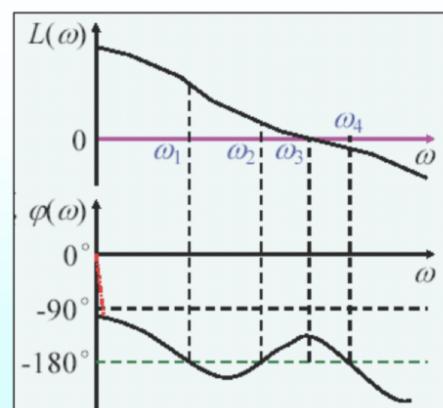
注 这里的 N 也可以理解为 $\omega: 0 \rightarrow +\infty$ 对应幅相特性曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 的圈数。

奈氏判据在Bode图上的应用

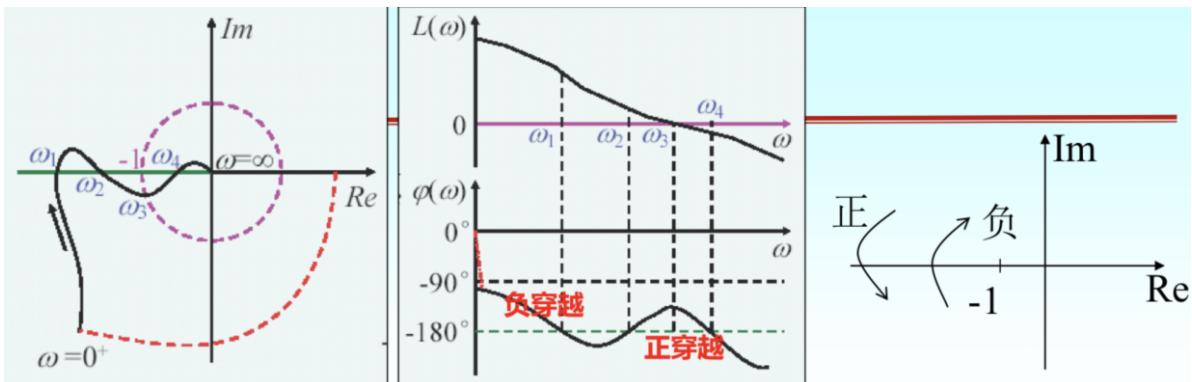
三、奈氏判据在Bode图上的应用



原点为圆心的单位圆 \leftrightarrow 0分贝线。
单位圆以外 $\leftrightarrow L(\omega) > 0$ 的部分;
单位圆内部 $\leftrightarrow L(\omega) < 0$ 的部分。
Nyquist曲线负实轴 \leftrightarrow Bode图
相频 -180° 线。



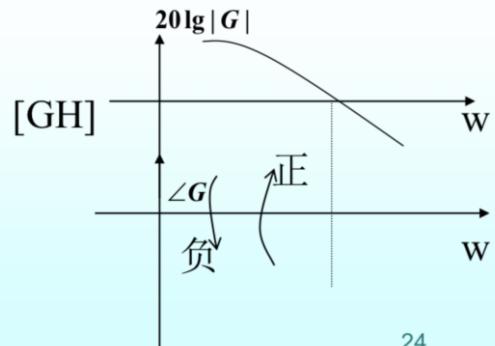
Nyquist曲线的辅助线
相连 { $\varphi(0^+) + v 90^\circ$ 线
起始点 $\varphi(0^+)$
(v 为开环积分环节的数目)



$(-1, j0)$ 点以左实轴的穿越点 $\leftrightarrow L(\omega) > 0$ 范围内的与 -180° 线的穿越点。

正穿越 \leftrightarrow 对于对数相频特性曲线当 ω 增大时, 从下向上穿越 -180° 线(相角滞后减小);

负穿越 \leftrightarrow 对于对数相频特性曲线当 ω 增大时, 从上向下穿越 -180° 线(相角滞后增大)。



24

对数频率特性稳定判据

三、相对稳定性与对数幅频特性的关系

结论:

(1) 如果 $L(\omega)$ 在 ω_c 处的穿越斜率保持为 -20db/dec , 且保持一定的中频段宽度 h , 可以保证相位裕度 $\gamma > 0^\circ$, 系统一定是稳定的, 且动态性能比较好。

(2) 如果 $L(\omega)$ 在 ω_c 处的穿越斜率为 -40db/dec , 那么, 系统或者是不稳定的, 或者即使是稳定的, 其平稳性也极差, 会有较大的振荡产生。

