

Simulation gravitationnelle

SIMNUM

Il s'agit dans ce projet de simuler le comportement d'un grand nombre de particules (assimilées à des points et de masse donnée), en interaction gravitationnelle classique. Ce type de modélisation permet de simuler l'interaction gravitationnelle de galaxies (constituées d'un grand nombre d'étoiles), par exemple la collision de deux galaxies.

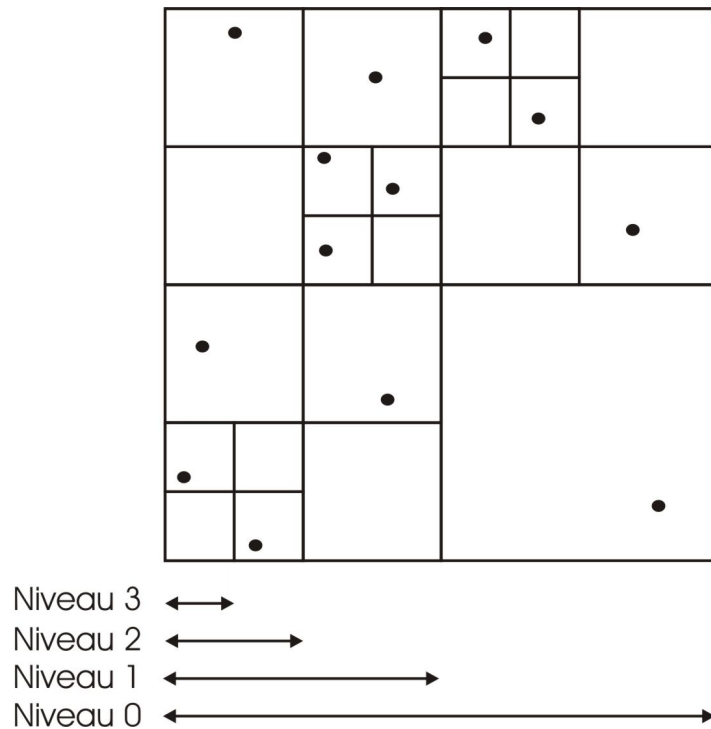
1 Modèle à deux échelles

La force gravitationnelle exercée à un instant donné sur une particule donnée i est la somme des forces gravitationnelles exercées par chacune des autres particules et est donc donnée par la loi d'interaction de gravitation de Newton :

$$f_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j g}{r_{ij}^2}$$

où g est la constante de gravitation universelle, m_j la masse de la particule j et r_{ij} la distance entre les particules i et j . Si on considère par exemple qu'il y a 10^4 particules ce qui est faible pour une galaxie, on doit donc calculer à chaque instant de l'ordre de 10^8 interactions ce qui est beaucoup! Pour diminuer de façon significative le temps de calcul, une idée consiste à utiliser cette loi exacte pour les particules proches et des lois approchées pour les particules lointaines. Par exemple on assimile plusieurs particules lointaines à une seule particule de masse la somme des particules et située au barycentre des autres particules.

Cette idée conduit à structurer l'espace qu'occupe les particules en boîtes hiérarchisées, chacune des boîtes contenant plusieurs sous-boîtes s'il y a plusieurs particules et la particule seulement s'il n'y en a qu'une. Il y a plusieurs façon de procéder. Nous proposons d'utiliser la technique où toute les sous-boîtes d'une boîte ont la même taille : division en 4 en 2D et en 8 en 3D.



Dans chaque boîte "terminale" il y a au plus une particule.

