STA212

Anthony Kalaydjian - Mathieu Occhipinti

2023-04-29

```r
rm(list=ls())
setwd(getwd())
library(ggplot2)
set.seed(150)
```

Exercice 1 : Modélisation probabiliste

(a)

Dapres le cours, on a:

$$
\begin{aligned}
&R\left(g^*\right)=E_{X,Y}\left[\mathbb{1}\left\{g^*(X)\neq Y\right\}\right]\\
&=E_X\left[E_{Y|X}\left[\mathbb{1}\left\{g^*(X)\neq Y\right\}\right]\right]\\
&=E_X\left[\frac{1}{2}-\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\right]\\
&\text{Donc } R\left(\hat{g}_n\right)-R\left(g^*\right)=E_X\left[\frac{1}{2}-\left|\hat{\eta}(X)-\frac{1}{2}\right|\right]-E_X\left[\frac{1}{2}-\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|\right].\\
&=E_X\left[\left|\eta(X)-\frac{1}{2}\right|-\left|\hat{\eta}(X)-\frac{1}{2}\right|\right]\\
&\text{Où }\left\{\begin{array}{l}|a|-|b|\leqslant||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant 2|a-b|\\(a,b)\in\mathbb{R}^2\end{array}\right.\\
&\text{D'où } R\left(\hat{g}_n\right)-R\left(g^*\right)\leqslant 2E_X\left[\left|\eta(X)-\hat{\eta}(X)\right|\right]
\end{aligned}
$$

(b)

Le résultat précédent nous indique que pour toute règle de classification empirique, $\hat{g_n}$ issue de l'estimateur $\hat{\eta}$ de η, son risque associé est borné par le risque minimal issu de la règle de Bayes $R(g^*)$ auquel on ajoute un terme d'erreur d'estimation de η.

Exercice 2 : Classification multi-classes

(a)

Soit $\mathcal{Y}=\{1,...,K\}$.

On cherche à classifier les individus de $\mathcal{X}$ selon leur classe sur $\mathcal{Y}$.

Soit g^* l'estimateur de risque minimal associé à cette classification.

$$\begin{aligned}
R(g^*) &:= \mathbb{E}\left[1_{\{g^*(X)\neq Y\}}\right] && (1)\\
&= \mathbb{E}_X \mathbb{E}_{Y|X=x}\left[1_{\{g^*(x)\neq Y\}}\right] && (2)\\
&= 1 - \mathbb{E}_X \mathbb{E}_{Y|X=x}\left[1_{\{g^*(x)= Y\}}\right] && (3)\\
&= 1 - \mathbb{E}_X \mathbb{P}\left[g^*(x)=Y\right] && (4)\\
R(g^*) &= 1 - \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{K} \eta_i(x) 1_{\{g^*(x)=i\}}\right] && (5)
\end{aligned}$$

Ce risque est minimal lorsque le terme dans l'espérance est maximal.

Donc :

$$\boxed{g^*(x) = \underset{i\in\mathcal{Y}}{\text{argmax}}\ \eta_i(x)}$$

(b)

D'après le calcul précédent, et en utilisant les définitions de g^* et de g:

$$\begin{aligned}
R(g) - R(g^*) &= 1 - \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{K} \eta_i(x) 1_{\{g(x)=i\}}\right] - 1 + \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{K} \eta_i(x) 1_{\{g^*(x)=i\}}\right] && (6)\\
&= \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{K} \eta_i(x) 1_{\{g^*(x)=i\}}\right] - \mathbb{E}_X\left[\sum_{i=1}^{K} \eta_i(x) 1_{\{g(x)=i\}}\right] && (7)\\
&= \mathbb{E}_X\left[\max_{i\in\mathcal{Y}} \eta_i(x) - \mathbb{E}_X \eta_{g(x)}\right] && (8)\\
&= \mathbb{E}_X\left[\max_{i\in\mathcal{Y}} \eta_i(x) - \eta_{g(x)}\right] && (9)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{R(g) - R(g^*) = \mathbb{E}_X\left[\max_{i\in\mathcal{Y}} \eta_i(x) - \eta_{g(x)}\right]}$$

(c)

On considère maintenant la règle de classification $\hat{g_n}$ approchée de g et issue de $\hat{\eta_i}$ un estimateur de η_i obtenu à partir des données.

