Chương 1: Logic, tập hợp, ánh xạ

Thời lượng: 13 tiết

Nội dung

- Logic
- Sự tương đương giữa các mệnh đề
- Vị từ và lượng từ
- Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ
- Lực lượng tập hợp, tập hợp đếm được
- Dãy số và cách tính tổng
- Quan hệ: định nghĩa và tính chất
- Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự bộ phận

Các câu sau có nghĩa gì?

- "Nếu tôi là tỉ phú (USD) thì tôi sẽ mua một chiếc du thuyền."
- "Trẻ em dưới 10 tuổi hay thấp hơn 1m25 được miễn vé vào cổng."
- "Công dân có sức khỏe tốt và trên 18 tuổi có thể tham gia nghĩa vụ quân sự."

1.1. Logic

- Logic là môn học nghiên cứu các qui luật và phương pháp được sử dụng để xây dựng nên các khẳng định có giá trị.
- Cơ sở của logic là các mệnh đề.
- Mệnh đề là một diễn đạt có thể đúng hoặc sai, nhưng không thể vừa đúng vừa sai.
- Mệnh đề đúng là mệnh đề có giá trị chân lý đúng, kí hiệu là T (true).
- Mệnh đề sai là mệnh đề có giá trị chân lý sai, kí hiệu là F (false).
- Kí hiệu mệnh đề: dùng các chữ cái: p, q, r, s…
- Để trình bày mối quan hệ giữa các giá trị của các mệnh đề, người ta dùng bảng chân lý (bảng giá trị chân lý).

1.1. Logic (tiếp theo)

Mệnh đề phức hợp là mệnh đề được xây dựng bằng cách kết hợp một hay nhiều mệnh đề. Mệnh đề phức hợp được tạo ra bằng các toán tử logic (phép toán logic): phủ định (¬), hội (∧), tuyển (∨), tuyển loại (⊕), kéo theo (→), đảo, nghịch đảo, phản đảo, tương đương (↔)…

Mệnh đề phủ định: Cho mệnh đề p. Mệnh đề phủ định của mệnh đề p, ký hiệu $\neg p$ (not p), là mệnh đề "đây không phải là trường hợp như p".

Ví dụ: p : "hôm nay là thứ sáu"

$\neg p$: "hôm nay không phải là thứ sáu"

Bảng chân lý

p	$\neg p$
T	F
F	T

1.1. Logic (tiếp theo)

Mệnh đề hội:

Cho p và q là hai mệnh đề.

Mệnh đề "p và q", ký hiệu p ∧ q, là đúng khi *cả p và q* cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Mệnh đề tuyển:

Mệnh đề "p hoặc q", ký hiệu p ∨ q, là sai khi *cả p và q cùng sai* và là đúng trong các trường hợp còn lại.

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

"hoặc" mang nghĩa bao hàm (cả hai cũng được)

Ít nhất một trong hai mđ p và q là đúng thì "p hoặc q" là đúng.

1.1. Logic (tiếp theo)

Ví dụ:

Cho p: “hôm nay là thứ sáu”, q: “hôm nay trời mưa”

$p \wedge q$:

$p \vee q$:

1.1. Logic (tiếp theo)

<u>Mệnh đề tuyển loại:</u>
Cho p và q là hai mệnh đề. Tuyển loại của p và q, ký hiệu $p \oplus q$, là một mệnh đề sẽ đúng khi *chỉ một trong hai* mệnh đề đó đúng và sẽ sai trong các trường hợp còn lại.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Ví dụ: Trong ngày 8/3, khách hàng nữ đến cửa hàng sẽ được tặng hoa hoặc voucher 100k.

Hoặc mang nghĩa loại trừ (chỉ 1 trong 2)

1.1. Logic (tiếp theo)

- Mệnh đề kéo theo (điều kiện):

- Cho p và q là hai mệnh đề. Mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$ là một mệnh đề sẽ *sai khi p đúng đồng thời q sai*, và sẽ đúng trong các trường hợp còn lại.
  $p \rightarrow q$: (nếu p thì q) p được gọi là giả thiết (tiền đề, nguyên nhân), q được gọi là kết luận (kết quả, hậu quả)
- $q \rightarrow p$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $p \rightarrow q$
- $\neg q \rightarrow \neg p$ được gọi là mệnh đề phản đảo của mệnh đề $p \rightarrow q$
- $\neg p \rightarrow \neg q$ gọi là mệnh đề nghịch đảo của mệnh đề $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ví dụ: Nếu tam giác ABC là tg đều thì AB = AC

Nếu AB ≠ AC thì tam giác ABC không là tg đều

1.1. Logic (tiếp theo)

- Mệnh đề tương đương:

Cho p và q là hai mệnh đề. Mệnh đề tương đương p↔q là mệnh đề chỉ đúng khi p và q có cùng giá trị chân lý và sai trong các trường hợp còn lại.

p	q	p↔q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

NX: p↔q đúng khi cả p→q và q→p đều đúng

Ví dụ: Tam giác ABC là tg đều khi và chỉ khi AB = AC = BC

↔ : nếu và chỉ nếu, khi và chỉ khi, …

1.1. Logic (tiếp theo)

		Phủ định	Hội	Tuyển	Kéo theo	Tương đương	Tuyển loại
p	**q**	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$	$p \oplus q$
T	T	F	T	T	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	T
F	F	T	F	F	T	T	F

1.1. Logic (tiếp theo)

- Thứ tự ưu tiên của các phép toán:

