

第三章 高斯滤波

1. 一维线性运动的汽车，位置、速度、加速度满足均值为零，协方差为1的高斯分布，时间间隔为1，假定可以设定每个时刻的加速度

a) 最小的系统状态向量是什么

由于加速度可以设定，应当做控制变量，所以最小状态向量是位置和速度，如下

$$X = [x_t \quad \dot{x}_t]^T \quad (1)$$

b) 设计状态转移概率 $p(x_t | u_t, x_{t-1})$

由于没有观测步骤，所以直接考虑预测步骤，根据位置、速度、加速度的关系，可以得到状态转移方程为

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + \epsilon_t \quad (2)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$
$$B = \begin{bmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

而 ϵ_t 由加速度产生，所以协方差矩阵 R 满足

$$R = \sigma^2 BB^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

c) 假设 $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ，求 $t = 1, 2, 3, 4, 5$ 的状态分布

由于没有观测步骤，所以

$$\begin{aligned} \mu_t &= \bar{\mu}_t \\ \Sigma_t &= \bar{\Sigma}_t \end{aligned} \quad (5)$$

根据

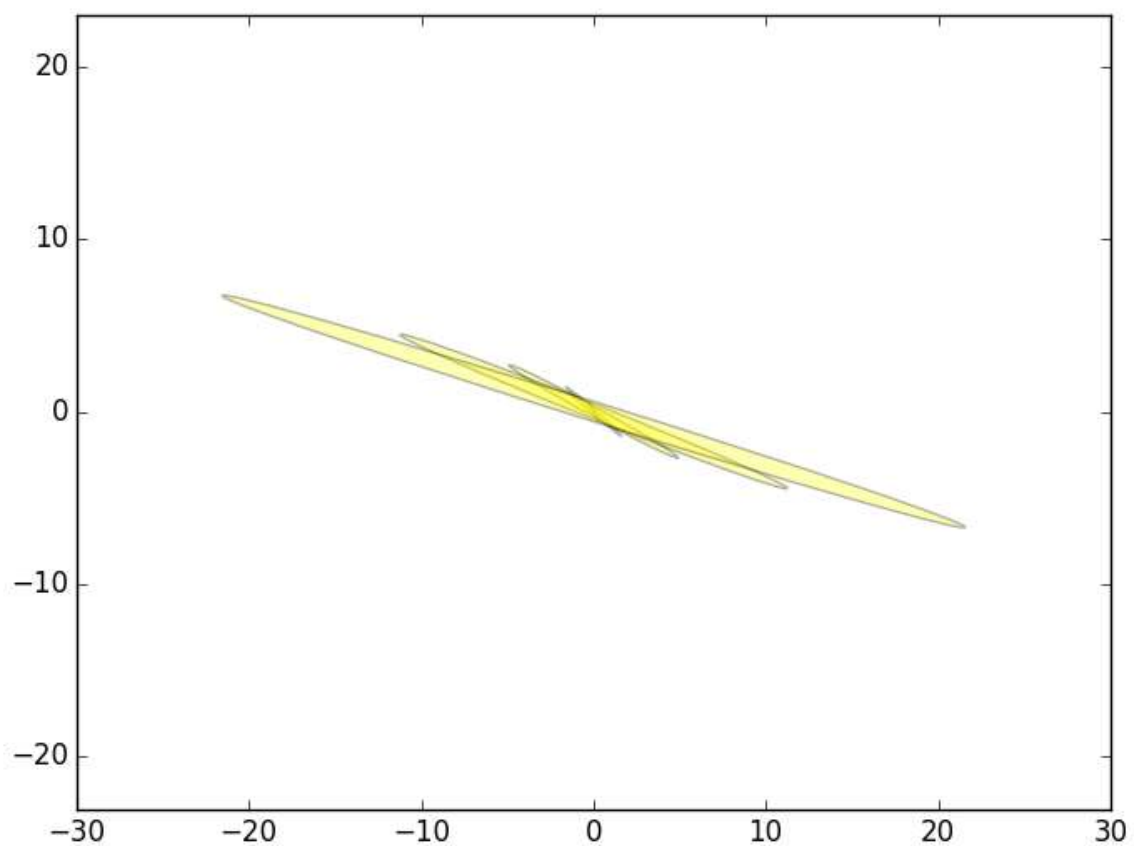
$$\begin{aligned} \bar{\mu}_t &= A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t &= A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{aligned} \quad (6)$$

