

神经网络方法在解 C—TSP 中的应用

党建武

(电信与自动控制系)

新 蕃

(西南交通大学)

摘 要 该文提出了一个新的组合优化问题:中国旅行商问题(C-TSP),讨论了用神经网络的原理和方法解决它,提出了智能化的优化方法。

关键词 神经元,神经网络,组合优化,旅行商问题

分类号 TP18

在铁路运输中,如列车编组、货物调运、运输规划、驼峰调车等都是大规模的组合优化问题,难度很大。由于我国幅员辽阔,车流径路长,路网错综复杂,编组站较多,这种客观条件使得组织车流的工作量变得格外复杂。因为随着问题数目的增大,计算量将按指数规律增大^[1],在现行的计算机上存储程序和控制程序都是一条接一条地串行方式工作,因而在处理一些需要进行综合判决的问题时,会产生计算工作量的“组合爆炸”现象。面对当前计算机遇到的这些问题,人们在前四代计算机科学技术及 VLSI 成就的基础上,试图制造出新一代计算机来解决这一矛盾。另一方面,生物学家长期以来对大脑神经网络的研究,大大促进了试图用大量并行的简单电子线路单元模拟神经网络功能的设想。近年来,对神经网络模型及复杂的多模型系统的开发取得了巨大的进展,给组合优化问题的解决带来了希望。在神经网络模型求解中,把组合优化问题化为一组逻辑问题,并把该问题用一个能量函数表示,使能量函数的极值对应于该问题的最优解。本文首先介绍了神经元模型和 Hopfield 神经网络,然后把 TSP 映射到神经网络上,即找到 TSP 与神经网络之间的联系,在此基础上建立了解决 C—TSP 这一优化问题的神经网络并行算法,并对算法进行了智能化的改进,最后的计算结果说明了算法的可行性和有效性。

1 神经元模型及其 Hopfield 神经网络模型

1.1 神经元模型

神经网络是由大量的非线性神经元相互连接组成的网络系统。神经元的结构和功能十分简单,它可以看成如图 1 所示的非线性处理单元^[1,2]。

在图 1 中的输入矢量 X 是一个 N 维矢量, $X = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$, 它的每一个分量都是实连续变量。各权重值(或称权重系数)也构成一个矢量 W , $W = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]$, W 与 X 内

• 本文为国家自然科学基金资助项目

收稿日期:1993-09-30

积再减去阈值(或称门限)变量 θ 就得神经元 i 的净输入 u_i , 对 u_i 进行某函数运算 $g[\cdot]$, 即得到神经元 i 的输出 V_i . 神经元的运算可表示为

$$\begin{cases} u_i = W X^T - \theta = \sum_{j=0}^{N-1} w_{ij} x_j - \theta \\ V_i = g(u_i) \end{cases} \quad (1)$$

图1 神经元模型

式中 $g[\cdot]$ 是一个单调非降函数。

1.2 Hopfield 神经网络模型

连续型 Hopfield 神经网络可表示为

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{\tau} + \sum_{j=1}^N W_{ij} V_j + I_i \\ V_i = g(u_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (2)$$

其中, u_i 表示神经元 i 的内部(膜)电位; V_i 表示它的输出; W_{ij} 表示神经元 j 至神经元 i 的连接权; I_i 表示系统外部的输入, 这相当于系统的一个偏置; τ 为时间常数。输入—输出函数 $g[\cdot]$ 一般取 Sigmoid 函数, 即

$$V_i = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{u_i}{u_0} \right) \right) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{2u_i}{u_0}}} \quad (3)$$

定义1 定义(2)式的计算能量函数为

$$\begin{aligned} E = & -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N W_{ij} V_i V_j - \sum_{i=1}^N V_i I_i \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau} \int_0^{V_i} g^{-1}(V) dV \end{aligned} \quad (4)$$

从而有如下定理:

定理 对于系统(2)式, 若 g^{-1} 为单调增且连续, $C_i > 0$, $W_{ij} = W_{ji}$, 则沿系统轨迹有

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} & \leq 0, \text{ 当且仅当 } \frac{dV_i}{dt} = 0 \text{ 时,} \\ \frac{dE}{dt} & = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

