Chương 2: Phép quy nạp và đệ quy

- 2.1. Dãy số và cách tính tổng, bản số của tập hợp
- 2.2. Quy nạp toán học
- 2.3. Định nghĩa bằng đệ quy
- 2.4. Thuật toán đệ quy
- 2.5. Quan hệ: Định nghĩa và tính chất
- 2.6. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự bộ phận

2.1 Dãy số và cách tính tổng
(trang 228)

- Một **dãy** là một ánh xạ từ một tập con của tập các số nguyên (thường là tập {0, 1, 2, ...} hay {1, 2, 3, ...}) tới một tập S.

Kí hiệu: a_n là ảnh của số nguyên n, a_n là số hạng thứ n của dãy.

Ví dụ: Xét dãy $\{a_n\}$, $a_n = 1/n$, n là số nguyên dương. Hãy cho biết các số hạng của dãy.

- Một **cấp số nhân** là một dãy có dạng:

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^n$ với số hạng đầu là a và công bội là r.

- Một **cấp số cộng** là dãy có dạng $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd$ với số hạng đầu là a và công sai là d.

2.1 Dãy số và cách tính tổng (tt)

- Làm thế nào để tìm công thức hay qui tắc xây dựng các số hạng của một dãy?

Ví dụ: Tìm số hạng tổng quát (số hạng thứ n) của dãy:

(a) 1, -1, 1, -1, ...

(b) 3, 9, 27, 81, 243, ...

(c) 5, 11, 17, 23, 29, 35, ...

2.1 Dãy số và cách tính tổng (tt)

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{j=m}^{n} a_j,\ n > m$$

$\sum_{j=m}^{n} a_j$ là kí hiệu tổng.

j: là chỉ số lấy tổng, m: cận dưới, n: cận trên

Ví dụ:

a) $\sum_{i=1}^{10} a_i =$

b) $\sum_{i=1}^{10} (i+1) =$

c) $\sum_{i=1}^{10} 2 =$

2.1 Dãy số và cách tính tổng (tt)

Một số công thức tính tổng

Tổng	Công thức
$\sum_{j=0}^{n} ar^{j},\ r \neq 0$	$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1},\ r \neq 1$
$\sum_{j=1}^{n} j$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{j=1}^{n} j^{2}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{j=1}^{n} j^{3}$	$\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4}$
$\sum_{j=0}^{\infty} x^{j}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^{2}}$

Lực lượng của tập hợp

S là một tập hợp. Nếu có chính xác n phần tử phân biệt trong S, n là số nguyên không âm, thì ta nói rằng S là một tập hữu hạn (*finite*) và n là bản số hay lực lượng (*cardinality*) của S. Kí hiệu |*S* |

$S = \{1,2,3\}$ $|S| = 3$

$S = \{5,5,5,5,5,5\}$ $|S| = 1$

$S = \varnothing$ $|S| = 0$

$S = \{ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\} \}$ $|S| = 3$

Một tập hợp được gọi là vô hạn (*infinite*) nếu nó không phải là hữu hạn.

Cho **N** = {0,1,2,3,...}, là tập vô hạn

Lực lượng của tập hợp (tt)

- Hai tập A và B có cùng bản số nếu và chỉ nếu có một song ánh từ A đến B.
- Các tập hữu hạn hoặc có cùng bản số với tập hợp các số tự nhiên được gọi là tập đếm được.
- Các tập còn lại được gọi là không đếm được.

Ví dụ: Trong các tập sau đây, tập nào đếm được, tập nào không đếm được:

Tập các số nguyên dương lẻ; tập các số hữu tỉ dương; tập các số thực?

(trang 235)

2.1 Dãy số và cách tính tổng (tt)

Làm các bài tập: 2, 5, 8, 9, 13, 15, 17 từ trang 237 đến 239

2.2. Quy nạp toán học

- **Chứng minh quy nạp** (mathematical induction): Để chứng minh P(n) đúng với mọi số nguyên dương n, ta thực hiện 2 bước:

  - *Bước cơ sở*: chỉ ra mệnh đề P(1) đúng

  - *Bước quy nạp*: chứng minh mệnh đề $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên dương k.

