Distribución Gaussiana inversa generalizada

Se dice que X tiene una distribución gaussiana inversa generalizada $N(\lambda, \xi, \Psi)$, si su densidad es de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{\xi^{-\lambda}\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda} x^{\lambda-1} \exp\frac{-1}{2}(\xi x^{-1} + \Psi x)}{2\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})}$$

Donde $\kappa_{\lambda(.)}$ es una función modificada de Bessel de tercer tipo, y si $\lambda < 0$, entonces $\xi > 0$, $\Psi \geq 0$; y si $\lambda = 0$, entonces $\xi > 0$, $\Psi > 0$, y si si $\lambda > 0$, entonces $\xi \geq 0$, $\Psi > 0$.

Si X se distribuye $N(\lambda, \xi, \Phi)$, entonces su función generadora de momentos es:

$$\Phi(it) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp itx \frac{\xi^{-\lambda}\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda} x^{\lambda-1} \exp\frac{-1}{2}(\xi x^{-1} + \Psi x)}{2\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})} dx =$$

$$\frac{\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda}}{2\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})} \frac{2\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi(2it+\Psi)})}{\sqrt{\xi(2it+\Psi)}^{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{-\lambda} \frac{\sqrt{\xi(2it+\Psi)}^{\lambda}}{2\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi(2it+\Psi)})} \exp\frac{-1}{2}(\xi x^{-1} + (2it+\Psi)x)$$

Donde la última integral vale uno por ser una densidad $N(\lambda, \xi, 2it + \psi)$ intefrada sobre su soporte, por lo que:

$$\Phi(it) = \frac{\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda}}{\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})} \frac{\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi(2it+\Psi)})}{\sqrt{\xi(2it+\Psi)}^{\lambda}}$$

Si X se distribuye $N(\lambda, \xi, \Phi)$, entonces su résimo momento es:

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \frac{\xi^{-\lambda}\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda} x^{\lambda-1} \exp\frac{-1}{2}(\xi x^{-1} + \Psi x)}{2\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})} dx =$$

$$\frac{x^r 2\kappa_{\lambda+r}(\sqrt{\xi\Psi})}{\sqrt{\xi\Psi}^{r} 2\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^{-\lambda-r}\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda+r} x^{\lambda+r-1} \exp\frac{-1}{2}(\xi x^{-1} + \Psi x)}{2\kappa_{\lambda+r}(\sqrt{\xi\Psi})} dx$$

Por lo tanto:

$$E[X^r] = (\frac{\xi}{\Psi})^{\frac{r}{2}} \frac{\kappa_{\lambda+r}(\sqrt{\xi\Psi})}{\sqrt{\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})}}$$

Distribución Hiperbólica Generalizada

Se dice que el vector p variado X tiene una distribución hiperbólica generalizada $GH_p(\lambda, \xi, \Psi, \mu, \Sigma, \beta)$ si su densidad es de la siguiente forma:

$$f(x) = c\frac{\kappa_{\lambda-d/2}(\sqrt{\xi + (x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)(\Psi + \beta\Sigma^{-1}\beta)})}{\xi + (x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)(\Psi + \beta'\Sigma^{-1}\beta)^{\frac{d}{2}-\lambda}} \exp{(x-\mu)'\Sigma^{-1}\beta}$$

donde c=$\frac{\sqrt{\xi\lambda}^{-\lambda}\Psi^{\lambda}(\Psi+\beta\Sigma^{-1}\beta)^{\frac{d}{2}-\lambda}}{(2\Pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}\kappa_{\lambda(\sqrt{\xi\Psi})}}$.

Una característica importante de la distribución hiperbólica generalizada es que pude descomponerse como una variable de mezcla, donde $X|u$ se distribuye $N(\mu+u\beta,u\Sigma)$, y u se distribuye $N\text{\textasciitilde}(\lambda,\xi,\Psi)$.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp{(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}}{(2\Pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}u^{d/2}}\exp-\frac{(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}{2u}-\frac{\beta\Sigma^{-1}\beta}{2/u}f(u)du$$

Donde:

$$f(u)=\frac{\xi^{-\lambda}\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda}u^{\lambda-1}\exp\frac{-1}{2}(\xi u^{-1}+\Psi u)}{2\kappa_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})}$$