证明

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{\partial E}{\partial V_i} \cdot \frac{dV_i}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial V_i} & = -\frac{1}{2} \sum_j W_{ij} V_j - \frac{1}{2} \sum_j W_{ji} V_j + \frac{u_i}{R} - I_i \\ & = -\frac{1}{2} \sum_j (W_{ji} - W_{ij}) V_j - (\sum_j W_{ij} V_j - \frac{u_i}{R} + I_i) \end{aligned}$$

$$= -C_i \left(\frac{du_i}{dt} \right)$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= - \sum_i \frac{dV_i}{dt} \cdot C_i \frac{du_i}{dt} \\ &= - \sum_i C_i \frac{dV_i}{dt} \cdot \frac{du_i}{dV_i} \cdot \frac{dV_i}{dt} \\ &= - \sum_i C_i \left(\frac{dV_i}{dt} \right)^2 \cdot \frac{d}{dV_i} g^{-1}(V_i) \end{aligned}$$

由于 $C_i > 0$, 且 $g^{-1}(V_i)$ 函数单调增长, 所以

有

$$\frac{dE}{dt} \leq 0$$

而且当 $\frac{dV_i}{dt} = 0$ 时

有

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

该定理表明,随着时间的演变,在状态空间中网络总是朝着能量函数 E 减小的方向运动,网络稳定时 E 取极小值。

若神经元非线性函数 $g(\cdot)$ 呈硬限特性,则(4)式中的积分项为零,此时(4)式可简化为

$$E = - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j W_{ij} V_i V_j - \sum_i I_i V_i \quad (6)$$

2 用 Hopfield 网络求解 C-TSP

2.1 C-TSP 优化问题的提出

中国有 31 个省、直辖市和自治区,我们在其首府之间进行旅行, C-TSP (China-Traveling Salesman Problem) 就是在这 31 个城市的集合 {北京、上海、哈尔滨、银川、... 台北} 中找出一个最短的经过每个城市各一次并回到起点的路径和距离。

对于 31 个城市,可能存在的路径有 $(31-1)!/2 = 1.326 \times 10^{33}$ 条,利用搜索的办法很难实现。利用神经网络的方法解决它比较方便和直观,而且在不同的情况下得到不同的结果,可以不断优化。对于我国的民航、铁路、物资的调配及旅游事业具有一定的促进意义,对于了解我国各省、市、自治区的地理分布具有一定的现实意义。

2.2 用 Hopfield 网络解 C-TSP

2.2.1 C-TSP 能量函数的建立

用神经网络方法解决 C-TSP, 要把问题映射到 Hopfield 网络上。对于 N 个城市的 TSP, 任何一个城市在最终路径上的访问次序可用一个 N 维向量来表示, 因而每一个城市

就需 N 个神经元表示。下面以 5 个城市为例,如果城市 A 是第 3 个被访问,则表示为 00100,即第 3 个神经元输出为 1,其余都为 0。为了表示所有的城市,可简单地用 $N \times N$ 矩阵表示。此矩阵如图 2 所示。其中 A、B、C、D、E (对应各行) 表示城市名称,1、2、3、4、5 (对应各列) 表示路径顺序。若要用这样的 $N \times N$ 矩阵描述一个有效路径,必须保证该矩阵的每行每列只有一个 1,而其余元素为 0,这样的矩阵称为“换位矩阵”。

	1	2	3	4	5
A	0	0	1	0	0
B	0	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1
E	0	1	0	0	0

图 2 $N=5$ 的换位矩阵

这样,路径为 $C \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$

距离为 $D_{\text{min}} = d_{CE} + d_{EA} + d_{AB} + d_{BD} + d_{DC}$

根据下面四方面的要求:

- ① 换位矩阵每行只能有一个“1”;
- ② 换位矩阵每列只能有一个“1”;
- ③ 换位矩阵中元素“1”之和应为 N ;
- ④ 所构造函数的极小值对应于最短路径。

我们构造出与 C-TSP 相对应的计算能量函数为

$$E = \frac{A}{2} \sum_{x=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N V_{xi} V_{xj} + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{x=1}^{N-1} \sum_{y=x+1}^N V_{xi} V_{yi} + \frac{C}{2} \left(\sum_{x=1}^N \sum_{i=1}^N V_{xi} - N \right)^2 + \frac{D}{2} \sum_{x=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{xy} V_{xi} (V_{y,i+1} + V_{y,i-1}) \quad (7)$$