Toán tử	Độ ưu tiên
$\neg$	1
$\wedge$, $\vee$	2, 3
$\rightarrow$, $\leftrightarrow$	4, 5

- Dịch những câu thông thường thành các biểu thức logic:

Ví dụ: "Nếu ngày thi là thứ sáu ngày 13 thì sv bị điểm kém hoặc rớt"

$$(a \wedge b) \rightarrow (c \vee d)$$

a, b, c, d là các mệnh đề:

1.1. Logic (tiếp theo)

Logic được ứng dụng như thế nào trong:

- Mô tả hệ thống
- Tìm kiếm boole
- Các phép toán logic và các phép toán bit

(Sinh viên xem thêm trong giáo trình)

1.2 Sự tương đương giữa các mệnh đề

Định nghĩa 1:

- Một mệnh đề phức hợp luôn đúng với bất kỳ giá trị thực nào của mệnh đề thành phần trong nó được gọi là hằng đúng (*tautology*).
- Một mệnh đề phức hợp luôn sai được gọi là mâu thuẫn (*contradiction*).
- Một mệnh đề không phải hằng đúng cũng không phải mâu thuẫn được gọi là tiếp liên (*contingency*).

Định nghĩa 2:

- Các mệnh đề p và q được gọi là tương đương logic nếu mệnh đề $p \leftrightarrow q$ là hằng đúng.
- Ký hiệu $p \Leftrightarrow q$ hay $p \equiv q$ để chỉ p và q là tương đương logic.

1.2 Sự tương đương giữa các mệnh đề

Ví dụ: $p \rightarrow q$ và $\neg p \vee q$ là tương đương logic

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{q}$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

1.2 Sự tương đương giữa các mệnh đề (tt) (trang 22)

1. $p \land \mathbf{T} \equiv p$ — Luật đồng nhất
   $p \lor \mathbf{F} \equiv p$
2. $p \lor \mathbf{T} \equiv T$ — Luật nuốt (luật trội)
   $p \land \mathbf{F} \equiv F$
3. $p \lor p \equiv p$ — Luật lũy đẳng
   $p \land p \equiv p$
4. $\neg(\neg p) \equiv p$ — Luật phủ định kép
5. $p \lor q \equiv q \lor p$ — Luật giao hoán
   $p \land q \equiv q \land p$
6. $(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$ — Luật kết hợp
   $(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$
7. $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$ — Luật phân phối
   $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

1.2 Sự tương đương giữa các mệnh đề (tt)

8. $\neg(p \land q) \equiv (\neg p \lor \neg q)$ Luật De Morgan
   $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p \land \neg q)$

9. $p \lor \neg p \equiv T$ Luật phủ định
   $p \land \neg p \equiv F$

10. $p \lor (p \land q) \equiv p$ Luật hút thu (hấp thụ)
    $p \land (p \lor q) \equiv p$

11. $p \rightarrow q \equiv \neg p \lor q$
    $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

12. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$
    $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$

1.2 Sự tương đương giữa các mệnh đề (tt)

Bài tập

1.3 Vị từ và lượng từ

- Xét biểu thức: "x > 5"

Câu "x lớn hơn 5" có hai bộ phận

x: biến (chủ ngữ)

P: "lớn hơn 5" là **hàm mệnh đề hay vị từ**

P(x) là câu "x lớn hơn 5" và là *giá trị* của hàm mệnh đề P tại x. Khi *x nhận giá trị cụ thể* thì P(x) trở thành **mệnh đề và có một *giá trị* chân lý**.

Ví dụ: P(3): "3 > 5"

P(6): "6 > 5" là các mệnh đề.

Câu có nhiều biến x, y, … (thuộc tập *A*, B, …) có thể được kí hiệu: P(x,y,…).

Câu có dạng P(x,y,…) là *giá trị* chân lý của hàm mệnh đề P tại (x,y,…), P được gọi là **vị từ**.

1.3 Vị từ và lượng từ (tt)

- **Lượng từ hóa** là việc biến các hàm mệnh đề thành các mệnh đề.
- Sự liên hệ giữa vị từ và lượng từ được gọi là **phép tính vị từ**.
- Có 2 loại lượng từ hóa: lượng từ hóa phổ quát và lượng từ hóa tồn tại.
- **Lượng từ hóa phổ quát** (với mọi) của P(x) là mệnh đề: "P(x) đúng, với mọi giá trị của x trong không gian"

Kí hiệu: $\forall x\, P(x)$ (với mọi x P(x))

Không gian: là miền cụ thể mà x nhận giá trị trong đó.

- **Lượng từ hóa tồn tại** của P(x) là mệnh đề: "Tồn tại giá trị của x trong không gian để P(x) đúng"

Kí hiệu: $\exists x\, P(x)$ (tồn tại x P(x))

1.3 Vị từ và lượng từ (tt)

Nếu các phần tử của không gian có thể liệt kê ra, ví dụ là $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) thì

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge (Px_n)$$

$$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee (Px_n)$$

Bảng: các lượng từ

Mệnh đề	Khi nào đúng?	Khi nào sai?
$\forall x P(x)$	P(x) đúng với mọi x	Có một giá trị của x để P(x) sai
$\exists x P(x)$	Có một giá trị của x để P(x) đúng	P(x) sai với mọi x

1.3 Vị từ và lượng từ (tt)

Bảng: phủ định các lượng từ

Phủ định	Mệnh đề tương đương	Khi nào phủ định là đúng?	Khi nào sai?
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Có một x để P(x) sai	P(x) đúng với mọi x
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	P(x) sai với mọi x	Có một x để P(x) đúng

