Chương 4:
Lý thuyết đồ thị

Thời lượng: 13 tiết

Nội dung
(trang 535)

1. Khái niệm cơ bản về đồ thị
2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị
3. Tính liên thông của đồ thị
4. Đường đi Euler và chu trình Hamilton
5. Các bài toán đường đi ngắn nhất
6. Duyệt cây

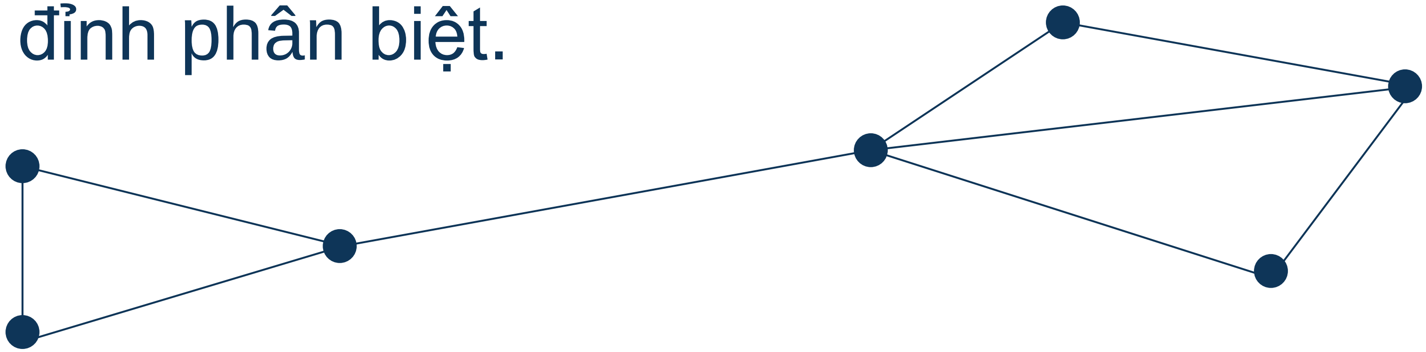
1. Khái niệm cơ bản

Đồ thị G là một cấu trúc rời rạc gồm tập các đỉnh V và tập các cạnh E nối các đỉnh đó. Khi đó ta viết

G = (V,E) hay G(V,E)

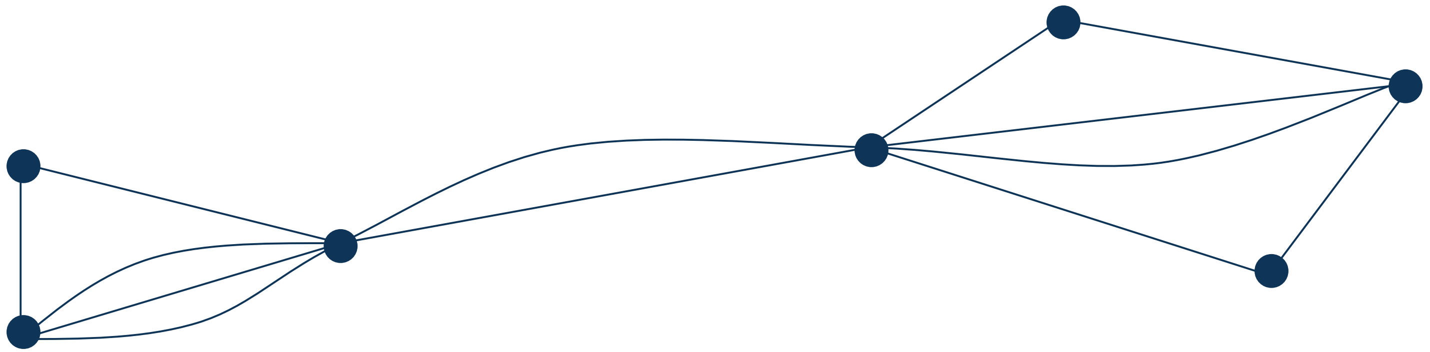
Người ta chia đồ thị thành các loại sau

Đồ thị đơn (đơn đồ thị) là đồ thị mà giữa hai đỉnh chỉ có tối đa một cạnh và cạnh chỉ nối hai đỉnh phân biệt.



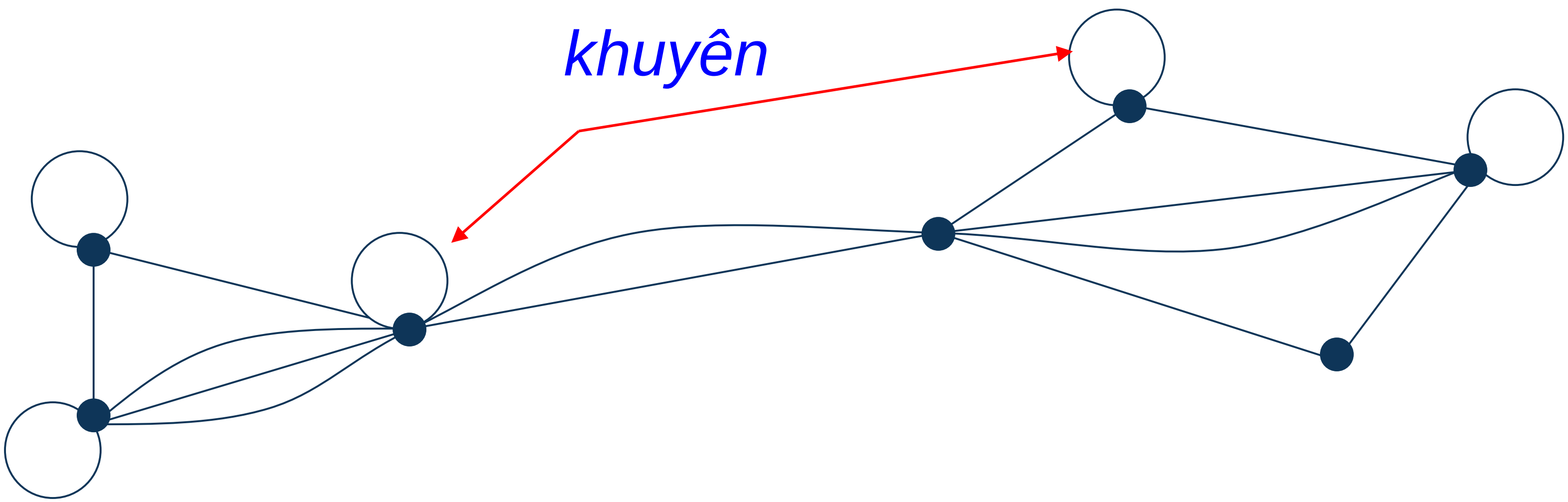
1. Khái niệm cơ bản (tt)

Đa đồ thị là đồ thị mà giữa hai đỉnh có thể có nhiều hơn một cạnh và cạnh chỉ nối hai đỉnh phân biệt.



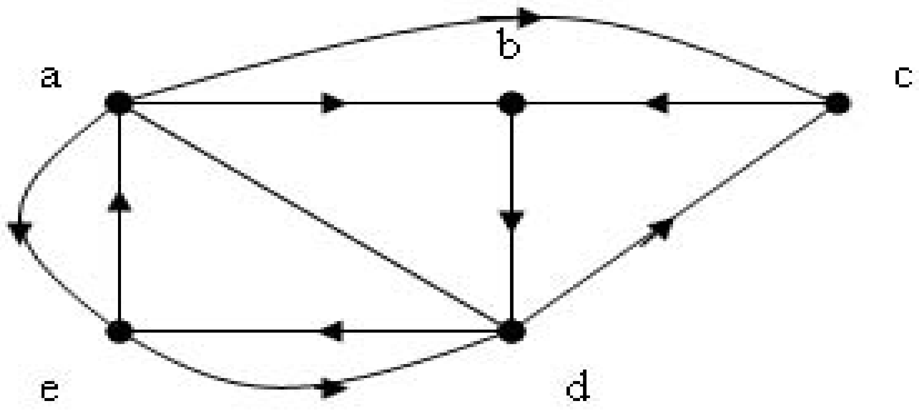
1. Khái niệm cơ bản (tt)

Giả đồ thị: Một giả đồ thị G(V,E) gồm tập các đỉnh V, tập các cạnh E, trong đó hai đỉnh có thể được nối bởi nhiều cạnh, một đỉnh có thể được nối với chính nó.



1. Khái niệm cơ bản (tt)

Đồ thị có hướng *G* là một cặp có thứ tự *G*:=(*V*, *A*), trong đó
V: tập các **đỉnh** hoặc **nút**,
A: tập các cặp có thứ tự chứa các đỉnh, được gọi là các **cạnh có hướng** hoặc **cung**. Một cạnh *e* = (*x*, *y*) được coi là có hướng **từ** *x* **tới** *y*; *x* được gọi là **điểm đầu/gốc** và *y* được gọi là **điểm cuối/ngọn** của cạnh.
Đồ thị **vô hướng nền** của G là đồ thị mà ta không quan tâm đến hướng của các cạnh.