La règle de classification est donc la suivante :

$$\hat{g_n}(x) = \underset{j\in\mathcal{Y}}{\text{argmax}}\ \hat{\eta_j}(x)$$

$$\begin{aligned}
R(\hat{g_n}) - R(g^*) &= \mathbb{E}_X\left[\max_{i\in\mathcal{Y}} \eta_i(x) - \eta_{\hat{g_n}(x)}\right] && (10)\\
&= \mathbb{E}_X\left[\max_{i\in\mathcal{Y}} \eta_i(x) - \eta_{\hat{g_n}(x)}\right] && (11)
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Implémentation d'un perceptron (origine des SVM)

(a)

Supposons que l'on soit à l'itération t de l'algorithme, et tel que $m(\theta^t) \neq \emptyset$.\ Soit alors $i \in m(\theta^t)$
D'une part:

$$\begin{aligned}
\langle \theta^{t+1}, \theta^* \rangle &= \langle \theta^t + y_i x_i, \theta^* \rangle \\
&= \langle \theta^t, \theta^* \rangle + y_i \langle x_i, \theta^* \rangle \\
&\geq \langle \theta^t, \theta^* \rangle + ||\theta^*||_2 \delta
\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
||\theta^{t+1}||_2 ||\theta^*||_2 \geq \langle \theta^{t+1}, \theta^* \rangle &\geq \langle \theta^t, \theta^* \rangle + ||\theta^*||_2 \delta \\
&\geq \langle \theta^{t-1}, \theta^* \rangle + 2||\theta^*||_2 \delta \\
&\geq ... \\
&\geq \cancel{\langle 0, \theta^* \rangle} + t||\theta^*||_2 \delta \\
||\theta^{t+1}||_2 ||\theta^*||_2 &\geq t||\theta^*||_2 \delta
\end{aligned}$$

Donc:

$$\boxed{||\theta^{t+1}||_2 \geq t\delta} \tag{12}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
||\theta^{t+1}||^2 &= ||\theta^t + y_i x_i||^2 \\
&= ||\theta^t||^2 + 2y_i \langle \theta^t, x_i \rangle + ||y_i x_i||^2 \\
&\leq ||\theta^t||^2 + ||x_i||^2 \\
&\leq ||\theta^t||^2 + R^2 \\
&\leq ||\theta^{t-1}||^2 + 2R^2 \\
&\leq ... \\
&\leq \cancel{||\theta^0||^2} + tR^2 \\
||\theta^{t+1}||^2 &\leq tR^2
\end{aligned}$$

Donc:

$$\boxed{||\theta^{t+1}||^2 \leq tR^2} \tag{13}$$

Finalement, d'après **??** et **??**, on a :

