第二章 递归状态估计

于小咸

1.

这道题目与2.4.2 的例题很相似，练习离散贝叶斯滤波的使用。根据题意可知：

$$\begin{aligned} bel(X_0 = broken) &= 0.01 \quad (36) \\ bel(X_0 = not\_broken) &= 0.99 \quad (37) \\ p(Z_t < 1|X_t = broken) &= 1 \quad (38) \\ p(Z_t < 1|X_t = not\_broken) &= 1/3 \quad (39) \end{aligned}$$

其中 Z_t 表示 t 时刻距离传感器的测量值，在 0 ~ $3m$ 范围内连续取值；X_t 表示距离传感器的状态，取值为离散的 $broken$ ，not_broken。

下面根据贝叶斯滤波算法进行计算，由于这道题中没有对距离传感器进行任何控制，因此贝叶斯滤波的第一步（预测）并不改变系统状态的置信度：

$$\bar{bel}(X_t) = bel(X_{t-1}) \quad (1)$$

贝叶斯滤波的第二步（观测），题干中介绍到$Z_t < 1$，于是有以下递推式

$$\begin{aligned} bel(X_t = broken) &= \eta p(Z_t < 1|X_t = broken)\bar{bel}(X_t = broken) \quad (2) \\ bel(X_t = not\_broken) &= \eta p(Z_t < 1|X_t = not\_broken)\bar{bel}(X_t = not\_broken) \quad (3) \end{aligned}$$

其中 η 为归一化因子

$$\begin{aligned} \eta = [&p(Z_t < 1|X_t = broken)\bar{bel}(X_t = broken) + \\ &p(Z_t < 1|X_t = not\_broken)\bar{bel}(X_t = not\_broken)]^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

对以上5、6、7式代入先验初值1、2进行迭代，即可得到各个时刻距离传感器故障的概率如下

时刻	$bel(X_t = broken \mid Z_t < 1)$	$bel(X_t = not\_broken \mid Z_t < 1)$	η
0	0.01	0.99	
1	0.029411764705882353	0.9705882352941176	2.941176470588235
2	0.08333333333333333	0.9166666666666666	2.833333333333333
3	0.2142857142857143	0.7857142857142857	2.5714285714285716
4	0.45000000000000007	0.55	2.1
5	0.7105263157894737	0.2894736842105263	1.5789473684210524
6	0.8804347826086958	0.11956521739130438	1.2391304347826089
7	0.9566929133858267	0.043307086614173235	1.0866141732283463
8	0.9851351351351351	0.014864864864864866	1.0297297297297296
9	0.9949954504094631	0.0050045495905368526	1.0100090991810737
10	0.9983262325015215	0.0016737674984783934	1.0033475349969567

最后推导公式:

$$\begin{aligned} bel(X_t = broken) &= \eta_t \times 1 \times bel(X_{t-1} = broken) \\ &= \eta_t \eta_{t-1} \times 1 \times bel(X_{t-2} = broken) \\ &= \prod_{i=0}^{n} \eta_i bel(X_0 = broken) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} bel(X_t = not\_broken) &= \eta_t \times \frac{1}{3} \times bel(X_{t-1} = not\_broken) \\ &= \eta_t \eta_{t-1} \times \frac{1}{3} \times bel(X_{t-2} = broken) \\ &= \prod_{i=0}^{n} \eta_i \times \frac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not\_broken) \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\prod_{i=0}^{n} \eta_i$ 满足归一化要求，即

$$\prod_{i=0}^{n} \eta_i = [bel(X_0 = broken) + \frac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not\_broken)]^{-1} \tag{7}$$

因此，传感器失效的概率为

$$bel(X_t = broken) = \frac{bel(X_0 = broken)}{bel(X_0 = broken) + \frac{1}{3^n} \times bel(X_0 = not\_broken)} \tag{8}$$

