

第二章 递归状态估计

于小咸

1.

这道题目与2.4.2的例题很相似，练习离散贝叶斯滤波的使用。根据题意可知：

$$bel(X_0 = broken) = 0.01 \quad (1)$$

$$bel(X_0 = not_broken) = 0.99 \quad (2)$$

$$p(Z_t < 1 | X_t = broken) = 1 \quad (3)$$

$$p(Z_t < 1 | X_t = not_broken) = 1/3 \quad (4)$$

其中 Z_t 表示 t 时刻距离传感器的测量值，在 $0 \sim 3m$ 范围内连续取值； X_t 表示距离传感器的状态，取值为离散的 $broken$, not_broken 。

下面根据贝叶斯滤波算法进行计算，由于这道题中没有对距离传感器进行任何控制，因此贝叶斯滤波的第一步（预测）并不改变系统状态的置信度：

$$\bar{bel}(X_t) = bel(X_{t-1}) \quad (5)$$

贝叶斯滤波的第二步（观测），题干中介绍到 $Z_t < 1$ ，于是有以下递推式

$$bel(X_t = broken) = \eta p(Z_t < 1 | X_t = broken) \bar{bel}(X_t = broken) \quad (6)$$

$$bel(X_t = not_broken) = \eta p(Z_t < 1 | X_t = not_broken) \bar{bel}(X_t = not_broken) \quad (7)$$

其中 η 为归一化因子

$$\eta = [p(Z_t < 1 | X_t = broken) \bar{bel}(X_t = broken) + p(Z_t < 1 | X_t = not_broken) \bar{bel}(X_t = not_broken)]^{-1} \quad (8)$$

对以上5、6、7式代入先验初值1、2进行迭代，即可得到各个时刻距离传感器故障的概率如下

时刻	$bel(X_t = broken Z_t < 1)$	$bel(X_t = not_broken Z_t < 1)$	η
0	0.01	0.99	
1	0.029411764705882353	0.9705882352941176	2.941176470588235
2	0.08333333333333333	0.9166666666666666	2.833333333333333
3	0.2142857142857143	0.7857142857142857	2.5714285714285716
4	0.45000000000000007	0.55	2.1
5	0.7105263157894737	0.2894736842105263	1.5789473684210524
6	0.8804347826086958	0.11956521739130438	1.2391304347826089
7	0.9566929133858267	0.043307086614173235	1.0866141732283463
8	0.9851351351351351	0.014864864864864866	1.0297297297297296
9	0.9949954504094631	0.0050045495905368526	1.0100090991810737
10	0.9983262325015215	0.0016737674984783934	1.0033475349969567

最后推导公式：

$$\begin{aligned}bel(X_t = broken) &= \eta_t \times 1 \times bel(X_{t-1} = broken) \\&= \eta_t \eta_{t-1} \times 1 \times bel(X_{t-2} = broken) \\&= \prod_{i=0}^n \eta_i bel(X_0 = broken)\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}bel(X_t = not_broken) &= \eta_t \times \frac{1}{3} \times bel(X_{t-1} = not_broken) \\&= \eta_t \eta_{t-1} \times \frac{1}{3} \times bel(X_{t-2} = broken) \\&= \prod_{i=0}^n \eta_i \times \frac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not_broken)\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $\prod_{i=0}^n \eta_i$ 满足归一化要求，即

$$\prod_{i=0}^n \eta_i = [bel(X_0 = broken) + \frac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not_broken)]^{-1}\tag{11}$$

因此，传感器失效的概率为

$$bel(X_t = broken) = \frac{bel(X_0 = broken)}{bel(X_0 = broken) + \frac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not_broken)}\tag{12}$$

