

轮 趣 科 技

基于 LQR 控制器的 平衡小车

推荐关注我们的公众号获取更新资料



版本说明:

版本	日期	内容说明
V1.0	2021/10/12	第一次发布

网址: www.wheeltec.net

目录

1. 数学模型.....	3
1.1 车轮模型.....	3
1.2 车体模型.....	4
2. LQR 控制器.....	10
2.1 概述.....	10
2.2 应用.....	12
2.3 总结.....	15
3. 参考文献.....	16

1. 数学模型

两轮自平衡小车的结构主要由车体和双轮两部分组成，可以看成是一个移动的倒立摆。下面分别对两轮自平衡小车的车轮和车体进行力学分析，建立动力学模型，最后，通过对两者的分析给出系统的状态空间表达式。

1.1 车轮模型

平衡车的运动是通过车轮转动来实现的，我们选用的是一对同轴安装，参数（质量、转动惯量、半径）相同的车轮。现在，以右轮为例进行受力分析，如图 1-1 所示。

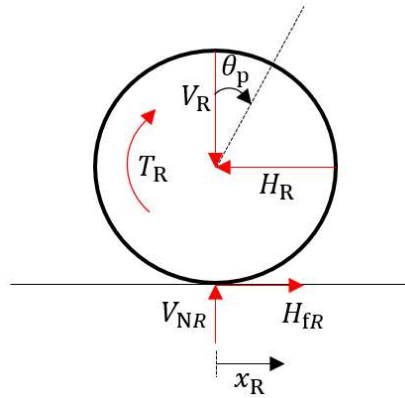


图 1-1 车轮的受力分析图

车轮的运动可分解为平动和转动，则

由牛顿第二定律可得

$$m\ddot{x}_R = H_{fR} - H_R \quad (1)$$

由刚体定轴转动定律可得

$$I\dot{\omega}_R = T_R - H_{fR}r \quad (2)$$

其中

m 车轮的质量(kg)

r 车轮的半径(m)

x_R 右轮的水平位移(m)

H_{fR} 右轮受到地面的摩擦力的大小(N)

H_R 右轮受到车体作用力的水平分力的大小(N)

T_R 右轮电机输出转矩的大小($\text{N} \cdot \text{m}$)

I 车轮的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

ω_R 右轮的角速度的大小(rad/s)

联立(1)和(2), 消去 H_{fl} , 可得

$$m\ddot{x}_R = \frac{T_R}{r} - \frac{I\dot{\omega}_R}{r} - H_R \quad (3)$$

在车轮不打滑的情况下, 车轮移动速度的大小和转动速度的大小成比例关系, 即

$$\begin{cases} \omega_R = \frac{\dot{x}_R}{r} \\ \dot{\omega}_R = \frac{\ddot{x}_R}{r} \end{cases} \quad (4)$$

将方程(4)代入(3)中, 可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}_R = \frac{T_R}{r} - H_R \quad (5)$$

由于左右轮的参数相同, 则对左轮也可以得到相似的结果, 即

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}_L = \frac{T_L}{r} - H_L \quad (6)$$

1.2 车体模型

与车轮的运动类似, 车体的运动也可以分解为正向运动(前向、俯仰)和侧向运动(转向、偏航)。其中, 偏航运动可以看成是转向运动的特殊情况, 因此下面主要分析车体的正向运动和转向运动。