式(7)中 A, B, C, D 为拉格朗日常数,均为正数,其中的前三项与条件①、②、③的要求相对应,只有当上述三条件均满足时,前面这三项取最小值 0。如不满足则不为 0,因此这三项称为惩罚项。式(7)中的第四项为目标项,它的最小值就对应于最短路径长度。

式(7)中 V 数值为 0 或为 1,是由表征 C-TSP 的换位矩阵中 $31 \times 31 = 961$ 个神经元的输出来表示的。其中 d_{xy} 按文献^[1]的附录表二取值。

2.2.2 C-TSP 的算法

对 C-TSP, $N = 31$, 神经元 (x, i) 的输入为 u_{xi} 输出为 V_{xi} , 利用 Hopfield 网络的动态特性,可求出 C-TSP 的解,由于神经网络的计算机制是并行的,所以得到的算法是一并行优化算法:

$$\frac{du_{xi}}{dt} = -\frac{u_{xi}}{\tau} - A \sum_{j \neq i} V_{xj} - B \sum_{y \neq x} V_{yi} - C (\sum_{x,i} V_{xi} - N) - D \sum_{y,j} d_{xy} (V_{y,i+1} + V_{y,i-1}) \quad (8)$$

$$V_{xi} = g(u_{xi}) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{u_{xi}}{u_0} \right) \right] \quad (9)$$

在(8)式中, $N = 31, \tau = 1.0, A, B, C, D, d_{xy}$ 的意义和作用同(7)式。在(9)式中, u_0 为初始值,其取法是,在它确定后,所有的路径是平等的,同时为了使网络收敛于最小能量,则在 u_0 的基础上加一个干扰 δu_{xi} , 则 $u_{xi} = u_0 + \delta u_{xi}$, 这样可以使各个神经元的初始状态不同来选取路径。 δu_{xi} 的取值满足 $|\delta u_{xi}| \leq 0.1 u_0$ 。

利用(8)和(9)式求解 u_{xi} 和 V_{xi} 时按下列方程迭代:

$$u_{xi}^{t+1} = u_{xi}^t + \left(\frac{du_{xi}}{dt} \right) \cdot \delta, \quad (10)$$

初始值为:

$$u_{i,ini} = -0.5 * u_0 * \ln(N-1) \quad (11)$$

为了防止系统不平衡,在每个神经元电压相同的基础上加入随机干扰,和上面相同,随机值 $\pm 0.1U_{ini}$ 加到每个神经元上,即

$$u_{xi} = u_{i,ini} \pm 0.1u_{i,ini} \quad (12)$$

2.2.3 C-TSP 算法的智能化

我们在模拟过程中,为了加快收敛速度,在上面算法的基础上,采用下面几条准则:

- ① 设置阈值,若某一神经元的输出电压 $V_{xi} \geq C_1$ 时判定为“1”,否则为“0”。
- ② 在求得 V_{xi} 后,若换位矩阵中某行(某列)只有一个“1”,则把“1”所在的列(或行)的其它元素置为“0”。
- ③ 当有两行(或两列)或以上的元素相同且只有一个“1”时,则把判断前 V_{xi} 值较大的行(或列)执行法则②。
- ④ 当有 $N-1$ 行, $N-1$ 列满足换位矩阵的条件,则所需的最后一个“1”自动补上。
- ⑤ 在迭代过程中,如果新能量值与上次求得的能量值相比较,若其绝对误差小于 C_2 ,而此时仍没有得到有效的路径,那么称这次迭代“冻结”了。