2. 已知天气状态转移矩阵

	晴（明天）	多云	雨
晴（今天）	0.8	0.2	0
多云（今天）	0.4	0.4	0.2
雨（今天）	0.2	0.6	0.2

a) 第一天是晴天，求接下来三天是多云、多云、雨的概率

可以通过贝叶斯公式得到

$$\begin{aligned} P(X_4 = \text{rainy}) &= P(X_4 = \text{rainy} | X_3 = \text{cloudy}) P(X_3 = \text{cloudy}) \\ &= P(X_4 = \text{rainy} | X_3 = \text{cloudy}) P(X_3 = \text{cloudy} | X_2 = \text{cloudy}) \\ &\quad P(X_2 = \text{cloudy} | X_1 = \text{sunny}) P(X_1 = \text{sunny}) \\ &= 0.2 \times 0.4 \times 0.2 \\ &= 0.016 \end{aligned} \quad (13)$$

b) 编程随机产生天气序列的仿真器

c) 计算平稳分布

首先需要知道平稳分布的定义，根据[维基百科](#)的介绍，平稳分布是指不随时间变化的状态分布，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n X_0 \quad (14)$$

使用b)中设计的随机天气序列仿真器，在天气序列足够长时，天气出现的频率就是平稳分布的概率，计算得到

$$P_{\text{static}} = [0.6430726, 0.2855164, 0.071411]^T \quad (15)$$

d) 通过公式计算平稳分布

根据平稳分布的定义，我们要求的其实是状态转移矩阵的特征值1对应的特征向量

$$Ax = x \quad (16)$$

这里我们采用偷懒的方法，使用[矩阵特征向量在线计算工具](#)，计算得到特征向量为

$$[9, 4, 1]^T \quad (17)$$

对该向量进行概率归一化得到

$$P_{\text{static}} = [9/14, 2/7, 1/14]^T \quad (18)$$

f) 计算给定今天天气时，昨天天气的概率表

需要计算以下条件概率

$$\begin{aligned} P(X_{t-1} = i | X_t = j) &= \frac{P(X_t = j | X_{t-1} = i) P(X_{t-1} = i)}{P(X_t = j)} \\ P(X_t = j) &= \sum_i^3 P(X_t = j | X_{t-1} = i) P(X_{t-1} = i) \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $P(X_{t-1} = i)$ 作为先验概率，由平稳分布给出，从而计算得出概率表

	晴（今天）	多云	雨
晴（昨天）	0.8	0.45	0
多云	8/45	0.4	0.8
雨	1/45	0.15	0.2

g) 如果天气状态转移概率与季节相关，这个过程还满足马尔科夫特性吗

不满足。马尔科夫特性要求，当前时刻的系统状态只与上一时刻的系统状态有关，与其他变量无关。如果引入季节这一变量，就会破坏马尔科夫特性。但是在一个季节内，状态转移矩阵不发生变化，该过程依然保持马尔科夫特性。

3. 若有传感器观测矩阵

	晴（实际）	多云（实际）	雨（实际）
晴（观测）	0.6	0.3	0
多云（观测）	0.4	0.7	0
雨（观测）	0	0	1

a) 已知第一天是晴天，2~5天观测到为多云，多云，雨，晴，求第五天是晴天的概率

由第二题可知状态转移矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(20)

由本题题干可知观测矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(21)

根据贝叶斯准则

$$\bar{bel}(x_t|x_{t-1}) = A \cdot bel(x_{t-1})$$

(22)

$$bel(X_t = i|Z_t = j) = \eta P(Z_t = j|X_t = i)P(X_t = i)$$

(23)

$$\eta = (\sum_{i=1}^n P(Z_t = j|X_t = i)P(X_t = i))^{-1}$$

(24)

初值和观测序列

$$\begin{aligned} bel(x_1) &= [1 \ 0 \ 0]^T \\ z_2 = cloudy, z_3 = cloudy, z_4 = rainy, z_5 = sunny \end{aligned} \quad (25)$$

迭代计算可得

	z_t	$\bar{bel}(x_t)$	$bel(x_t)$	η
1		$[1 \ 0 \ 0]^T$	$[1 \ 0 \ 0]^T$	1
2	cloudy	$[0.8 \ 0.2 \ 0]^T$	$[16/23 \ 7/23 \ 0]^T$	50/23
3	cloudy	$[78/115 \ 30/115 \ 7/115]^T$	$[312/522 \ 210/522 \ 0]^T$	1150/522
4	rainy	$[0.6390 \ 0.2805 \ 0.0805]^T$	$[0 \ 0 \ 1]^T$	124.2857
5	sunny	$[0.2 \ 0.6 \ 0.2]^T$	$[0.4 \ 0.6 \ 0.0]^T$	3.3333