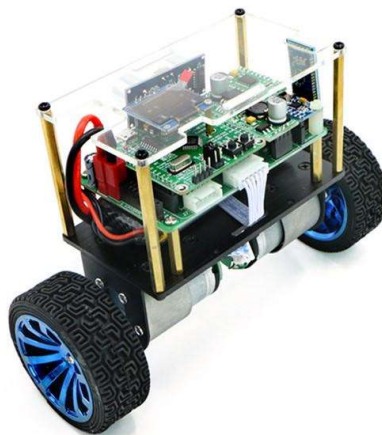


图 1-2 两轮自平衡小车的实物图

1) 正向运动

为了易于分析, 不妨对车体模型进行简化, 简化后的模型如图 1-3 所示。

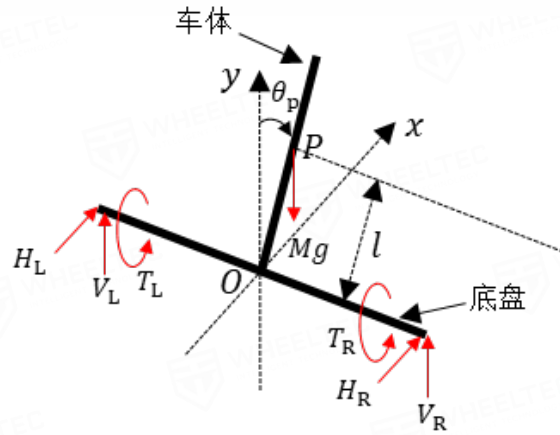


图 1-3 正向运动模型

小车的正向运动可以分解为前向运动和绕车体质心 P 的相对转动（俯仰）。小车的底盘中心 O 的水平位移为

$$x = \frac{x_L + x_R}{2} \quad (7)$$

将方程(5)和(6)相加后，等式两边除以 2 可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \frac{\ddot{x}_L + \ddot{x}_R}{2} = \frac{T_L + T_R}{2r} - \frac{H_L + H_R}{2} \quad (8)$$

联立方程(7)(8)可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{2r} - \frac{H_L + H_R}{2} \quad (9)$$

对车体，由牛顿第二定律可得

在水平方向上，有

$$M \frac{d(x + l \sin \theta_P)}{dt^2} = H_L + H_R \quad (10)$$

在竖直方向上，有

$$M \frac{d(l \cos \theta_P)}{dt^2} = V_L + V_R - Mg \quad (11)$$

对车体，由刚体定轴转动定律可得

$$J_P \ddot{\theta}_P = (V_L + V_R)l \sin \theta_P - (H_L + H_R)l \cos \theta_P - (T_L + T_R) \quad (12)$$

其中

M 车体的质量(kg)

l 质心距底盘中心的距离(m)

J_P 车体绕质心转动时的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

θ_P 车体与竖直方向所成的夹角(rad)

联立方程(9)(10)可得

$$\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)\ddot{x} - \frac{T_L + T_R}{r} + Ml\ddot{\theta}_p \cos \theta_p - Ml\dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p = 0 \quad (13)$$

因为该方程含有非线性项，因此，要进行线性化。考虑到车体的倾角比较小（通常情况下， $-10^\circ \leq \theta_p \leq 10^\circ$ ），则可以认为

$$\begin{cases} \cos \theta_p = 1 \\ \sin \theta_p = \theta_p \\ \dot{\theta}_p^2 = 0 \end{cases}$$

故方程(13)变为

$$\ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)r} - \frac{Ml}{\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)}\ddot{\theta}_p \quad (14)$$

将方程(10)和(11)代入方程(12)中，可得

$$\left(\frac{J_p}{Ml} + l\right)\ddot{\theta}_p + \ddot{x} \cos \theta_p - g \sin \theta_p + \frac{T_L + T_R}{Ml} = 0 \quad (15)$$

类似的，对方程(15)进行线性化可得

$$\ddot{\theta}_p = \frac{Mlg}{(J_p + Ml^2)}\theta_p - \frac{Ml}{(J_p + Ml^2)}\ddot{x} - \frac{T_L + T_R}{(J_p + Ml^2)} \quad (16)$$

将方程(16)代入方程(14)中，消去 $\ddot{\theta}_p$ ，可得

$$\ddot{x} = -\frac{M^2l^2g}{Q_{eq}}\theta_p + \frac{J_p + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r}(T_L + T_R) \quad (17)$$

式中

$$Q_{eq} = J_pM + (J_p + Ml^2)\left(2m + \frac{2I}{r^2}\right).$$

将方程(14)代入方程(16)中，消去 \ddot{x} ，可得

$$\ddot{\theta}_p = \frac{Mlg\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)}{Q_{eq}}\theta_p - \frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)}{Q_{eq}}(T_L + T_R) \quad (18)$$

式中

$$Q_{eq} = J_pM + (J_p + Ml^2)\left(2m + \frac{2I}{r^2}\right).$$

综上所述，对于正向运动有

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{M^2 l^2 g}{Q_{eq}} \theta_P + \frac{J_P + M l^2 + M l r}{Q_{eq} r} (T_L + T_R) \\ \ddot{\theta}_P = \frac{M l g \left(M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} \theta_P - \frac{\left(\frac{M l}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} (T_L + T_R) \end{cases} \quad (19)$$

