

STA212

Anthony Kalaydjian - Mathieu Occhipinti

2023-04-29

```
rm(list=ls())
setwd(getwd())
library(ggplot2)
set.seed(150)
```

Exercice 1 : Modélisation probabiliste

(a)

(b)

Le résultat précédent nous indique que pour toute règle de classification empirique, \hat{g}_n issue de l'estimateur $\hat{\eta}$ de η , son risque associé est borné par le risque minimal issu de la règle de Bayes $R(g^*)$ auquel on ajoute un terme d'erreur d'estimation de η .

Exercice 2 : Classification multi-classes

(a)

Soit $\mathcal{Y} = \{1, \dots, K\}$. On cherche à classer des individus de \mathcal{X} selon leur classe sur \mathcal{Y} . Soit g^* l'estimateur de risque minimal associé à cette classification.

$$R(g^*) := \mathbb{E}[1_{\{h(X) \neq Y\}}] \quad (1)$$

$$= \mathbb{E}_X \mathbb{E}_{Y|X=x}[1_{\{h(x) \neq Y\}}] \quad (2)$$

$$= 1 - \mathbb{E}_X \mathbb{E}_{Y|X=x}[1_{\{h(x)=Y\}}] \quad (3)$$

$$= 1 - \mathbb{E}_X \mathbb{P}[h(x) = Y] \quad (4)$$

$$R(g^*) = 1 - \sum_{i=1}^K \eta_i(x) 1_{\{g^*(x)=i\}} \quad (5)$$

Ce risque est minimal pour :

$$g^*(x) = \operatorname{argmax}_{i \in \mathcal{Y}} \eta_i(x)$$

(b)

(c)

Exercice 3 : Implémentation d'un perceptron (origine des SVM)

(a)

Supposons que l'on soit à l'itération t de l'algorithme, et tel que $m(\theta^t) \neq \emptyset$. Soit alors $i \in m(\theta^t)$

D'une part:

$$\begin{aligned}\langle \theta^{t+1}, \theta^* \rangle &= \langle \theta^t + y_i x_i, \theta^* \rangle \\ &= \langle \theta^t, \theta^* \rangle + y_i \langle x_i, \theta^* \rangle \\ &\geq \langle \theta^t, \theta^* \rangle + \|\theta^*\|_2 \delta\end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\|\theta^{t+1}\|_2 \|\theta^*\|_2 &\geq \langle \theta^{t+1}, \theta^* \rangle \geq \langle \theta^t, \theta^* \rangle + \|\theta^*\|_2 \delta \\ &\geq \langle \theta^{t-1}, \theta^* \rangle + 2\|\theta^*\|_2 \delta \\ &\geq \dots \\ &\geq \langle \theta^0, \theta^* \rangle + t\|\theta^*\|_2 \delta \\ \|\theta^{t+1}\|_2 \|\theta^*\|_2 &\geq t\|\theta^*\|_2 \delta\end{aligned}$$

Donc:

$$\boxed{\|\theta^{t+1}\|_2 \geq t\delta} \tag{6}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}\|\theta^{t+1}\|^2 &= \|\theta^t + y_i x_i\|^2 \\ &= \|\theta^t\|^2 + 2y_i \langle \theta^t, x_i \rangle + \|y_i x_i\|^2 \\ &\leq \|\theta^t\|^2 + \|x_i\|^2 \\ &\leq \|\theta^t\|^2 + R^2 \\ &\leq \|\theta^{t-1}\|^2 + 2R^2 \\ &\leq \dots \\ &\leq \|\theta^0\|^2 + tR^2 \\ \|\theta^{t+1}\|^2 &\leq tR^2\end{aligned}$$

Donc:

$$\boxed{\|\theta^{t+1}\|^2 \leq tR^2} \tag{7}$$

Finalement, d'après ?? et ??, on a :