(3) 即使 $L(\omega)$ 在 ω_c 处的穿越斜率为 -20db/dec , 而两端的衔接频率很近, 也就是说, 不能保持中频段宽度 h 为足够的宽度, 那么系统的动态性能也是比较差的。

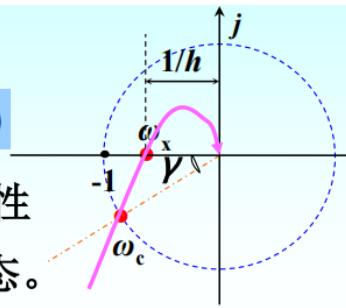
稳定裕度

定义

相角裕度：

$$\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$$

含义：对于闭环稳定的系统，开环的相频特性再滞后 γ 度，系统就处于临界稳定状态。



幅值裕度：

$$h = \frac{1}{A(\omega_x)} = \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|}$$

$$h(dB) = 20 \lg h = -L(\omega_x)$$

含义：对于闭环稳定系统，如果开环幅频特性 $A(\omega)$ 再增加 h 倍，系统就处于临界稳定状态，即如果 $L(\omega)$ 再向上平移 $h(db)$ 系统就处于临界稳定状态。

稳定裕度的物理意义

- 相角裕度的物理意义：系统在相角上距离临界稳定还具有的储备量
- 幅值裕度的物理意义：系统在增益上距离临界稳定还具有的储备量

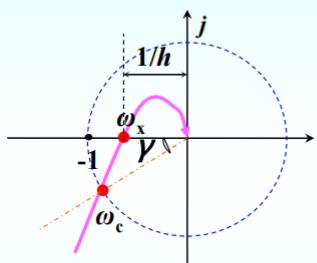
稳定裕度的计算

- 截止频率（或剪切频率） ω_c ，对应相角裕度 γ
- 穿越频率（或相角交接频率） ω_x ，对应幅值裕度 h

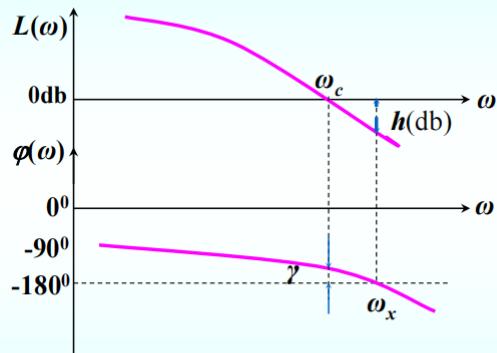
γ, h 在开环频率特性图上的表示

5-4-2 γ, h 在开环频率特性图上的表示

1 帧相图



2 Bode 图



可见，稳定的最小相位系统： $\gamma > 0, h > 1, h(\text{dB}) > 0$
为了获得比较好的过渡过程，通常要求：

$$\gamma = 45^\circ - 70^\circ \quad h \geq 2 \quad h(\text{dB}) \geq 6\text{dB}$$

相对稳定性与对数幅频特性的关系

三、相对稳定性与对数幅频特性的关系

结论：

- (1) 如果 $L(\omega)$ 在 ω_c 处的穿越斜率保持为 -20db/dec ，且保持一定的中频段宽度 h ，可以保证相位裕度 $\gamma > 0^\circ$ ，系统一定是稳定的，且动态性能比较好。
- (2) 如果 $L(\omega)$ 在 ω_c 处的穿越斜率为 -40db/dec ，那么，系统或者是不稳定的，或者即使是稳定的，其平稳性也极差，会有较大的振荡产生。
- (3) 即使 $L(\omega)$ 在 ω_c 处的穿越斜率为 -20db/dec ，而两端的衔接频率很近，也就是说，不能保持中频段宽度 h 为足够的宽度，那么系统的动态性能也是比较差的。

第六章 线性系统的校正方法

系统的设计与校正问题

系统设计与校正

性能指标

系统带宽 ω_b 的确定

校正方式

串联校正

反馈校正

前馈校正

复合校正

基本控制规律

比例 (P) 控制规律

比例-微分 (PD) 控制规律

积分 (I) 控制规律

比例-积分 (PI) 控制规律

比例-积分-微分 (PID) 控制规律

常用校正装置及其特性

无源校正网络

无源超前网络 (等效于PD控制器)

无源滞后网络 (等效于PI控制器)

无源滞后-超前网络 (等效于PID控制器)

有源校正网络

有源比例 (P)

有源比例-微分 (PD)

有源比例-积分 (PI)

有源比例-积分-微分 (PID)