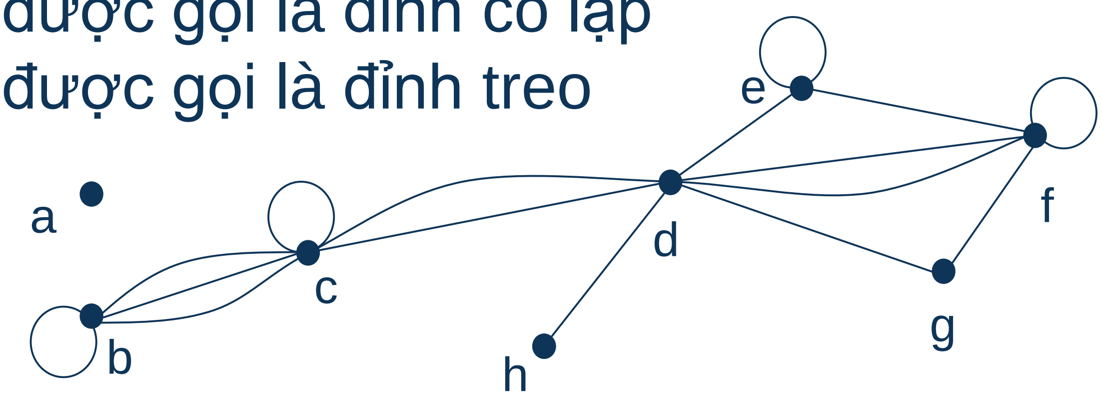
1. Khái niệm cơ bản (tt)

Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là **liền kề** trong G khi có một cạnh e của G nối u và v. Khi đó, cạnh e được gọi là **liên thuộc** với các đỉnh u và v, các đỉnh u và v được gọi là **điểm đầu mút** của cạnh e.

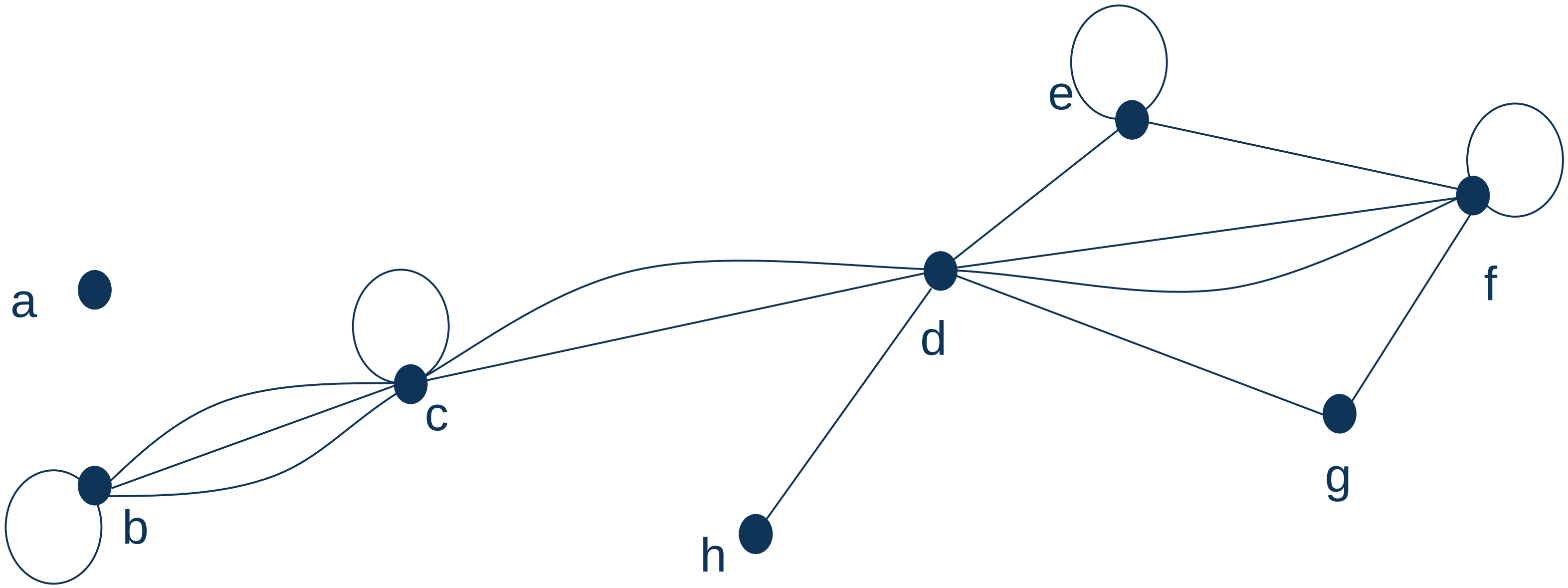
Bậc của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số lượng cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của đỉnh đó.

Kí hiệu: bậc của đỉnh v là deg(v).

- Đỉnh có bậc 0 được gọi là đỉnh cô lập
- Đỉnh có bậc 1 được gọi là đỉnh treo



1. Khái niệm cơ bản (tt)



deg(b) = 5 deg(g) = 2 deg(d) = ?

Đỉnh a là đỉnh cô lập, đỉnh h là đỉnh treo

1. Khái niệm cơ bản (tt)

Định lý Bắt tay: Cho G(V,E) là *đồ thị vô hướng* có **n cạnh**. Khi đó tổng bậc của các đỉnh gấp hai lần số cạnh của G

$$\boxed{\sum_{v \in V} \deg(v) = 2n}$$

Ví dụ: Có bao nhiêu cạnh tồn tại trong một đồ thị có 10 đỉnh, và mỗi đỉnh đều có bậc 6?

Gọi n là số cạnh. Theo **định lý bắt tay** ta có:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2.n \text{ hay } 10.6 = 2.\text{ n}$$

Vậy n = 30(cạnh).

In Exercises 1–3 find the number of vertices, the number of edges, and the degree of each vertex in the given undirected graph. Identify all isolated and pendant vertices.

2/551

Đồ thị G(V, E); $V = \{a, b, c, d, e\}$

Số đỉnh: $|V| = 5$

Số cạnh: $|E| = 13$ (có 2 khuyên)

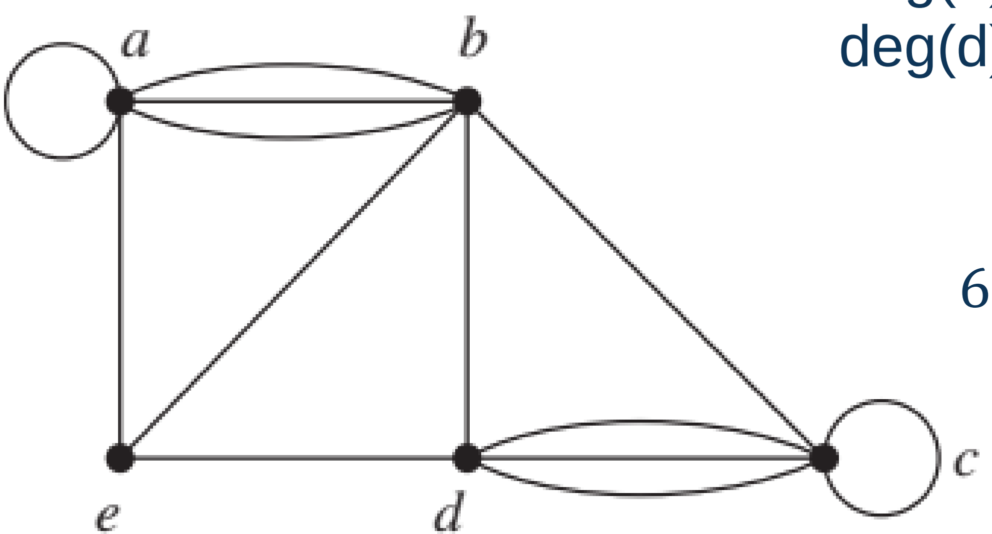
deg(a) = 6, deg(b) = 6, deg(c) = 6

deg(d) = 5, deg(e) = 3

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

$$6 + 6 + 6 + 5 + 3 = 2 \times 13$$

2.



1. Khái niệm cơ bản (tt)

Cho G(V,E) là đồ thị có hướng. Nếu cạnh e nối từ đỉnh u đến đỉnh v, thì **u** được gọi là **nối tới v** và **v** được gọi là **được nối từ u**. Đỉnh u là đỉnh đầu, v là đỉnh cuối của cạnh (u,v). Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên trùng nhau.

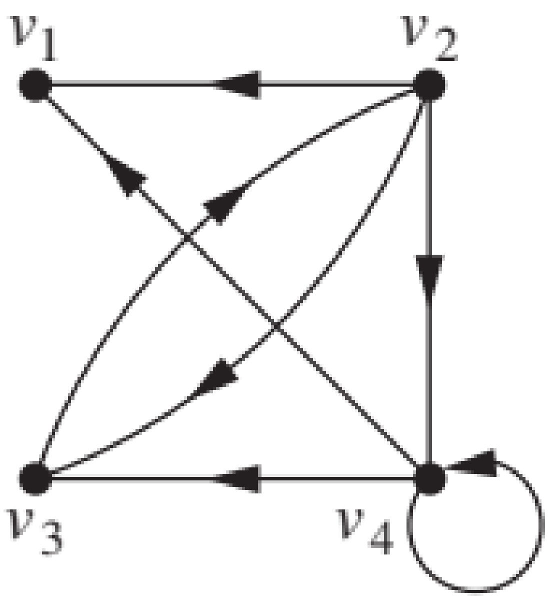
Trong một đồ thị có hướng, **bậc vào** của đỉnh **v**, ký hiệu $\mathbf{deg}^{-}(\boldsymbol{v})$, là số lượng các cạnh lấy v làm điểm cuối. **Bậc ra** của đỉnh **v**, ký hiệu $\deg^{+}(\boldsymbol{v})$, là số lượng các cạnh lấy v làm đỉnh đầu (khuyên tại một đỉnh sẽ đóng góp một đơn vị bậc vào và một đơn vị bậc ra).