Concrètement une boîte sera donc un objet de la classe **boîte** qui a pour donnée :

- son niveau (permet de déterminer sa taille)
- son centre (permet de la localiser)
- son centre de masse (centre de gravité de toutes les particules contenues dans la boîte)
- sa masse (cumulée s'il y a plusieurs particules)
- un pointeur sur une particule (non nul si il y en a une seule)
- un pointeur sur sa première boîte fille (nul s'il n'y pas de sous boîte, cas d'une boîte terminale)
- un pointeur sur sa boîte soeur (nul si il n'y a plus de boîte soeur)

des méthodes :

- calcul de la force d'interaction (boucle sur les autres boîtes) si il y a une particule en considérant le cas d'une boîte proche (formule exacte) et le cas d'une boîte lointaine (formule approchée). Le critère dépend en fait de la distance de la boîte et de sa taille.
- une fonction d'ajout d'une particule
- une fonction de "suppression" d'une particule

La boîte de niveau 0 est la boîte racine. A partir cette boîte on peut parcourir toutes les boîtes et ainsi toutes les particules.

La procédure (récursive) d'ajout d'une particule à une boîte s'appuie sur l'idée suivante :

- soit la boîte est une boîte terminale et vide; on insère alors la particule dans cette boîte et la procédure est finie
- soit la boîte est une boîte terminale déjà occupée par une particule; on découpe alors la boîte en 4 ou 8 (suivant la dimension); on ajoute les deux particules dans leurs sous-boîtes respectives (éventuellement la même!)
- soit la boîte est constituée de sous-boîtes, on ajoute alors la particule à la sous-boîte qui contient la position de la particule

On n'oubliera pas de remettre à jour au fur et à mesure la masse et le centre de masse de toutes boîtes qui contiennent la particule ajoutée.

Dans le même esprit, on écrira une fonction qui supprime une particule d'une sous-boîte. Attention, si une boîte ne contient que des sous-boîtes vides il faut supprimer réellement les sous-boîtes, ce qui peut induire des suppressions de sous-boîtes en chaîne. On ne détruit jamais la boîte racine !

2 Evolution dynamique

Afin de simuler le comportement dynamique de l'ensemble des particules, on utilisera pour chaque particule i la loi $F_i(t) = m_i \gamma_i(t)$, $F_i(t)$ représentant la force exercée sur la particule et $\gamma_i(t)$ son accélération. Afin de discrétiser cette équation d'évolution, on utilisera un schéma saute-mouton. Plus précisément, on introduit un pas de temps constant Δt , on note $t_k = k\Delta t$ et $t_{k+1/2} = (k + 1/2)\Delta t$, $\vec{V}_i^{k+1/2}$ une approximation de la vitesse de la particule i à l'instant $t_{k+1/2}$ et X_i^k une approximation de la position de la particule i à l'instant t_k . Le schéma saute-mouton consiste à calculer ces approximations de la façon suivante :

$$\begin{aligned} V_i^{k+1/2} &= V_i^{k-1/2} + \frac{\Delta t}{m_i} F_i^k \\ X_i^{k+1} &= X_i^k + \Delta t V_i^{k+1/2} \end{aligned} \quad k \geq 0$$

Attention on calculera $V_i^{1/2}$ à l'aide de la formule : $V_i^{1/2} = V_i^0 + \frac{\Delta t}{2m_i} F_i^{k0}$.
 Le schéma saute-mouton est un schéma d'ordre 2 stable si Δt est assez petit.
 Le calcul complet d'une itération en temps consistera donc :

- à calculer les forces gravitationnelles pour chaque particule en réalisant une boucle sur les boites
 Attention, afin d'éviter la singularité due aux éventuelles collisions de particules, on utilisera la loi approchée :

$$f_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j g}{r_{ij}^2 + \varepsilon^2}$$

- à calculer les nouvelles vitesses et positions des particules à l'aide de l'itération saute-mouton
- à remettre à jour les boîtes car des particules ont pu changer de boîte au cours d'une itération

La remise à jour des boites peut s'opérer de plusieurs façons. Une méthode simple consiste à déplacer les particules en réalisant une boucle sur les boîtes. Dans une boîte terminale contenant une particule, de deux choses l'une :

- soit la particule ne sort pas de la boîte et il n'y a rien à faire,
- soit elle sort. Dans ce cas :
 - on "retire" la particule de la sous-boîte à l'aide de la fonction de suppression.
 - on ajoute ensuite la particule à l'aide de la procédure d'ajout

Attention, certaines particules peuvent sortir du domaine de calcul!