式中

$$Q_{eq} = J_P M + (J_P + M l^2) \left(2m + \frac{2I}{r^2} \right).$$

2) 转向运动

与正向运动类似，我们也可以建立简化后的转向运动模型，如图 1-4 所示。

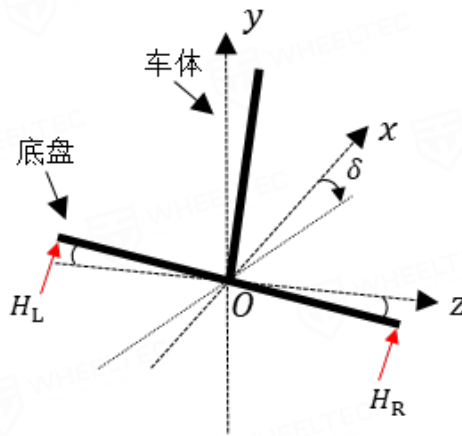


图 1-4 转向运动模型

转向运动是由于左右两车轮从水平方向上施加给车体的反作用力的大小 H_L 和 H_R 不相等引起的，则由刚体定轴转动定律可得

$$J_\delta \ddot{\delta} = \frac{d}{2} (H_L - H_R) \quad (20)$$

其中

d 轮距(m)

J_δ 车体绕 y 轴转动时的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

δ 小车的偏航角(rad)

将方程(5)和(6)相减后可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2} \right) (\ddot{x}_L - \ddot{x}_R) = \frac{T_L - T_R}{r} - (H_L - H_R) \quad (21)$$

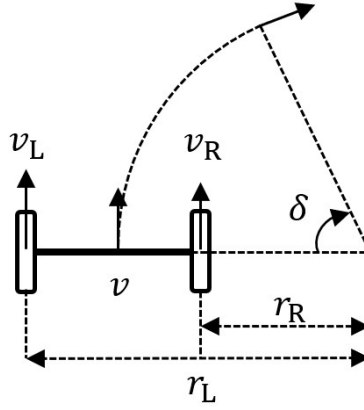


图 1-5 小车转向示意图

当左右两轮运动速度不相等时，小车身转向，如图 1-5 所示。由几何关系可得

$$\begin{cases} \dot{x}_L = \delta \dot{r}_L \\ \dot{x}_R = \delta \dot{r}_R \\ r_L = r_R + d \end{cases} \quad (22)$$

解得

$$\delta = \frac{\dot{x}_L - \dot{x}_R}{d} \quad (23)$$

由式(23)进一步可得

$$\ddot{\delta} = \frac{\ddot{x}_L - \ddot{x}_R}{d} \quad (24)$$

联立方程(20)(21)(24)可得

$$\ddot{\delta} = \frac{1}{r \left(md + \frac{Id}{r^2} + \frac{2J_{\delta}}{d} \right)} (T_L - T_R) \quad (25)$$

由方程(19)和(25)可得系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\dot{x}} \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\dot{\theta}}_p \\ \dot{\delta} \\ \dot{\dot{\delta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_L \\ T_R \end{pmatrix} \quad (26)$$

状态变量 $(x \ \dot{x} \ \theta_p \ \dot{\theta}_p \ \delta \ \dot{\delta})^T$ 分别表示小车的位移，前进速度，车体的倾角，车体的角速度，小车的转向角以及转向速度。由于电机输出转矩的大小不好直接控制，则由刚体定轴转动定律将其转化为两个车轮的加速度。

$$\begin{cases} \dot{v}_{Lo} = \frac{rT_L}{I} \\ \dot{v}_{Ro} = \frac{rT_R}{I} \end{cases} \quad (27)$$

其中

v_{LO} 左轮无摩擦时线速度的大小(rad/s)

v_{RO} 右轮无摩擦时线速度的大小(rad/s)

故系统的状态空间表达式变为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (28)$$

式中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} v_{LO} \\ v_{RO} \end{pmatrix}$$

矩阵中的元素为

$$A_{23} = -\frac{M^2 l^2 g}{Q_{eq}} \quad A_{43} = \frac{M l g \left(M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}}$$

$$B_{21} = \frac{J_P + M l^2 + M l r}{Q_{eq} r} \quad B_{22} = \frac{J_P + M l^2 + M l r}{Q_{eq} r}$$

$$B_{41} = -\frac{\left(\frac{M l}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} \quad B_{42} = -\frac{\left(\frac{M l}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}}$$

$$B_{61} = \frac{1}{r \left(m d + \frac{I d}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d} \right)} \quad B_{62} = -\frac{1}{r \left(m d + \frac{I d}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d} \right)}$$