Cho đồ thị có hướng G(V,E), có n cạnh. Khi đó:

$$\sum_{v\in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v\in V} \deg^{+}(v) = |E|$$

1. Khái niệm cơ bản (tt)

Ví dụ:



Bậc vào của đỉnh **v**, ký hiệu $\mathbf{deg}^{-}(\boldsymbol{v})$, là số lượng các cạnh lấy v làm điểm cuối.

Bậc ra của đỉnh **v**, ký hiệu $\deg^{+}(\boldsymbol{v})$, là số lượng các cạnh lấy v làm đỉnh đầu

$$\deg^{-}(v_4) = 2; \deg^{+}(v_4) = 3$$

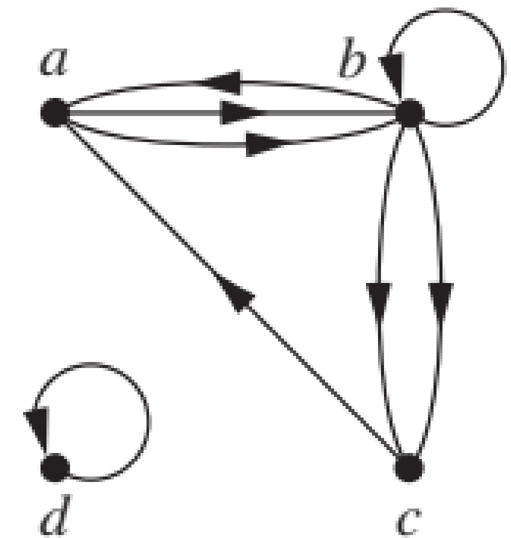
In Exercises 7–9 determine the number of vertices and edges and find the in-degree and out-degree of each vertex for the given directed multigraph.

8/551

Có 4 đỉnh, 8 cạnh (có 2 khuyên)

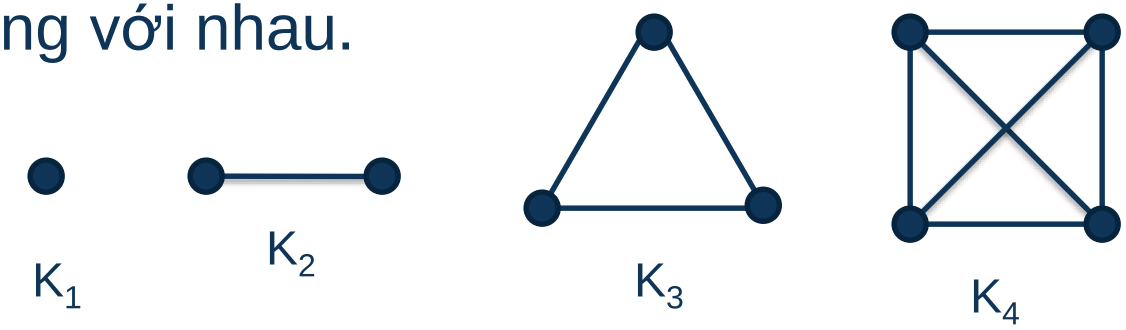
$$\deg^-(a) = 2, \deg^+(a) = 2$$
$$\deg^-(b) = 3, \deg^+(b) = 4$$
$$\deg^-(c) = 2, \deg^+(c) = 1$$
$$\deg^-(d) = 1, \deg^+(d) = 1$$
$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = 8 = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = 8$$
$$= số\ cạnh$$

8.



1. Khái niệm cơ bản (tt)

Đồ thị đầy đủ: đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu K_n, là một đồ thị đơn mà giữa mỗi cặp đỉnh phân biệt có đúng một cạnh nối chúng với nhau.



Đồ thị K_n có bao nhiêu cạnh?

Vì mỗi đỉnh phải được nối với đúng n – 1 đỉnh còn lại nên bậc của các đỉnh đều bằng nhau và bằng n – 1.

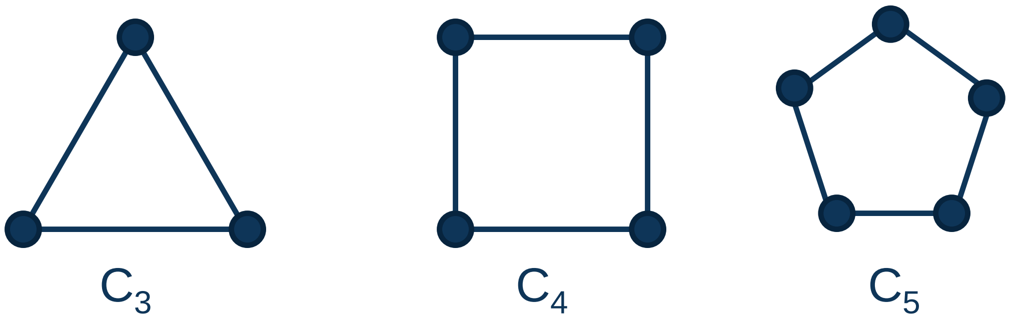
Theo định lý Bắt tay, ta có:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \; hay \; n(n-1) = 2 \times số\ cạnh$$

Vậy số cạnh của K_n là $n(n-1)/2$.

1. Khái niệm cơ bản (tt)

Đồ thị vòng: đồ thị vòng C_n, $n \geq 3$, là đồ thị gồm n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và các cạnh nối v_i với v_{i+1}, $v_{n+1} \equiv v_1$.

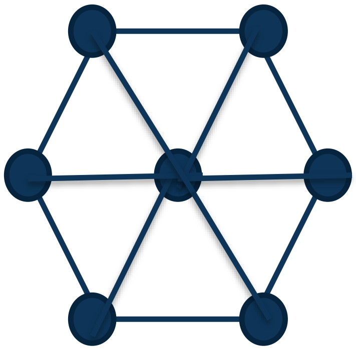


Chu trình vòng

Mỗi đỉnh có bậc 2, theo định lý bắt tay, ta có
n x 2 = 2 x *tổng số cạnh*.
Vậy tổng số cạnh của C_n là n.

1. Khái niệm cơ bản (tt)

Đồ thị bánh xe: Khi thêm vào vòng C_n một đỉnh và nối đỉnh này với n đỉnh trong C_n ta sẽ được đồ thị bánh xe W_n .

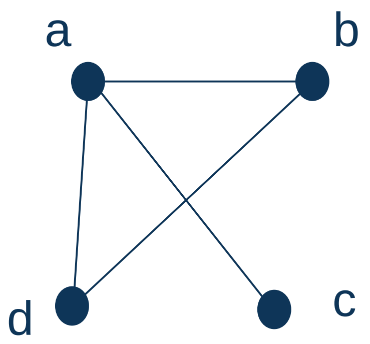


W_6

2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị

Giả sử G(V,E) là một đồ thị đơn với |V| = n. (G có n đỉnh)
Giả sử các đỉnh của G là $v_1, v_2, \dots, v_n$.
Ma trận liền kề A của G ứng với danh sách các đỉnh này là ma trận cấp n x n có phần tử hàng i cột j bằng 1 khi v_i và v_j kề nhau và bằng 0 khi chúng không được nối với nhau.

Ví dụ: Ma trận liền kề của đồ thị sau theo thứ tự các đỉnh a, b, c, d là:



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \deg(a) = \\ \deg(b) = \\ \deg(c) = \\ \deg(d) = \end{array}$$

2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị (tt)

Lưu ý

+ Ta cũng có đn tương tự cho đa đồ thị, giả đồ thị, đt có hướng (xem trang 555)

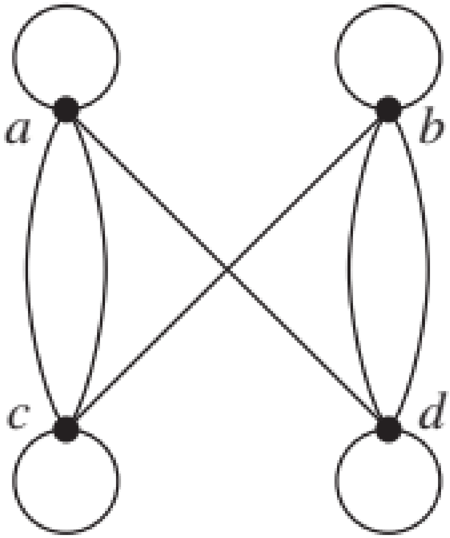
+ Ma trận liền kề của đồ thị vô hướng là đối xứng

+ Ma trận liền kề đối với mỗi đồ thị phụ thuộc vào thứ tự các đỉnh.