On aura besoin d'une classe **particule** pour stocker :

- sa position instantanée
- sa vitesse instantanée
- la force gravitationnelle qui s'exerce
- la liste des positions successives pour réaliser des films
- la particule suivante (liste de particules)

3 Méthodologie

On partagera le travail et on réalisera les étapes suivantes :

1. fabrication des classes élémentaires **particule**, **boîte** avec validation de toutes les fonctionnalités sur des cas simples.
2. écriture des fonctionnalités : calcul des forces gravitationnelles, mise à jour des positions, mise à jour des boites, initialisation des positions et vitesses des particules. On valide chacune des fonctionnalités sur des exemples simples (très peu de particules)
3. génération de fichiers de sortie que l'on exploitera à l'aide de Matlab pour générer des films (voir Matlab pour la façon de générer des films).

4 Application à la collision de galaxie

Une galaxie est une collection d'étoiles dans un état autogravitant, c'est à dire un état où le mouvement de chacune des étoiles reste confiné dans un domaine. Il est possible de construire des répartitions position, vitesse d'une galaxie sphérique (cf annexe ci-dessous). Pour simuler, la collision de deux galaxies il suffit d'animer chacune des galaxies d'un vecteur vitesse donné assurant une collision ! Ce vecteur vitesse vient se superposer à la vitesse de chaque étoile de la galaxie.

5 Annexe

Afin de construire un système autogravitant sphérique, on utilise le modèle de Plummer qui fournit une densité isotrope dans l'espace de la forme :

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} M R^{-3} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-5/2}$$

où M est la masse totale et R un paramètre qui détermine la dimension caractéristique du système de particules.

Pour simplifier, on se place dans le cas où $M = 1$, $R = 1$, $G = 1$ et dans le cas où la masse de chaque particule est $m = 1/N$ avec N le nombre de particule. On va construire à l'aide de tirage aléatoire selon des lois uniformes entre 0 et 1 un couple (*position*, *vitesse*) pour chaque particule.

- Etape 1 : soit X_1 un nombre aléatoire, on construit le rayon :

$$r = \left(X_1^{-2/3} - 1\right)^{-1/2}$$

- Etape 2 : soient X_2 et X_3 deux nouvelles valeurs aléatoires, on construit la position :

$$z = (1 - 2X_2)r, \quad x = (r^2 - z^2)^{1/2} \cos 2\pi X_3, \quad y = (r^2 - z^2)^{1/2} \sin 2\pi X_3$$

- Etape 3 : on note la vitesse d'échappement de la particule : $V_e = \sqrt{2}(1 + r^2)^{-1/4}$. On pose $V = qV_e$ (module de la vitesse) et on introduit la fonction $g(q) = q^2 (1 - q^2)^{7/2}$. On construit alors q de la façon suivante : soient X_4 et X_5 deux nouvelles valeurs aléatoires :

$$q = \begin{cases} X_4 & \text{si } X_5 < 10g(X_4) \\ \text{retirage de } X_4 \text{ et } X_5 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Etape 4 : soient X_6 et X_7 deux nouvelles valeurs aléatoires, on construit le vecteur vitesse $\vec{V} = (u, v, w)$:

$$w = (1 - 2X_6)V, \quad u = (V^2 - w^2)^{1/2} \cos 2\pi X_7, \quad v = (V^2 - w^2)^{1/2} \sin 2\pi X_7$$

Si on souhaite générer un système de masse totale M et d'énergie \mathcal{E} avec $G = 1$, il suffit de multiplier les longueurs par $(3\pi/64)M^2\mathcal{E}^{-1}$ et les vitesses par $(64/3\pi)M^{-1/2}\mathcal{E}^{1/2}$.

Ce système doit rester globalement invariant lorsqu'il n'est soumis à aucune autre force que les forces gravitationnelles internes. On pourra donc valider cette construction en l'injectant comme donnée initiale au code d'évolution et observer s'il reste globalement stable.