INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Mezclas de distribución en esperanza-varianza

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO

LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA

DAVID EDGARDO CASTILLO RODRÍGUEZ

ASESOR: JUAN CARLOS MARTÍNEZ OVANDO

MÉXICO, D.F. 2016

"Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada "**TÍTULO DE LA TESIS**", otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Bailléres Jr., la autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación".

AUTOR

FECHA

FIRMA

DEDICATORIA

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Capítulos

Introducción

Modelo de mezcla en media

Se dice que un vector aleatorio X, de dimensión p, es una mezcla en media, si dado u se distribuye normal con vector de medias $u\mu$, y matriz de covarianza Σ. La variable aleatoria u está definida en R^+.

Por lo tanto $P(X_1...X_n) = \int\limits_{S_u} N_p(X|u\mu, \Sigma) f_u(u)du$, donde $\mu \in R^p$, $\Sigma \in M_{pxp}$ y u es la variable de mezcla.

Si nos enfocamos en la distribución marginal de $X|_u$ es fácil darse cuenta que el valor que toma u determina donde está centrada la distribución, para valores de u pequeños la distribución se encuentra cercana al origen, pero conforme u crece, la distribución se aleja del origen.

La figura 1, muestra una distribución normal con vetor de medias $\mu = (3, 5)$, y matriz de varianza-covarianza Σ =[1,.3,.3,1.5], mientras que la figura 2 muestra una distribución normal con variable de mezcla u, con el mismo vector de medias y matriz de varianza-covarianza que la figura 1. La distribución de mezcla u se distribuye exp(1.5) y tal que u=.42. Adviertase como se desplaza el centro de la distribución dado el condicionamiento.

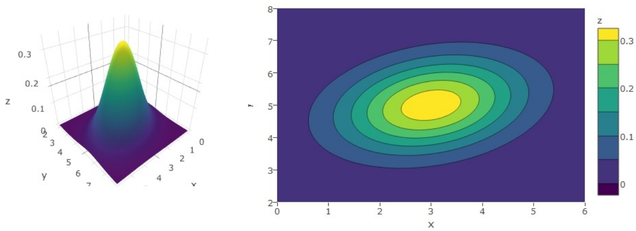

Figura 1:

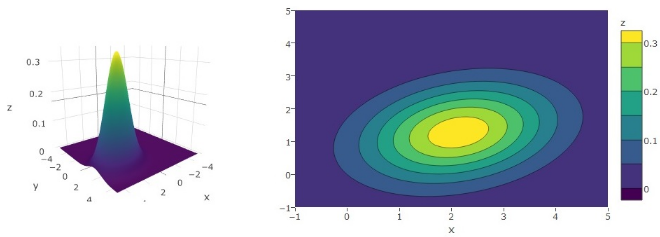

Figura 2:

Modelo de mezcla en varianza

Ahora consideraremos un modelo similar al anterior, pero con la diferencia que la variable de mezcla u solamente afecta a la matriz de varianza-covarianza Σ, por lo que la distribución del vector aleatorio X p-dimensional viene dado por:

$$P(X_1...X_p) = \int_{S_u} N_p(X|\mu, u\Sigma) f_u(u) du$$

Si nos concentramos en la distribución marginal de $X|_u$, se observa que la variable de mezcla u influye en la disperción de los datos, por lo que entre mayor sea el valor que tome u, mayor será la disperción.

La figura tres nos muestra una distribución normal bivariada con el mismo vector de medias, y misma matriz de varianza -covarianza que la figura uno. Pero ahora, la distribución de mezcla u se distribuye Ji cuadrado con 5 grados de libertad, afectando sólamente a la matriz de varianza-covarianza, y tal que u=2.36. Nótese que en este caso, la distribución se mantiene en su centro, pero ahora la disperción es mayor.

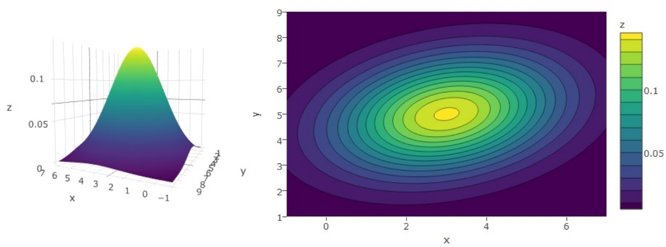

Figura 3:

Modelo de mezcla en esperanza-varianza

Generalizando los dos modelos anteriores se tiene la siguiente definicion:

Se dice que un vector aleatorio X$\in R^p$ es un vector de mezcla p dimensional, si $X|_u$ N$(\mu + u\beta, u\Sigma)$, donde u es la variable de mezcla con soporte en R^+, $\mu, \beta \in R^p$ y Σ matriz de varianza-covarianza.