2.2.4 C-TSP 的计算结果

定义 2 平均距离 L :由每个城市求与其它 $N-1$ 个城市的平均距离,然后加起来所得到的距离。即

$$L = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij}}{N-1} \quad (13)$$

对 C-TSP $L = 43253\text{km}$

定义 3 优化率 β :计算所得最小值 L_{min} 与 L 之比所得的值。

即
$$\beta = \frac{L_{min}}{L} \quad (14)$$

对 C-TSP
$$\beta = \frac{15408}{43253} = 0.356$$

将用人工的方法随机寻找的较短路径所得到的距离记为 Lh_{min}

对 C-TSP $Lh_{min} = 15990\text{km}$

我们用人工的方法随机寻找的较(最)长的路径所得的距离记为 Lh_{max}

对 C-TSP $Lh_{max} = 57986\text{km}$

在计算机上,利用神经网络的方法所得到的最短路径所对应的距离记为 L_{min}

对 C-TSP $L_{min} = 15408\text{km}$

在计算机上,利用神经网络的方法所得到的最长路径对应的距离记为 L_{max}

对 C-TSP $L_{max} = 43520\text{km}$

用贪心法,解 C-TSP 所得的最短路径对应的距离记为 $L_{Gmin} = 17102\text{km}$

用贪心法,从不同的城市出发得到的距离的平均值记为 $L_{Gav} = 18902\text{km}$

$$\text{贪心法的优化率 } \beta_G = \frac{17102}{43253} = 0.395$$

为了分析研究参数 u_0 、 A 、 B 、 C 、 D 对计算结果的影响,我们利用变更其值的方法进行模拟,具体情况如下:

(1) 参数 u_0 的选取

在保持其它参数不变的情况下,变更神经元输入——输出特性中的常数 u_0 ,以 0.005 为间隔在 0.005~0.25 范围内变化,模拟结果表明,当 $u_0 = 0.06$ 时结果最好。

(2) 参数 A 、 B 、 C 、 D 的选取

在 $u_0 = 0.06$ 的情况下,以 50~1500 范围内,以 50 为间隔分别变更 A 、 B 、 C 、 D ,结果表明: $A = B = 250$, $C = 900$, $D = 850$ 时结果最好。

在 $u_0 = 0.06$, $A = B = 250$, $C = 900$, $D = 850$ 时,模拟 C-TSP 得到的最短路径的距离为 $L_{\min} = 15408\text{km}$,具体路径如图 3 所示。

3 结束语

本文研究并提出了神经网络解决 C-TSP 的优化算法,并对算法进行了智能化。模拟结果表明本文的算法是可行的和有效的,由于神经网络是并行处理特性,所以本文的算法是一种并行优化算法,这对于一般组合优化问题并行算法的研究是具有实际意义的。

本文算法的软件编程是在 VAX/785 计算机上用 Fortran 语言实现,实验中,把这一算法改为适合于当今数字电子计算机的串行处理,所以没有反映出算法所具有的快速并行处理特性。若能将该算法集成于专用的并行处理计算机上,则能使其并行处理特性得以体现,因此,神经网络算法的硬件开发或在并行计算机上实现是我们后续一项非常重要的工作。

本文仅把神经网络方法应用于 C-TSP,我们正在把神经网络这一有效的方法应用于铁路网上车流组织的综合优化这一课题。相信本文对铁路系统的组合优化问题的研究具有一定的促进作用。

参 考 文 献

- 1 靳 蕃,范俊波.神经网络与神经计算机原理.应用.成都:西南交通大学出版社,1991.78~131
- 2 张忠辅.关于图的支配数.兰州铁道学院学报,1988,8(2,3):37~45
- 3 Hopfield J J, Tank D W. Computing With Neural Circuits; A Model. Science,1986,233(8):625~633
- 4 Hopfield J J. Neural Networks and Physical Systems With Emergent Collective computational Abilities. Proc. Natl. Acad. Sci. USA,1982,79(4):2554~2558

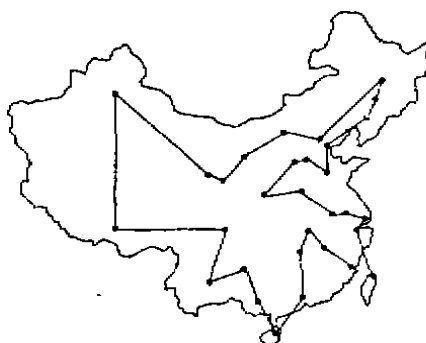


图 3 用 Hopfield 神经网络求得的 C-TSP 最短路径

An Application of the Neural Network Method to the C—TSP

Dang JianWu

(Dept. of Telecommunications—Automatic Control)

Jin Fan

(Southwest Jiaotong University)

Abstract A new combination optimization problem caued China Travelling Salesman Problem (C—TSP) is proposed in this paper. Then the principles and methods for solving C—TSP by the neural network are discussed, in which some intelligent optimization methods are added during iterative processing to get better solution.

Keywords neuron, neural network, combination optimization, salesman problem