# 第二章 递归状态估计

于小咸

## 1.

这道题目与2.4.2 的例题很相似，练习离散贝叶斯滤波的使用。根据题意可知：

$$
\begin{aligned}
bel(X_0 = broken) &= 0.01 \quad (1)\\
bel(X_0 = not\_broken) &= 0.99 \quad (2)\\
p(Z_t < 1|X_t = broken) &= 1 \quad (3)\\
p(Z_t < 1|X_t = not\_broken) &= 1/3 \quad (4)
\end{aligned}
$$

其中 $Z_t$ 表示 $t$ 时刻距离传感器的测量值，在 $0$ ~ $3m$ 范围内连续取值；$X_t$ 表示距离传感器的状态，取值为离散的 $broken$ ，$not\_broken$。

下面根据贝叶斯滤波算法进行计算，由于这道题中没有对距离传感器进行任何控制，因此贝叶斯滤波的第一步（预测）并不改变系统状态的置信度：

$$
\bar{bel}(X_t) = bel(X_{t-1}) \quad (5)
$$

贝叶斯滤波的第二步（观测），题干中介绍到$Z_t < 1$，于是有以下递推式

$$
\begin{aligned}
bel(X_t = broken) &= \eta p(Z_t < 1|X_t = broken)\bar{bel}(X_t = broken) \quad (6)\\
bel(X_t = not\_broken) &= \eta p(Z_t < 1|X_t = not\_broken)\bar{bel}(X_t = not\_broken) \quad (7)
\end{aligned}
$$

其中 $\eta$ 为归一化因子

$$
\begin{aligned}
\eta = [&p(Z_t < 1|X_t = broken)\bar{bel}(X_t = broken) + \\
&p(Z_t < 1|X_t = not\_broken)\bar{bel}(X_t = not\_broken)]^{-1} \quad (8)
\end{aligned}
$$

对以上5、6、7式代入先验初值1、2进行迭代，即可得到各个时刻距离传感器故障的概率如下

| 时刻 | $bel(X_t = broken \| Z_t < 1)$ | $bel(X_t = not\_broken \| Z_t < 1)$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.01 | 0.99 | |
| 1 | 0.029411764705882353 | 0.9705882352941176 | 2.941176470588235 |
| 2 | 0.08333333333333333 | 0.9166666666666666 | 2.833333333333333 |
| 3 | 0.2142857142857143 | 0.7857142857142857 | 2.5714285714285716 |
| 4 | 0.45000000000000007 | 0.55 | 2.1 |
| 5 | 0.7105263157894737 | 0.2894736842105263 | 1.5789473684210524 |
| 6 | 0.8804347826086958 | 0.11956521739130438 | 1.2391304347826089 |
| 7 | 0.9566929133858267 | 0.043307086614173235 | 1.0866141732283463 |
| 8 | 0.9851351351351351 | 0.014864864864864866 | 1.0297297297297296 |
| 9 | 0.9949954504094631 | 0.0050045495905368526 | 1.0100090991810737 |
| 10 | 0.9983262325015215 | 0.0016737674984783934 | 1.0033475349969567 |

最后推导公式：

$$\begin{aligned} bel(X_t = broken) &= \eta_t \times 1 \times bel(X_{t-1} = broken) \\ &= \eta_t \eta_{t-1} \times 1 \times bel(X_{t-2} = broken) \\ &= \textstyle\prod_{i=0}^{n} \eta_i bel(X_0 = broken) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} bel(X_t = not\_broken) &= \eta_t \times \tfrac{1}{3} \times bel(X_{t-1} = not\_broken) \\ &= \eta_t \eta_{t-1} \times \tfrac{1}{3} \times bel(X_{t-2} = broken) \\ &= \textstyle\prod_{i=0}^{n} \eta_i \times \tfrac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not\_broken) \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\prod_{i=0}^{n} \eta_i$ 满足归一化要求，即

$$\prod_{i=0}^{n} \eta_i = [bel(X_0 = broken) + \frac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not\_broken)]^{-1} \tag{11}$$

因此，传感器失效的概率为

$$bel(X_t = broken) = \frac{bel(X_0 = broken)}{bel(X_0 = broken) + \frac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not\_broken)} \tag{12}$$

## 2. 已知天气状态转移矩阵

| | 晴（明天） | 多云 | 雨 |
|---|---|---|---|
| 晴（今天） | 0.8 | 0.2 | 0 |
| 多云（今天） | 0.4 | 0.4 | 0.2 |
| 雨（今天） | 0.2 | 0.6 | 0.2 |

## a) 第一天是晴天，求接下来三天是多云、多云、雨的概率

可以通过贝叶斯公式得到

$$\begin{aligned}(X_4 = rainy) &= P(X_4 = rainy|X_3 = cloudy)P(X_3 = cloudy) \\ &= P(X_4 = rainy|X_3 = cloudy)P(X_3 = cloudy|X_2 = cloudy) \\ &P(X_2 = cloudy|X_1 = sunny)P(X_1 = sunny) \\ &= 0.2 \times 0.4 \times 0.2 \\ &= 0.016\end{aligned} \tag{13}$$

## b)编程随机产生天气序列的仿真器

## c)计算平稳分布

首先需要知道平稳分布的定义，根据维基百科的介绍，平稳分布是指不随时间变化的状态分布，即

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} A^n X_0 \tag{14}$$

使用b) 中设计的随机天气序列仿真器，在天气序列足够长时，天气出现的频率就是平稳分布的概率，计算得到

$$P_{static} = [0.6430726, 0.2855164, 0.071411]^T \tag{15}$$

## d)通过公式计算平稳分布

根据平稳分布的定义，我们需要求的其实是状态转移矩阵的特征值1对应的特征向量

$$Ax = x \tag{16}$$

这里我们采用偷懒的方法，使用矩阵特征向量在线计算工具，计算得到特征向量为

$$[9, 4, 1]^T \tag{17}$$

对该向量进行概率归一化得到

$$P_{static} = [9/14, 2/7, 1/14]^T \tag{18}$$

## f) 计算给定今天天气时，昨天天气的概率表

需要计算以下条件概率

$$P(X_{t-1} = i|X_t = j) = \frac{P(X_t = j|X_{t-1} = i)P(X_{t-1} = i)}{P(X_t = j)} \tag{19}$$

$$P(X_t = j) = \sum_{i}^{3} P(X_t = j|X_{t-1} = i)P(X_{t-1} = i)$$

其中$P(X_{t-1} = i)$作为先验概率，由平稳分布给出，从而计算得出概率表

| | 晴（今天） | 多云 | 雨 |
|---|---|---|---|
| 晴（昨天） | 0.8 | 0.45 | 0 |
| 多云 | $8/45$ | 0.4 | 0.8 |
| 雨 | $1/45$ | 0.15 | 0.2 |

### g) 如果天气状态转移概率与季节相关，这个过程还满足马尔科夫特性吗

不满足。马尔科夫特性要求，当前时刻的系统状态只与上一时刻的系统状态有关，与其他变量无关。如果引入季节这一变量，就会破坏马尔科夫特性。但是在一个季节内，状态转移矩阵不发生变化，该过程依然保持马尔科夫特性。

## 3.

## 4.

## 5.

## 6.