计算结果如下表所示

t	μ_t	Σ_t
0	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$
2	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 2.5 & 2.0 \\ 2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$
3	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 8.75 & 4.5 \\ 4.5 & 3.0 \end{bmatrix}$
4	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 21.0 & 8.0 \\ 8.0 & 4.0 \end{bmatrix}$
5	$[0 \ 0]^T$	$\begin{bmatrix} 41.25 & 12.5 \\ 12.5 & 5.0 \end{bmatrix}$

d) 将协方差矩阵绘制为不确定椭圆

绘制各时刻不确定椭圆如下



e) 随着 $t \rightarrow \infty$ ，位置和速度之间的关系会如何变化

根据变化趋势，不确定椭圆会越来越大，最终位置不确定性占主导

2. 加入观测步骤，假设时刻 t 测量位置为 z ，噪声方差为 $\sigma^2 = 10$

a) 求观测矩阵和观测方差

观测方程为

$$z_t = Cx_t + \delta_t \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} C &= [1 \quad 0] \\ Q_t &= \sigma_z^2 C C^T = 10 \end{aligned} \quad (8)$$

b) 实现测量更新，假设 $t = 5$ 时，观测 $z = 5$ ，计算更新前后卡尔曼滤波的参数

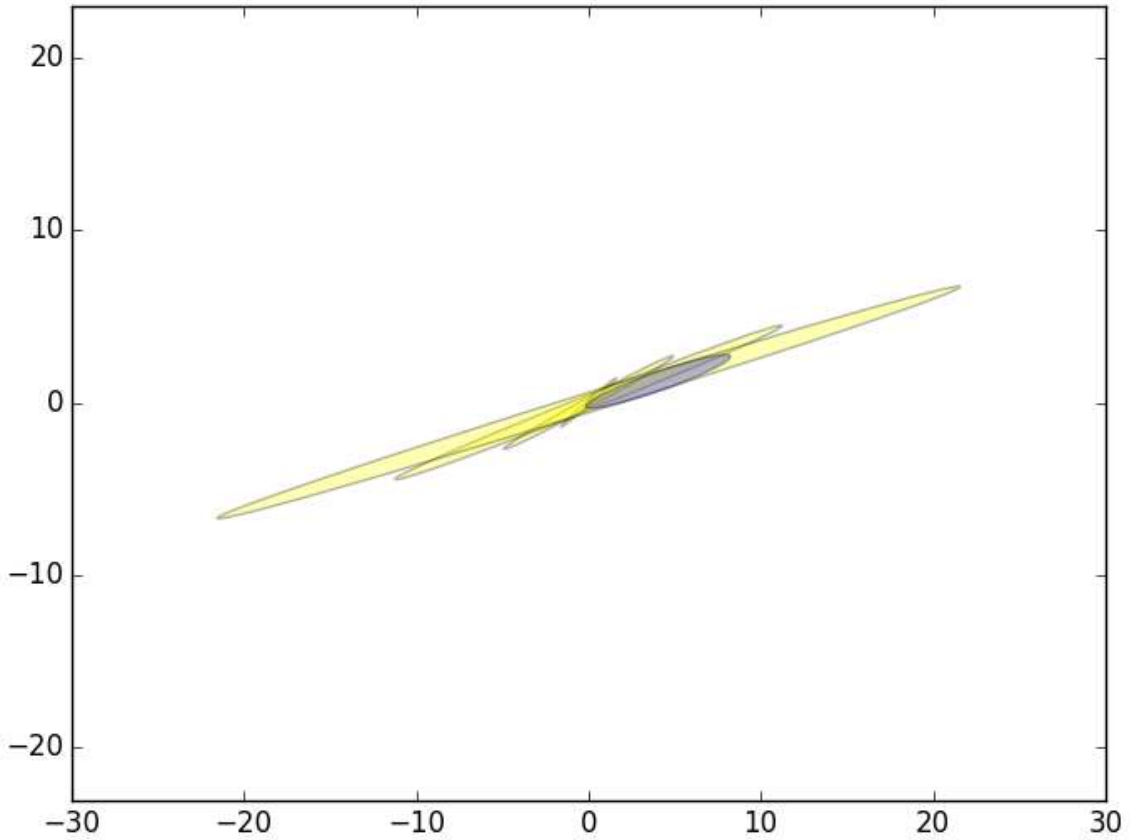
根据第一题可以知道

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_5 &= [0 \quad 0]^T \\ \bar{\Sigma}_5 &= \begin{bmatrix} 41.25 & 12.5 \\ 12.5 & 5.0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

根据程序3.1，可以计算卡尔曼增益以及观测更新

$$\begin{aligned} K_5 &= \bar{\Sigma}_5 C_5^T (C_5 \bar{\Sigma}_5 C_5^T + Q_t)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8049 \\ 0.2439 \end{bmatrix} \\ \mu_5 &= \bar{\mu}_5 + K_5 (z_5 - C_5 \bar{\mu}_5) = \begin{bmatrix} 4.0244 \\ 1.220 \end{bmatrix} \\ \Sigma_5 &= (I - K_5 C_5) \bar{\Sigma}_5 = \begin{bmatrix} 8.0488 & 2.4390 \\ 2.4390 & 1.9512 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

