第三章 高斯滤波

1. 一维线性运动的汽车，位置、速度、加速度满足均值为零，协方差为1的高斯分布，时间间隔为1，假定可以设定每个时刻的加速度

a) 最小的系统状态向量是什么

由于加速度可以设定，应当做控制变量，所以最小状态向量是位置和速度，如下

$$X = \begin{bmatrix} x_t & \dot{x}_t \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

b) 设计状态转移概率$p(x_t|u_t, x_{t-1})$

由于没有观测步骤，所以直接考虑预测步骤，根据位置、速度、加速度的关系，可以得到状态转移方程为

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + \epsilon_t \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

而 ϵ_t 由加速度产生，所以协方差矩阵R满足

$$R = \sigma^2 BB^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

c) 假设$t=0, x_0=0, \dot{x}_0=0$，求$t=1,2,3,4,5$的状态分布

由于没有观测步骤，所以

$$\begin{aligned} \mu_t &= \bar{\mu}_t \\ \Sigma_t &= \bar{\Sigma}_t \end{aligned} \tag{5}$$

根据

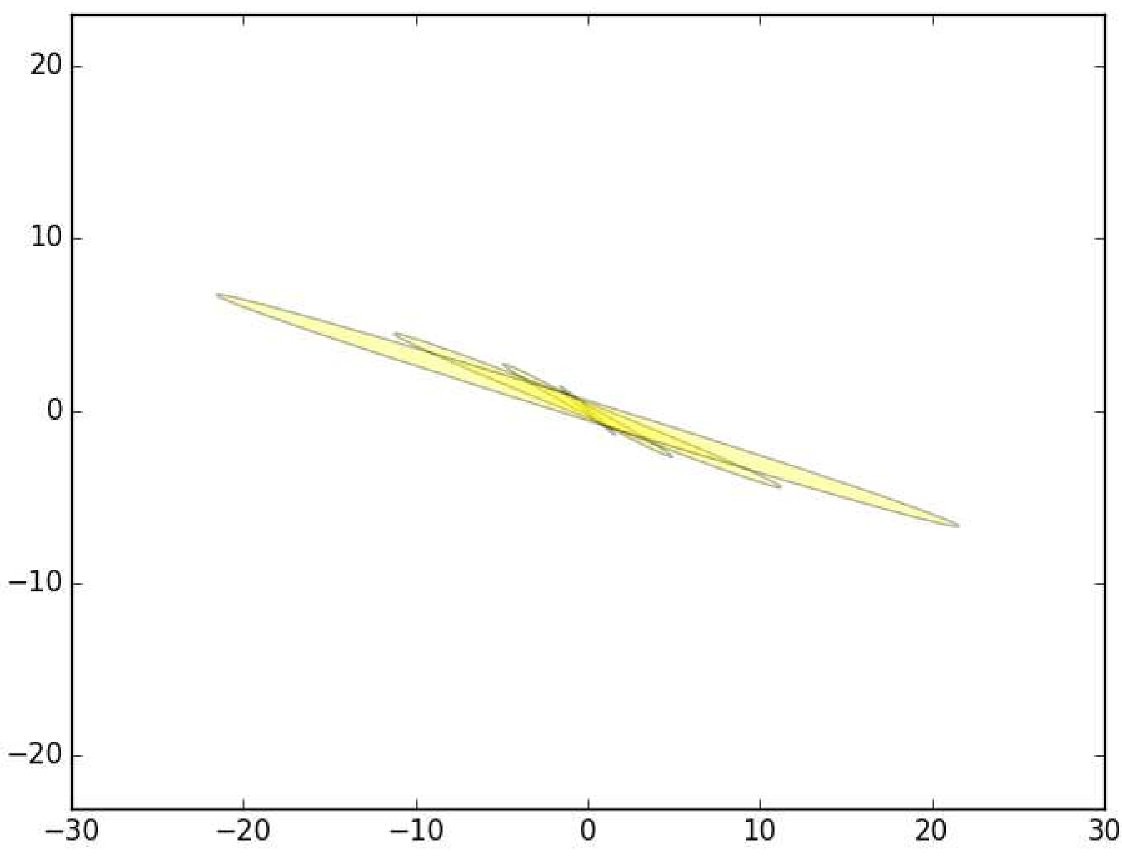
$$\begin{aligned} \bar{\mu}_t &= A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t &= A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{aligned} \tag{6}$$

