Chương 3: Phép đếm

Chương 3. Phép đếm
3.1. Khái niệm cơ bản về phép đếm
- Cơ sở của phép đếm (trang 301)
- Những nguyên lý đếm cơ bản: cộng, nhân (trang 302 đến …)
- Nguyên lý bù trừ (trang 308)
- Biểu đồ cây (trang 309)
3.2. Nguyên lý chuồng chim
- Mở đầu: nguyên lý 1, 2 (trang 313, 314)
- Một số ứng dụng của nguyên lý Dirichlet (trang 316)
3.3. Hoán vị và Tổ hợp
- Khái niệm hoán vị + định lý 1 (trang 321)
- Khái niệm tổ hợp (trang 322)
- Định lý 2 + hệ quả 1 (trang 323)

NGUYÊN LÝ CƠ BẢN CỦA PHÉP ĐẾM

A. Những nguyên lý đếm cơ bản

a) Quy tắc cộng: Giả sử công việc có hai phương án thực hiện. PA1 có thể thực hiện theo n_1 cách và PA2 có thể thực hiện theo n_2 cách, và **nếu hai PA này không thể thực hiện đồng thời**, thì sẽ có n_1+n_2 cách để thực hiện công việc.

- Tổng quát: Giả sử công việc có các phương án $T_1, T_2, \ldots, T_m$ có thể được thực hiện theo $n_1, n_2, \ldots, n_m$ cách, đồng thời không có hai PA nào có thể thực hiện cùng lúc. Khi đó, số cách để thực hiện công việc này là $n_1+ n_2+\ldots+n_m$.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ là các tập rời nhau, ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1|+|A_2|+\ldots+|A_m|$$

Quy tắc cộng

Ví dụ 1: Một sinh viên có thể chọn bài tập máy tính từ một trong ba danh sách lần lượt có 23, 15 và 18 bài, trong đó không có bài tập nào giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bài tập.

ĐS: (23+ 15+ 18)

NGUYÊN LÝ CƠ BẢN CỦA PHÉP ĐẾM

- **b) Quy tắc nhân:** Giả sử có một công việc có thể tách thành hai nhiệm vụ (công đoạn). Nếu có n_1 cách để thực hiện nhiệm vụ thứ nhất, và n_2 cách để thực hiện nhiệm vụ thứ hai *sau khi đã hoàn thành nhiệm vụ thứ nhất*, thì sẽ có tất cả $n_1.n_2$ cách để thực hiện công việc đó.

- ***Tổng quát:** Giả sử có một công việc được thực hiện bằng cách hoàn thành các nhiệm vụ (công đoạn) T_1, T_2, …, T_m. Nếu có thể thực hiện T_i theo n_i cách *sau khi các nhiệm vụ T_1, T_2, …, T_{i-1} đã được hoàn thành*, thì có tất cả $n_1.n_2…n_m$ cách để tiến hành công việc này.
- A_1, A_2, A_3, …, A_m là các tập hợp

$$\boxed{\left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m\right| = \left|A_1\right| \times \left|A_2\right| \times \ldots \times \left|A_m\right|}$$

Ví dụ 2: Ghế trong hội trường được đánh dấu bằng một chữ cái(tiếng Anh) và một số nguyên dương không vượt quá 100. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu ghế được đánh dấu khác nhau?

Ví dụ 3: Tồn tại bao nhiêu xâu bít (nhị phân) khác nhau có độ dài 7?

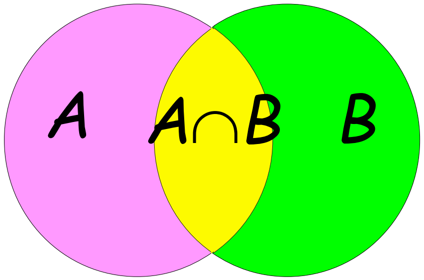
Ví dụ 4: Có bao nhiêu ánh xạ từ tập A có n phần tử đến tập B có m phần tử?

Ví dụ 5: Có bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ví dụ 6: Đếm số tập con của một tập hữu hạn.
Dùng quy tắc nhân để chứng tỏ rằng số lượng các tập con khác nhau của tập S hữu hạn phần tử là $2^{|S|}$.