PID控制器

串联校正

频率响应法校正设计

串联校正

串联超前校正

串联滞后校正

串联滞后-超前校正

复合校正

按扰动补偿的复合校正

按输入补偿的复合校正

第七章 线性离散系统的分析与校正 必有一道大题

离散系统

离散系统：系统中有一处或几处信号是脉冲串或数码

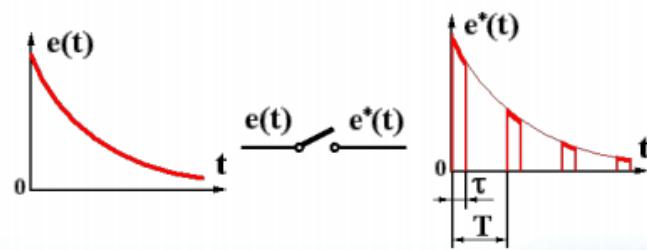
离散系统类型： $\begin{cases} \text{采样系统} & - \text{时间离散, 数值连续} \\ \text{数字系统} & - \text{时间离散, 数值量化} \end{cases}$

AD过程

(1) A/D 过程

•采样 — 时间上离散

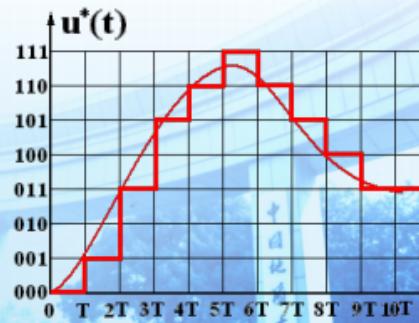
•量化 — 数值上离散



理想采样过程

① $\tau \ll T$ 认为采样瞬时完成

② 字长足够 认为 $e^*(kt) = e(kt)$



计算过程

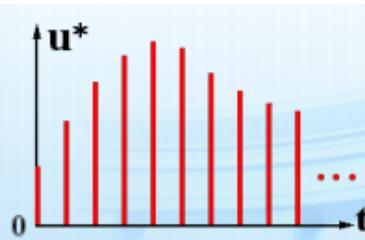
计算过程描述



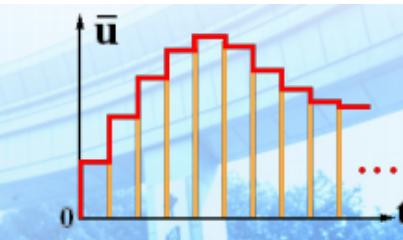
DA过程

D/A 过程

零阶保持器
(ZOH)



$u^*(t) \rightarrow \boxed{\text{ZOH}}$



信号采样与保持

信号采样

§ 7.2.1 信号采样

(1) 理想采样序列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$e^*(t) = e(t) \cdot \delta_T(t) = e(t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

$$(2) L: E^*(s) = L[e^*(t)]$$

$$= L\left[\sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot \delta(t - nT) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot e^{-nTs}$$

- 重要公式

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot e^{-nTs}$$

- 傅氏变换

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s)$$

(3) 傅氏变换 — $\delta_T(t)$ 是周期函数, 可展开为傅氏级数

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$\omega_s = 2\pi/T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) \cdot e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{T}$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$e^*(t) = e(t) \cdot \delta_T(t) = \frac{1}{T} e(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t) \cdot e^{-jn\omega_s t}$$

$$L[e^*(t)] = L\left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t) \cdot e^{-jn\omega_s t}\right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s)$$

- 比较

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot e^{-ns}$$

- ① 给出 $E^*(s)$ 与 $e(t)$ 在采样点上取值之间的关系;
- ② 一般可写成封闭形式;
- ③ 用于求 $e^*(t)$ 的 z 变换或系统的时间响应。