计算结果如下表所示

t	μ_t	Σ_t
0	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix}0.25 & 0.5\\0.5 & 1\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix}2.5 & 2.0\\2.0 & 2.0\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix}8.75 & 4.5\\4.5 & 3.0\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix}21.0 & 8.0\\8.0 & 4.0\end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix}41.25 & 12.5\\12.5 & 5.0\end{bmatrix}$

d) 将协方差矩阵绘制为不确定椭圆

绘制各时刻不确定椭圆如下



e) 随着$t \to \infty$，位置和速度之间的关系会如何变化

根据变化趋势，不确定椭圆会越来越大，最终位置不确定性占主导

2. 加入观测步骤，假设时刻t测量位置为z，噪声方差为$\sigma^2=10$

a) 求观测矩阵和观测方差

观测方程为

$$z_t = Cx_t + \delta_t \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ Q_t &= \sigma_z^2 CC^T = 10 \end{aligned} \tag{8}$$

b) 实现测量更新，假设$t=5$时，观测$z=5$，计算更新前后卡尔曼滤波的参数

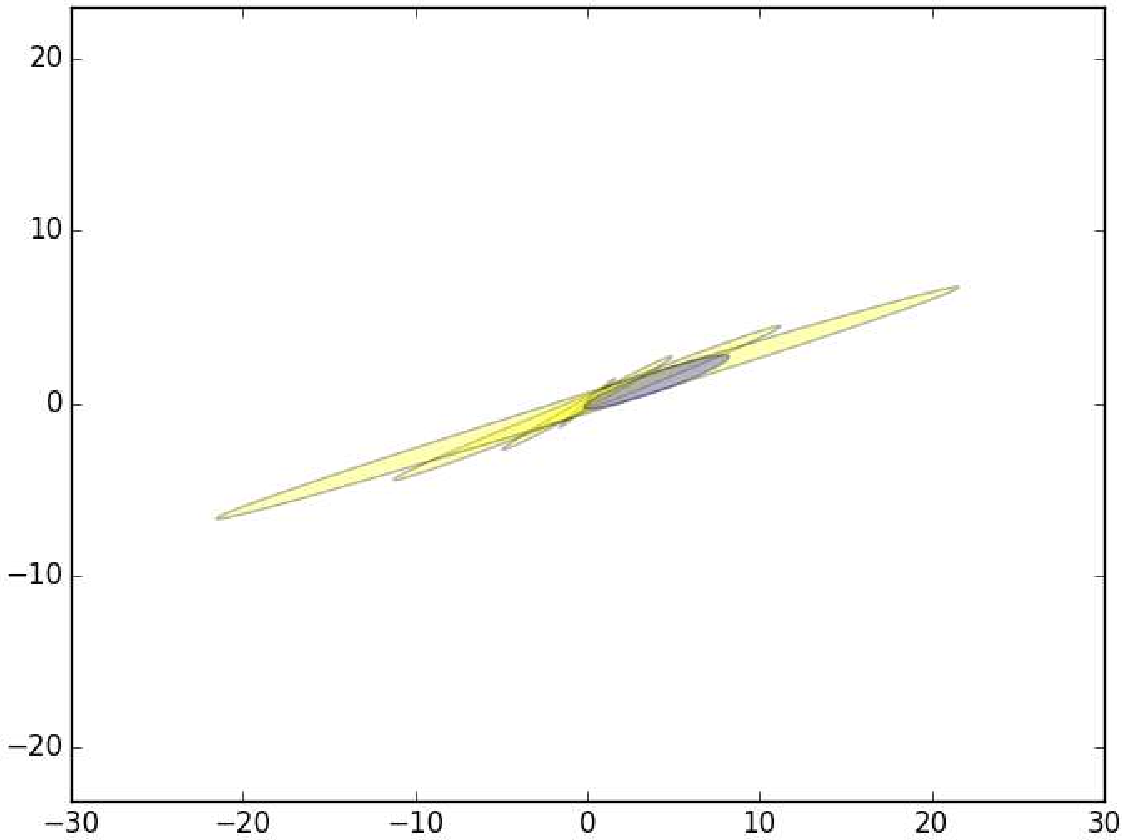
根据第一题可以知道

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \bar{\Sigma}_5 &= \begin{bmatrix} 41.25 & 12.5 \\ 12.5 & 5.0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