In Exercises 13–15 represent the given graph using an adjacency matrix.

15/560 (xem vd 5/555)

15.



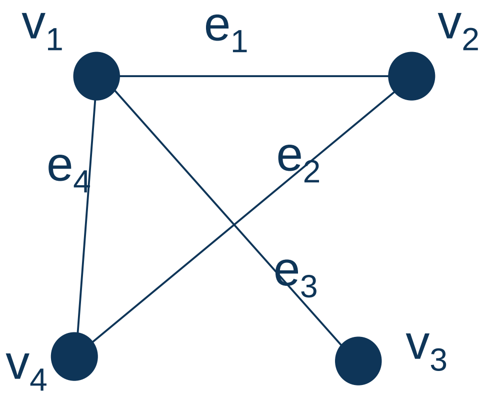
	a	b	c	d	Deg
a	1	0	2	1	5
b	0	1	1	2	5
c	2	1	1	0	5
d	1	2	0	1	5

2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị (tt)

Ma trận liên thuộc: Giả sử G(V,E) là một đồ thị vô hướng. Gọi v_1, v_2, …, v_n là các đỉnh và e_1, e_2, …, e_m là các cạnh của G. Khi đó **ma trận liên thuộc** theo thứ tự của V và E là ma trận cấp $n \times m$ trong đó: phần tử ở hàng i cột j bằng 1 nếu cạnh e_j liên thuộc với v_i và bằng 0 trong trường hợp e_j không liên thuộc với v_i .

2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị (tt)

Ví dụ: Ma trận liên thuộc của đồ thị sau là



$$\begin{array}{c|cccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
\hline
v_1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_4 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\deg(v_1) = \\
\deg(v_2) = \\
\deg(v_3) = \\
\deg(v_4) =
\end{array}$$

2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị (tt)

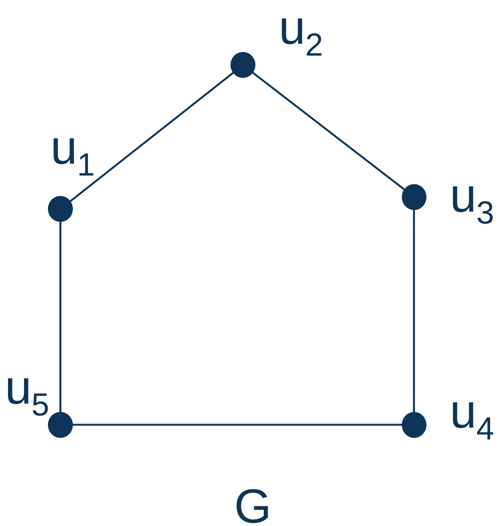
Các đồ thị đơn $G_1(V_1,E_1)$ và $G_2(V_2,E_2)$ là **đẳng cấu** nếu tồn tại một song ánh f từ V_1 đến V_2 sao cho a và b là các đỉnh liền kề trong G_1 nếu và chỉ nếu f(a) và f(b) là liền kề trong G_2 , $\forall$ a,b $\in V_1$.

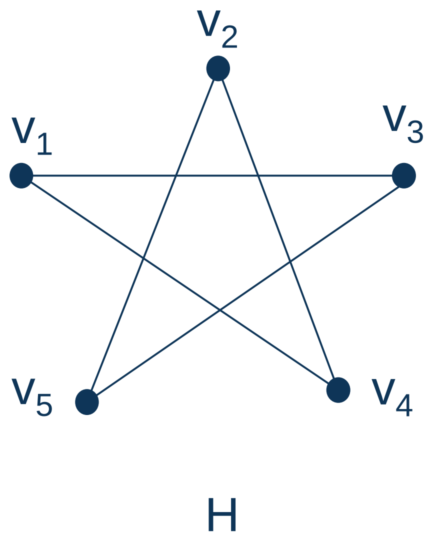
Ánh xạ f còn được gọi là **một đẳng cấu** giữa G_1 và G_2

Nói cách khác, khi hai đồ thị đơn đẳng cấu, sẽ tồn tại một phép tương ứng một - một (song ánh) giữa các đỉnh của hai đồ thị **bảo toàn quan hệ liền kề**.

2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị (tt)

Ví dụ: Chứng minh hai đồ thị sau là đẳng cấu:



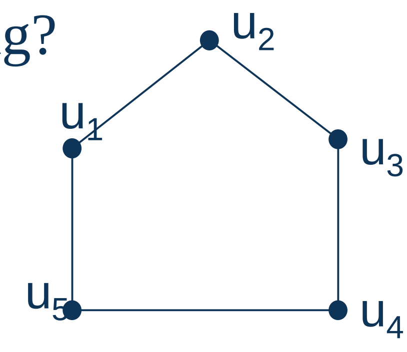


Hai đồ thị đơn đẳng cấu nếu tồn tại một phép tương ứng một - một (song ánh) giữa các đỉnh của hai đồ thị **bảo toàn quan hệ liền kề**

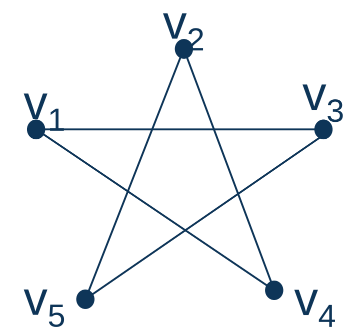
2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị (tt)

Xét song ánh sau: f : {u_1, u_2, u_3, u_4, u_5} → {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5} thỏa $f(u_1) = v_5$, $f(u_2) = v_2$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_1$, $f(u_5) = v_3$. Bây giờ ta xét xem f có bảo toàn quan hệ liền kề hay không?

Ta xét ma trận liền kề của G và ma trận liền kề của H *với các hàng và cột tương ứng là ảnh của các đỉnh của G qua f.*



G



H

$$A_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_H = \begin{array}{c} \\ v_5 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_1 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_5 & v_2 & v_4 & v_1 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ta thấy $A_G = A_H$
→ song ánh f bảo toàn quan hệ liền kề.
Do đó G và H là đẳng cấu.

2. Biểu diễn đồ thị và các phép đẳng cấu đồ thị (tt)

*** Các bất biến đối với phép đẳng cấu đồ thị:**

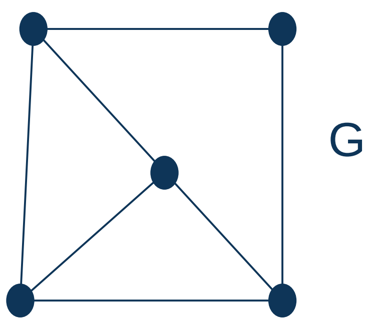
i) Các đồ thị đẳng cấu phải có cùng số đỉnh

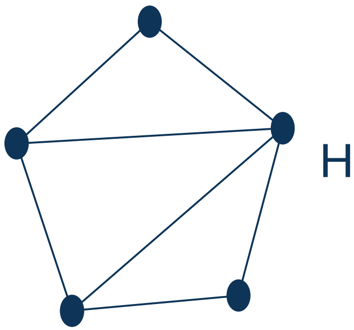
ii) Các đồ thị đẳng cấu phải có cùng số cạnh

iii) Bậc của các đỉnh trong đồ thị đẳng cấu là như nhau (nghĩa là một đỉnh v bậc k thì phải tương ứng với một đỉnh f(v) có bậc k).

iv) Các đồ thị đẳng cấu phải có các chu trình đơn có độ dài như nhau.

Ví dụ: Xét xem hai đồ thị sau có đẳng cấu hay không?





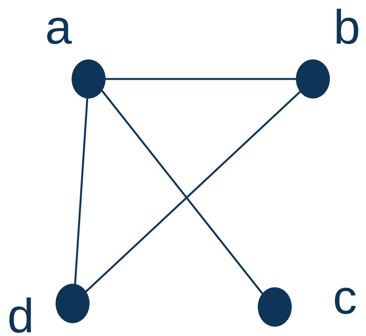
HD: Không đẳng cấu vì H có đỉnh bậc 4, còn G thì không

3. Tính liên thông của đồ thị

Đường đi độ dài n là một dãy các đỉnh $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, trong đó hai đỉnh liên tiếp trong dãy được nối với nhau bởi một cạnh (n+1 đỉnh, n cạnh).
Nếu x_0 trùng với x_n thì ta gọi đường đi này là một **chu trình**.

Đường đi hay chu trình gọi là *đơn* nếu nó không đi qua cùng một cạnh quá một lần.