HD: Mỗi tập con của S tương ứng với xâu nhị phân có độ dài |S|

c) Nguyên lý bù trừ



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Ví dụ 7: Có bao nhiêu xâu bít độ dài 8, với bít 1 đứng đầu **hoặc** hai bít 00 ở cuối?

Giải:

Số xâu bít độ dài 8 với bít 1 đứng đầu là 2^7.

Số xâu bít độ dài 8 với 2 bít 00 đứng cuối là 2^6.

Số xâu bít độ dài 8, với bít 1 đứng đầu **và** hai bít 00 ở cuối là 2^5.

Theo nguyên lí bù trừ, số xâu bít độ dài 8, với bít 1 đứng đầu **hoặc** hai bít 00 ở cuối là $2^7 + 2^6 – 2^{5.}$

NGUYÊN LÝ CHUỒNG CHIM BỒ CÂU

B. Nguyên lý chuồng chim bồ câu(nguyên lý Dirichlet)

Nguyên lý chuồng chim bồ câu phát biểu rằng nếu số chim nhiều hơn số chuồng thì phải có chuồng nào đó chứa ít nhất hai con.

Ví dụ 9: Trong một nhóm 367 người luôn có ít nhất hai người có cùng ngày sinh nhật.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng trong một nhóm 10 người luôn có ít nhất hai người có cùng số người quen.

NGUYÊN LÝ CHUỒNG CHIM BỒ CÂU

- **Nguyên lý Dirichlet tổng quát:**

  Nếu có **N** đồ vật được cho vào trong **k** hộp, thì phải **có ít nhất một hộp chứa ít nhất** $\lceil N/k \rceil$ đồ vật.

- **Ví dụ 11**: Chứng minh rằng trong 100 người có ít nhất 9 người cùng tháng sinh nhật.

HD: Do có 12 tháng nên theo nguyên lý **Dirichlet** có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người có cùng tháng sinh nhật.

- **Ví dụ 12**: Cần phải có tối thiểu bao nhiêu sinh viên đăng kí học Toán rời rạc để chắc chắn sẽ có ít nhất 5 người có cùng điểm thi nếu thang điểm gồm 11 bậc: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

HD: Gọi số SV đăng kí học TRR là N, theo nguyên lí **Dirichlet** thì $\lceil N/11 \rceil \geqslant 5$ hay $N/11 > 4$. Từ đó suy ra số SV tối thiểu là 45.

3. Hoán vị và tổ hợp

- Một **hoán vị** (permutation) của một tập các phần tử khác nhau là một cách sắp xếp có thứ tự các phần tử này.
- Một cách sắp xếp có thứ tự *r* phần tử của một tập có n phần tử khác nhau là một **chỉnh hợp** chập r của n phần tử.

- Số chỉnh hợp chập r của n phần tử là

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1), \text{ hay}$$

$$P(n,r) = n! / (n-r)!, \text{ với } 0 \leq r \leq n$$

- *Mỗi hoán vị của n phần tử chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử.*
- *Do đó số hoán vị của n phần tử là $P(n,n)=n!$.*

- Ví dụ: Một lớp có 30 SV. Có bao nhiêu cách chọn 3 sinh viên để làm lớp trưởng, lớp phó và thủ quỹ?

3. Hoán vị và tổ hợp (tt)

- Một **tổ hợp** (combination) chập *r* của một tập gồm n phần tử phân biệt là một cách chọn không thứ tự r phần tử của tập đó.
- Số tổ hợp chập r của n phần tử là:

$$C(n,r) = n! / [r! (n-r)!], \text{ với } 0 \le r \le n$$

- C(n,r) được gọi là **hệ số nhị thức** (binomial coefficient)
- Ví dụ:
  - Có bao nhiêu cách tuyển 4 trong 10 VĐV đi thi đấu ở một giải cầu lông?

3. Hoán vị và tổ hợp (tt)

- Tính chất: với $0 \le r \le n$,

  $C(n,r) = C(n,n-r)$

  $P(n,r) = C(n,r).\ P(r,r)$

Làm các bài tập: 2, 8, 13, 19, 26, 39 trang 311-312; 2, 7, 15, 16, 18 trang 319 – 320; 4, 8, 13, 18, 26, 34 trang 325 - 326