2. 已知天气状态转移矩阵

	晴（明天）	多云	雨
晴（今天）	0.8	0.2	0
多云（今天）	0.4	0.4	0.2
雨（今天）	0.2	0.6	0.2

a) 第一天是晴天，求接下来三天是多云、多云、雨的概率

可以通过贝叶斯公式得到

$$
\begin{aligned}
(X_4 = rainy) \quad &= P(X_4 = rainy|X_3 = cloudy)P(X_3 = cloudy) \\
&= P(X_4 = rainy|X_3 = cloudy)P(X_3 = cloudy|X_2 = cloudy) \\
&P(X_2 = cloudy|X_1 = sunny)P(X_1 = sunny) \\
&= 0.2 \times 0.4 \times 0.2 \\
&= 0.016
\end{aligned} \tag{9}
$$

b)编程随机产生天气序列的仿真器

c)计算平稳分布

首先需要知道平稳分布的定义，根据维基百科的介绍，平稳分布是指不随时间变化的状态分布，即

$$
\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} A^n X_0 \tag{10}
$$

使用b) 中设计的随机天气序列仿真器，在天气序列足够长时，天气出现的频率就是平稳分布的概率，计算得到

$$
P_{static} = [0.6430726, 0.2855164, 0.071411]^T \tag{11}
$$

d)通过公式计算平稳分布

根据平稳分布的定义，我们需要求的其实是状态转移矩阵的特征值1对应的特征向量

$$
Ax = x \tag{12}
$$

这里我们采用偷懒的方法，使用矩阵特征向量在线计算工具，计算得到特征向量为

$$
[9, 4, 1]^T \tag{13}
$$

对该向量进行概率归一化得到

$$
P_{static} = [9/14, 2/7, 1/14]^T \tag{14}
$$

f) 计算给定今天天气时，昨天天气的概率表

需要计算以下条件概率

$$
\begin{gathered}
P(X_{t-1} = i|X_t = j) = \frac{P(X_t = j|X_{t-1} = i)P(X_{t-1} = i)}{P(X_t = j)} \\
P(X_t = j) = \sum_i^3 P(X_t = j|X_{t-1} = i)P(X_{t-1} = i)
\end{gathered} \tag{15}
$$

其中$P(X_{t-1} = i)$作为先验概率，由平稳分布给出，从而计算得出概率表

	晴（今天）	多云	雨
晴（昨天）	0.8	0.45	0
多云	$8/45$	0.4	0.8
雨	$1/45$	0.15	0.2

g) 如果天气状态转移概率与季节相关，这个过程还满足马尔科夫特性吗

不满足。马尔科夫特性要求，当前时刻的系统状态只与上一时刻的系统状态有关，与其他变量无关。如果引入季节这一变量，就会破坏马尔科夫特性。但是在一个季节内，状态转移矩阵不发生变化，该过程依然保持马尔科夫特性。

3. 若有传感器观测矩阵

	晴（实际）	多云（实际）	雨（实际）
晴（观测）	0.6	0.3	0
多云（观测）	0.4	0.7	0
雨（观测）	0	0	1

a) 已知第一天是晴天，2~5天观测到为多云，多云，雨，晴，求第五天是晴天的概率

由第二题可知状态转移矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

由本题题干可知观测矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

根据贝叶斯准则

$$\bar{bel}(x_t|x_{t-1}) = A \cdot bel(x_{t-1}) \tag{18}$$

$$bel(X_t = i|Z_t = j) = \eta P(Z_t = j|X_t = i)P(X_t = i) \tag{19}$$

$$\eta = (\sum_{i=1}^{n} P(Z_t = j|X_t = i)P(X_t = i))^{-1} \tag{20}$$

初值和观测序列

$$
\begin{aligned}
&bel(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
&z_2 = cloudy, z_3 = cloudy, z_4 = rainy, z_5 = sunny
\end{aligned} \tag{21}
$$

迭代计算可得

	z_t	$\bar{bel}(x_t)$	$bel(x_t)$	η
1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	1
2	cloudy	$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 16/23 & 7/23 & 0 \end{bmatrix}^T$	$50/23$
3	cloudy	$\begin{bmatrix} 78/115 & 30/115 & 7/115 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 312/522 & 210/522 & 0 \end{bmatrix}^T$	$1150/522$
4	rainy	$\begin{bmatrix} 0.6390 & 0.2805 & 0.0805 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$	124.2857
5	sunny	$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.0 \end{bmatrix}^T$	3.3333

