
Fortgeschrittenenpraktikum II: Laserspektroskopie (H2)

– Auswertung –

Danial Hagemann
Tena Matosevic



FORTGESCHRITTENENPRAKTIKUM
AM LEHRSTUHL FÜR LASERSPEKTROSKOPIE (PROF. HÄNSCH)
DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK
AN DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Praktikant 1:
Name Matrikelnummer Unterschrift

Praktikant 2:
Name Matrikelnummer Unterschrift

Betreuer:
Name Unterschrift

München, den 24. März 2022

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung und Motivation	1
2. Theoretische Grundlagen	3
2.1. Das Rubidium-Atom	3
2.1.1. Grobstruktur	3
2.1.2. Feinstruktur	4
2.1.3. Hyperfeinstruktur	4
2.1.4. Auswahlregeln und Notation	5
2.2. Laserspektroskopie	6
2.2.1. Linienbreite	7
2.2.2. Optische Resonatoren	9
2.2.3. Absorptions- & Sättigungsspektroskopie	9
3. Experimenteller Aufbau	13
4. Daten, Fehleranalyse und Diskussion	15
4.1. Absorptionsspektroskopie	15
4.1.1. Daten und Messungen	15
4.1.2. Fehleranalyse und Diskussion	18
4.2. Sättigungsspektroskopie	20
4.2.1. Daten und Messungen	20
4.2.2. Fehleranalyse und Diskussion	25
5. Zusammenfassung und Ausblick	29
A. Anhang: Datensätze und Quellcodes	31
B. Anhang: Zeitabstände der Resonator-Peaks	33

1. Einführung und Motivation

*The test of all knowledge is experiment.
Experiment is the sole judge of scientific
“truth”.*

Richard Feynman, [FLS64, S. 1]

Die moderne Laserspektroskopie ist eine der exaktesten Methoden, um Konzepte und Modelle aus der theoretischen Physik zu überprüfen.

Heutzutage sind wir in der Lage, mittels dieser Methodik Aussagen über die kleinsten Bausteine der Natur, in einer Größenordnung von 10^{-18}m empirisch zu belegen. Dabei bedienen wir uns einem Beobachtungsphänomen, welches als erster Beleg für die quantisierte Natur der Materie galt: Die Absorptions- und Emissionslinien. Durch die detektierte Intensitätsverteilung, die auch als Spektrum bezeichnet wird, ist es möglich die eingegangene Strahlung mit hoher spektraler Auflösung auf ihre energetischen Eigenschaften zu untersuchen, um somit Rückschlüsse über die zu untersuchenden Atome und Moleküle ziehen zu können.

Die Verwendung eines Lasers als Strahlquelle ist für die Präzision in dieser Messung von zentraler Bedeutung, da wir uns dessen fundamentale Eigenschaften wie Kohärenz, Polarisation und Richtung in unserem Experiment zu Nutzen machen.

Die hier verwendete AlGaAs-Laserdiode, emittiert als Infrarotstrahler eine Wellenlänge von $\lambda = 780\text{nm}$ und findet neben ihrer spektroskopischen Anwendung auch Einsatz in Laserdruckern, in Lichtschranken oder in allgemein bekannten CD-Laufwerken. Mit anderen Worten ist es uns also gelungen mit einem Laser unseres alltäglichen Lebens Atome spektroskopisch zu untersuchen.

In diesem Versuch soll die Genauigkeit der Laserspektroskopie anhand der Aufspaltung der quantisierten Energiespektren von Rubidium demonstriert werden. Deshalb werden im nächsten Kapitel zunächst die dafür essenziellen, grundlegenden physikalischen Konzepte erklärt, die experimentelle Durchführung skizziert um abschließend die Messergebnisse zu diskutieren und das Resultat – die vollständige Auswertung der D_2 -Linie von Rubidium – vorzustellen.

2. Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel soll im Wesentlichen als Zusammenfassung der für das Verständnis notwendigen experimentellen Komponenten dienen. Dabei wird zunächst näher auf die verwendete Probe in der Gaszelle und dessen Klassifikation im Termschema eingegangen, bevor die angewendeten spektroskopischen Methoden diskutiert werden.

2.1. Das Rubidium-Atom

Als Alkalimetall befindet sich Rubidium in der ersten Hauptgruppe des Periodensystems und besitzt gemäß dem Bohr'schen Atommodell vier gefüllte Schalen und ein Valenzelektron in seiner äußersten Schale. Dadurch wird es als wasserstoffähnlich angenommen und es ergibt sich folgende Elektronenkonfiguration: $[\text{Kr}]5s^1$

Im Allgemeinen liegt der Anteil des natürlich vorkommenden ^{85}Rb bei $\approx 72\%$ und der des ^{87}Rb bei $\approx 28\%$ ([BHM21]). Beide Isotope unterscheiden sich sowohl in ihrer Masse ([Bra+99]), als auch in ihrem Kernspin [BHM21].

$$m_{85} \approx 84,9118 \text{ u}, \quad I_{85} = 5/2 \quad (2.1)$$

$$m_{87} \approx 86,9092 \text{ u}, \quad I_{87} = 3/2 \quad (2.2)$$

Die Schmelztemperatur von Rubidium befindet sich bei $T_M = 39,3^\circ\text{C}$ und seine Siedetemperatur bei $T_B = 688^\circ\text{C}$ ([Ste21a] Table 2). Ebenso nehmen wir für das folgende Experiment an, dass beide Isotope stabil sind, obwohl ^{87}Rb als radioaktiver β -Strahler in ^{87}Sr mit einer zur Messzeit verhältnismäßig großen Halbwertszeit von $t_{1/2} = 4,7 \cdot 10^{10} a$ zerfällt. [Che]

Im Folgenden soll nun allgemein auf die Aufspaltung der Energieniveaus wasserstoffähnlicher Atome eingegangen und sämtliche Korrekturen bis hin zur Hyperfeinstruktur erläutert werden, bevor die theoretischen Werte für den Übergang vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand präsentiert werden. Wir beschränken uns in unserer Betrachtung ausschließlich auf die D2 Linie, die im Anschluss in Kapitel 4 ausgewertet und experimentell nachgewiesen wird.

2.1.1. Grobstruktur

Die mathematische Herleitung der quantisierten Energieniveaus E_n eines wasserstoffähnlichen Systems folgt aus der nicht relativistischen, zeitunabhängigen Schrödingergleichung unter Verwendung des Coulombpotentials. Dabei bilden die Wellenfunktionen $\Psi_{n,\ell,m}$ einen Satz an Eigenfunktion des Hamiltonoperators \hat{H} und erfüllen folgende Eigenwertgleichung.

$$\hat{H} |\Psi_{n,\ell,m}\rangle = E_n |\Psi_{n,\ell,m}\rangle \quad (2.3)$$

Die Eigenenergien E_n ergeben die quantisierte Lage der Energieniveaus und werden allein durch die Hauptquantenzahl n bestimmt:

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e (c\alpha)^2 \frac{Z^2}{n^2} \quad (2.4)$$

Unter Berücksichtigung relativistischer Korrekturen wie der relativistischen Massenzunahme und dem Darwinterm werden die in (2.4) erhaltenen Energieniveaus jeweils um den Faktor $\alpha^2 \approx 10^{-4}$ angepasst. [Dem16]

2.1.2. Feinstruktur

Die Spin-Bahn-Kopplung ist maßgeblich für die Feinstrukturaufspaltung verantwortlich. Dabei erzeugt das auf einer Kreisbahn um den Atomkern kreisende Elektron als elektrischer Kreissstrom ein magnetisches Dipolmoment, welches proportional zum Bahndrehimpuls ℓ ist.