1.3 Vị từ và lượng từ (tt)

- Hãy dịch các câu sau thành các biểu thức logic:

- Mọi sinh viên trong lớp này đều đã học môn Đại số tuyến tính.
- Một sinh viên nào đó trong lớp này đã đến Thái Lan

1.3 Vị từ và lượng từ (tt)

Bảng: các lượng từ 2 biến

Mệnh đề	Khi nào đúng?	Khi nào sai?	Phủ định
$\forall x\forall yP(x,y)$ $\forall y\forall xP(x,y)$	P(x,y) đúng với mọi cặp x,y	Có một cặp x,y để P(x,y) sai	$\exists x\exists y\neg P(x,y)$ $\exists y\exists x\neg P(x,y)$
$\forall x\exists yP(x,y)$	Với mọi x, có một y để P(x,y) đúng	Có một x để P(x,y) sai với mọi y	$\exists x\forall y\neg P(x,y)$
$\exists x\forall yP(x,y)$	Có một x để P(x,y) đúng với mọi y	Với mọi x, có một y để P(x,y) sai	$\forall x\exists y\neg P(x,y)$
$\exists x\exists yP(x,y)$ $\exists y\exists xP(x,y)$	Có một cặp x,y để P(x,y) đúng	P(x,y) sai với mọi cặp x,y	$\forall x\forall y\neg P(x,y)$ $\forall y\forall x\neg P(x,y)$

1.3 Vị từ và lượng từ (tt)

Ví dụ: Không gian của x và y là tập tất cả các số tự nhiên, P(x,y) là câu "x ≤ y". Xác định giá trị chân lý và lập mđ phủ định của các mệnh đề sau

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

$$\exists x \forall y P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y)$$

1.4 Các phương pháp chứng minh
1.4.1 Các quy tắc suy diễn (rule of inference)

trang 55

Tôi là sinh viên.

∴ Tôi là sinh viên hoặc tôi là khách tham quan.

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

Hằng đúng:

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

Quy tắc cộng

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Tôi là sinh viên và tôi là một cầu thủ bóng đá.

∴ Tôi là sinh viên.

$$\begin{array}{l} \quad\ \ p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

Hằng đúng:

$(p \wedge q) \rightarrow p$

Quy tắc rút gọn

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Tôi là sinh viên.
Tôi là một cầu thủ bóng đá.

∴ Tôi là sinh viên và tôi là một cầu thủ bóng đá.

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore\ p \land q \end{array}$$

Hằng đúng:

$$((p) \land (q)) \to p \land q$$

Quy tắc kết hợp

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Tôi có điểm trung bình là 9,0.

Nếu tôi có điểm trung bình là 9,0 thì tôi là sinh viên giỏi.

$\therefore$ Tôi là sinh viên giỏi

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Hằng đúng:

$$(p \land (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

Modus ponens
(luật tách rời)

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Nếu nguồn cung cấp năng lượng biến mất thì ánh sáng không còn.

Ánh sáng vẫn còn.

∴ Nguồn cung cấp năng lượng không biến mất

$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Hằng đúng:

$$(\neg q \land (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

Modus tollens

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Nếu tôi có điểm trung bình là 9,0 thì tôi là sinh viên giỏi.

Nếu tôi là sinh viên giỏi thì tôi được nhận học bổng.

∴ Nếu tôi có điểm trung bình là 9,0 thì tôi được nhận học bổng

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \rightarrow r \end{array}$$

Hằng đúng:

$$((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Tam đoạn luận giả định

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Tôi là sinh viên hoặc tôi là một cầu thủ bóng đá.
Tôi không là một cầu thủ bóng đá.

∴ Tôi là sinh viên.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

Hằng đúng:

$$((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$$

Tam đoạn luận tuyển

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Tôi học Toán rời rạc hoặc tôi học Xác suất thống kê.
Tôi không học Toán rời rạc hoặc tôi học Giải tích 2.

∴ Tôi học Xác suất thống kê hoặc tôi học Giải tích 2.

$$\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \lor r \\ \hline \therefore q \lor r \end{array}$$

Hằng đúng:

$$((p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \to (q \lor r)$$

Quy tắc phân giải

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

- Kiểm tra xem các suy luận sau có đúng hay không?

Nếu An được lên chức và làm việc nhiều thì An sẽ được tăng lương.

Nếu An được tăng lương thì An sẽ mua xe mới

Mà An không mua xe mới

Vậy An không được lên chức hay An không làm việc nhiều

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

- Nếu ca sĩ H không biểu diễn hay số vé bán ra ít hơn 100 vé thì buổi biểu diễn bị hủy bỏ và ông bầu rất buồn.
- Nếu buổi biểu diễn bị hủy bỏ thì phải trả tiền vé lại cho người xem.
- Nhưng tiền vé đã không được trả lại cho người xem.
- Vậy ca sĩ H đã biểu diễn.

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Nếu Bình đi làm về muộn thì Lam sẽ rất giận.

Nếu An thường xuyên đi chơi thì Nguyệt sẽ rất giận.

Nếu Lam hay Nguyệt giận thì Hà - bạn họ - sẽ nhận được lời than phiền.

Mà Hà đã không nhận được lời than phiền

Vậy Bình đi làm về sớm và An ít đi chơi.