由上面结果可得，第五天是晴天的概率为0.4

b) 当2~4天的观测序列为晴，晴，雨时，用两种方式讨论最有可能的天气序列：1）考虑当天以及之前的观测结果；2）统一考虑所有天气

根据a)中的方法，当观测序列为晴、晴、雨时，最有可能的天气序列为

日期	天气	概率
1	晴	1.0
2	晴	0.8889
3	晴	0.8718
4	雨	1.0

统一考虑所有天气时

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = i|z_{2:4}) &= \eta P(Z_2 = sunny|X_2 = i, z_{3:4})P(X_2 = i|z_{3:4}) \\
&= \eta P(Z_2 = sunny|X_2 = i)P(X_2 = i|z_{3:4}) \\
&= \eta P(Z_2 = sunny|X_2 = i)P(Z_3 = sunny|X_2 = i, z_4)P(X_2 = i|z_4) \\
&= \eta P(Z_2 = sunny|X_2 = i)P(Z_3 = sunny|X_2 = i) \\
&\times P(Z_4 = rainy|X_2 = i)P(X_2 = i|z_2)
\end{aligned} \tag{22}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
P(Z_3 = sunny|X_2 = i) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} P(Z_3 = sunny|X_3 = j, X_2 = i)P(X_3 = j|X_2 = i) \\
&= (CA)_{1,i}
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
P(Z_4 = rainy|X_2 = i) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} P(Z_4 = rainy|X_4 = j, X_2 = i)P(X_4 = j|X_2 = i) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} P(Z_4 = rainy|X_4 = j) \sum_{k=1}^{n} P(X_4 = j|X_3 = k)P(X_3 = k|X_2 = i) \\
&= (CAA)_{3,i}
\end{aligned} \tag{24}
$$

同理可得第3天和第4天的概率

$$\begin{aligned} P(X_3=i|z_{2:4}) &= P(Z_4=rainy|X_3=i)P(X_3=i|z_{2:3}) \\ &= (CA)_{3,i}P(X_3=i|z_{2:3}) \end{aligned} \tag{25}$$

其中$P(X_3=i|z_{2:3})$和$P(X_4=i|z_{2:4})$已经在前一小问中求得，汇总得到2~4天的天气概率

日期	天气	概率
1	晴	1
2	晴	0.8
3	多云	1
4	雨	1

c) 若第2~4天的天气测量分别为晴，晴，雨，那么最有可能的天气序列是什么，该天气序列的概率是多少

根据b)的解答，最可能的天气序列为晴、多云、雨，该序列概率为每天概率的乘积，为0.8.

我们会发现，综合考虑全序列的传感器数据，和只考虑当天的观测数据，得到的天气序列的预测是不同的。根据状态转移矩阵，不存在由晴天变成雨天的转换，而第三天为雨天的概率为1，所以虽然第三天传感器检测为晴天，但综合考虑第四天的概率后，第三天的天气应为雨天。这道题使用简单的对比，向我们形象地说明：如果采用全时间序列的观测信息，能够得到更加准确的后验概率估计。

4. 考虑一维高斯分布，初始位置$x_{init}=1000m$，方差$\sigma^2_{init}=900m^2$，观测位置$x_{GPS}=1100m$,方差$\sigma^2_{GPS}=100m^2$

a) 写出先验$p(x)$和观测$p(z|x)$的概率密度函数

根据高斯分布公式可得

$$\begin{aligned} p(x) &= 1/\sqrt{2\pi\sigma^2_{init}}\cdot e^{-\frac{(x-x_{init})^2}{2\sigma^2_{init}}} \\ p(z|x) &= 1/\sqrt{2\pi\sigma^2_{GPS}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2_{GPS}}} \end{aligned} \tag{26}$$

b) 使用贝叶斯准则，后验概率$p(x|z)$是多少，能证明该分布是高斯吗

根据贝叶斯准则

$$p(x|z)=\frac{p(z|x)p(x)}{p(z)} \tag{27}$$

其中

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(z|x)p(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 1/\sqrt{2\pi\sigma_{init}^2} \cdot e^{-\frac{(x-x_{init})^2}{2\sigma_{init}^2}} \cdot 1/\sqrt{2\pi\sigma_{GPS}^2} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_{GPS}^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_{init}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{(x-x_{init})^2}{2\sigma_{init}^2}-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_{GPS}^2}} dx
\end{aligned} \tag{28}
$$