$$t^2 \delta^2 \leq \|\theta^{t+1}\|^2 \leq t R^2$$

Donc $t \leq \frac{R^2}{\delta^2}$

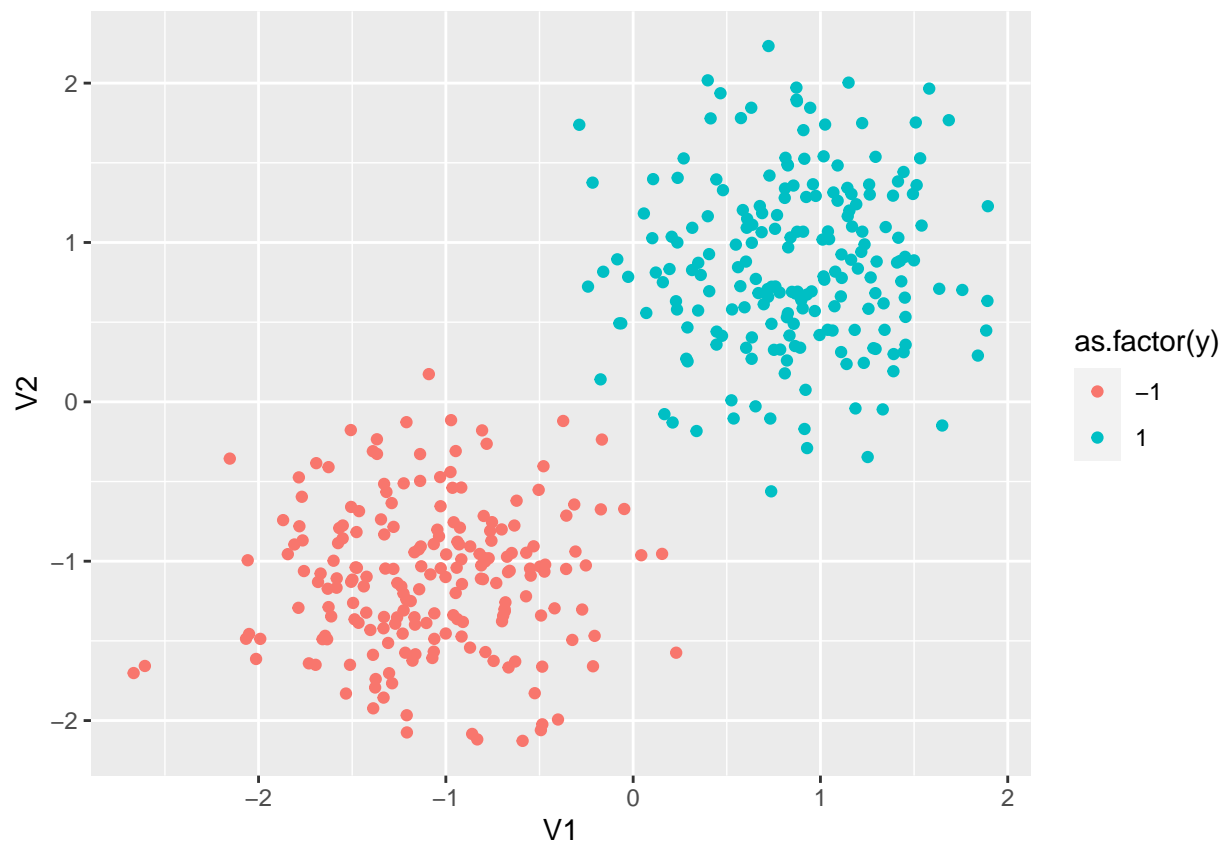
Ainsi, on a montré que si $m(\theta^t) \neq \emptyset$, alors $t \leq \frac{R^2}{\delta^2}$

Donc, au delà de $T = \frac{R^2}{\delta^2}$ itérations, $m(\theta^T)$ sera vide et l'algorithme aura convergé.

(b)

Importation des données :

```
load(file="X_y.rda")
df <- as.data.frame(cbind(X, y))
names(df) <- c("V1", "V2", "V3", "y")
plt1 <- ggplot(data=df) + aes(x=V1, y=V2, z=y, color=as.factor(y)) + geom_point()
plt1
```



La variable V3 est une variable d'intercept.

Algorithme perceptron

```

perceptron <- function(X, y){
  theta <- c(0, 0, 0)
  n <- nrow(X)
  m <- seq(1, n)
  counter <- 0

  while (length(m) != 0){
    #sample a random item from m
    index = sample(m, 1)

    #update theta
    theta <- theta + y[index]*X[index,]

    #calculate the new m
    temp <- sapply(X=seq(1, n), FUN=function(k) theta%*%X[k,])
    criterion <- y*temp
    m <- which(criterion<0)
    counter <- counter + 1
  }
  return(list(theta=theta, count=counter))
}

```

```

res <- perceptron(X, y)
theta.star <- res$theta
count.star <- res$count

```

```
theta.star
```

```
## [1] 3.438710 4.537851 1.000000
```

```
count.star
```

```
## [1] 5
```

L'algorithme converge en 5 itérations, et nous trouve la valeur de $\theta^* = (3.438710, 4.537851, 1.000000)^T$.

plot

Le plot montre que l'on a bien séparé les deux classes à l'aide de notre hyperplan.

```
plt1 + geom_abline(intercept=-theta.star[3]/theta.star[2], slope=-theta.star[1]/theta.star[2])
```

