

轮 趣 科 技

WHEELTEC B570 平衡小车 运动学模型

推荐关注我们的公众号获取更新资料



版本说明：

版本	日期	内容说明
V1.0	2021/4/29	第一次发布

网址：www.wheeltec.net

目录

1. 小车运动学模型.....	3
1.1 车轮模型.....	3
1.2 车体模型.....	4

1. 小车运动学模型

两轮自平衡小车的结构主要由车体和双轮两部分组成，可以看成一个移动的倒立摆。下面分别对两轮自平衡小车的车轮和车体进行力学分析，建立数学模型，最后，通过对两者的分析给出系统的状态变量方程。

1.1 车轮模型

平衡车的运动是通过车轮转动来实现的，我们选用的是一对同轴安装，参数（质量、转动惯量、半径）相同的车轮。现在，以右轮为例进行受力分析，如图 1-1 所示。

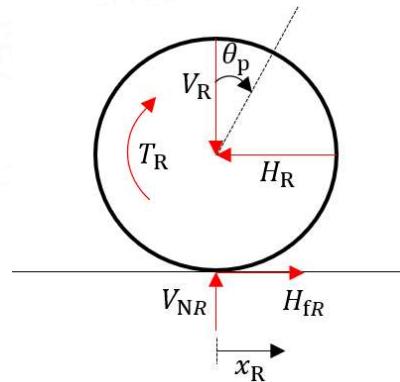


图 1-1 右轮受力分析

车轮的运动可分解为平动和转动，则由牛顿第二定律可得

$$m\ddot{x}_R = H_{fR} - H_R \quad (1)$$

由刚体定轴转动定律可得

$$I\ddot{\omega}_R = T_R - H_{fR}r \quad (2)$$

其中

m 车轮的质量(kg)

r 车轮的半径(m)

x_R 右轮的水平位移(m)

H_{fR} 右轮受到地面的摩擦力的大小(N)

H_R 右轮受到车体作用力的水平分力的大小(N)

T_R 右轮电机输出转矩的大小(N·m)

I 车轮的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

ω_R 右轮的角速度的大小(rad/s)

联立(1)和(2)，消去 H_{fR} ，可得

$$m\ddot{x}_R = \frac{T_R}{r} - \frac{I\ddot{\omega}_R}{r} - H_R \quad (3)$$

在车轮不打滑的情况下，车轮移动速度的大小和转动速度的大小成比例关系，即

$$\begin{cases} \omega_R = \frac{x_R}{r} \\ \dot{\omega}_R = \frac{\ddot{x}_R}{r} \end{cases} \quad (4)$$

将方程(4)代入(3)中，可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}_R = \frac{T_R}{r} - H_R \quad (5)$$

由于左右轮参数相等，则对左轮也可以得到相似的结果，即

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}_L = \frac{T_L}{r} - H_L \quad (6)$$

1.2 车体模型

与车轮的运动类似，车体的运动也可以分解为正向运动（前向、俯仰）和侧向运动（转向、偏航）。其中，偏航运动可以看成是转向运动的特殊情况，因此下面主要分析车体的正向运动和转向运动。