对指数二项式进行分析

$$
\begin{aligned}
(x-x_{init})^2 2\sigma_{init}^2 + \frac{(z-x)^2}{2\sigma_{GPS}^2} = & \quad \frac{x^2-2xx_{init}+x_{init}^2}{18\sigma_{GPS}^2} + \frac{z^2-2xz+x^2}{2\sigma_{GPS}^2} \\
= & \quad \frac{10(x^2-2x(\frac{x_{init}+9z}{10})+(\frac{x_init+9z}{10})^2)}{18\sigma_{GPS}^2} + \frac{9z^2+x_{init}^2-\frac{(x_init+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}
\end{aligned} \tag{29}
$$

第一项是x的函数，可以写成正态分布的形式，第二项与x无关，可从积分式内提取出来，计算得到

$$
\begin{aligned}
p(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_{init}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{9z^2+x_{init}^2-\frac{(x_{init}+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}} \cdot \sqrt{2\pi}\sqrt{9/10}\sigma_{GPS} \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{10}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{9z^2+x_{init}^2-\frac{(x_{init}+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}}
\end{aligned} \tag{30}
$$

那么后验的分布为

$$
\begin{aligned}
p(z|x) = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_{init}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{10(x^2-2x(\frac{x_{init}+9z}{10})+(\frac{x_init+9z}{10})^2)}{18\sigma_{GPS}^2}-\frac{9z^2+x_{init}^2-\frac{(x_init+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{10}\sigma_{GPS}} \cdot e^{-\frac{9z^2+x_{init}^2-\frac{(x_{init}+9z)^2}{10}}{18\sigma_{GPS}^2}}} \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{9/10}\sigma_{GPS}} e^{-\frac{(x-\frac{9z+x_{init}}{10})^2}{2\times 9/10\sigma_{GPS}^2}}
\end{aligned} \tag{31}
$$

是满足正态分布$p(x|z) \sim N(\frac{9z+x_{init}}{10}, 9/10\sigma_{GPS}^2)$

c) 测量$x_{GPS} = 1100m$怎样得出先验和GPS接收器的误差概率信息

不是很理解这道题目需要求什么，这里大胆猜测一下，是对GPS接收器进行误差分析，问的是怎样获取GPS接收器的值和方差，GPS的先验数据经过滤波得到，误差信息通过对时间统计得到。

5. 由式（2.17）推导（2.18）和（2.19），以及本书叙述的概率准则

根据式（2.17）$p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z)$可得

$$p(x|z) = \frac{p(x,y|z)}{p(y|z)} = \frac{p(x|z)p(y|z)}{p(y|z)} = p(x|y,z) \tag{32}$$

$$p(y|z) = \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)} = p(y|x,z) \tag{33}$$

根据一阶马尔科夫假设，当前观测只与系统当前状态x_t相关，与其他变量相互独立，于是可以得到

$$p(z_i|x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) = p(z_i|x_t) \tag{34}$$

6. 证明式（2.25），这个等式的意义是什么

根据期望的性质

$$\begin{aligned} Cov[X] &= E[X - E[X]]^2 \\ &= E[X^2 - 2X \cdot E[X] + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned} \tag{35}$$

这说明方差是协方差的特殊形式，对于多元分布而言，协方差是一个方阵。

小结

- 1,2,3题都是在使用贝叶斯准则解决离散问题，其中第三题给了另外一种不同的应用方法，不仅仅是按照时序计算的贝叶斯滤波，还可以应用在解决全概率问题
- 4题解决的是一维连续问题，推导了高斯分布下的贝叶斯准则（即卡尔曼滤波），证明了后验概率也是高斯分布，更深入地理解了卡尔曼滤波
- 5题帮助更好的理解一阶马尔科夫假设下的贝叶斯准则