观测更新后的不确定椭圆如蓝色区域所示，说明经过观测后，系统的不确定性得到了降低。



3. 使用傅里叶变换或者z变换的卷积定理证明卡尔曼滤波的预测步

这道题的本质是使用卷积公式证明高斯分布的可叠加性，首先介绍卷积公式，对于独立随机变量 X 和 Y ，变量 $Z = X + Y$ 的分布满足以下关系

$$p_Z(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(Z - Y)p_Y(Y)dY = p_X(Z) * p_Y(Z) \quad (11)$$

傅里叶变换卷积定理为

$$F[f(t) * g(t)] = F[f(\omega)] \cdot F[g(\omega)] \quad (12)$$

对于正态分布 $X \sim N(\mu_X, \Sigma_X)$, $Y \sim N(\mu_Y, \Sigma_Y)$, 傅里叶变换为

$$F[p_X(X)] = \eta e^{-\frac{1}{2}\omega^T \Sigma_X \omega - j\omega \mu_X} \quad (13)$$

$$F[p_Y(Y)] = \eta e^{-\frac{1}{2}\omega^T \Sigma_Y \omega - j\omega \mu_Y} \quad (14)$$

对 $p_Z(Z = X + Y)$ 求傅里叶变换可得

$$\begin{aligned} F[p_Z(Z)] &= F[p_X(Z) * p_Y(Z)] = F[p_X(Z)] \cdot F[p_Y(Z)] \\ &= \eta e^{-\frac{1}{2}\omega^T (\Sigma_X + \Sigma_Y) \omega - j\omega (\mu_X + \mu_Y)} \end{aligned} \quad (15)$$

对式(15)做傅里叶逆变换，以及高斯函数的性质，可以推导出以下三式，这三个公式描述了高斯分布的可加性

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \Sigma_X + \Sigma_Y) \quad (16)$$

$$AX \sim N(A\mu_X, A\Sigma_X A^T) \quad (17)$$

$$X + B \sim N(\mu_X + B, \Sigma_X) \quad (18)$$

对于卡尔曼滤波的预测步

$$x_t = A_t x_{t-1} + B u_t + \epsilon_t \quad (19)$$

其中 x_{t-1} 和 ϵ_t 为相互独立的正态分布，所以满足高斯分布的可叠加性，因此后验概率满足

$$X_t \sim N(A\mu_{t-1} + Bu_t, A\Sigma_{t-1}A^T + R_t) \quad (20)$$

4. 假设平面机器人的状态向量为 x, y, θ ，设初值为

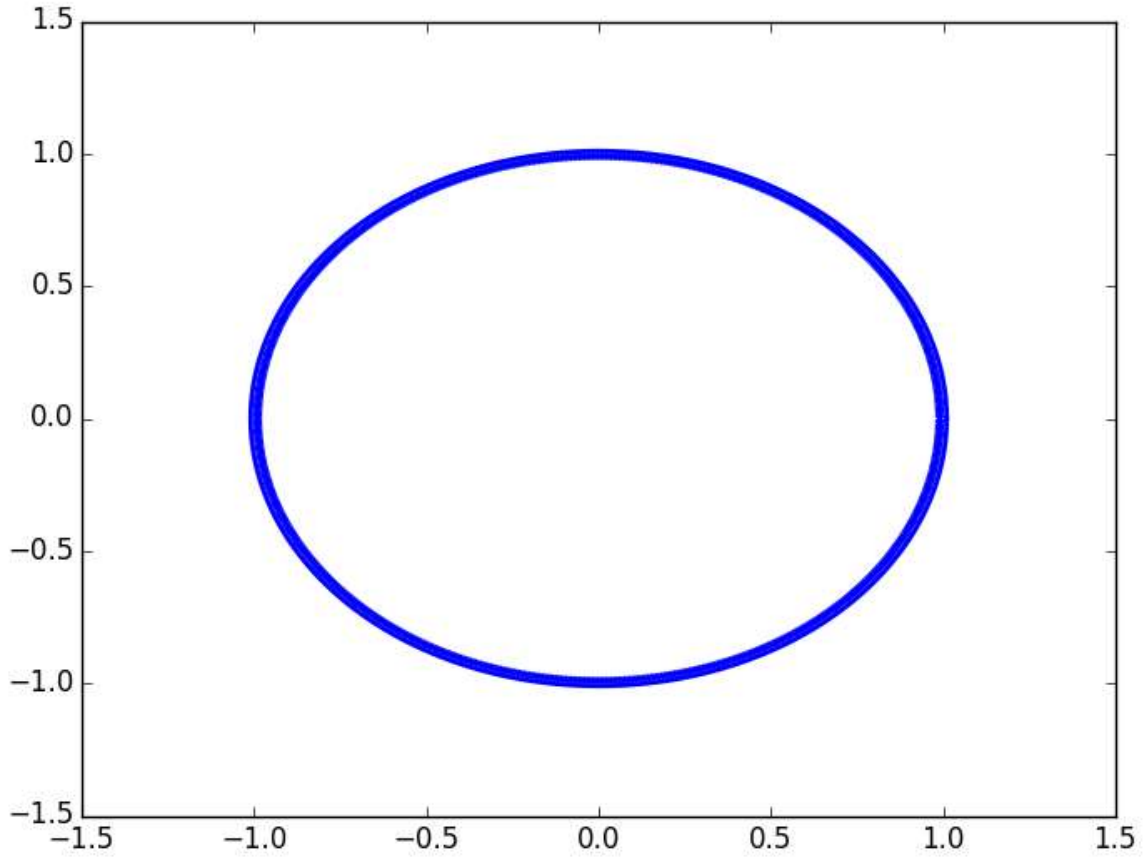
$$\mu = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (21)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix}$$