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s)$$

- ① 给出 $E^*(s)$ 与 $E(s)$ 之间的联系;
- ② 一般写不成封闭形式;
- ③ 用于 $e^*(t)$ 的频谱分析。

香农采样定理

信号完全复现的必要条件:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_h$$

$$T < \frac{\pi}{\omega_h}$$

零阶保持器

University of Geosciences 中国地质大学 自动化学院



§ 7.2.2 零阶保持器

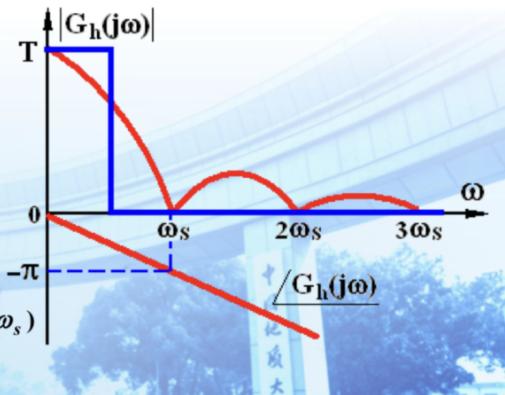
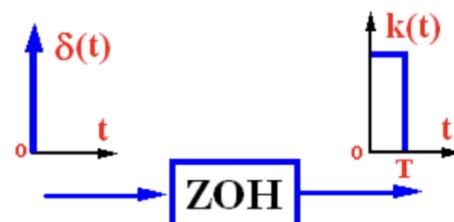
$$k(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

$$G_h(s) = L[k(t)] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$G_h(j\omega) = T \frac{\sin(\omega t/2)}{\omega t/2} e^{-j\omega t/2}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$G_h(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \cdot \frac{\sin \pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)} \cdot e^{-j\pi(\omega/\omega_s)}$$



z变换理论

z变换定义

$$z^{-1} = e^{-Ts}$$

$$E(z) = Z[e^*(t)] = E^*(s)|_{z=e^{Ts}} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot z^{-n}$$

从时域上看， z^{-1} 相当于延迟一拍，可看做一拍延迟因子

§ 7.3.1 z变换定义

$$E(z) = Z[e^*(t)] = E^*(s) \Big|_{z=e^{Ts}} = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot z^{-n} \quad \begin{cases} E(z): \text{像} \\ e^*(t): \text{原像} \end{cases}$$

注: $\left\{ \begin{array}{l} E(z) = Z[e^*(t)] = Z[E(s)] = Z[E^*(s)] = Z[e(t)] \\ z \text{ 变换只对离散信号而言} \\ E(z) \text{ 只对应唯一的 } e^*(t), \text{ 不对应唯一的 } e(t) \end{array} \right.$

常见函数的z变换

常见函数的z变换	$e(t)$	$E(z)$
(1)	$\delta(t)$	1
(2)	$1(t)$	$z/(z-1)$
(3)	$\delta_T(t)$	$z/(z-1)$
(4)	t	$Tz/(z-1)^2$
(5)	$a^{\frac{t}{T}}$	$z/(z-a)$
(6)	e^{-aT}	$z/(z-e^{-aT})$
(7)	$\sin \omega t$	$z \sin \omega T / (z^2 - 2 \cos \omega T + 1)$
(8)	$\cos \omega t$	$z(z - \cos \omega T) / (z^2 - 2 \cos \omega T + 1)$

补充

拉氏变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z变换 $E(z)$
e^{-nsT}	$\delta(t - nT)$	z^{-n}
1	$\delta(t)$	1
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s^4}$	$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$

拉氏变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z 变换 $E(z)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{s-(1/T) \ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$

重要 z 变换的基本定理

§ 7.3.3 z 变换的基本定理

1. 线性性质 $Z[a \cdot e_1^*(t) \pm b \cdot e_2^*(t)] = a \cdot E_1(z) \pm b \cdot E_2(z)$

2. 实位移定理 $\begin{cases} \text{延迟定理} & Z[e(t-nT)] = z^{-n} E(z) \\ \text{超前定理} & Z[e(t+nT)] = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e(kT) \cdot z^{-k} \right] \end{cases}$

3. 复位移定理 $Z[e(t) \cdot e^{\mp at}] = E(z \cdot e^{\pm aT})$

4. 初值定理 $\lim_{n \rightarrow 0} e(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z)$

5. 终值定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot E(z)$

6. 卷积定理 $c^*(t) = e^*(t) * g^*(t) \Rightarrow C(z) = E(z) \cdot G(z)$

- 延迟定理的理解: z^{-n} 对应延迟 n 拍

z 反变换

7.3.4 z 反变换

$\begin{cases} \text{幂级数法 (长除法)} \\ \text{查表法 (部分分式展开法) 以 } \frac{E(z)}{z} \text{ 的形式展开} \\ \text{留数法 (反演积分法)} & e(nT) = \sum \text{Res}[E(z) \cdot z^{n-1}] \end{cases}$

z 变换的局限性

1. 只反映采样点上信息
2. 一定条件下连续信号在采样点处会有跳变

离散系统的数学模型

线性常系数差分方程及其解法

差分方程解法：

1. 迭代法
2. z变换法

复域数学模型--脉冲传递函数

定义

零初始条件下离散系统输出z变换对输入z变换之比：

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

脉冲传递函数的性质

脉冲传递函数的局限性

1. 原则上不反映非零初始条件下系统响应的全部信息
2. 一般只适合描述单输入单输出离散系统
3. 只适合用于描述线性定常离散系统

闭环系统脉冲传递函数 $\Phi(z)$

注意 求 $\Phi(s)$ 一般不能用Mason (梅森) 公式

离散系统的稳定性与稳态误差

离散系统稳定的充要条件

$\Phi(z)$ 的全部极点均位于 z 平面的单位圆内 (即系统特征方程的所有特征根的模均小于1)