Sea $a=(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)$, y $b=\beta\Sigma^{-1}\beta$, entonces de aquí se sigue que:

$$f(x)=\frac{\exp{(x-\mu)'\Sigma^{-1}\beta\xi^{-\lambda}\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda}}}{(2\Pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}2k_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})}\int_{-\infty}^{\infty}u^{\lambda-d/2-1}\exp-1/2(au^{-1}bu+\xi u^{-1}+\Psi u)du$$

Trabajandosolamente con el integrando se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^{\lambda-d/2-1}\exp-1/2(au^{-1}+bu+\xi u^{-1}+\Psi u)du=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^{\lambda-d/2-1}\exp-1/2((a+\xi)u^{-1}+(b+\Psi)udu$$

Ahora, sea $\lambda'=\lambda-1/2$, $\xi'=a+\xi$, $\Psi'=b+\Psi$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^{\lambda-d/2-1}\exp-1/2((a+\xi)u^{-1}+(b+\Psi)udu=\int_{-\infty}^{\infty}u^{\lambda'-1}\exp-1/2(\xi'u^{-1}+\Psi'u)du$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^{\lambda'-1}\exp-1/2(\xi'u^{-1}+\Psi'u)du=\frac{2k_{\lambda'}(\sqrt{\xi'\Psi'})}{\xi'^{-\lambda'}(\sqrt{\xi'\Psi'})^{\lambda'}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi^{-\lambda'}(\sqrt{\xi\Psi})^{\lambda'}}{2k_{\lambda'}(\sqrt{\xi'\Psi'})}$$

$$u^{\lambda'-1}\exp-1/2(\xi'u^{-1}+\Psi'u)du$$

Donde la última integral vale uno por ser una distribución $N\text{\textasciitilde}(\lambda',\xi',\Psi')$ integrada sobre su soporte, por lo que tenemos que:

$$f(x)=\frac{\exp{(x-\mu)'\Sigma^{-1}\beta\xi^{-\lambda}\sqrt{\xi\Psi}^{\lambda}}}{(2\Pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}2k_{\lambda}(\sqrt{\xi\Psi})}\frac{2k_{\lambda'}(\sqrt{\xi'\Psi'})}{\xi^{-\lambda'}(\sqrt{\xi'\Psi'})^{\lambda'}}$$

Por último, sustituyendo los valores de a, b, $\acute{\xi}$, $\acute{\Psi}$, y agrupando algunos términos tenemos que efectivamente f(x) se distribuye $GH_p(\lambda,\xi,\Psi,\mu,\Sigma,\beta)$.

Ahora para encontrar los momentos de la distribución GH_p, como puede ser expresada como una variable de mezcla en esparanza-varianza, la propiedad 1) nos dice que $\Phi_X(t)=\exp(it\beta\acute{\mu})\Phi_u(it\acute{\beta}-\frac{1}{2}t\Sigma\acute{t})$, donde $\Phi_u(.)$ es la función característica del la variable de mezcla u que se distribuye $\tilde{N}(\lambda,\xi,\Psi)$.

La función característica nos permite calcular fácilmente la distribución de una transformación lineal del vector p-variado X, pues si ahora consideramos el vector aleatorio $Y=aX+b$, donde $a\in M_{rxp}$, $b\in R^p$ entonces:

$$\Phi_Y(t)=exp(bit)\Phi_X(at)=\exp(bit+it\beta\acute{\mu})\Phi_u(iat\acute{\beta}-\frac{1}{2}at\Sigma a\acute{t})=$$

$$\exp(it(b+\beta\mu\acute{)})\Phi_u(iat\acute{\beta}-\frac{1}{2}at\Sigma a\acute{t})$$

Lo cual nos indica que Y se distribuye $GH_p(\lambda,\xi,\Psi,b+\beta\mu,a\Sigma\acute{a},a\beta)$, y a su vez que.

También a partir de la función característica es fácil ver que la distribución marginal de X_i es $GH_p(\lambda,\xi,\Psi,\mu_i,\Sigma_i,\beta_i)$, donde Σ_i es el i-ésimo componente del primer renglón de Σ. Las dos propiedades anteriores nos dicen que si X se distribuye GH_p, entonces es cerrado bajo convoluciones.