由上面结果可得，第五天是晴天的概率为0.4

b) 当2~4天的观测序列为晴，晴，雨时，用两种方式讨论最有可能的天气序列：1) 考虑当天以及之前的观测结果；2) 统一考虑所有天气

根据a)中的方法，当观测序列为晴、晴、雨时，最有可能的天气序列为

日期	天气	概率
1	晴	1.0
2	晴	0.8889
3	晴	0.8718
4	雨	1.0

统一考虑所有天气时

$$\begin{aligned} P(X_2 = i | z_{2:4}) &= \eta P(Z_2 = sunny | X_2 = i, z_{3:4}) P(X_2 = i | z_{3:4}) \\ &= \eta P(Z_2 = sunny | X_2 = i) P(X_2 = i | z_{3:4}) \\ &= \eta P(Z_2 = sunny | X_2 = i) P(Z_3 = sunny | X_2 = i, z_4) P(X_2 = i | z_4) \quad (26) \\ &= \eta P(Z_2 = sunny | X_2 = i) P(Z_3 = sunny | X_2 = i) \\ &\quad \times P(Z_4 = rainy | X_2 = i) P(X_2 = i | z_2) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} P(Z_3 = sunny | X_2 = i) &= \sum_{j=1}^n P(Z_3 = sunny | X_3 = j, X_2 = i) P(X_3 = j | X_2 = i) \\ &= (CA)_{1,i} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} P(Z_4 = rainy | X_2 = i) &= \sum_{j=1}^n P(Z_4 = rainy | X_4 = j, X_2 = i) P(X_4 = j | X_2 = i) \\ &= \sum_{j=1}^n P(Z_4 = rainy | X_4 = j) \sum_{k=1}^n P(X_4 = j | X_3 = k) P(X_3 = k | X_2 = i) \quad (28) \\ &= (CAA)_{3,i} \end{aligned}$$

同理可得第3天和第4天的概率

$$\begin{aligned}P(X_3 = i|z_{2:4}) &= P(Z_4 = \text{rainy}|X_3 = i)P(X_3 = i|z_{2:3}) \\&= (CA)_{3,i}P(X_3 = i|z_{2:3})\end{aligned}\quad (29)$$

其中 $P(X_3 = i|z_{2:3})$ 和 $P(X_4 = i|z_{2:4})$ 已经在前一小问中求得，汇总得到2~4天的天气概率

日期	天气	概率
1	晴	1
2	晴	0.8
3	多云	1
4	雨	1

c) 若第2~4天的天气测量分别为晴，晴，雨，那么最有可能的天气序列是什么，该天气序列的概率是多少

根据b)的解答，最可能的天气序列为晴、多云、雨，该序列概率为每天概率的乘积，为0.8。

我们会发现，综合考虑全序列的传感器数据，和只考虑当天的观测数据，得到的天气序列的预测是不同的。根据状态转移矩阵，不存在由晴天变成雨天的转换，而第三天为雨天的概率为1，所以虽然第三天传感器检测为晴天，但综合考虑第四天的概率后，第三天的天气应为雨天。这道题使用简单的对比，向我们形象地说明：如果采用全时间序列的观测信息，能够得到更加准确的后验概率估计。

4. 考虑一维高斯分布，初始位置 $x_{init} = 1000m$ ，方差 $\sigma_{init}^2 = 900m^2$ ，观测位置 $x_{GPS} = 1100m$ ，方差 $\sigma_{GPS}^2 = 100m^2$

a) 写出先验 $p(x)$ 和观测 $p(z|x)$ 的概率密度函数

根据高斯分布公式可得

$$\begin{aligned}p(x) &= 1/\sqrt{2\pi\sigma_{init}^2} \cdot e^{-\frac{(x-x_{init})^2}{2\sigma_{init}^2}} \\p(z|x) &= 1/\sqrt{2\pi\sigma_{GPS}^2} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_{GPS}^2}}\end{aligned}\quad (30)$$