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

Nếu Minh muốn dự thi sáng thứ 3 thì Minh phải dậy sớm

Nếu Minh đi nghe nhạc tối thứ 2 thì Minh sẽ về trễ

Nếu về trễ và thức dậy sớm thì Minh phải đi thi mà chỉ ngủ dưới 7 giờ.

Nhưng Minh không thể dự thi nếu chỉ ngủ dưới 7 giờ

Do đó hoặc Minh không đi nghe nhạc tối thứ 2 hoặc Minh phải bỏ thi sáng thứ 3.

1.4.1 Các quy tắc suy diễn (tt)

$$\frac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(c)} \text{ - c tùy ý}$$

Cụ thể hóa phổ quát

$$\frac{P(c) \text{ - c tùy ý}}{\therefore \forall x\, P(x)}$$

Tổng quát hoá phổ quát

$$\frac{\exists x\, P(x)}{\therefore P(c)} \text{ – c nào đó}$$

Cụ thể hóa tồn tại

$$\frac{P(c) \text{ – c nào đó}}{\therefore \exists x\, P(x)}$$

Tổng quát hóa tồn tại

Hãy cho các ví dụ.

1.4.2 Phương pháp chứng minh

Trang 62

Chứng minh mệnh đề $p \rightarrow q$ bằng phương pháp chứng minh **trực tiếp** (direct Proof):

Chứng tỏ rằng p đúng thì q cũng đúng

Ví dụ:

Chứng minh nếu n là một số nguyên chẵn thì n^2 cũng là số chẵn.

n chẵn nếu tồn tại số nguyên k sao cho : n = 2k

n lẻ nếu tồn tại số nguyên k sao cho: n = 2k + 1

1.4.2 Phương pháp chứng minh

Chứng minh mệnh đề $p \rightarrow q$ bằng phương pháp **gián tiếp** (indirect Proof):

Chứng tỏ rằng $\neg q \rightarrow \neg p$ là mệnh đề đúng.

Ví dụ:

Cho n là số nguyên. Chứng minh rằng nếu 3n+2 là số chẵn thì n là số chẵn bằng phương pháp **gián tiếp**.

1.4.2 Phương pháp chứng minh

Chứng minh mệnh đề $p \rightarrow q$ bằng cách

Chứng minh p sai => **chứng minh rỗng** (vacuous proof)

Chứng minh q đúng => chứng minh tầm thường (trivial proof)

1.4.2 Phương pháp chứng minh

Chứng minh phản chứng (proof by contradiction): để chứng minh ***p***, ta giả sử $\neg$ p và tìm ra sự mâu thuẫn. Dựa vào hằng đúng

$$(\neg p \rightarrow F) \rightarrow p$$

Ví dụ:

Cho n là số nguyên. Chứng minh phản chứng rằng nếu 3n+2 là số chẵn thì n là số chẵn.

1.4.2 Phương pháp chứng minh

- **Tương đương** (proof by equivalence): để chứng minh $p \leftrightarrow q$, ta chứng minh
  $p \rightarrow q$ và $q \rightarrow p$

- **Từng trường hợp** (proof by cases): để chứng minh $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$, ta chứng minh:
  $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$

Làm các bài tập: từ trang 73 đến 76

1.4.3 Định lý và lượng từ

Chứng minh tồn tại, tồn tại duy nhất,...

VD:

1) CMR tồn tại hai số vô tỉ khác nhau có tổng và tích là các số hữu tỉ.
2) CMR phương trình $2^x + x = 6$ có duy nhất một nghiệm.

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ

- Một tập hợp là một tập thể các đối tượng không được sắp thứ tự.

Ví dụ:

$\{1, 6, 7, 2, 9\} = \{6, 7, 1, 2, 9\}$

$\{a, d, e, 1, 2, 3\} = \{a, a, d, d, e, e, 1, 2, 3\}$

Tập rỗng là một tập không chứa đối tượng nào $\varnothing = \{\}$

Chú ý: $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Các đối tượng trong một tập hợp cũng được gọi là các phần tử của tập hợp đó (một tập hợp được nói là chứa các phần tử của nó).

$x \in S$: x là phần tử của S

$x \notin S$: x không là phần tử của S

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

- Hai tập hợp được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng các phần tử. Kí hiệu $A = B$

$$A = B \equiv \forall x\, ((x \in A) \leftrightarrow (x \in B))$$

- Tập A được gọi là tập con của B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B. Kí hiệu $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \equiv \forall x\, ((x \in A) \rightarrow (x \in B))$$

- Để chứng minh $A = B$, ta thường chứng minh $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$

Định lý: Đối với tập S bất kỳ, $\varnothing \subseteq S$ và $S \subseteq S$.

- Tập hợp vũ trụ là tập hợp chứa tất cả các phần tử đang xét. Kí hiệu **U**.

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Tập hợp lũy thừa (*Power set*) của tập hợp S là tập hợp tất cả các tập con của S. Kí hiệu P(S)

$$P(S) = \{ X \mid X \subseteq S \}$$

Nếu $S = \{a\}$, $P(S) = ?$ $\{\varnothing, \{a\}\}$

Nếu $S = \{a,b\}$, $P(S) = ?$ $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Nếu $S = \varnothing$, $P(S) = ?$ $\{\varnothing\}$

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

- Dãy sắp thứ tự là một tập hợp sắp thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \in \mathbf{Z}^+$ có:
  - a_1: *là phần tử thứ nhất*
  - a_2: *là phần tử thứ 2*
  - …
- *Có quan tâm đến trật tự và chiều dài:*

$$(1, 2) \neq (2, 1) \neq (2, 1, 1).$$

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Tích Đề các (***Descartesian Product***) của hai tập hợp A và B là:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ví dụ: $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}$$

$$B \times A = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$$

Không giao hoán!