Tr 240

2.2. Quy nạp toán học

Hãy chứng minh:

a. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

b. $1.2 + 2.3 + ... + n.(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

c. Cho $a_n = 3n^2 + 3n + 1$, tính

$1 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Làm các bài tập 3, 4, 6, 8 ,12, 13, 14, 16, 18, 20, 32, 33 từ trang 255 đến 256

2.3 Định nghĩa bằng đệ quy

- **Phép đệ quy**: là phép định nghĩa một đối tượng thông qua chính nó.

Ví dụ:

- Bố mẹ của một người là tổ tiên của người ấy
- Bố mẹ của tổ tiên một người bất kỳ là tổ tiên của người ấy

2.3 Định nghĩa bằng đệ quy (tt)

- Hàm được định nghĩa bằng đệ quy:

  Ta dùng 2 bước để định nghĩa một hàm xác định trên tập các số nguyên không âm:

  - *Bước cơ sở*: cho giá trị của hàm tại 0 (hoặc có thể tại một vài giá trị đầu)
  - *Bước đệ quy*: cho quy tắc tính giá trị của hàm tại một số nguyên từ các giá trị của nó tại các số nguyên nhỏ hơn.

2.3 Định nghĩa bằng đệ quy (tt)

Ví dụ:

- $f(n) = n!$, với $n \in \mathbf{Z}^+ = \{x \in \mathbf{Z} | x \geq 0\}$
  - Cơ sở: $f(0) = 1$
  - Đệ quy: $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$, $n \in \mathbf{Z}^+$

- Dãy *Fibonacci* : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
  - Cơ sở: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
  - Đệ quy: $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$, for $n \in \mathbf{Z}^+$

2.3 Định nghĩa bằng đệ quy (tt)

- Tập được định nghĩa bằng đệ quy:

Ví dụ:

- $S = \{ x \mid x$ là số lẻ, nguyên dương$\}$
  - Cơ sở: $1 \in S$
  - Đệ quy: nếu $x \in S$ thì $x + 2 \in S$
- $L = \{ x \mid x$ là một xâu bit$\}$
  - Cơ sở: $0 \in S, 1 \in S$
  - Đệ quy: nếu $x \in S$, thì $x0 \in S$ và $x1 \in S$
- Tập S được định nghĩa như sau:

Bước cơ sở: $1 \in S$

Bước đệ qui: nếu $x, y \in S$ thì $x+y$ và $x/y \in S$

S là tập gì?

2.3 Định nghĩa bằng đệ quy (tt)

- Ngoài hàm, tập,... các cấu trúc như: đồ thị, cây, cây nhị phân... cũng có thể được định nghĩa bằng đệ quy.

Làm các bài tập: 2, 4, 7, 8, 12, 23, 24, 26a, 27a trang 273, 274.

2.4 Thuật toán đệ quy

- Một thuật toán được gọi là **đệ quy** nếu nó giải một bài toán bằng cách rút gọn liên tiếp bài toán đó tới giai đoạn của chính bài toán ban đầu nhưng có dữ liệu đầu vào nhỏ hơn.

2.4 Thuật toán đệ quy (tt)

- Thuật toán tính a^n :

```
Procedure power(a: số thực khác 0; n: nguyên không âm)
        if  n=0 then power(a;n):=1
        else  power(a;n):=a.power(a;n-1)
```

2.4 Thuật toán đệ quy (tt)

- Thuật toán tính UCLN(a,b)

```
Procedure UCLN(a,b: các số nguyên không âm, a < b)
    if a=0 then UCLN(a,b):=b
    else UCLN(a,b):=UCLN(b mod a,a)
```

- Thuật toán tìm kiếm tuyến tính

```
Procedure search(i,j,x)
    if a_i = x then location:=i
    else if i = j then
            location:=0
    else search(i+1,j,x)
```

2.4 Thuật toán đệ quy (tt)

- Thuật toán tìm kiếm nhị phân:

Procedure binary search(x,i,j)

m := $\lfloor (i+j)/2 \rfloor$

if x = a_m **then**

location:=m

else if (x < a_m và i < m) **then**

binary search(x,i,m-1)

else if (x > a_m và j > m) **then**

binary search(x,m+1,j)

else location:=0

2.4 Thuật toán đệ quy (tt)

- Thuật toán tính giai thừa:

Procedure factorial(n: nguyên không âm)

    if n=0 **then** factorial(n):= 1
    else factorial(n):=n. factorial(n-1)

- Thuật toán tính các số Fibonacci:

Procedure fibonacci(n: nguyên không âm)

    if n=0 then
        fibonacci(0):= 0
    else if n = 1 then
        fibonacci(1):= 1
    else fibonacci(n):= fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)

2.4 Thuật toán đệ quy (tt)

- *Làm các bài tập: 1, 2, 3, 4, 5, 21, 22 trang 286*

2.5 Quan hệ: định nghĩa và tính chất

- Cho hai tập hợp A và B. Một quan hệ hai ngôi từ A đến B là một tập con của AxB.

  Như vậy quan hệ hai ngôi từ A đến B là tập R các cặp được sắp, trong đó phần tử thứ nhất thuộc A, phần tử thứ 2 thuộc B.

- Kí hiệu:

  aRb hay (a,b) ∈R (a có quan hệ R với b)

  $a\not{R}b : (a,b) \notin R$ (a không có quan hệ R với b)

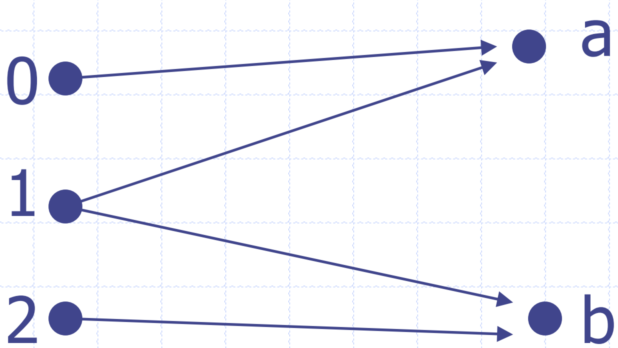
trang 469

2.5 Quan hệ: định nghĩa và tính chất (tt)

Ví dụ: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$

Đặt $R = \{(0,a),(1,a),(1,b),(2,b)\}$. Ta có R là một quan hệ từ A đến B

(0 R a nhưng $0 \not R b$)



R	a	b
0	x	
1	x	x
2		x

2.5 Quan hệ: định nghĩa và tính chất (tt)

- Quan hệ là sự tổng quát hóa khái niệm hàm

  => hàm cũng là một quan hệ.

- Một quan hệ trên tập hợp A là quan hệ từ A đến A.

Ví dụ: $A = \{1, 2, 4, 5\}$. R_1, R_2, R_3 là quan hệ trên A như sau

$R_1 = \{(a,b) | b \vdots a\} = ?$

$= \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (4,4), (5,5)\}$

$R_2 = \{(a,b) | a \leq b\} = ?$

$R_3 = \{(a,b) | a+b < 5\} = ?$

2.5 Quan hệ: định nghĩa và tính chất (tt)

- Quan hệ R trên tập *A* được gọi là có tính phản xạ nếu

$$\forall a \in A, (a,a) \in R$$

- Quan hệ R trên tập *A* được gọi là có tính đối xứng nếu

$$\forall a,b \in A,\ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

- Quan hệ R trên tập *A* được gọi là có tính phản đối xứng nếu

$$\forall a,b \in A,\ (a,b) \in R \text{ và } (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