其中

$$Q_{eq} = J_P M + (J_P + M l^2) \left(2m + \frac{2I}{r^2} \right).$$

2. LQR 控制器

2.1 概述

LQR(Linear Quadratic Regulator), 即线性二次型调节器。LQR 可得到状态线性反馈的最优控制规律, 易于构成闭环最优控制。LQR 最优控制利用廉价成本可以使原系统达到较好的性能指标且易于实现, 是现代控制理论中发展较为成熟的一部分。下面对其原理做一个简单的概述后给出一个实际应用的例子。

设系统(要求系统完全能控)的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

在现代控制理论中, 最基本的控制系统就是全状态反馈控制系统(系统框图如图 2-1 所示), 其目标是设计一个状态反馈控制器 $u = -Kx$ 来控制系统的表现。

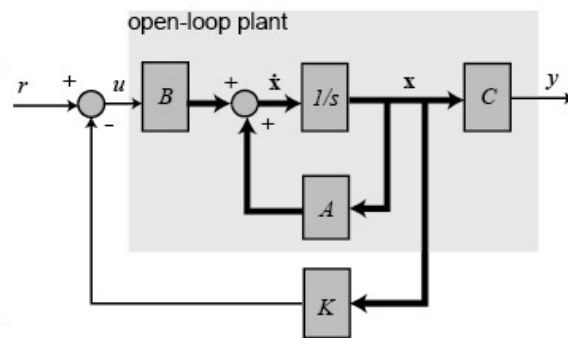


图 2-1 全状态反馈控制系统

现在的问题是, 这样的 K 不是唯一的, 那么, 怎么样的 K 才是最优的呢? 在引入代价函数之前, 先来看这样的问题(来自于 MATLAB 官方教程): 假设你在寻找从家里到公司的最佳方式, 并且有多种交通方式可以选择, 你可以开车、骑自行车、坐公交车以及租直升飞机。那么, 哪种交通方式是你最佳的选择? 这个问题本身没有答案, 因为我们不知道什么是“最佳”。假设现在只考虑时间成本和金钱成本, 将 4 种交通方式的信息填入如下的表格。

表 2-1

Transportation	Time / min	Money / CNY
Car	20	45
Bike	75	0
Bus	30	12
Helicopter	4	2578

可以看到，如果时间成本是我们最关注的，那么显然租直升飞机是最佳的选择。反之，如果我们更关注金钱成本，那么骑自行车将是最佳的选择。当然，在现实生活中，人们往往会追求两者的平衡。比如：今天你有个早会，你理所当然会关注时间成本，但另一方面，你也没有足够富裕，因此也要关注金钱成本。这样的话，如何进行选择呢？这里有个简单的量化评估方法，可以建立这样一个评价函数 $J = Q \cdot Time + R \cdot Money$ ，根据个人的需要设置不同的权重。如果权重设置如表 2-2 所示，那么，最优选择为开车去上班。如果权重设置如表 2-3 所示，那么，最优选择为坐公交车去上班。

表 2-2

Transportation	Q	Time / min	R	Money / CNY	J(Cost)
Car	10	20	1	45	245
Bike	10	75	1	0	750
Bus	10	30	1	12	312
Helicopter	10	4	1	2578	2618

表 2-3

Transportation	Q	Time / min	R	Money / CNY	J(Cost)
Car	5	20	5	45	325
Bike	5	75	5	0	375
Bus	5	30	5	12	210
Helicopter	5	4	5	2578	12910

类似的，对于控制系统，我们引入代价函数(Quadratic Cost Function)

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (29)$$

式中， Q 为 $n \times n$ 维半正定的状态加权矩阵， R 为 $n \times n$ 维正定的控制加权矩阵。在工程实际中， Q 和 R 是对称矩阵且常取对角阵。 Q 中对角线上的元素 q_i 表示对相应误差分量 x_i （最终的目标是让每一个状态变量的值都变为 0，所以每一个状态变量的值又称为误差值）的重视程度，越被重视的误差分量，希望它越快的变小，相应地，其权重系数就取得越大。类似的， R 中对角线上的元素 r_i 表示对相应输入分量 u_i 的限制，让其不要太大。LQR 控制器的设计思路就是设计一个状态反馈控制器 $u = -Kx$ ，使得代价函数最小 $\min J$ ，从而达到利用廉价成本使原系统达到较好的性能指标的目的。至于状态反馈矩阵 K 怎么计算，这里只给出相应结论：

$$K = R^{-1}B^TP \quad (30)$$

其中，P 是 Riccati 方程 $A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$ 的解。

2.2 应用

有了上述对 LQR 控制器定性的说明后，接下来以两轮自平衡小车为实例说明 LQR 控制器的设计。

由平衡小车的动力学模型可知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_P \\ \dot{\theta}_P \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} v_{LO} \\ v_{RO} \end{pmatrix}$$