$$t^2\delta^2 \leq ||\theta^{t+1}||^2 \leq tR^2$$

Donc $\boxed{t \leq \frac{R^2}{\delta^2}}$

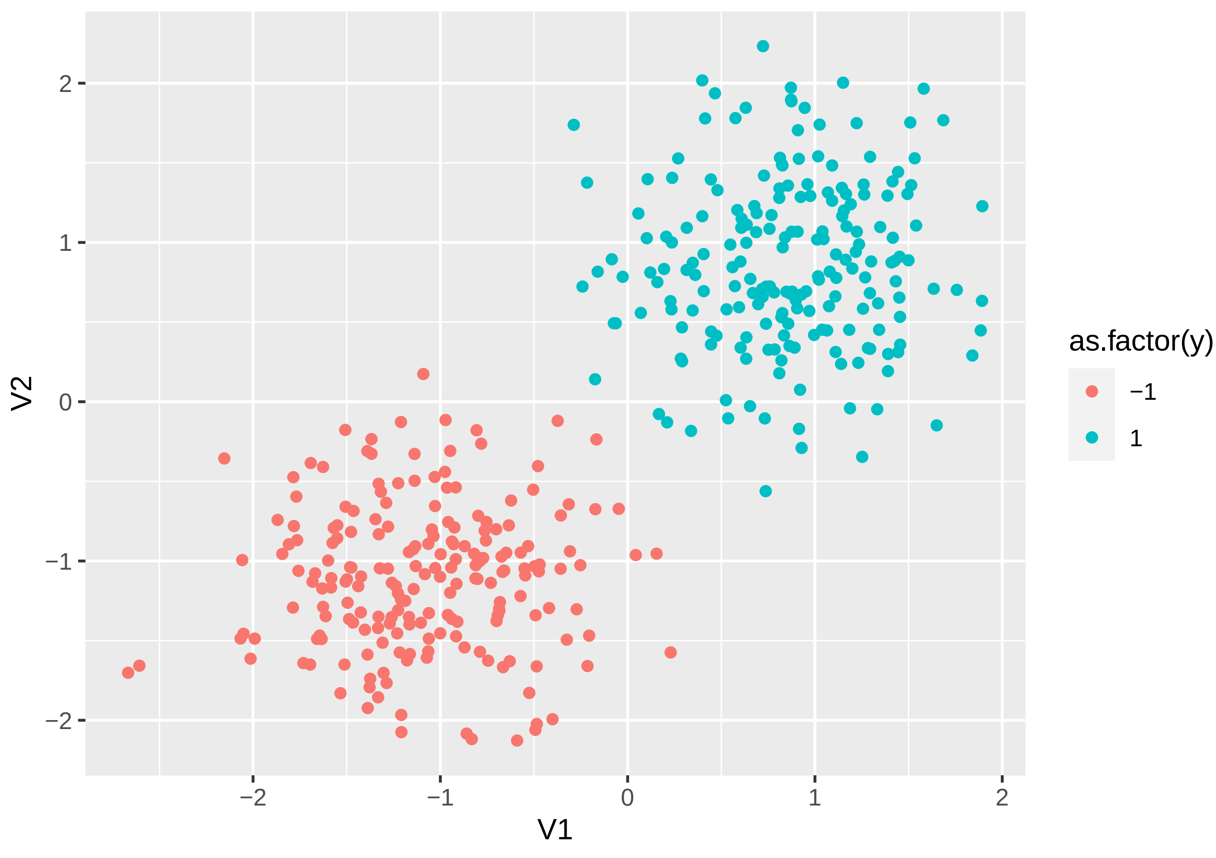
Ainsi, on a montré que si $m(\theta^t) \neq \emptyset$, alors $t \leq \frac{R^2}{\delta^2}$

Donc, au delà de $T = \frac{R^2}{\delta^2}$ itérations, $m(\theta^T)$ sera vide et l'algorithme aura convergé.

(b)

Importation des données :

```
load(file="X_y.rda")
df <- as.data.frame(cbind(X, y))
names(df) <- c("V1", "V2", "V3", "y")
plt1 <- ggplot(data=df) + aes(x=V1, y=V2, z=y, color=as.factor(y)) + geom_point()
plt1
```



La variable V3 est une variable d'intercept.

Algorithme perceptron

```
perceptron <- function(X, y){
  theta <- c(0, 0, 0)
  n <- nrow(X)
  m <- seq(1, n)
  counter <- 0
```

```r
  while (length(m) != 0){
    #sample a random item from m
    index = sample(m, 1)

    #update theta
    theta <- theta + y[index]*X[index,]

    #calculate the new m
    temp <- sapply(X=seq(1, n), FUN=function(k) theta%*%X[k,])
    criterion <- y*temp
    m <- which(criterion<0)
    counter <- counter + 1
  }
  return(list(theta=theta, count=counter))
}

res <- perceptron(X, y)
theta.star <- res$theta
count.star <- res$count

theta.star
```

```
## [1] 3.438710 4.537851 1.000000
```

```r
count.star
```