- Quan hệ R trên tập *A* được gọi là có tính bắc cầu nếu

$$\forall a,b,c \in A,$$

$$(a,b) \in R \text{ và } (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

2.5 Quan hệ: định nghĩa và tính chất (tt)

Ví dụ: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Trong các quan hệ sau, quan hệ nào có tính phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu:

a) R = {(1,1), (1,2),(2,2), (2,1), (3,3), (4,4)}

b) R = {(1,3), (1,4), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,4)}

c) R = {(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}

d) R = {(1,1),(2,2), (3,3),(4,4)}

3a) R = {(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)}

Làm các bài tập: 3, 6, 25, 29, 39 từ trang 477 đến 479

2.6 Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự bộ phận

- Quan hệ R trên tập hợp A là một quan hệ tương đương nếu nó có tính *phản xạ, đối xứng, bắc cầu.*
- Cho R là một quan hệ tương đương trên tập A. Tập tất cả các phần tử có quan hệ với một phần tử $a \in A$ được gọi là một lớp tương đương của a, kí hiệu $[a]_R$ (hay **[a]**).

$$[a]_R = \{s \mid (a,s) \in R\}$$

Ví dụ: 1. Chứng minh quan hệ sau là tương đương trên $\mathbb{Z}$: $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$

với $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a-b) \vdots m$ (đồng dư theo modul m)

2. Tìm $[0]_R$, $[1]_R$ với m = 3?

2.6 Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự bộ phận (tt)

- Cho R là một quan hệ tương đương trên tập A. Các mệnh đề sau tương đương:

  i. aRb ii. [a] = [b] iii. $[a] \cap [b] \neq \varnothing$

- Một phân hoạch của tập S là một tập hợp các tập hợp con không rỗng rời nhau của S và S là hợp của các tập hợp đó.

  Các tập A_i ($i \in I$, I là tập các chỉ số) tạo nên một phân hoạch của S nếu

  $A_i \neq \varnothing$ $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\bigcup_i A_i = S$

- R là quan hệ tương đương trên tập S. Khi đó các lớp tương đương của R sẽ lập nên một phân hoạch của S.
- Với một phân hoạch $\{A_i, i \in I\}$ của tập S, tồn tại một quan hệ tương đương R có các tập con A_i là các lớp tương đương của nó.

2.6 Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự bộ phận (tt)

Ví dụ: Xác định các lớp đồng dư theo modul 3.

Các lớp đồng dư này có tạo nên một phân hoạch?

2.6 Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự bộ phận (tt)

- Quan hệ R trên tập S được gọi là **có thứ tự bộ phận** nếu nó có tính *phản xạ*, *phản xứng* và *bắc cầu*.

  Khi đó tập S được gọi là **tập có thứ tự bộ phận**, kí hiệu (S,R).

Ví dụ: R = "lớn hơn hoặc bằng" ($\geq$) trên tập số nguyên có phải là có thứ tự bộ phận?

- R là quan hệ trên tập S có thứ tự bộ phận.

  $(a,b)\in R$ kí hiệu là $a \preccurlyeq b$ (a có thể bằng b)

  $a \prec b$: $a \preccurlyeq b$ và $a \neq b$

2.6 Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự bộ phận (tt)

- Cho $(S, \preccurlyeq)$ và a, b $\in S$
  - a và b được gọi là **có thể so sánh được** nếu a $\preccurlyeq$ b hoặc b $\preccurlyeq$ a
  - a và b được gọi là **không thể so sánh được** nếu không có a $\preccurlyeq$ b hoặc b $\preccurlyeq$ a

Cho $(S, \preccurlyeq)$ là tập được sắp và mọi cặp phần tử trong S đều so sánh được. Khi đó:

- S được gọi là **tập được sắp toàn phần** (một dãy xích)
- $\preccurlyeq$ là **sắp xếp toàn phần**

2.6 Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự bộ phận (tt)

- $(S, \preccurlyeq)$ được gọi là tập được sắp tốt nếu nó là tập được sắp sao cho $\preccurlyeq$ là sắp xếp toàn phần và mọi tập con khác rỗng của nó đều có phần tử nhỏ nhất
- Giả sử S là tập được sắp tốt. Khi đó P(x) đúng với mọi $x \in S$ nếu:

Bước 1: $P(x_0)$ đúng với phần tử bé nhất của S

Bước 2 (quy nạp): P(x) đúng với mọi $x \prec y$ thì P(y) đúng với mọi y.

Làm các bài tập: 1, 5, 9, 11, 20, 22, 26, 30 từ trang 73 đến 76; bài 3, 9 trang 526