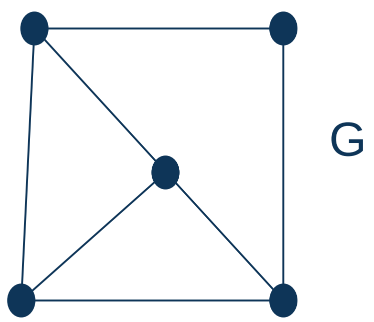
Ví dụ: tìm các đường đi từ c đến d trong đồ thị sau:

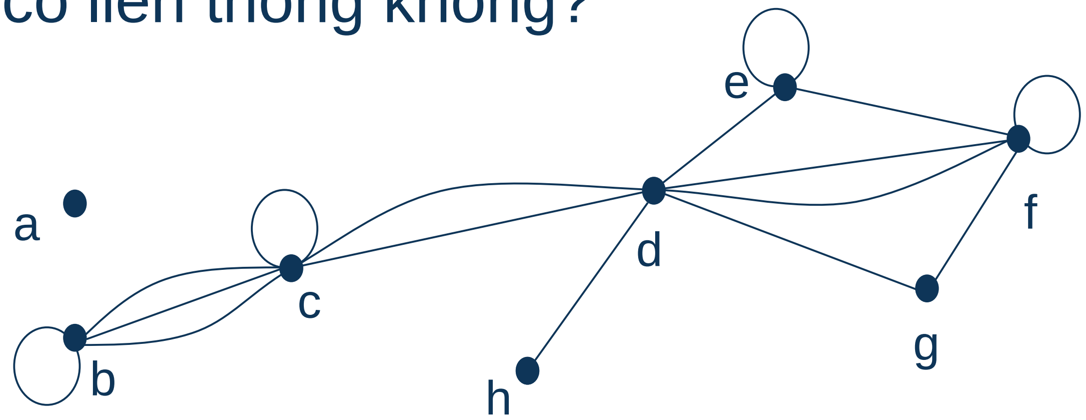


3. Tính liên thông của đồ thị (tt)

Một đồ thị vô hướng được gọi là **liên thông** nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

Ví dụ: các đồ thị sau có liên thông không?





Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn.

Một đồ thị không liên thông là hợp của những đồ thị con liên thông, và những đồ thị con liên thông đó được gọi là những ***thành phần liên thông*** *của đồ thị đã cho.*

3. Tính liên thông của đồ thị (tt)

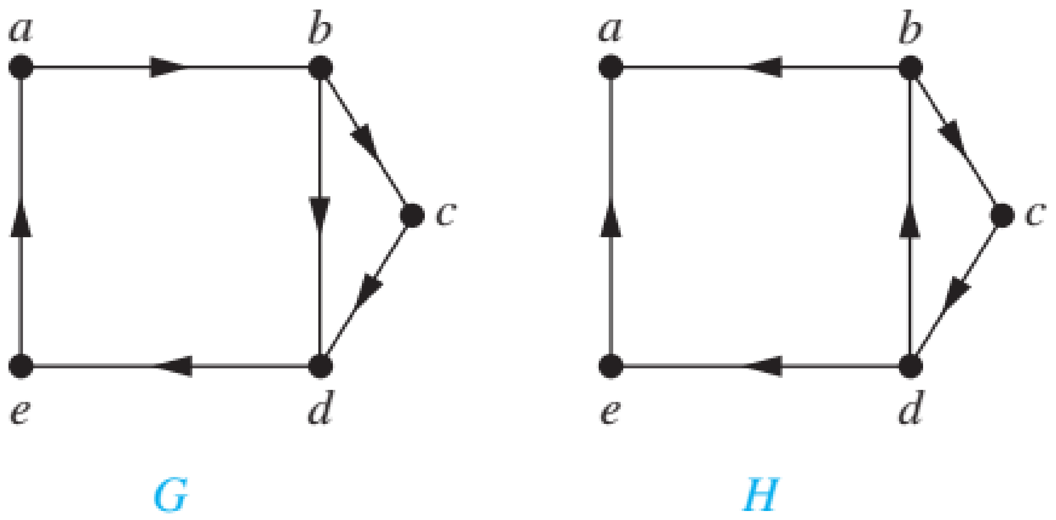
Một đồ thị có hướng được gọi là **liên thông mạnh** nếu có đường đi từ a tới b và từ b tới a với mọi đỉnh a và b của đồ thị.

Một đồ thị có hướng được gọi là **liên thông yếu** nếu có đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng nền (là đồ thị mà ta không quan tâm đến hướng của các cạnh) hay đồ thị vô hướng nền của nó là liên thông.

NX: liên thông mạnh → liên thông yếu

3. Tính liên thông của đồ thị (tt)

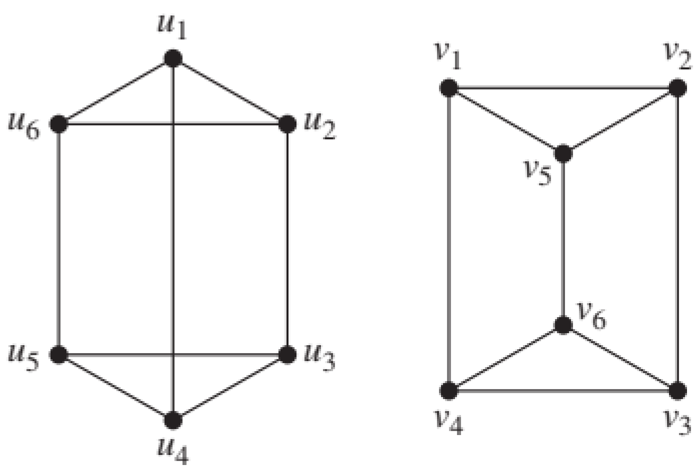
Ví dụ: các đồ thị sau có liên thông mạnh? Có liên thông yếu?



G là liên thông mạnh, H là liên thông yếu (không liên thông mạnh)

Làm các bài tập: 2, 4, 6, 12 trang 570 - 571

39.



G_1 G_2

BT 39/561)

Xác định xem cặp đồ thị G_1, G_2 có đẳng cấu hay không?

$$V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_6\}; V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$$

Xét ánh xạ $f: V_1 \to V_2$ như sau:

$$f(u_1) = v_5, f(u_2) = v_2\,, f(u_3) = v_3,$$
$$f(u_4) = v_6\,, f(u_5) = v_4\,, f(u_6) = v_1$$

Dễ thấy f là song ánh.

Ma trận kề của đồ thị G_1, G_2 theo thứ tự đỉnh $u_1, u_2, \dots, u_6$ và $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_6)$ là:

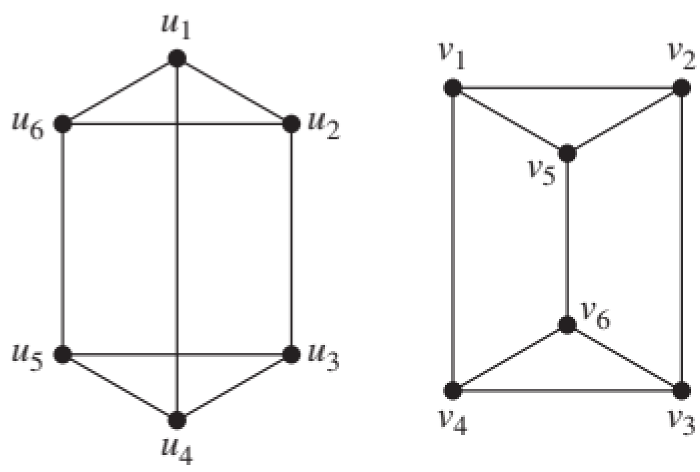
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	0	1	0	1	0	1
u_2	1	0	1	0	0	1
u_3	0	1	0	1	1	0
u_4	1	0	1	0	1	0
u_5	0	0	1	1	0	1
u_6	1	1	0	0	1	0

	v_5	v_2	v_3	v_6	v_4	v_1
v_5	0	1	0	1	0	1
v_2	1	0	1	0	0	1
v_3	0	1	0	1	1	0
v_6	1	0	1	0	1	0
v_4	0	0	1	1	0	1
v_1	1	1	0	0	1	0

Ta thấy $A_1 = A_2$ → song ánh f bảo toàn quan hệ liền kề

Do đó G_1 và G_2 là đẳng cấu.

39.



G_1 G_2

BT 39/561)

Xác định xem cặp đồ thị G_1, G_2 có đẳng cấu hay không?

$$V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_6\}; V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$$

Xét ánh xạ $f: V_1 \to V_2$ như sau:

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, f(u_3) = v_3,$$
$$f(u_4) = v_4, f(u_5) = v_6, f(u_6) = v_5$$

Dễ thấy f là song ánh.