Por lo que la distribución de X está dada por:

$$f(x) = \int\limits_{S_u} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|u\Sigma|^{n/2}} \exp -\frac{1}{2}(x-\mu-uB)\'u\Sigma^{-1}(x-\mu-uB)f(u)du$$

Aquí μ representa un vector de medias y a su vez es un parámetro de localización, β un vector de tendencia.

Una propiedad importante de las variables de mezcla, es que la cola da su distribución depende de la variable de mezcla u, por lo que se prodía seleccionar alguna u arbitraria para que X tenga colas pesadas.

Y además, como se verá posteriormente, la función generadora de momentos $M_x(t)$ del vector aleatorio X es proporcional a $M_u(t)$, la función generadora de momentos de la variable de mezcla u. Y la función característica $\Phi_x(it)$ es proporcinal a la función característica de la variable de mezcla u, $\Phi_u(it)$.

En la figura 4 se muestra el efecto combinado que la variaable de mezcla u tanto en el vector de medias como n en la matriz de varianza covarianza. El vector de trayectoria $\beta = (2, 2)$, y u se distribuye pareto con parámetro de localización 5, y parámetro de forma 2, u tomó el valor de 7.24. Como era de esperar, tanto el centro de la distribución como la disperción se han modificado, pero ahora de manera considerable.

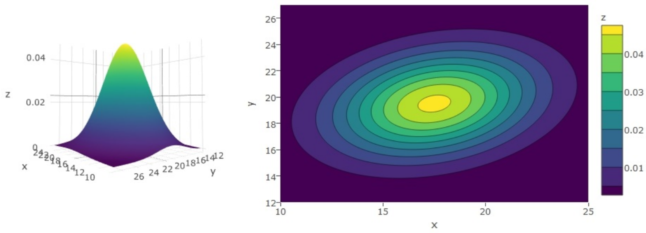

Figura 4:

Propiedades

La función característica de X es $\Phi_X(t) = \exp(it\mu')\Phi_u(it\beta' - \frac{1}{2}t\Delta t')$, donde $\Phi_u(.)$ es la función característica del la variable de mezcla u.

Demostración:

$$\Phi_X(t) = \int_x \exp(it)f(x)dx = \int_x \exp(it)(\int_u f(x)|_u f(u)du)dx = \int_x\int_u exp(it)f(x)|_u f(u)dudx$$

Luego por el Teorema de Fubini (ver algún anexo)

$\int_x\int_u exp(it)f(x)|_u f(u)dudx = \int_u\int_x exp(it)f(x)|_u f(u)dudx = \int_u exp(it(\mu + u\beta) + \frac{1}{2}ituΔit)f(u)du$

Ya que la función generadora de momentos de una distribución normal p-variada es: $exp(t'\mu + t'\Sigma t)$, y además $X|_u\ N(\mu + u\beta, u\Delta)$

Factorizando el exponenete de la exponencial se tiene que:

$\int_u exp(it(\mu+u\beta)+\frac{1}{2}itu\Delta it)f(u)du = \int_u \exp(it'\mu)exp(u(it'\beta - \dfrac{1}{2}t'u\Delta t))f(u)du = exp(it'\mu)\Phi_u(it\beta - \frac{1}{2}t\Delta t)$.

Por lo tanto: $\Phi_X(t) = exp(it'\mu)\Phi_u(it\beta - \frac{1}{2}t\Delta t)$

Para comprobar que la función generadora de X es $M_x(t) = \exp^{t'\mu} M_u(t\beta + \dfrac{1}{2}t'\Delta t)$ basta con sustituir t por it en el resultado anterior.

El resultado anterior nos indica que podemos obtener la función generadora de momentos o característica del vector aleatorio X con tan solo conocer la función característica o generadora de u, lo cual sería de utilidad si solo nos interesan algunos momenots, o también nos ayudaría a identificar la distribución de X, en caso de reconocer la función característica o generadora de momentos. Inversamente, el resutado anterior nos indica que si la función característica o generadora de algún vector aleatorio Z se puede descomponer como el producto de $\exp it'\mu$, y alguna $M_y(t)$, entonces Z es una variable normal de mezcla en esperanza varianza, con distribución de mezcla y.

Bibliografía