式中

$$\begin{aligned} A_{23} &= -\frac{M^2 l^2 g}{Q_{eq}} & A_{43} &= \frac{Mlg \left(M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} \\ B_{21} &= \frac{J_P + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r} & B_{22} &= \frac{J_P + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r} \\ B_{41} &= -\frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} & B_{42} &= -\frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} \\ B_{61} &= \frac{1}{r \left(md + \frac{Id}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d} \right)} & B_{62} &= -\frac{1}{r \left(md + \frac{Id}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d} \right)} \end{aligned}$$

其中

$$Q_{eq} = J_P M + (J_P + Ml^2) \left(2m + \frac{2I}{r^2} \right).$$

通常情况下，我们并不会手算状态反馈矩阵 K，而是借用 MATLAB 的 lqr 函数进行计算，相关程序如下所示：

```
clc
m = 0.035; %车轮的质量
r = 0.0672; %车轮的半径
I = 0.5*m*r^2; %车轮的转动惯量
M = 0.757-2*m; %车体的质量
l = 0.5*0.0903; %质心距底盘中心的距离
J_p = (1/12)*M*(0.0903^2+0.0530^2); %车体绕质心转动时的转动惯量
d = 0.1612; %轮距
```

```

J_delta = (1/12)*M*(0.0930^2+0.0530^2);    %车体绕 y 轴转动时的转动惯量
g = 9.8;                                     %重力加速度
Q_eq = J_p*M+(J_p+M*I^2)*(2*m+2*I/r^2);
A_23 = -(M^2*I^2*g)/Q_eq;
A_43 = M*I*g*(M+2*m+2*I/r^2)/Q_eq;
B_21 = (J_p+M*I^2+M*I*r)/(Q_eq*r);
B_22 = B_21;
B_41 = -(M*I/r+M+2*m+2*I/r^2)/Q_eq;
B_42 = B_41;
B_61 = 1/r*(m*d+I*d/r^2+2*J_delta/d);
B_62 = -B_61;
A = [0 1 0 0 0 0; 0 0 A_23 0 0 0; 0 0 0 1 0 0; 0 0 A_43 0 0 0; 0 0 0 0 0 1; 0
0 0 0 0 0];
B = (1/r)*[0 0; B_21 B_22; 0 0; B_41 B_42; 0 0; B_61 B_62];
Tc = ctrb(A,B);                             %能控性矩阵
if (rank(Tc)==6)                             %判断是否满秩, 如果"是", 则系统是可控的.
    fprintf('此系统是可控的! \n');
    Q = [1000 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1000 0 0; 0 0 0 0 1000
0; 0 0 0 0 0 0];                             %权重矩阵 Q 的设计
    R = [1 0; 0 1];                         %权重矩阵 R 的设计
    K = lqr(A,B,Q,R);                       %调用 lqr 函数以求解状态反馈矩阵 K
end

```

注：加权矩阵 R 不能太小，否则会导致控制量的急剧增大以至于超过系统的执行能力，另一方面，矩阵 R 也不能太大，否则控制作用太小会影响控制性能。一般而言，矩阵 R 中对角线上的元素选为 1 比较合适（可以根据实际情况再进行合理的修改）。

程序的运行结果如下所示：

此系统是可控的！

>> K

K =

```

-22.3607  -37.9597  -197.9191  -26.0606   22.3607   277.4269
-22.3607  -37.9597  -197.9191  -26.0606  -22.3607  -277.4269