Im Ruhesystem des Elektrons hingegen rotiert der Atomkern um das e^- , induziert einen Kreissstrom und erzeugt am Ort des Elektrons ein Magnetfeld in dem der Spin des e^- entlang der Quantisierungsachse die Werte $s_z = \pm \frac{1}{2}\hbar$ annimmt. Durch die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Spinnmoment $\boldsymbol{\mu}_s$ und dem Magnetfeld welches durch die Bahnbewegung des Elektrons erzeugt wird, resultiert die Wechselwirkungsenergie $\Delta E_{\ell,s} = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}$ die die Eigenenergien aus (2.4) folgendermaßen aufspaltet:

$$E_{n,\ell,s} = E_n - \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} = E_n + \frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi m_e^2 r^3} \cdot (\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) = \hat{H}_{LS} \quad (2.5)$$

Die Drehimpulsquantenzahl ℓ die für jede Hauptquantenzahl n ganzzahlige Werte für $\ell \leq n-1$ annimmt, definiert das Intervall $-\ell \leq m \leq +\ell$ der für die magnetische Quantenzahl m möglichen Werte. Diese wird als Projektion des Drehimpulsoperators auf die Quantisierungsachse aufgefasst und ist äquivalent zu ℓ_z . Daraus ergeben sich zu jedem ℓ , $(2\ell+1)$ energetisch gleiche Unterzustände und die Eigenenergien E_n sind n^2 -fach entartet. [Blo16]

Für den Gesamtdrehimpuls und die zugehörige Eigenwertgleichung in der Feinstruktur unter Berücksichtigung des Elektornenspins gilt:

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{s} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{j} |\Psi_{n,\ell,m}\rangle = \sqrt{j(j+1)}\hbar |\Psi_{n,\ell,m}\rangle \quad (2.7)$$

$$j \in [\ell - s, \ell + s] \quad (2.8)$$

Analog zu (2.7) können die Eigenwerte von $\boldsymbol{\ell}$ und \mathbf{s} bestimmt werden.

2.1.3. Hyperfeinstruktur

Mit dem letzten Korrekturschritt folgt die Auflösung der Hyperfeinstruktur. Diese resultiert aus der Annahme, dass der Atomkern räumlichen ausgedehnt sei, woraufhin auch diesem ein Spin – der Kernspin \mathbf{I} – mit Eigenwerten $\mathbf{I} |\Psi_{n,\ell,m}\rangle = \sqrt{I(I+1)}\hbar |\Psi_{n,\ell,m}\rangle$ zugeschrieben wird. Das damit verknüpfte magnetische Kernmoment μ_K wechselwirkt mit dem Magnetfeld, welches durch die Bahnbewegung des Elektrons erzeugt wird und spalten die Energieniveaus aus (2.5) in Hyperfeinstrukturkomponenten auf.

Aus der Kopplung des Gesamtbahndrehimpulses \mathbf{j} mit dem Kernspin \mathbf{I} folgt der Gesamtdrehimpuls des Atoms $\mathbf{F} = \mathbf{j} + \mathbf{I}$ mit Betrag $|\mathbf{F}| = \sqrt{F(F+1)}\hbar$. Dabei nimmt $F \in [|j-I|; |j+I|]$ für jedes j ganzzahlige Werte an.

2.1.4. Auswahlregeln und Notation

Um einen Atomzustand vollständig durch seine Quantenzahlen (n, ℓ, m) zu beschreiben, wird die spektroskopische Notation $n^{2s+1}L_j$ verwendet. Dabei wird L gemäß 2.1 ersetzt.