离散系统的稳定判据

w域中的劳斯稳定判据

w变换

$$z = \frac{w+1}{w-1} \Leftrightarrow w = \frac{z+1}{z-1}$$

朱利判据

7.5 离散控制系统的稳定性

掌握

2. 朱利判据 *(适用于高阶系统)*

朱利判据可直接根据特征方程 $\Delta(z)=0$ 的系数，判断其根是否位于z平面上的单位圆内，从而确定系统是否稳定。

设线性离散系统的特征方程为

$$\Delta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

$a_n > 0$

升幂排列

$a_n > 0$ ，且 a_i 均为实数。

根据上式可列出朱利阵列如表7-4所示。

系统稳定的充要条件为

$$\left. \begin{array}{l} \Delta(z) \Big|_{z=1} = \Delta(1) > 0 \\ (-1)^n \Delta(z) \Big|_{z=-1} = (-1)^n \Delta(-1) > 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{必须要验证} \\ n: \text{特征方程的阶数} \end{array} \quad (8-39)$$

且满足以下约束条件

$$\left. \begin{array}{l} |a_0| < a_n \\ |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| \\ \vdots \\ |q_0| > |q_2| \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{成对出现} \\ \text{共}(n-1)\text{个约束条件} \end{array} \quad (8-40)$$

上面大下面

计算稳态误差的一般方法

静态误差系数法

§ 7.5.4 静态误差系数法



$$e(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \Phi_e(z) R(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot R(z) \cdot \frac{1}{1+GH(z)}$$

$$r(t) = A \cdot 1(t) \quad e(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{Az}{z-1} \cdot \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{A}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)} = \frac{A}{1 + K_p}$$

静态位置误差系数 $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$

$$r(t) = A \cdot t \quad e(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{ATz}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{AT}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) GH(z)} = \frac{AT}{K_v}$$

静态速度误差系数 $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) GH(z)$

$$r(t) = \frac{A}{2} t^2 \quad e(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \cdot \frac{1}{1+GH(z)} = \frac{AT^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)} = \frac{AT^2}{K_a}$$

静态加速度误差系数 $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$

ol of Automation
a University of Geosciences 中國地質大學 自动化学院

§ 7.5.4 静态误差系数法

$$GH(z) = \frac{1}{(z-1)^v} GH_0(z)$$

(2-1) 对应
系统型别在这里判断

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p = \lim GH(z)$	$K_v = \lim (z-1) GH(z)$	$K_a = \lim (z-1)^2 GH(z)$	$r = A \cdot 1(t)$ $e(\infty) = \frac{A}{1+K_p}$	$r = A \cdot t$ $e(\infty) = \frac{AT}{K_v}$	$r = A \cdot t^2 / 2$ $e(\infty) = \frac{AT^2}{K_a}$
0	K_p	0	0	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
I	∞	K_v	0	0	$\frac{AT}{K_v}$	∞
II	∞	∞	K_a	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

第八章 非线性控制系统分析

用描述函数法分析非线性系统

一些基本概念

自动控制原理I第八章

重点(要点) → 一般考
基础题(7.8章)

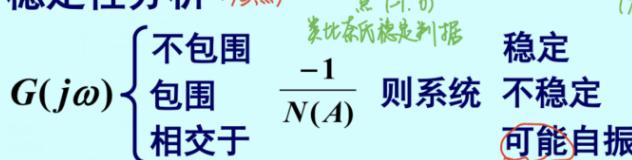
中国地质大学自动化学院

§ 8.3.3 用描述函数法分析非线性系统 (1)

1 基本假设 (前提)

- ① 结构上: $N(A)$, $G(j\omega)$ 串联
- ② $N(A)$ 奇对称, $y_1(t)$ 幅值占优
- ③ $G(j\omega)$ 低通滤波特性好 低频信号通过

2 稳定性分析 (要点)