```

然后，利用 SIMULINK 对其进行仿真。

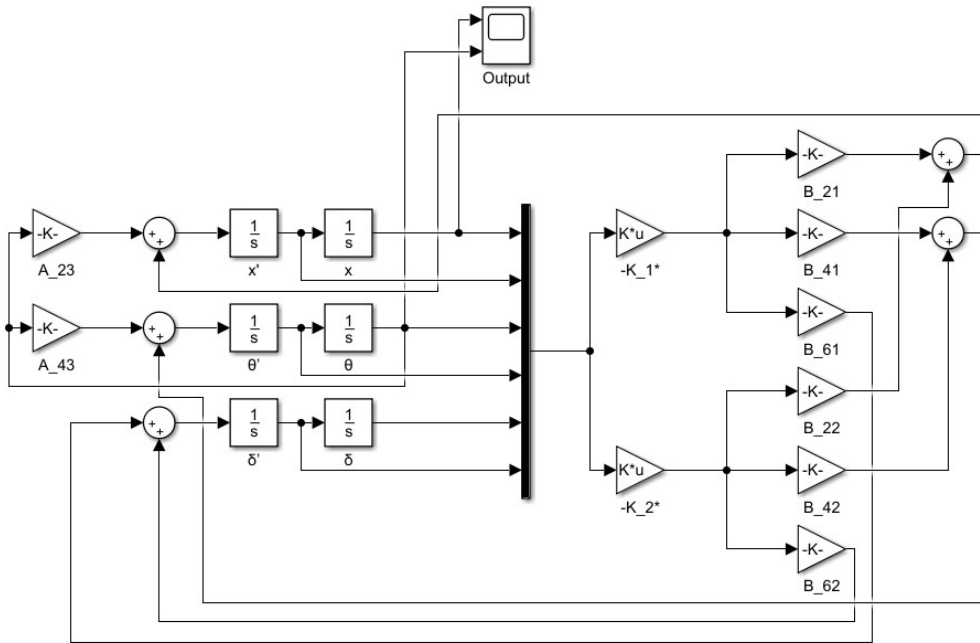


图 2-2 SIMULINK 仿真框图

仿真结果如下所示：

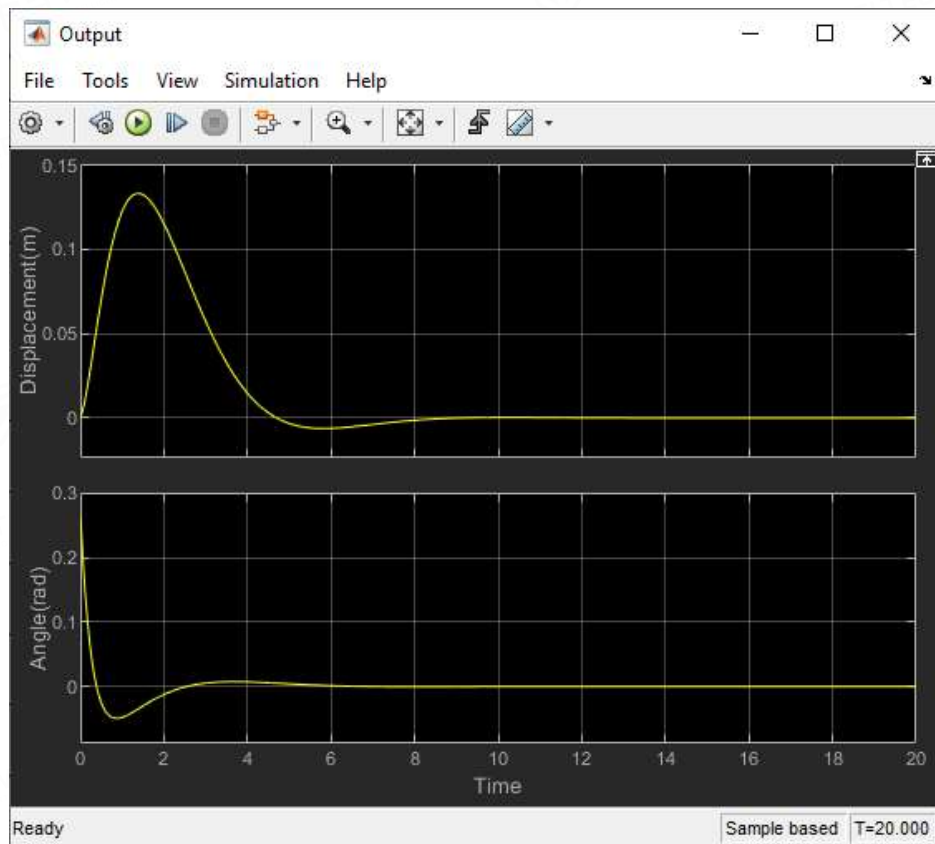


图 2-3 SIMULINK 仿真输出波形图

对应的 C 语言代码如下所示：

```
//计算输入变量
L_accel=-(K1*x_pose          +          K2*(x_speed-Target_x_speed)          +
K3*(angle_x-Target_angle_x) + K4*gyro_x + K5*angle_z + K6*(gyro_z-Target_gyro_z));
R_accel=-(K1*x_pose          +          K2*(x_speed-Target_x_speed)          +
K3*(angle_x-Target_angle_x) + K4*gyro_x - K5*angle_z - K6*(gyro_z-Target_gyro_z));
```

