Tesis

David Edgardo castillo Rodríguez

January 25, 2016

Aplicación de mezclas de distribución en esperanza-varianza

Introducción

En varios modelos financieros se asume que la distribución de los retornos financieros obedece una ley de distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. El problema de asumir una ley de distribución normal, es que no captura ciertas caractrísticas intrínsecas a los datos, tales como colas pesadas, lo cual tendería a tener estimaciones subvaluadas acerca de la ocurrencia de cieros eventos.

Dicho lo anterior, es importante modelar los retornos financieros con distribuciones que permitan capturar colas pesadas. Y es aquí donde la familia hiperbólica generalizada es de importancia, pues su gran flexibilidad permite modelar características como estas. Otra ventaja de la familia hiperbólica generalizada es que un subconjunto de ella puede ser estudiada a partir de mezclas de distribucines normales en esperanza-varianza, y aún más importante, que el comportamiento de la cola puede ser estudiado a partir del comportamiento de la cola de la variable de mezcla.

Por lo que el siguiente trabajon se centrará en ajustar una distribución hiperbólica generalizada a un conjunto de datos que representan modelos financieros. La distribución hiperbólica generalizada será abordada a través de mesclas de dsitribución en esperanza.varianza, y a su vez se utilizará el metódo de verosimilitud extendida, el cual simplificara los cálculos computacionales.

Índice

Algunos preeliminares

¿Qué es una mezcla normal en esperanza-varianza? Es una distribución normal n-dimensional, que condicionada a alguna variable aleatoria u con soporte en $[0,\infty]$, se distribuye $N(\mu+uB,u\Delta)$, donde μ es el vector de medias, B una tendencia, y Δ la matriz de varianza-covariana.
Es importante notar que $x|_u$ tiene una esperanza y varianza pequeña si u es pequeña, y grande conforme u toma valores mayores, por lo que dependiendo del valor que u tome es posible que ciertos eventos ocurran con mayor o menor probabilidad.

La función de densidad de $x|_u$ es:
$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|u\Delta|^{n/2}}\exp(-\frac{1}{2}(x-\mu-uB)'u\Delta^{-1}(x-\mu-uB))$$

Por lo que si queremos obtener la función de densidad de X, integramos con respecto a u, por lo que:
$$f(x)=\int_I\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|u\Delta|^{n/2}}\exp(-\frac{1}{2}(x-\mu-uB)'u\Delta^{-1}(x-\mu-uB))f(u)du$$

También es importante notar que dependiendo la variable mezcla u a usar, se obtendrá una distribución diferente en X, la cual podría tener colas pesadas. (Aquí ilustrar con algunos ejemplos)

Ahora bien, mencionando algunas propiedades de las distribuciones mezclas en esperanza varianza:

La función característica de X es $\Phi_X(t)=\exp(it\mu')\Phi_u(it\beta'-\frac{1}{2}t\Delta t')$, donde $\Phi_u(.)$ es la función característica del la variable de mezcla u.
Demostración:

$$\Phi_X(t)=\int_x\exp(it)f(x)dx=\int_x\exp(it)(\int_u f(x)|_u f(u)du)dx=\int_x\int_u exp(it)f(x)|_u f(u)dudx$$

Luego por el Teorema de Fubini (ver algún anexo)

$$\int_x\int_u exp(it)f(x)|_u f(u)dudx=\int_u\int_x exp(it)f(x)|_u f(u)dudx=\int_u exp(it(\mu+u\beta)+\frac{1}{2}itu\Delta it)f(u)du$$
Ya que la función generadora de momentos de una distribución normal n-variada es: $exp(t'\mu+t'\Sigma t)$, y además $X|_u\ N(\mu+u\beta,u\Delta)$

Luego factorizando el exponenete de la exponencial se tiene que:
$$\int_u exp(it(\mu+u\beta)+\frac{1}{2}itu\Delta it)f(u)du=\int_u\exp(it'\mu)exp(u(it'\beta-\frac{1}{2}t'u\Delta t))f(u)du=exp(it'\mu)\Phi_u(it\beta-\frac{1}{2}t\Delta t).$$

Por lo tanto: $\Phi_X(t) = exp(it'\mu)\Phi_u(it\beta - \frac{1}{2}t\Delta t)$

El resultado anterior nos indica que podemos obtener la función característica de X con tan solo conocer la función característica de u, lo cual podría simplificar enormemente los cálculos, además también nos indica que si la función característica de una variable aleatoria Y tiene la misma forma que el resultado anterior, entonces podemos descomponer a Y como una distribución de mezcla en esperanza y varianza, con función de mezcla u dada por la función característica.