Tổng quát:

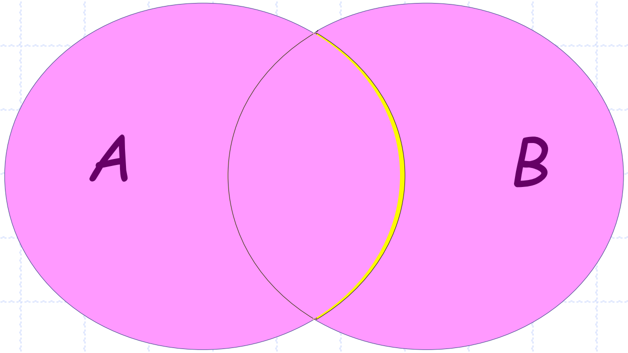
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Hợp (*union*) của 2 tập hợp A và B là:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$



Ví dụ:

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,6\}$

$A \cup B = \{1,2,3,6\}$

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

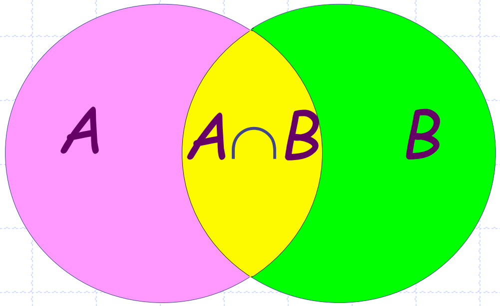
Giao (*intersection*) của 2 tập hợp *A* và B là:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Ví dụ:

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,6\}$

$A \cap B = \{1\}$



Hai tập hợp *A* và B được gọi là **rời nhau** (*disjoint*) nếu và chỉ nếu:

$$A \cap B = \varnothing$$

Ví dụ:

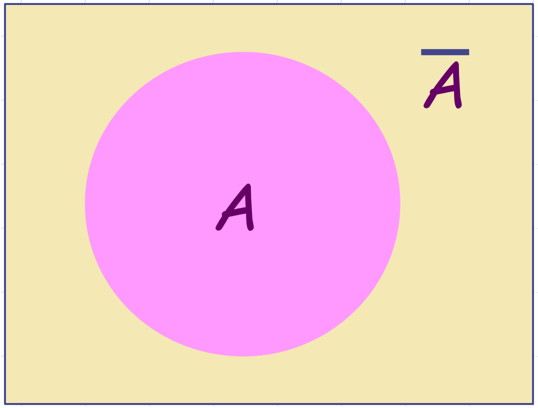
$A = \{1,2,3\}$, $B = \{9,10\}$, $C = \{2, 9\}$

A và B là 2 tập rời nhau, *A* và *C* thì không.

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Cho **U** là tập vũ trụ. Phần bù (*complement*) của tập hợp *A* đối với **U** là: $\overline{A} = \{ x \mid x \notin A\}$

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$



Ví dụ:

U = N là tập các số tự nhiên
$A = \{x \in N \mid x \text{ lẻ }\}$
$\overline{A} = \{x \in N \mid x \text{ chẵn}\}$

$\overline{\varnothing} = U$

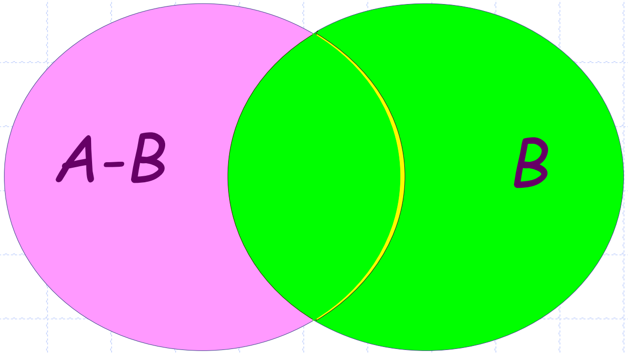
$\overline{U} = \varnothing$

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

- Hiệu (*set difference*) của hai tập hợp *A* và B là:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

- $$A - B = A \cap \overline{B}$$



Ví dụ:

$A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,7,9\}$

$A - B = \{2, 5\}$

$B - A = \{7,9\}$

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

- Các hằng đẳng thức tập hợp:

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \mathbf{U} = A$	Luật đồng nhất
$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$; $A \cap \varnothing = \varnothing$	Luật trội
$A \cup A = A$; $A \cap A = A$	Luật lũy đẳng
$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$	Luật bù trừ
$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$	Luật giao hoán
$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$; $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$	Luật kết hợp

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Luật phân phối
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Luật De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$	Luật hút thu
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$	Luật bù
$A - B = A \cap \overline{B}$	