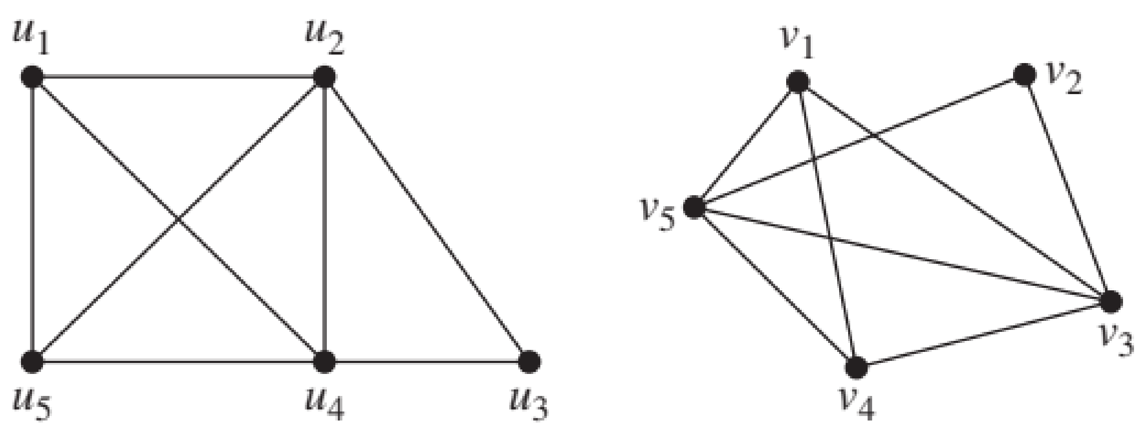
Ma trận kề của đồ thị G_1, G_2 theo thứ tự đỉnh $u_1, u_2, \dots, u_6$ và $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_6)$ là:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	0	1	0	1	0	1
u_2	1	0	1	0	0	1
u_3	0	1	0	1	1	0
u_4	1	0	1	0	1	0
u_5	0	0	1	1	0	1
u_6	1	1	0	0	1	0

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_6	v_5
v_1	0	1	0	1	0	1
v_2	1	0	1	0	0	1
v_3	0	1	0	1	1	0
v_4	1	0	1	0	1	0
v_6	0	0	1	1	0	1
v_5	1	1	0	0	1	0

Ta thấy $A_1 = A_2$
→ song ánh f bảo toàn quan hệ liền kề
Do đó G_1 và G_2 là đẳng cấu.

38.



4. Đường đi Euler và đường đi Hamilton

Có thể xuất phát từ một nơi (A,B,C,D) trong thành phố đi qua tất cả các cầu, mỗi cầu không qua nhiều hơn một lần, rồi lại trở về điểm xuất phát được không? (tr 573)

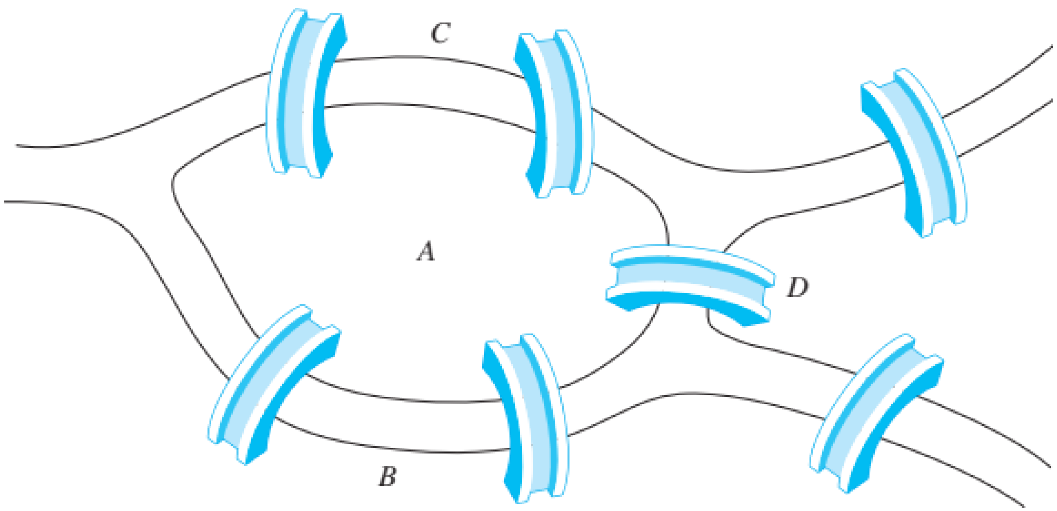


FIGURE 1 The Seven Bridges of Königsberg.

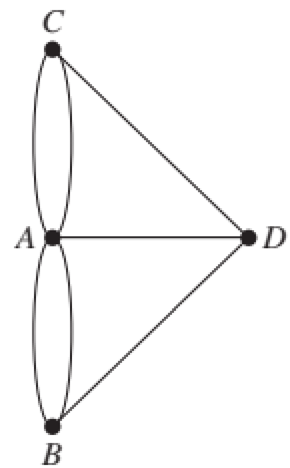


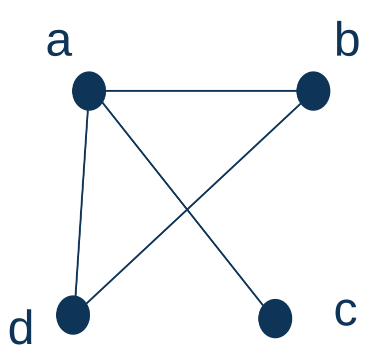
FIGURE 2 Multigraph Model of the Town of Königsberg.

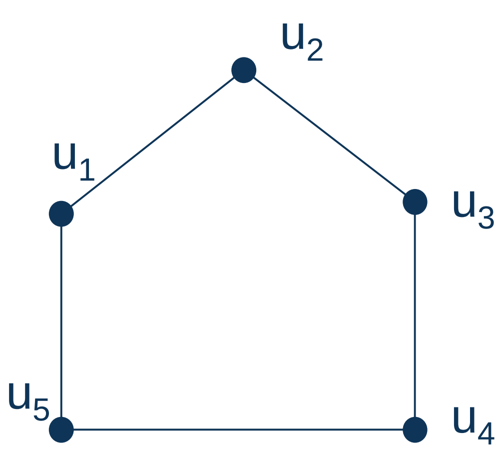
4. Đường đi Euler và đường đi Hamilton (tt)

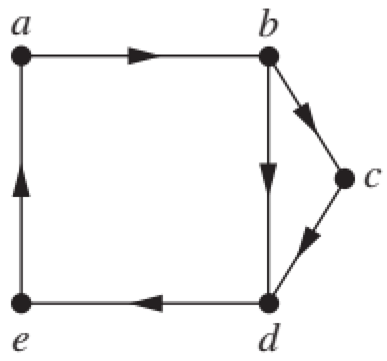
Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là **chu trình Euler**.

Đường đi Euler trong G là đường đi đơn chứa mọi cạnh của G.

Ví dụ: Đồ thị nào sau đây có chu trình Euler? Nếu không thì nó có đường đi Euler không?







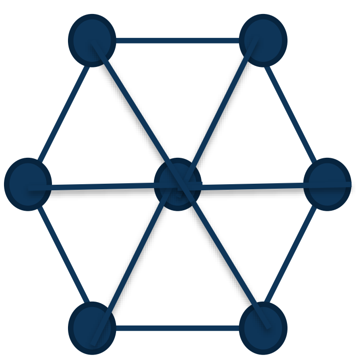
4. Đường đi Euler và đường đi Hamilton (tt)

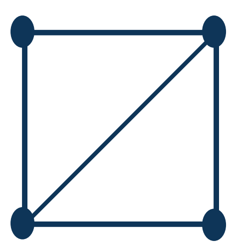
Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có *bậc chẵn*.

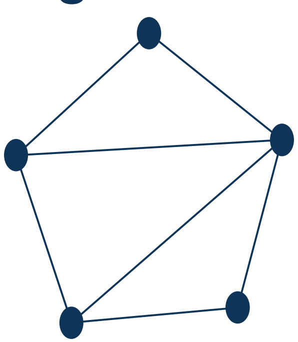
Một đa đồ thị liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó *có đúng 2 đỉnh bậc lẻ*.

→ Hai đỉnh bậc lẻ là điểm đầu và điểm cuối của đường đi Euler

Ví dụ: đồ thị nào sau đây có chu trình Euler? Nếu không thì nó có đường đi Euler không?

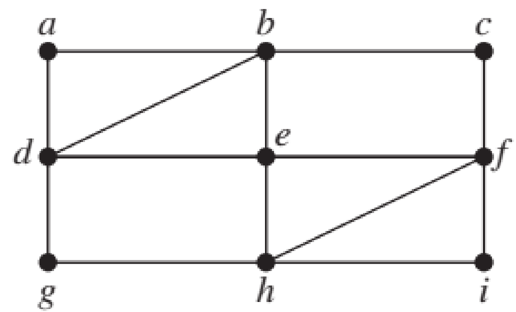






H

2.

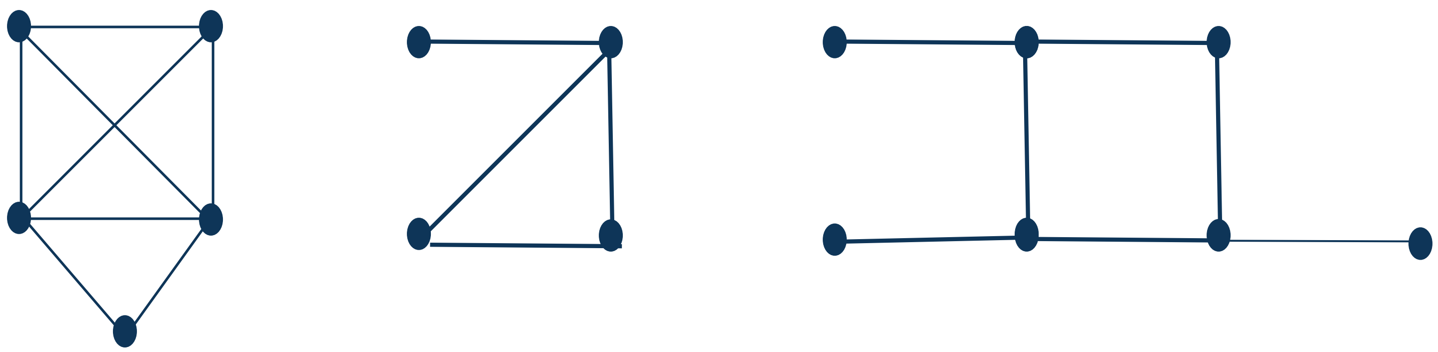


4. Đường đi Euler và đường đi Hamilton (tt)

Đường đi đi qua mọi đỉnh của đồ thị đúng một lần gọi là **đường đi Hamilton**.