$G(j\omega)$ 

不包围	点 $(-1, 0)$
包围	$\frac{-1}{N(A)}$
相交于	则系统

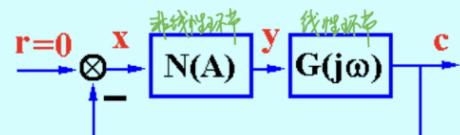
稳定 不稳定 可能自振

3 $\frac{-1}{N(A)}$ 的绘制及其特点

例1 理想继电特性的负倒描述函数

$$\underline{N(A)} = \frac{4M}{\pi A} \quad \frac{-1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4M}$$

通常会给出

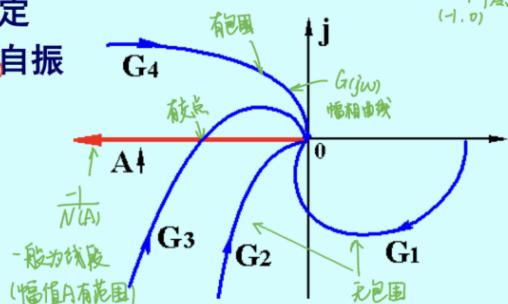


$$\text{特征方程: } \Delta = 1 + N(A) \cdot G(j\omega) = 0$$

$$\text{自振条件: } N(A) \cdot G(j\omega) = -1$$

$$(有交点) \quad G(j\omega) = \frac{-1}{N(A)}$$

可看做广义的-1阶零点
 $(-1, 0)$

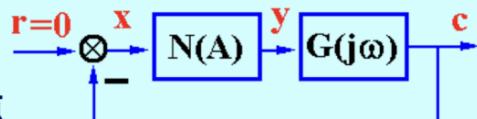


自振分析

4 自振分析 (定性)

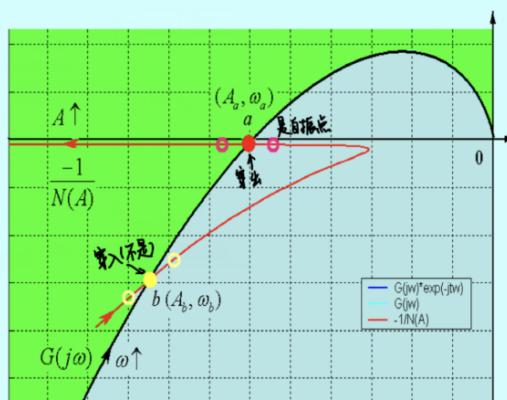
$\frac{-1}{N(A)} \xrightarrow{A \uparrow}$ 

穿入	不是自振点
穿出 $G(j\omega)$ 的点	是自振点
相切于	对应半稳定的周期运动

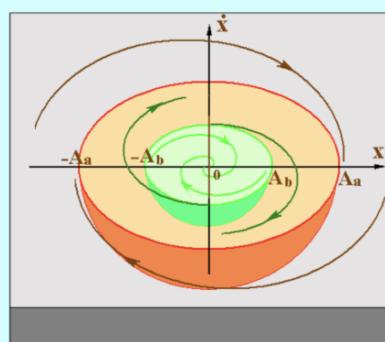


$$N(A)G(j\omega) = -1$$

$$G(j\omega) = \frac{-1}{N(A)}$$

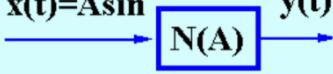


演示



小结

课程小结

1. 描述函数的概念、定义 $N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \phi_1$ 
 2. 描述函数分析方法
- (1) 基本假设 $\left\{ \begin{array}{l} \text{① 结构上: } N(A), G(j\omega) \text{ 串联} \\ \text{② } N(A) \text{ 奇对称, } y_1(t) \text{ 幅值占优} \\ \text{③ } G(j\omega) \text{ 低通滤波特性好} \end{array} \right.$ 
- (2) 稳定性分析 $G(j\omega) \frac{-1}{N(A)}$
 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{不包围} & \text{稳定} \\ \text{包围} & \text{则系统 不稳定} \\ \text{相交于} & \text{可能自振 } G(j\omega) = \frac{-1}{N(A)} \end{array} \right.$
- (3) 自振分析 $\frac{-1}{N(A)} \xrightarrow{A \uparrow}$ $\left\{ \begin{array}{ll} \text{穿入} & \text{不是自振点} \\ \text{穿出 } G(j\omega) \text{ 的点} & \text{是自振点} \\ \text{相切于} & \text{对应半稳定的周期运动} \end{array} \right.$