LQR 控制器的效果是使得所有的状态变量都变为 0，为了实现 App 控制的便捷，这里引入了 “Target_x_speed”，“Target_angle_x”，“Target_gyro_z”三个量，分别表示目标前进速度，校正后的平衡中值，目标转向速度。（以 App 控制小车前进为例，此时，我们的目标是使得 $x_speed=Target_x_speed \neq 0$ ，而 LQR 控制器的效果是使得所有的状态变量都变为 0，那么，可以把“ $x_speed-Target_x_speed$ ”作为新的状态变量，使它变为 0 即等价于使得 $x_speed=Target_x_speed$ 。）

2.3 总结

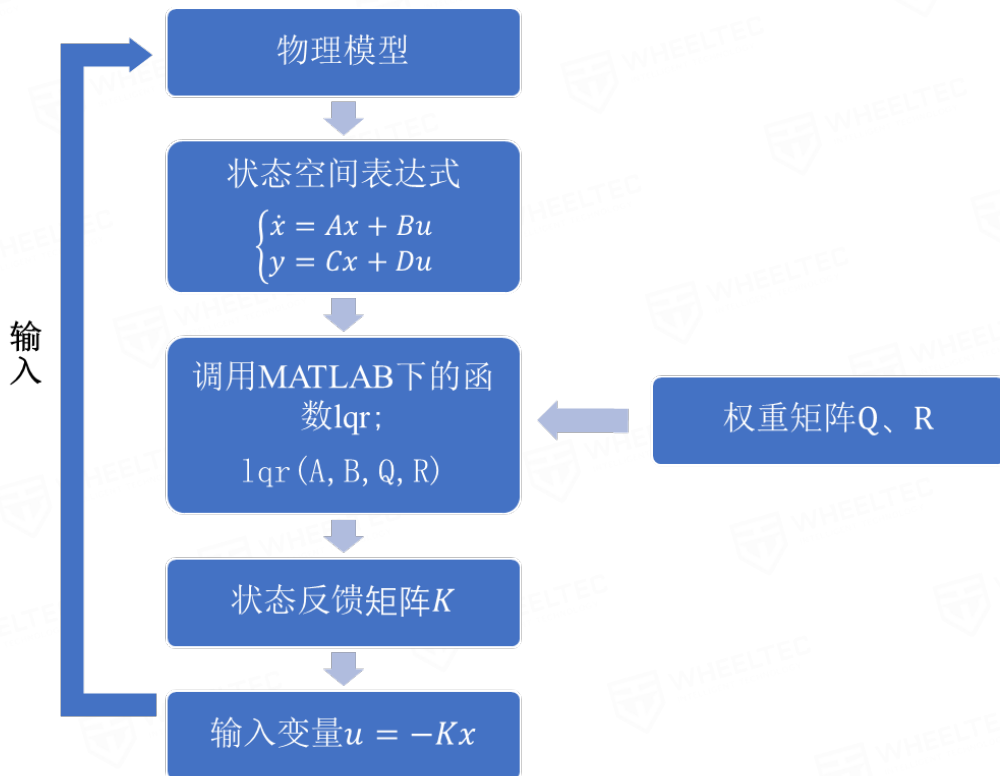


图 3-1 LQR 控制器的设计流程图

3. 参考文献

- [1] Felix Grasser, Aldo D'Arrigo, Silvio Colombi, Alfred Rufer. JOE: A Mobile, Inverted Pendulum. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol.49, No.1, February 2002.
- [2] 袁泽睿, 两轮自平衡机器人控制算法的研究[D]. 哈尔滨工业大学工学硕士学位论文, 2006.
- [3] 刘豹, 唐万生, 现代控制理论.3 版[M]. 机械工业出版社, 2006.