a) 机器人向前移动 $d = 1$ 个单位后，若机器人可不受噪声影响完美移动，机器人的期望位置为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \cos\theta \\ y + \sin\theta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (22)$$

画出 $x - y$ 坐标的后验，由于角度不确定性很高，机器人分布在半径为1，宽度0.02的圆环上



b) 将该运动作为扩展卡尔曼滤波的预测步骤，定义状态转移矩阵并将其线性化，然后给出新的高斯估计

根据a) 中的运动模型，通过泰勒展开进行线性化

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} \mu_x + \cos \theta \\ \mu_y + \sin \theta \\ \mu_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial x' / \partial x & \partial x' / \partial y & \partial x' / \partial \theta \\ \partial y' / \partial x & \partial y' / \partial y & \partial y' / \partial \theta \\ \partial \theta' / \partial x & \partial \theta' / \partial y & \partial \theta' / \partial \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \\ \theta - \mu_\theta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mu_x + \cos \theta \\ \mu_y + \sin \theta \\ \mu_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \\ \theta - \mu_\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{23}$$

上式中

$$\begin{bmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \\ \theta - \mu_\theta \end{bmatrix} \sim N(0, \Sigma) \tag{24}$$

根据高斯分布的可加性

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_x + \cos\theta \\ \mu_y + \sin\theta \\ \mu_\theta \end{bmatrix}, G\Sigma G^T + R\right) \quad (25)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

c) 画出不确定椭圆并与凭直觉得到的解决方案进行比较

当 $\theta = 0$ 时,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\Sigma' = G\Sigma G^T = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 10000 \\ 0 & 10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

不考虑角度的话，可以发现Y方向的不确定性远大于X方向，分布为长轴远大于短轴的椭圆

d) 考虑测量问题，测量是机器人位置在 x 轴的投影，协方差为0.01，给出扩展卡尔曼滤波的准确结果，并与直觉分析的结果进行比较

测量矩阵是线性的

$$Z = CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$Q = 0.01$$

按照卡尔曼滤波的预测步

$$\mu_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\Sigma_f = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 20000 & 20000 \\ 0 & 20000 & 20000 \end{bmatrix}$$

可以发现， x 方向不确定性在缩小，但是 y 方向不确定性在放大

e) 讨论后验估计和扩展卡尔曼滤波产生的高斯分布之间的差异，这些差异有多显著？可以改变什么使近似更准确？如果初始方向已知，但不知道机器人的 y 坐标，会发生什么？

可以通过降低方差来使得近似更加准确。

若初始方向已知，不确定机器人的Y坐标，该系统的协方差为

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (30)$$

那么经过卡尔曼滤波

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= [1 \quad 0 \quad 0] \\ \bar{\Sigma} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

可以发现如果y方向未知，不确定性并不会传导到其他两个方向

5. 书中给出的卡尔曼滤波中缺少一个常数附加项，将其扩展为包含这样的项

首先给出有常数项的预测模型和观测模型

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= A_t x_{t-1} + B_t u_t + D_x + \epsilon_t \\ z_t &= C_t x_t + D_z + \delta_t \end{aligned} \quad (32)$$

可得

$$\bar{\mu}_t = A_t(\mu_{t-1} + D_x) + B_t u_t \quad (33)$$

$$\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A^T + R_t \quad (34)$$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1} \quad (35)$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t \bar{\mu}_t - D_z) \quad (36)$$

$$\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t \quad (37)$$

6. 通过实例证明在多变量高斯分布中稀疏信息矩阵的存在，它将所有变量用 ϵ 接近于1的相关系数联系起来。

并不明白这道题想要考察的是什么。