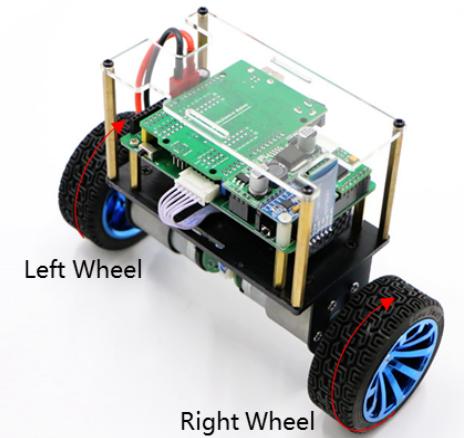


图 1-2 小车实物图

(1) 正向运动

为了易于分析，不妨对车体模型进行简化，简化后的模型如图 1-3 所示。

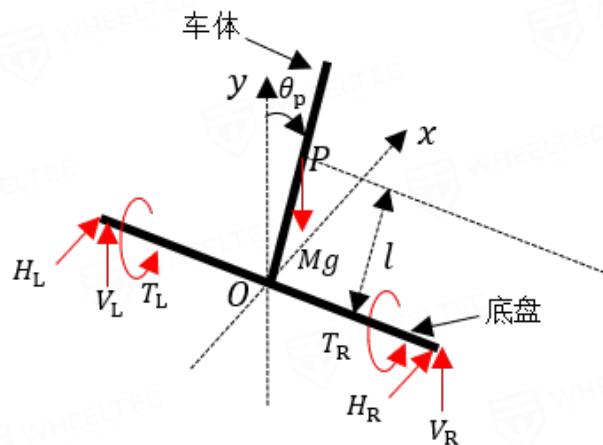


图 1-3 车体简化模型

小车的正向运动可以分解为前向运动和绕车体质心P的相对转动（俯仰）。由于小车在做前向运动的时候，左右轮的速度相同，则小车底盘中心O的水平位移为

$$x = x_L = x_R = \frac{x_L + x_R}{2} \quad (7)$$

将方程(5)和(6)相加后，等式两边除以2可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \frac{\ddot{x}_L + \ddot{x}_R}{2} = \frac{T_L + T_R}{2r} - \frac{H_L + H_R}{2} \quad (8)$$

联立方程(7)(8)可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{2r} - \frac{H_L + H_R}{2} \quad (9)$$

对车体，由牛顿第二定律可得

在水平方向上，有

$$M \frac{d(x + l \sin \theta_P)}{dt^2} = H_L + H_R \quad (10)$$

在竖直方向上，有

$$M \frac{d(l \cos \theta_P)}{dt^2} = V_L + V_R - Mg \quad (11)$$

对车体，由刚体定轴转动定律可得

$$J_P \ddot{\theta}_P = (V_L + V_R)l \sin \theta_P - (H_L + H_R)l \cos \theta_P - (T_L + T_R) \quad (12)$$

其中

M 车体的质量(kg)

l 质心距底盘中心的距离(m)

J_P 车体绕质心转动时的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

θ_P 车体与竖直方向所成的夹角(rad)

联立方程(9)(10)可得

$$\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right) \ddot{x} - \frac{T_L + T_R}{r} + Ml \ddot{\theta}_P \cos \theta_P - Ml \dot{\theta}_P^2 \sin \theta_P = 0 \quad (13)$$

因为该方程含有非线性项，因此，要进行线性化。考虑到车体的倾角比较小（通常情况下， $-10^\circ \leq \theta_P \leq 10^\circ$ ），则可以认为

$$\begin{cases} \cos \theta_P = 1 \\ \sin \theta_P = \theta_P \\ \dot{\theta}_P^2 = 0 \end{cases}$$

故方程(13)变为

$$\ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)r} - \frac{Ml}{\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)} \ddot{\theta}_P \quad (14)$$

将方程(10)和(11)代入方程(12)中，可得

$$\left(\frac{J_P}{Ml} + l\right) \ddot{\theta}_P + \ddot{x} \cos \theta_P - g \sin \theta_P + \frac{T_L + T_R}{Ml} = 0 \quad (15)$$

类似的，对方程(15)进行线性化可得

$$\ddot{\theta}_P = \frac{Mlg}{(J_P + Ml^2)} \theta_P - \frac{Ml}{(J_P + Ml^2)} \ddot{x} - \frac{T_L + T_R}{(J_P + Ml^2)} \quad (16)$$

将方程(16)代入方程(14)中，消去 $\ddot{\theta}_P$ ，可得

$$\ddot{x} = -\frac{M^2 l^2 g}{Q_{eq}} \theta_P + \frac{J_P + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r} (T_L + T_R) \quad (17)$$

式中

$$Q_{eq} = J_P M + (J_P + Ml^2) \left(2m + \frac{2I}{r^2} \right).$$

将方程(14)代入方程(16)中，消去 \ddot{x} ，可得

$$\dot{\theta}_P = \frac{Mlg \left(M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} \theta_P - \frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} (T_L + T_R) \quad (18)$$

式中

$$Q_{eq} = J_P M + (J_P + Ml^2) \left(2m + \frac{2I}{r^2} \right).$$

综上所述，对于正向运动有

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{M^2 l^2 g}{Q_{eq}} \theta_P + \frac{J_P + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r} (T_L + T_R) \\ \dot{\theta}_P = \frac{Mlg \left(M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} \theta_P - \frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}} (T_L + T_R) \end{cases} \quad (19)$$