Chu trình Hamilton là chu trình mà nếu bỏ đi điểm cuối thì trở thành đường đi Hamilton.

Ví dụ: đồ thị nào sau đây có chu trình Hamilton? Nếu không thì nó có đường đi Hamilton không?



4. Đường đi Euler và đường đi Hamilton (tt)

Định lý Dirac: Giả sử G là một đơn đồ thị liên thông có n đỉnh (n ≥ 3), nếu bậc của mỗi đỉnh ít nhất bằng n/2 thì G có chu trình Hamilton.

Định lý Ore: Giả sử G là một đơn đồ thị có n đỉnh (n ≥ 3) sao cho deg(u) + deg(v) ≥ n với mọi cặp đỉnh không liền kề u và v trong G, khi đó G có chu trình Hamilton.

Làm các bài tập:
2, 6, 18, 22, 30, 32
trang 583 - 584

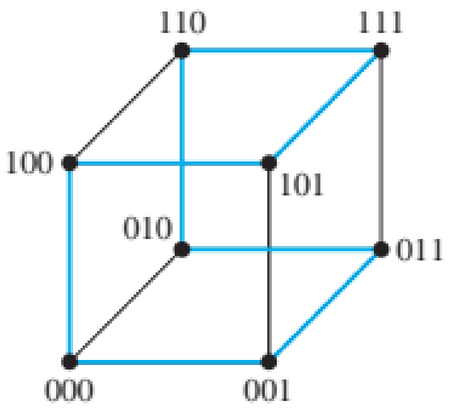
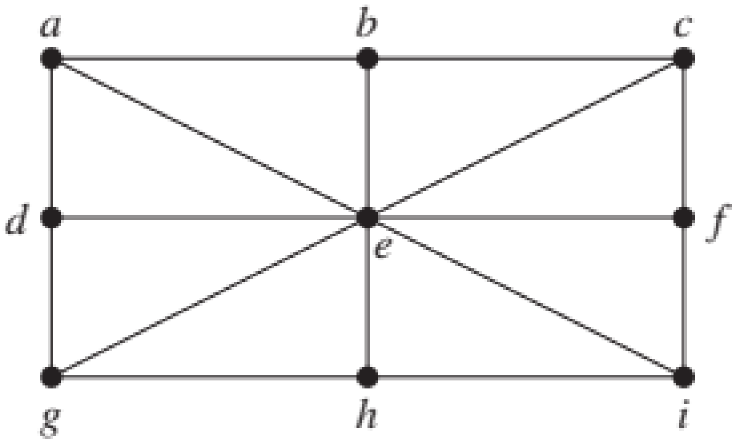


FIGURE 14 **A Hamilton Circuit for Q_3.**

4. Đường đi Euler và đường đi Hamilton (tt)

36.



Tr584: Đường đi Hamlton:
a,b,c,f,i,h,g,d,e
Chu trình Hamilton
a,b,c,f,i,h,g,d,e,a

Phương pháp tìm chu trình Euler

Input: G: đa đồ thị liên thông có bậc các đỉnh là chẵn

Output: C: chu trình Euler

C = chọn 1 chu trình con bất kỳ;

H = G đã xóa đi cạnh của C và các đỉnh cô lập…;

while (H còn cạnh) do

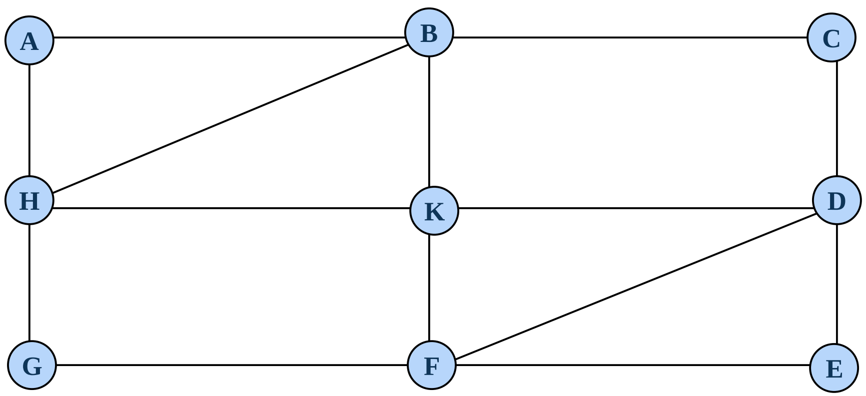
C' = chu trình con của H có đi qua đỉnh trong C;

H = H đã xóa đi cạnh của C' và đỉnh cô lập;

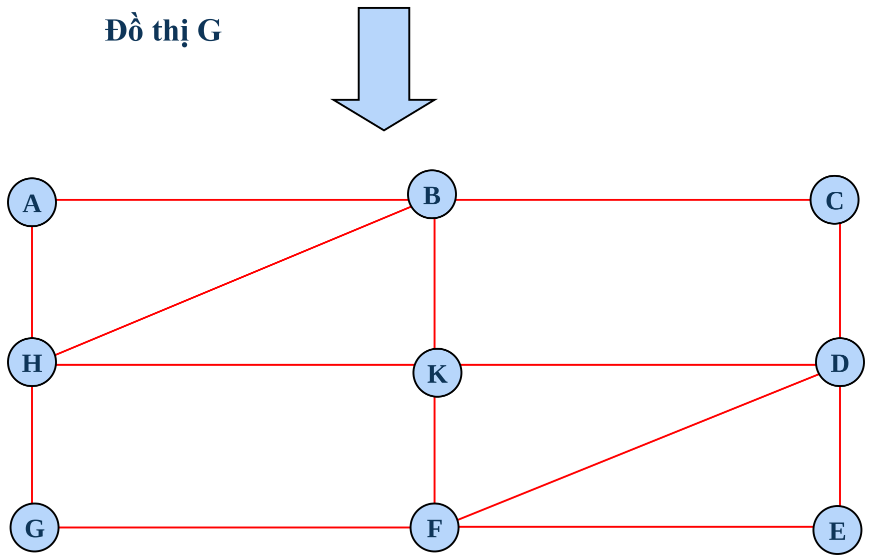
C = C cộng thêm C' được chèn phù hợp;

end

Phương pháp tìm chu trình Euler



Đồ thị G

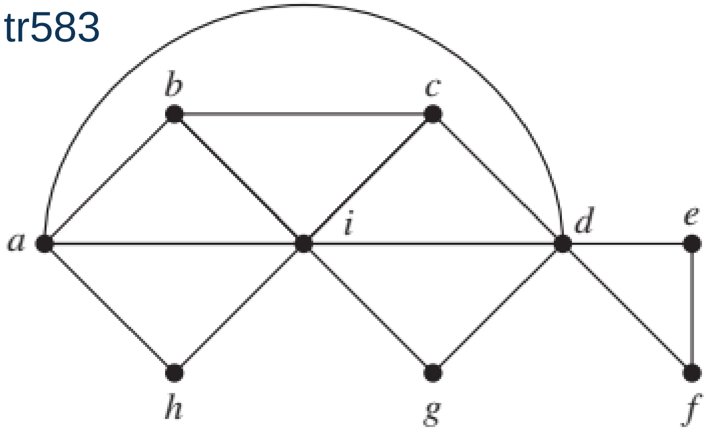


Đồ thị (G) là liên thông và các đỉnh đều có bậc chẵn nên (G) có chu trình Euler.

1. Chọn chu trình con (C1) từ đồ thị (G) là A, B, H, A. Xóa đi các cạnh của (C1) và các đỉnh cô lập (nếu có).
2. Chọn chu trình con (C2) từ đồ thị còn lại là B, C, D, K, B. Xóa đi các cạnh của (C2) và các đỉnh cô lập (nếu có).
3. Chèn (C2) vào (C1) ở vị trí B ta được ct (C3): A, B, C, D, K, B, H, A.
4. Chọn chu trình con (C4) từ đồ thị còn lại D, F, E, D. Xóa đi các cạnh của (C4) và các đỉnh cô lập (nếu có).
5. Chèn (C4) vào (C3) ở vị trí D ta được ct (C5): A, B, C, D, F, E, D, K, B, H, A
6. …

ĐS: Chu trình Euler: A, B, C, D, F, E, D, K, B, H, K, F, G, H, A (14 cạnh)

6. tr583



Chu trình Euler? Đường đi Euler?