根据程序3.1，可以计算卡尔曼增益以及观测更新

$$\begin{aligned} K_5 &= \bar{\Sigma}_5 C_5^T (C_5 \bar{\Sigma}_5 C_5^T + Q_t)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8049 \\ 0.2439 \end{bmatrix} \\ \mu_5 &= \bar{\mu}_5 + K_5 (z_5 - C_5 \bar{\mu}_5) = \begin{bmatrix} 4.0244 \\ 1.220 \end{bmatrix} \\ \Sigma_5 &= (I - K_5 C_5) \bar{\Sigma}_5 = \begin{bmatrix} 8.0488 & 2.4390 \\ 2.4390 & 1.9512 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

观测更新后的不确定椭圆如蓝色区域所示，说明经过观测后，系统的不确定性得到了降低。



3. 使用傅里叶变换或者z变换的卷积定理证明卡尔曼滤波的预测步

这道题的本质是使用卷积公式证明高斯分布的可叠加性，首先介绍卷积公式，对于独立随机变量X和Y，变量$Z=X+Y$的分布满足以下关系

$$p_Z(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(Z-Y)p_Y(Y)dY=p_X(Z)*p_Y(Z) \tag{11}$$

傅里叶变换卷积定理为

$$F[f(t)*g(t)]=F[f(\omega)]\cdot F[g(\omega)] \tag{12}$$

对于正态分布$X\sim N(\mu_X,\Sigma_X)$，$Y\sim N(\mu_Y,\Sigma_Y)$，傅里叶变换为

$$F[p_X(X)]=\eta e^{-\frac{1}{2}\omega^T\Sigma_X\omega-j\omega\mu_X} \tag{13}$$
$$F[p_Y(Y)]=\eta e^{-\frac{1}{2}\omega^T\Sigma_Y\omega-j\omega\mu_Y} \tag{14}$$

对$p_Z(Z=X+Y)$求傅里叶变换可得

$$\begin{aligned}F[p_Z(Z)]&=F[p_X(Z)*p_Y(Z)]=F[p_X(Z)]\cdot F[p_Y(Z)]\\&=\eta e^{-\frac{1}{2}\omega^T(\Sigma_X+\Sigma_Y)\omega-j\omega(\mu_X+\mu_Y)}\end{aligned} \tag{15}$$

对式(15)做傅里叶逆变换，以及高斯函数的性质，可以推导出以下三式，这三个公式描述了高斯分布的可加性

$$X+Y \sim N(\mu_X+\mu_Y, \Sigma_X+\Sigma_Y) \tag{16}$$
$$AX \sim N(A\mu_X, A\Sigma_X A^T) \tag{17}$$
$$X+B \sim N(\mu_X+B, \Sigma_X) \tag{18}$$