Además tomando de la función característica de $f(x)|_u$ se observa que si queremos tomar un subconjunto $x_1 de X$ tal que $X = (x_1, x_2)$, donde $dim(x_1) = p$, $dim(x_1) = q$, $0 < p, q y p + q = n$ basta con valuar la función característica en $t' = (t_1, t_0)$, donde $t_0$esun vector de dimención q formado de ceros, se tendría que:

$\Phi_{x_1}(t) = \Phi_x((t', t_0)) = \exp(i(t', t_0)) + \frac{1}{2}i(t', t_0)'u \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta 11 & \Delta 12 \\ \hline & \Delta 22 \\ \Delta 21 & \end{array} i(t', t_0)$ (arreglar bien esta cosa), donde $[\Delta 11, \Delta 12 : \Delta 21, \Delta 22]$ es la matriz de varianza covarianza asosciada a la eleccion de x_1,y μ', β' el vector de esperanza y de "drift" asociados a x_1

$? > \Phi_{x_1}(t) = \exp((it(\mu' + u\beta') + \dfrac{1}{2}tu\Delta_{11}it)$

Luego por la unicidad de la función característica se tiene que $X_1|u\ N(\mu' + u\beta', u\Delta_{11})$

los dos resultados anterior implican que podemos conocer la distribución de cualquier subconjunto del vector aleatorio X teniendo alguna distribución de mezcla u.

Una clase importante de mezclas en esperanza varianza es la de las hiperbólicas generalizadas, este tipo de distribución fue dada por Bardorf-Nielse ,1997 (citar bien esta parte). La importancia de este tipo de distribuciones recae en que empíricamente se ha comprobado que ajustan mejor la distribución de los logaritmos de retornos financieros, y además son útiles para modelar colas pesadas. Una de las características principales de este tipo de distribución, es que el logaritmo de la función de densidad se comporta como una hipérbola, o un paraboloide (dependiendo de los parámetros), lo cual es útil para asignar mayor o menor masa de probabilidad alrededor de la media de la distribución, o en las colas, lo cual permite modelar distribuciones de cola pesada.

Definición: se dice que la v.a X sigue una distribución Hiperbólica generalizada, si su función de densidad es la siguiente:

$$f_x(x) = \frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}\lambda}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-\frac{1}{2}}\delta^\lambda B(\lambda,\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}(\delta^2+(x-\mu)^2)^{\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}}B(\lambda-\tfrac{1}{2},\alpha\sqrt{\delta^2+x^2-2x\mu+\mu^2})\exp\beta(x-\mu)$$

Aquí μ representa el parámetro de localización, δ es un parámetro de escala, α de forma, mientras que β influye en el sesgo y λ en la curtosis. (incluir algunos ejemplos gráficos de cómo se ve esta distribución variando los parámetros)

Otra distribución importante es la gaussiana inversa generalizada, (por qué es importante esta distribución?)

Definición: se dice que la v.a X se distribuye gaussiana inversa generalizada (GIG) con parámetros $\lambda, \delta^2 y \kappa^2$,si su función de densidad es: $f_u(u) = \frac{(\frac{\kappa}{\delta})^\lambda}{2K_\lambda(\delta\kappa)}u^{\lambda-1}\exp -\frac{1}{2}(\delta^2u^{-1}+\kappa^2u)$ con $u \in [0,\infty] y K_\lambda$ es una función de Bessel (poner en algún anexo lo de la función de Bessel que se usa constantemente en las distribuciones hiperbólicas, tambié investigar sobre la parametrización de esta distribución)

Ahora si nuestra variable mezcla se $X|_u$ distribuye $N(\mu + u\Delta\beta, u\beta\Delta)$, con la variable de mezcla u $GIG(\lambda, \delta^2, \kappa^2)$, entonces la distribución de X es hiperbólica generalizada con función de densidad:

(poner la distribución?)