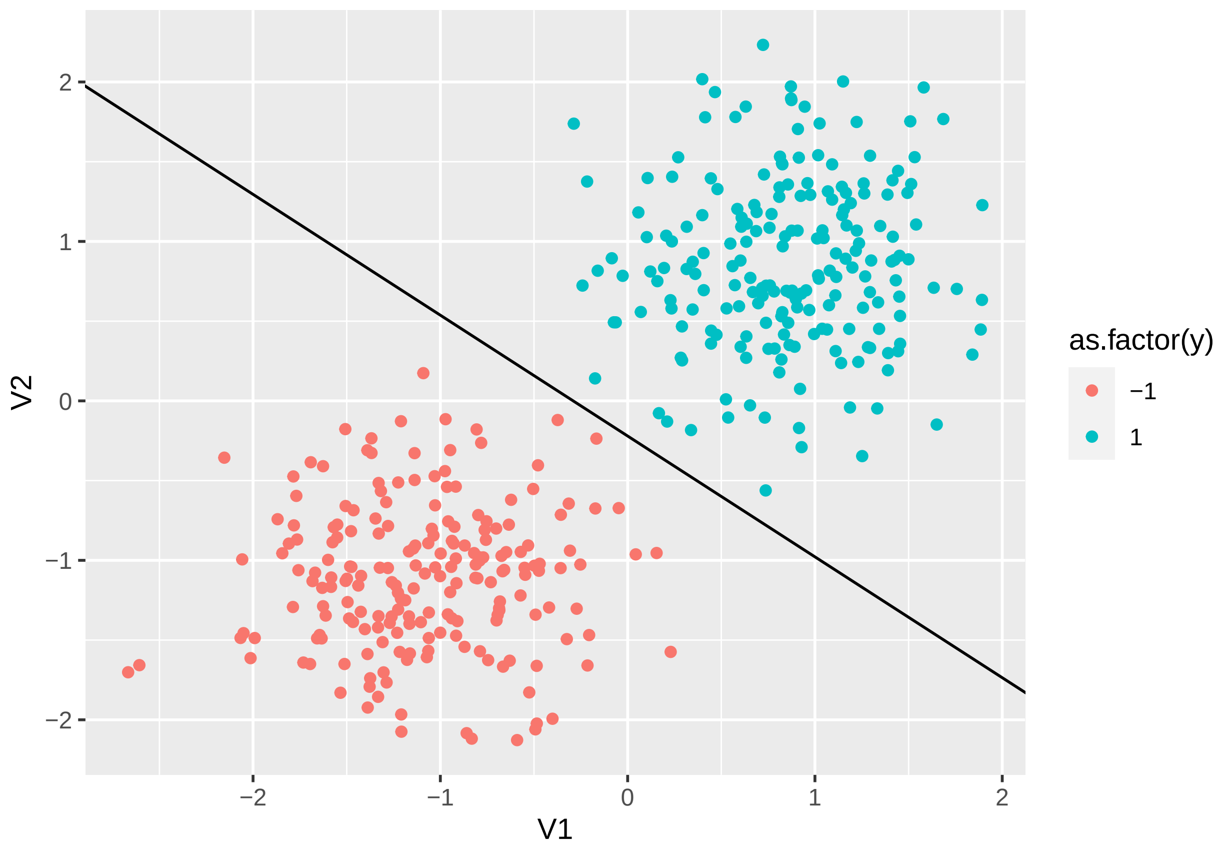
```
## [1] 5
```

L'algorithme converge en 5 itérations, et nous trouve la valeur de $\theta^* = (3.438710, 4.537851, 1.000000)^T$.

plot

Le plot montre que l'on a bien séparé les deux classes à l'aide de notre hyperplan.

```r
plt1 + geom_abline(intercept=-theta.star[3]/theta.star[2], slope=-theta.star[1]/theta.star[2])
```


V2
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2
V1
as.factor(y)
−1
1