# 第三章 高斯滤波

## 1. 一维线性运动的汽车，位置、速度、加速度满足均值为零，协方差为1的高斯分布，时间间隔为1，假定可以设定每个时刻的加速度

### a) 最小的系统状态向量是什么

由于加速度可以设定，应当做控制变量，所以最小状态向量是位置和速度，如下

$$X = \begin{bmatrix} x_t & \dot{x}_t \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

### b) 设计状态转移概率$p(x_t|u_t, x_{t-1})$

由于没有观测步骤，所以直接考虑预测步骤，根据位置、速度、加速度的关系，可以得到状态转移方程为

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + \epsilon_t \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

而 $\epsilon_t$ 由加速度产生，所以协方差矩阵$R$满足

$$R = \sigma^2 BB^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

### c) 假设$t=0, x_0=0, \dot{x}_0=0$，求$t=1,2,3,4,5$的状态分布

由于没有观测步骤，所以

$$\begin{aligned} \mu_t &= \bar{\mu}_t \\ \Sigma_t &= \bar{\Sigma}_t \end{aligned} \tag{5}$$

根据

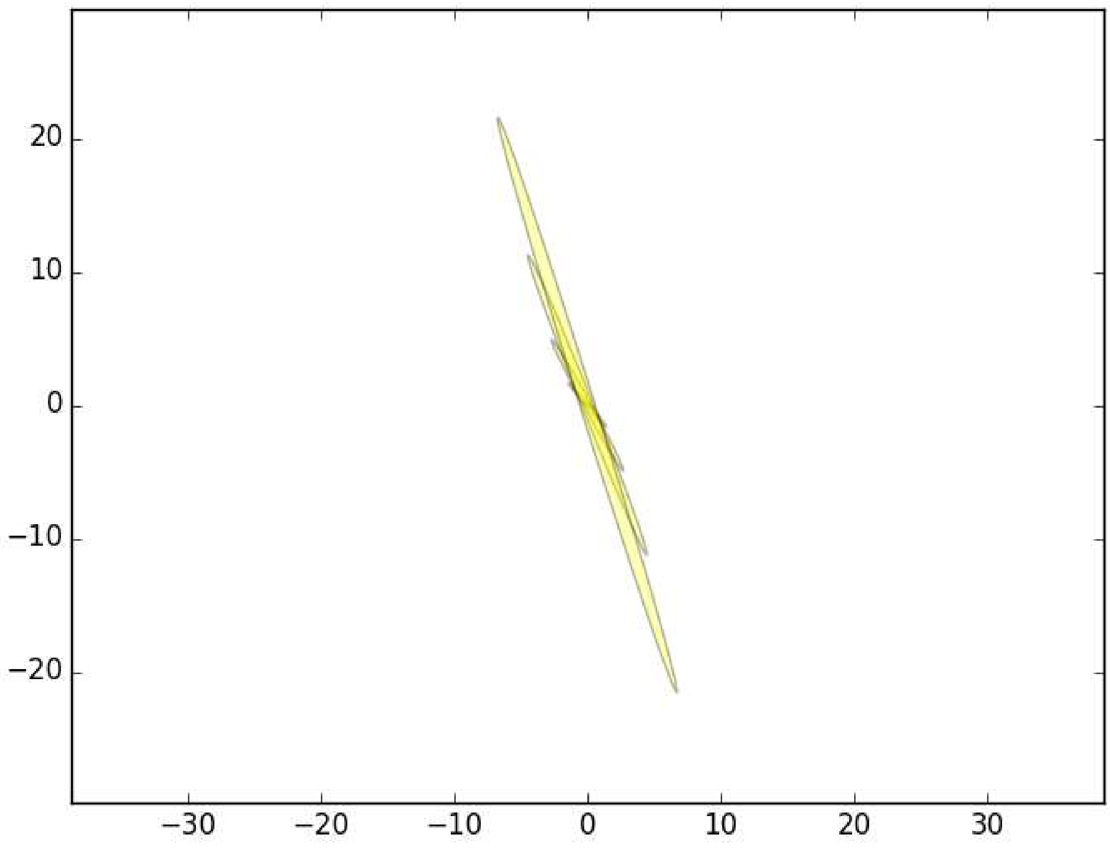
$$\begin{aligned} \bar{\mu}_t &= A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t &= A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \end{aligned} \tag{6}$$

计算结果如下表所示

| $t$ | $\mu_t$ | $\Sigma_t$ |
|---|---|---|
| 0 | $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$ | $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ |
| 1 | $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$ | $\begin{bmatrix}0.25 & 0.5\\0.5 & 1\end{bmatrix}$ |
| 2 | $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$ | $\begin{bmatrix}2.5 & 2.0\\2.0 & 2.0\end{bmatrix}$ |
| 3 | $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$ | $\begin{bmatrix}8.75 & 4.5\\4.5 & 3.0\end{bmatrix}$ |
| 4 | $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$ | $\begin{bmatrix}21.0 & 8.0\\8.0 & 4.0\end{bmatrix}$ |
| 5 | $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$ | $\begin{bmatrix}41.25 & 12.5\\12.5 & 5.0\end{bmatrix}$ |

## d) 将协方差矩阵绘制为不确定椭圆

绘制各时刻不确定椭圆如下




## e) 随着$t \to \infty$，位置和速度之间的关系会如何变化

根据变化趋势，不确定椭圆会越来越大，最终位置不确定性占主导