

第三章 高斯滤波

1. 一维线性运动的汽车，位置、速度、加速度满足均值为零，协方差为1的高斯分布，时间间隔为1，假定可以设定每个时刻的加速度

a) 最小的系统状态向量是什么

由于加速度可以设定，应当做控制变量，所以最小状态向量是位置和速度，如下

$$X = [x_t \quad \dot{x}_t]^T \quad (1)$$

b) 设计状态转移概率 $p(x_t | u_t, x_{t-1})$

由于没有观测步骤，所以直接考虑预测步骤，根据位置、速度、加速度的关系，可以得到状态转移方程为

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + \epsilon_t \quad (2)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$
$$B = \begin{bmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

而 ϵ_t 由加速度产生，所以协方差矩阵 R 满足

$$R = \sigma^2 BB^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

c) 假设 $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ，求 $t = 1, 2, 3, 4, 5$ 的状态分布

由于没有观测步骤，所以

$$\begin{aligned} \mu_t &= \bar{\mu}_t \\ \Sigma_t &= \bar{\Sigma}_t \end{aligned} \quad (5)$$

根据

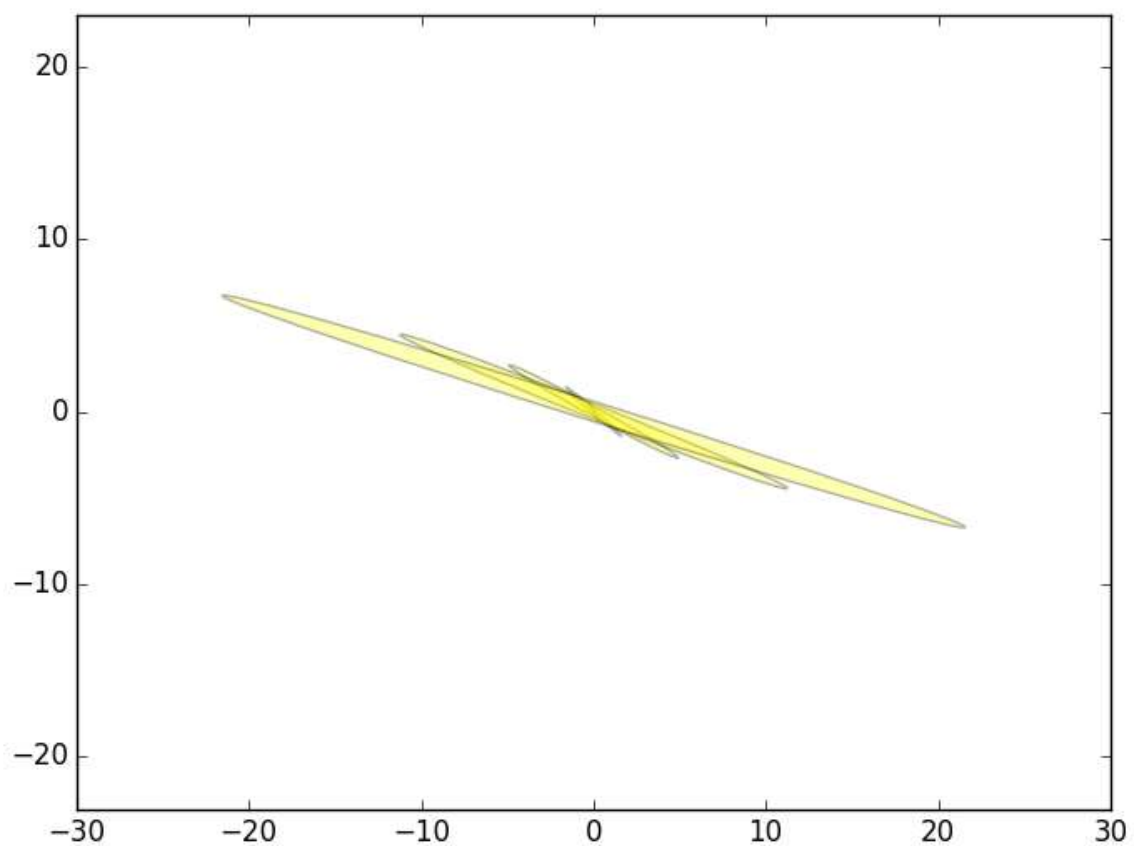
$$\begin{aligned} \bar{\mu}_t &= A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t &= A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{aligned} \quad (6)$$

计算结果如下表所示

t	μ_t	Σ_t
0	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$
2	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 2.5 & 2.0 \\ 2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$
3	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 8.75 & 4.5 \\ 4.5 & 3.0 \end{bmatrix}$
4	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 21.0 & 8.0 \\ 8.0 & 4.0 \end{bmatrix}$
5	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 41.25 & 12.5 \\ 12.5 & 5.0 \end{bmatrix}$

d) 将协方差矩阵绘制为不确定椭圆

绘制各时刻不确定椭圆如下



e) 随着 $t \rightarrow \infty$ ，位置和速度之间的关系会如何变化

根据变化趋势，不确定椭圆会越来越大，最终位置不确定性占主导

2. 加入观测步骤，假设时刻 t 测量位置为 z ，噪声方差为 $\sigma^2 = 10$

a) 求观测矩阵和观测方差

观测方程为

$$z_t = Cx_t + \delta_t \quad (7)$$

其中

$$C = [1 \quad 0] \quad (8)$$

$$Q_t = \sigma_z^2 CC^T = 10$$

b) 实现测量更新，假设 $t = 5$ 时，观测 $z = 5$ ，计算更新前后卡尔曼滤波的参数

根据第一题可以知道

$$\bar{\mu}_5 = [0 \quad 0]^T \quad (9)$$

$$\bar{\Sigma}_5 = \begin{bmatrix} 41.25 & 12.5 \\ 12.5 & 5.0 \end{bmatrix}$$

根据程序3.1，可以计算卡尔曼增益以及观测更新

$$K_5 = \bar{\Sigma}_5 C_5^T (C_5 \bar{\Sigma}_5 C_5^T + Q_t)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8049 \\ 0.2439 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mu_5 = \bar{\mu}_5 + K_5(z_5 - C_5 \bar{\mu}_5) = \begin{bmatrix} 4.0244 \\ 1.220 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_5 = (I - K_5 C_5) \bar{\Sigma}_5 = \begin{bmatrix} 8.0488 & 2.4390 \\ 2.4390 & 1.9512 \end{bmatrix}$$

观测更新后的不确定椭圆如蓝色区域所示，说明经过观测后，系统的不确定性得到了降低。