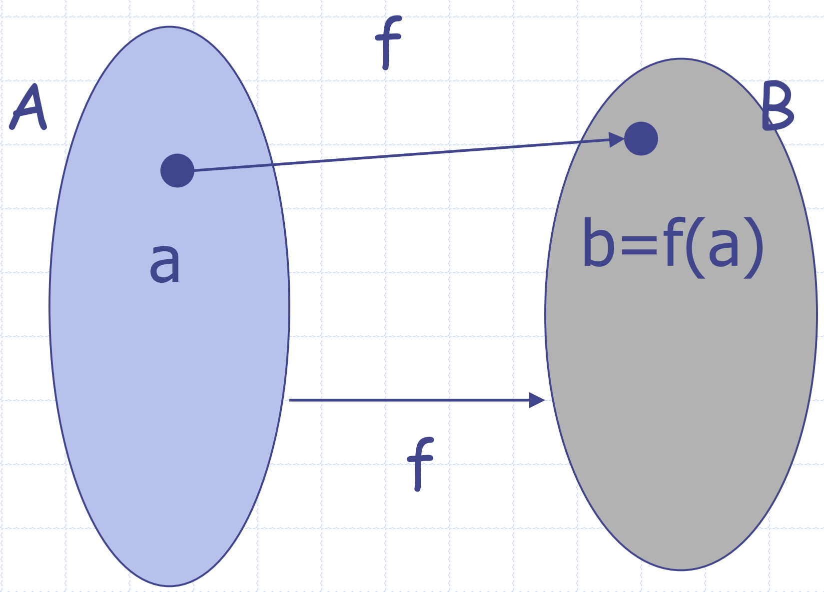
1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

- Bảng tính thuộc
- Biểu diễn tập hợp trên máy tính

(xem giáo trình)

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

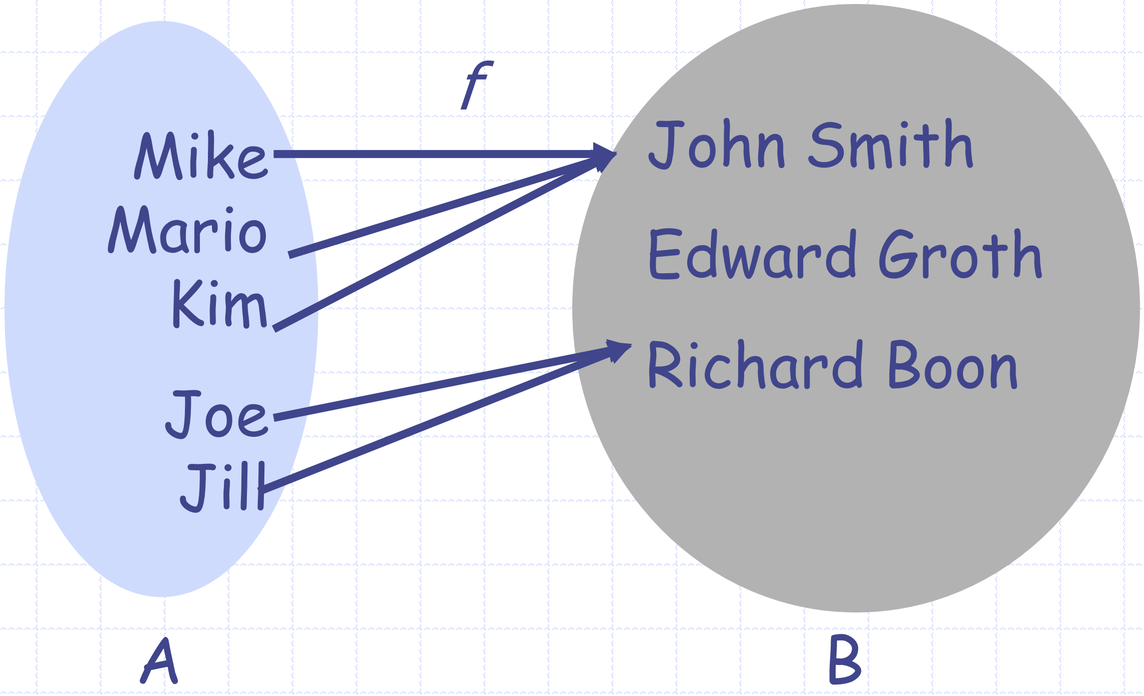
- Cho 2 tập khác rỗng *A*, B. Một hàm (ánh xạ) từ *A* đến B là sự gán chính xác một phần tử của B cho mỗi phần tử của *A*. Ta viết f(a) = b nếu b là phần tử duy nhất của B được gán bởi hàm f cho phần tử a của *A*.
- Nếu f là hàm từ *A* đến B, ta viết f: *A* → B.



1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

A = {Mike, Mario, Kim, Joe, Jill}
B = {John Smith, Edward Groth, Jim Farrow}

Đặt $f: A \to B$ là hàm với $f(a)$ là cha của a.



1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Cho hàm f: $A \to B$

- *A* là miền xác định (*domain*) của f.
- ~~B là miền giá trị (*codomain*) của f~~.
- Nếu f(a)=b thì b là ảnh (*image*) của a qua f.
- a là một nghịch ảnh (*pre-image*) của b qua f.
  - Tổng quát, b có thể có nhiều hơn một nghịch ảnh.
- Nếu f: $A \to B$ thì ta cũng nói rằng f là **ánh xạ** từ *A* đến B.