对于卡尔曼滤波的预测步

$$x_t = A_t x_{t-1} + Bu_t + \epsilon_t \tag{19}$$

其中x_{t-1}和ϵ_t为相互独立的正态分布，所以满足高斯分布的可叠加性，因此后验概率满足

$$X_t \sim N(A\mu_{t-1} + Bu_t, A\Sigma_{t-1}A^T + R_t) \tag{20}$$

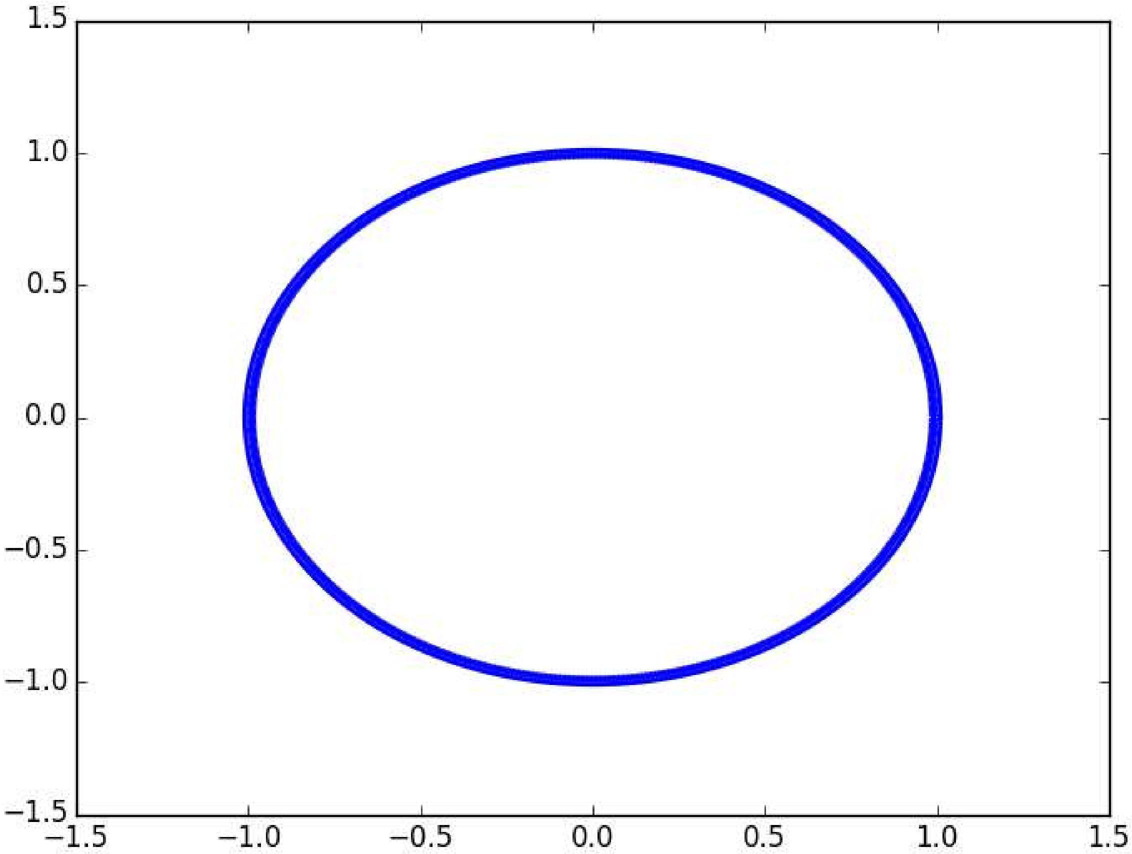
4. 假设平面机器人的状态向量为x, y, θ，设初值为

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{21}$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix}$$

a) 机器人向前移动$d=1$个单位后，若机器人可不受噪声影响完美移动，机器人的期望位置为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+cos\theta \\ y+sin\theta \\ \theta \end{bmatrix} \tag{22}$$

画出 $x-y$ 坐标的后验，由于角度不确定性很高，机器人分布在半径为1，宽度0.02的圆环上



b) 将该运动作为扩展卡尔曼滤波的预测步骤，定义状态转移矩阵并将其线性化，然后给出新的高斯估计

根据a) 中的运动模型，通过泰勒展开进行线性化

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} \mu_x + \cos\theta \\ \mu_y + \sin\theta \\ \mu_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial x'/\partial x & \partial x'/\partial y & \partial x'/\partial\theta \\ \partial y'/\partial x & \partial y'/\partial y & \partial y'/\partial\theta \\ \partial\theta'/\partial x & \partial\theta'/\partial y & \partial\theta'/\partial\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \\ \theta-\mu_\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu_x + cos\theta \\ \mu_y + sin\theta \\ \mu_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \\ \theta-\mu_\theta \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{23}$$

上式中

$$\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \\ \theta-\mu_\theta \end{bmatrix} \sim N(0,\Sigma) \tag{24}$$

根据高斯分布的可加性

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} \mu_x + cos\theta \\ \mu_y + sin\theta \\ \mu_\theta \end{bmatrix}, G\Sigma G^T + R) \tag{25}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

c) 画出不确定椭圆并与凭直觉得到的解决方案进行比较

当$\theta = 0$时，

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\Sigma' = G\Sigma G^T = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 10000 \\ 0 & 10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

不考虑角度的话，可以发现Y方向的不确定性远大于X方向，分布为长轴远大于短轴的椭圆

d) 考虑测量问题，测量是机器人位置在x轴的投影，协方差为0.01，给出扩展卡尔曼滤波的准确结果，并与直觉分析的结果进行比较

测量矩阵是线性的

$$Z = CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$Q = 0.01$$

按照卡尔曼滤波的预测步

$$\mu_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\Sigma_f = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 20000 & 20000 \\ 0 & 20000 & 20000 \end{bmatrix}$$

可以发现，x方向不确定性在缩小，但是y方向不确定性在放大

e) 讨论后验估计和扩展卡尔曼滤波产生的高斯分布之间的差异，这些差异有多显著？可以改变什么使近似更准确？如果初始方向已知，但不知道机器人的y坐标，会发生什么？

可以通过降低方差来使得近似更加准确。

若初始方向已知，不确定机器人的Y坐标，该系统的协方差为

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \tag{30}$$

那么经过卡尔曼滤波

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\Sigma} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

可以发现如果y方向未知，不确定性并不会传导到其他两个方向