b) 使用贝叶斯准则，后验概率 $p(x|z)$ 是多少，能证明该分布是高斯吗

根据贝叶斯准则

$$p(x|z) = \frac{p(z|x)p(x)}{p(z)}\quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned}
p(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(z|x)p(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 1/\sqrt{2\pi\sigma_{init}^2} \cdot e^{-\frac{(x-x_{init})^2}{2\sigma_{init}^2}} \cdot 1/\sqrt{2\pi\sigma_{GPS}^2} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_{GPS}^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_{init}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{(x-x_{init})^2}{2\sigma_{init}^2} - \frac{(z-x)^2}{2\sigma_{GPS}^2}} dx
\end{aligned} \tag{32}$$

对指数二项式进行分析

$$\begin{aligned}
(x - x_{init})^2 2\sigma_{init}^2 + \frac{(z-x)^2}{2\sigma_{GPS}^2} &= \frac{x^2 - 2xx_{init} + x_{init}^2}{18\sigma_{GPS}^2} + \frac{z^2 - 2xz + x^2}{2\sigma_{GPS}^2} \\
&= \frac{10(x^2 - 2x(\frac{x_{init}+9z}{10}) + (\frac{x_{init}+9z}{10})^2)}{18\sigma_{GPS}^2} + \frac{9z^2 + x_{init}^2 - \frac{(x_{init}+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}
\end{aligned} \tag{33}$$

第一项是x的函数，可以写成正态分布的形式，第二项与x无关，可从积分式内提取出来，计算得到

$$\begin{aligned}
p(z) &= \frac{1}{2\pi\sigma_{init}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{9z^2 + x_{init}^2 - \frac{(x_{init}+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}} \cdot \sqrt{2\pi}\sqrt{9/10}\sigma_{GPS} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{10}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{9z^2 + x_{init}^2 - \frac{(x_{init}+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}}
\end{aligned} \tag{34}$$

那么后验的分布为

$$\begin{aligned}
p(z|x) &= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_{init}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{10(x^2 - 2x(\frac{x_{init}+9z}{10}) + (\frac{x_{init}+9z}{10})^2)}{18\sigma_{GPS}^2} - \frac{9z^2 + x_{init}^2 - \frac{(x_{init}+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{10}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{9z^2 + x_{init}^2 - \frac{(x_{init}+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{9/10}\sigma_{GPS}} e^{-\frac{(x - \frac{9z+x_{init}}{10})^2}{2 \times 9/10\sigma_{GPS}^2}}
\end{aligned} \tag{35}$$

是满足正态分布 $p(x|z) \sim N(\frac{9z+x_{init}}{10}, 9/10\sigma_{GPS}^2)$

c) 测量 $x_{GPS} = 1100m$ 怎样得出先验和GPS接收器的误差概率信息

不是很理解这道题目需要什么，这里大胆猜测一下，是对GPS接收器进行误差分析，问的是怎样获取GPS接收器的值和方差，GPS的先验数据经过滤波得到，误差信息通过对时间统计得到。

5. 由式 (2.17) 推导 (2.18) 和 (2.19) ， 以及本书叙述的概率准则

根据式 (2.17) $p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z)$ 可得

$$p(x|z) = \frac{p(x, y|z)}{p(y|z)} = \frac{p(x|z)p(y|z)}{p(y|z)} = p(x|y, z) \quad (36)$$

$$p(y|z) = \frac{p(x, y|z)}{p(x|z)} = p(y|x, z) \quad (37)$$

根据一阶马尔科夫假设，当前观测只与系统当前状态 x_t 相关，与其他变量相互独立，于是可以得到

$$p(z_i | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) = p(z_i | x_t) \quad (38)$$

6. 证明式 (2.25) ， 这个等式的意义是什么

根据期望的性质

$$\begin{aligned} Cov[X] &= E[X - E[X]]^2 \\ &= E[X^2 - 2X \cdot E[X] + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned} \quad (39)$$

这说明方差是协方差的特殊形式，对于多元分布而言，协方差是一个方阵。