Cho f_1: $A \to \mathbb{R}$, f_2: $A \to \mathbb{R}$. khi đó, $f_1 + f_2$ và $f_1 f_2$ cũng là hàm từ *A* đến $\mathbb{R}$ và:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x); \ (f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

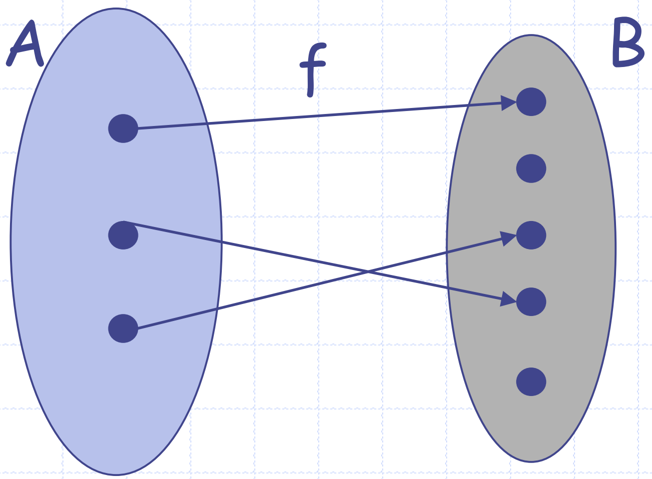
1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Cho f: $A \rightarrow B$, $S \subseteq A$. Ảnh của S qua f là tập con của B gồm ảnh các phần tử thuộc S: $f(S) = \{ f(x) \mid x \in S\}$

$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A\}$ là tập giá trị của f (là ảnh của tập xác định A qua f)

Một hàm f : $A \rightarrow B$ được gọi là đơn ánh (*injective*) nếu và chỉ nếu $f(x) = f(y)$ kéo theo $x = y$, $\forall x,y \in A$

$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$ hay $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$



Mỗi $b \in B$ có tối đa 1 nghịch ảnh.

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

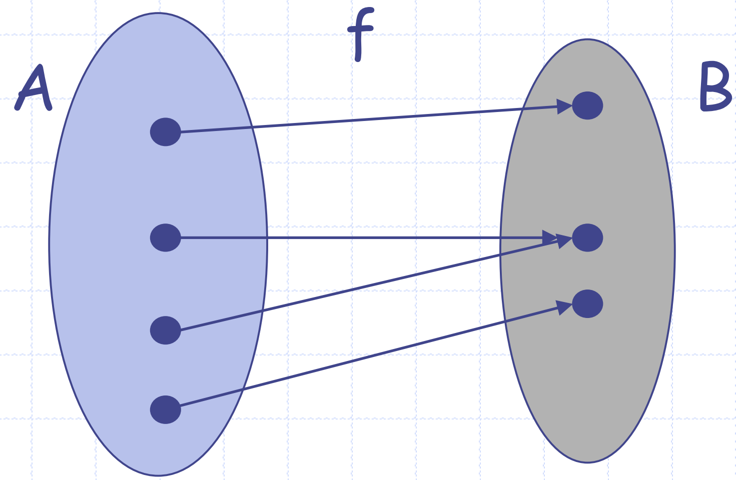
- Cho f: $A \to B$, A, $B \subseteq \mathbb{R}$.
  f là **thực sự tăng** nếu $\forall x \forall y (x < y \to f(x) < f(y))$
  và là **thực sự giảm** nếu $\forall x \forall y (x < y \to f(x) > f(y))$

- f đơn điệu (f tăng hoặc f giảm) thì f đơn ánh.

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

- Hàm *f*: *A* → B được gọi là **toàn ánh** (*surjective*) nếu và chỉ nếu với mọi phần tử b ∈ B tồn tại một phần tử a ∈ *A* sao cho f(a) = b

  $\forall y \exists x(f(x) = y)$ với $y \in B, x \in A$

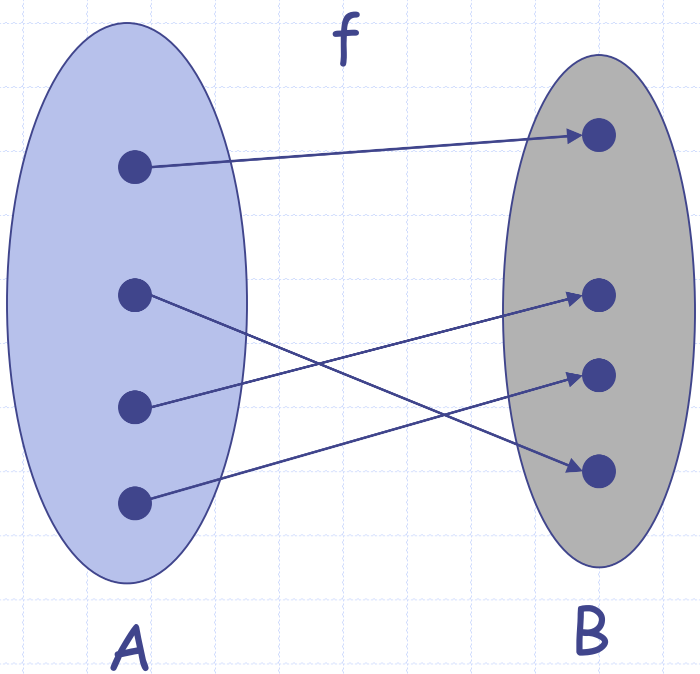


Mọi b ∈ B có ít nhất một nghịch ảnh

f(*A*) = B

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

- Hàm f: $A \to B$ là **song ánh** (*bijective*) nếu và chỉ nếu nó vừa đơn ánh vừa toàn ánh.