Bậc của các đỉnh:

Đỉnh	a	b	c	d	e	f	g	h	i
deg	4	3	3	6	2	2	2	2	6

Số cạnh:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \times số\ cạnh \rightarrow số\ cạnh = \frac{30}{2} = 15.$$

Không có chu trình Euler vì có đỉnh bậc lẻ, có đường đi Euler vì có đúng 2 đỉnh bậc lẻ

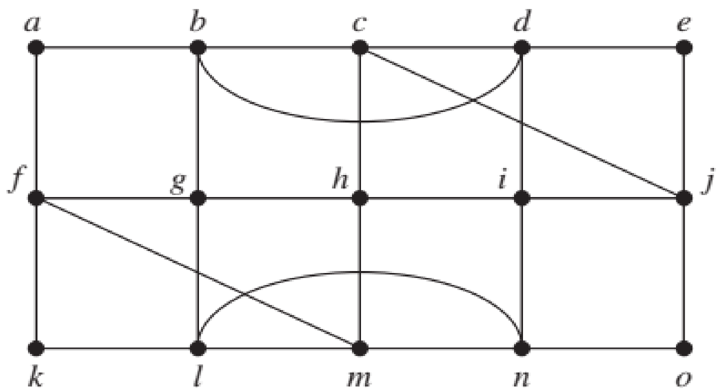
Đường đi Euler: (có đầu mút là b và c → $b, \ldots, c$)

HD: b,a,d,c

a, i, b, c, i, d, e, f, d, g, i, h, a

…

8.



(Tr583) Chu trình Euler? Đường đi Euler?

Bậc của các đỉnh:

Đỉnh	a	b	c	d	e	f	g	h	i	…
deg	2	4	4	4	2	4	4	4	4	…

Số cạnh: 26

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2 \times số\ cạnh \rightarrow số\ cạnh = \frac{4\cdot 2 + 11\cdot 4}{2} = 26.$$

Có chu trình Euler vì tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn

Chọn (C1): a, b, c, d, e, j, o, n, m, l, k, f, a → xóa đi các cạnh của C1…

Chọn (C2): g, b, d, i, j, c, h, g → xóa đi các cạnh của C2 và các đỉnh cô lập

Chèn (C2) vào (C1) ở vị trí đỉnh b ta được chu trình (C3)

a, b, d, i, j, c, h, g, b, c, d, e, j, o, n, m, l, k, f, a

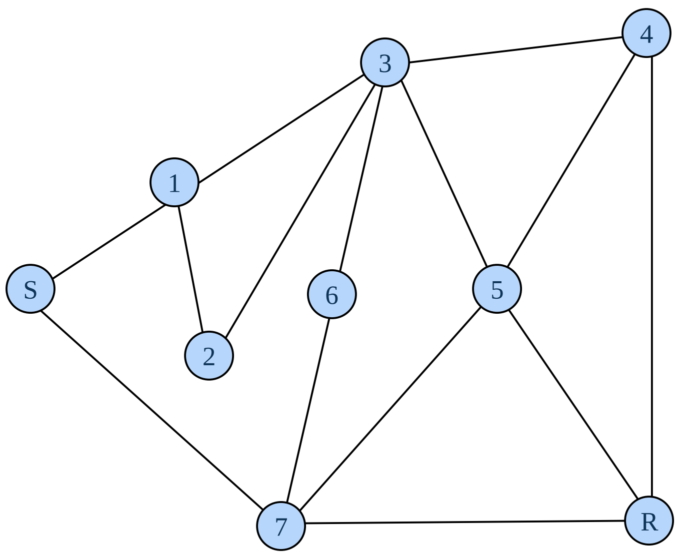
Chọn (C4): f, g, l, n, i, h, m, f → xóa đi các cạnh của C4 và các đỉnh cô lập ta được đồ thị rỗng. Chèn (C4) vào (C3) ở vị trí đỉnh f ta được chu trình (C5) là chu trình Euler cần tìm:

a, b, d, i, j, c, h, g, b, c, d, e, j, o, n, m, l, k, f, g, l, n, i, h, m, f, a

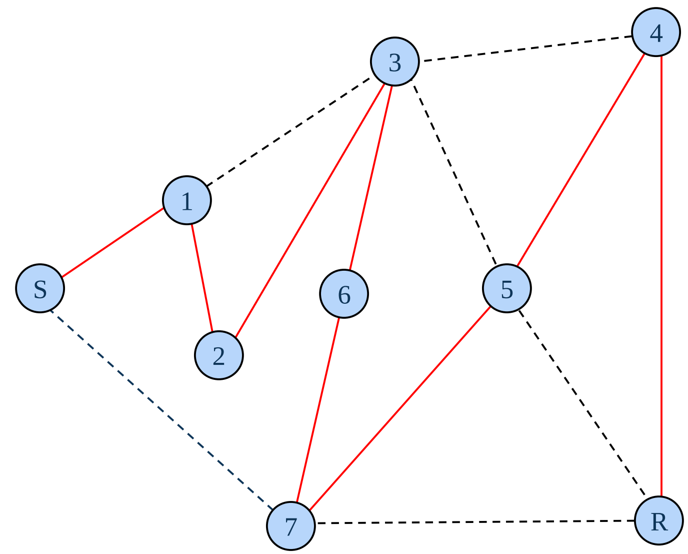
Quy tắc tìm chu trình và đường đi Hamilton

- **Nếu một đỉnh có bậc hai thì cả hai cạnh liên thuộc với đỉnh này phải là một phần của chu trình Hamilton.**
- **Một đỉnh đã được chọn 2 cạnh nối với nó thì các cạnh khác phải bỏ ra.**
- **Chu trình Hamilton không chứa một chu trình con.**

Quy tắc tìm chu trình và đường đi Hamilton



Đồ thị G7



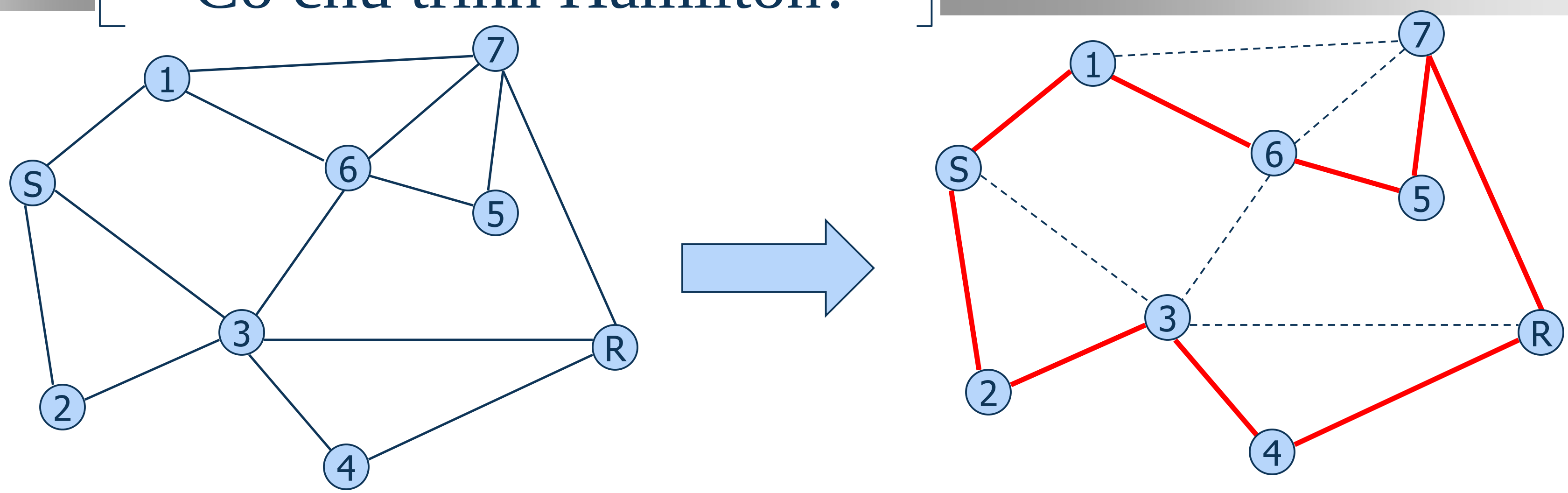
Đồ thị G8

- **Đỉnh 2, đỉnh 6 có bậc là 2**
- **Chọn cạnh 2-1, 2-3, 6-7, 6-3**
- **Bỏ cạnh 1-3, 3-4, 3-5**
- **Chọn cạnh 4-5, 4-R**
- **Bỏ 5-R, 7-R**

- **Chọn cạnh S-1**
- **Bỏ cạnh S-7**
- **Đường đi Hamilton:**

S →1 →2 →3 →6 →7 →5 →4 →R

Có chu trình Hamilton?



Đồ thị G5

Đồ thị G6

- Ta có đỉnh 2, đỉnh 4, đỉnh 5 có bậc là 2
- Nên ta chọn các cạnh sau: S2, 23, 34, 4R, 65, 75
- Và bỏ đi các cạnh: S3, 3R, 36
- Tiếp theo ta chọn: S1, 7R và bỏ đi: 67, 71
- Cuối cùng chọn 16
- → Chu trình H là: S → 1 → 6 → 5→ 7 → R → 4 → 3 ·