式中

$$Q_{eq} = J_P M + (J_P + Ml^2) \left(2m + \frac{2I}{r^2} \right).$$

(2) 转向运动

与正向运动类似，我们也可以建立简化后的转向运动模型，如图 1-4 所示。

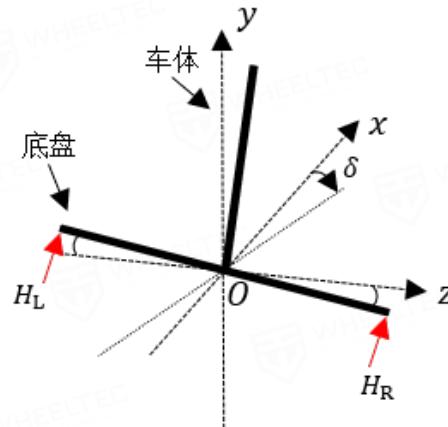


图 1-4 转向简化模型

转向运动是由于左右两轮从水平方向上施加给车体的反作用力的大小 H_L 和 H_R 不相等引起的，则由刚体定轴转动定律可得

$$J_\delta \ddot{\delta} = \frac{d}{2} (H_L - H_R) \quad (20)$$

其中

d 左右两轮的距离(m)

J_δ 车体绕y轴转动时的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

δ 小车的偏航角(rad)

将方程(5)和(6)相减后可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)(\ddot{x}_L - \ddot{x}_R) = \frac{T_L - T_R}{r} - (H_L - H_R) \quad (21)$$

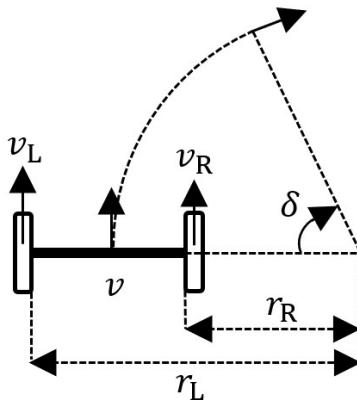


图 1-5 小车转向示意图

当左右两轮运动速度不相等时，小车身转向，如图 5 所示。由几何关系可得

$$\begin{cases} \dot{x}_L = \delta r_L \\ \dot{x}_R = \dot{\delta} r_R \\ r_L = r_R + d \end{cases} \quad (22)$$

解得

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{x}_L - \dot{x}_R}{d} \quad (23)$$

由式(23)进一步可得

$$\ddot{\delta} = \frac{\ddot{x}_L - \ddot{x}_R}{d} \quad (24)$$

联立方程(20)(21)(24)可得

$$\ddot{\delta} = \frac{1}{r \left(md + \frac{I_d}{r^2} + \frac{2J\delta}{d} \right)} (T_L - T_R) \quad (25)$$

由方程(19)和(25)可得系统的状态变量方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_P \\ \ddot{\theta}_P \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_P \\ \dot{\theta}_P \\ \delta \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_L \\ T_R \end{pmatrix} \quad (26)$$

式中

$$A_{23} = -\frac{M^2 l^2 g}{Q_{eq}} \quad A_{43} = \frac{M l g \left(M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right)}{Q_{eq}}$$

$$B_{21} = \frac{J_p + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r} \quad B_{22} = \frac{J_p + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r}$$

$$B_{31} = -\frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)}{Q_{eq}} \quad B_{32} = -\frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)}{Q_{eq}}$$

$$B_{61} = -\frac{1}{r \left(md + \frac{Id}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d} \right)} \quad B_{62} = -\frac{1}{r \left(md + \frac{Id}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d} \right)}$$

其中

$$Q_{eq} = J_p M + (J_p + Ml^2) \left(2m + \frac{2I}{r^2} \right).$$

状态变量 $(x \ \dot{x} \ \theta_p \ \dot{\theta}_p \ \delta \ \dot{\delta})^T$ 分别表示小车的位移，小车的前进速度，车体的倾角，车体的角速度，小车的转向角以及转向角速度。