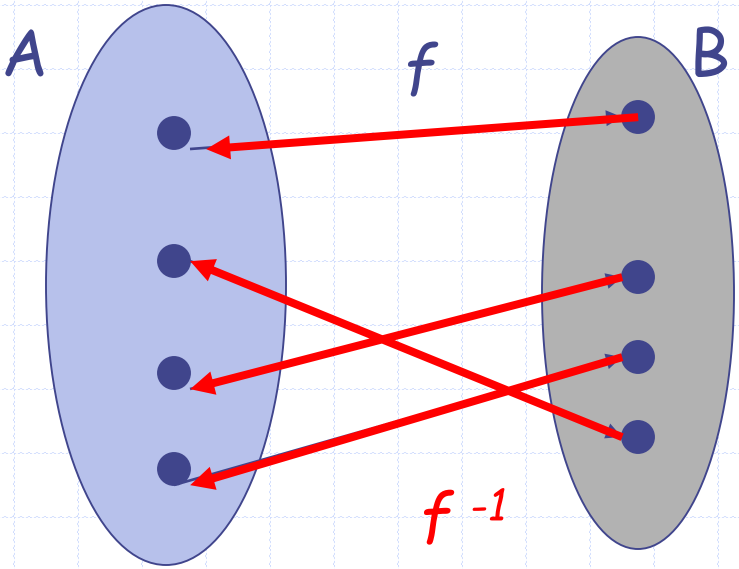
Mọi b ∈ B có đúng một nghịch ảnh

Lực lượng của A và B bằng nhau.

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

- Cho f: $A \to B$ là một song ánh, hàm ngược (*inverse*) của f là một hàm gán cho mỗi phần tử b thuộc B một phần tử duy nhất a thuộc A sao cho f(a) = b. Kí hiệu f^{-1}

f^{-1}: $B \to A$, $b \in B$: $f^{-1}(b) = a$ khi và chỉ khi $f(a) = b$

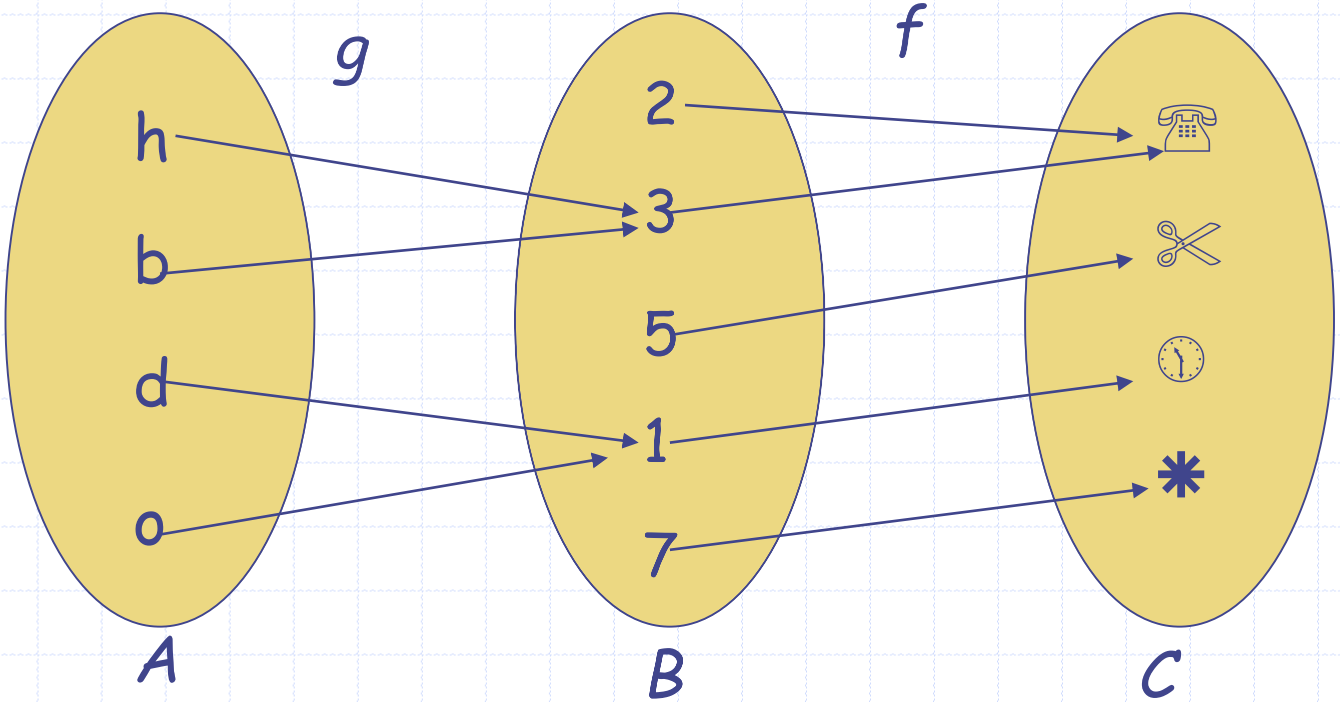


Hàm song ánh còn được gọi là hàm khả nghịch

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Cho các hàm $g : A \to B$ và $f : B \to C$. Hợp thành (*composition*) của các hàm f và g, $f \circ g: A \to C$ được định nghĩa

$$f \circ g\,(a) = f\,(\,g\,(a)\,)$$



$f \circ g\,(h)$?

1.5 Tập hợp, phép toán trên tập hợp, ánh xạ (tt)

Một số hàm quan trọng

Xem giáo trình

1.6 Khái niệm về thuật toán(Algorithms)

SV tự đọc them tr 118

- Thuật toán là tập hợp hữu hạn các lệnh chính xác để thực hiện tính toán hoặc để giải một bài toán.

Tính chất

- Đầu vào (input)
- Đầu ra (ouput)
- Tính xác định (definiteness)
- Tính đúng đắn (correctness)
- Tính hữu hạn (finiteness)
- Tính hiệu quả (effectiveness)
- Tính tổng quát (generality)