Aufgrund folgender Auswahlregeln sind die Möglichkeiten eines Dipolübergangs limitiert:

- $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_2 \stackrel{!}{=} \pm 1$
- $\Delta j = j_1 - j_2 \in \{-1, 0, 1\}$ es sei denn, $j_1 = j_2 = 0$
- $\Delta m_{\ell,1,2} = m_{\ell,1} - m_{\ell,2} \in \{-1, 0, 1\}$
- Interkombinationsverbot: Erhaltung der Multiplizität $2S + 1$ bei Dipolübergang

L	S	P	D	F
ℓ	0	1	2	3

Tabelle 2.1.: Zustände L gemäß der Drehimpulsquantenzahlen ℓ

Für die Auswertung der D_2 Linie des Rubidium Atoms betrachten wir die Hyperfeinstrukturaufspaltung des Übergangs $5^2S_{1/2} \leftrightarrow 5^2P_{3/2}$ für den Grundzustand $n = 5$ beider Isotope. Gemäß der in diesem Kapitel erarbeiteten Auswahlregeln, der spektroskopischen Notation sowie der Definition des Gesamtdrehimpulses F resultiert für ^{85}Rb und ^{87}Rb eine Aufspaltung der Energieniveaus wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Aufgrund der Massendifferenz ergibt sich, wie in Abbildung 2.2 erkennbar, eine Verschiebung der Energieniveaus, was im Allgemeinen als **Isotopieverschiebung** bezeichnet wird.

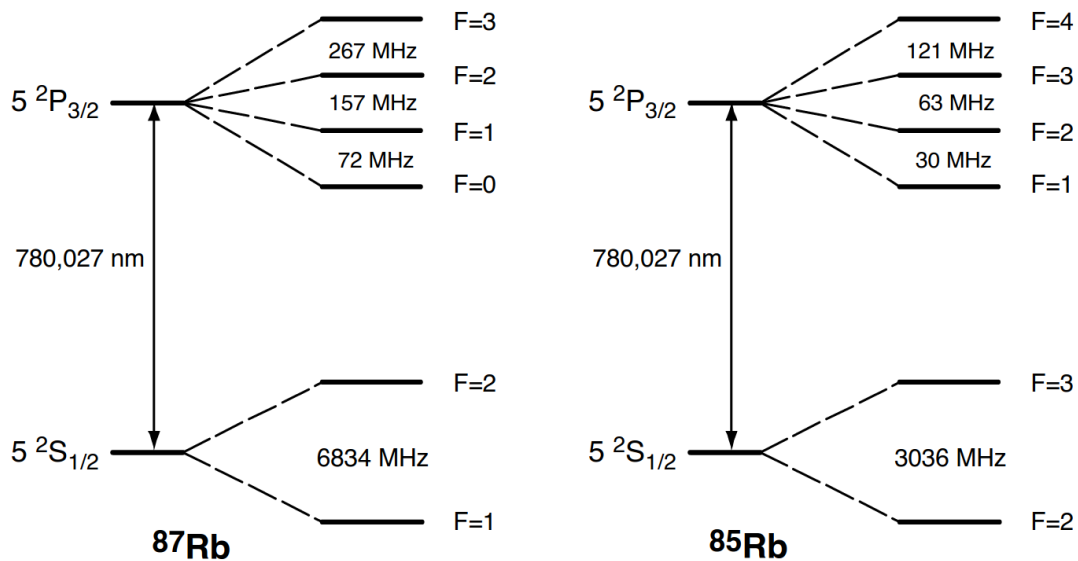


Abbildung 2.1.: Termschema für die Isotope ^{85}Rb und ^{87}Rb [Quelle: [Krü12], S. 5]

Da die Wellenlänge des im Experiment verwendeten Lasers mit $\lambda = 780 \text{ nm}$ genau der Resonanzwellenlänge des Übergangs aus Abbildung 2.1 entspricht und dieser damit gut angeregt werden kann, wird auch ersichtlich, weshalb wir uns auf die Untersuchung der D_2 und nicht auf die der D_1 - Linie mit $\lambda_{res} = 794,979 \text{ nm}$ [Ste21a; Ste21b] beschränken. Im Allgemeinen ist auch zu erkennen, dass sich Rubidium aufgrund seiner beträchtlichen Aufspaltung gut zur experimentellen Demonstration der Fein- und Hyperfeinstruktur eignet.

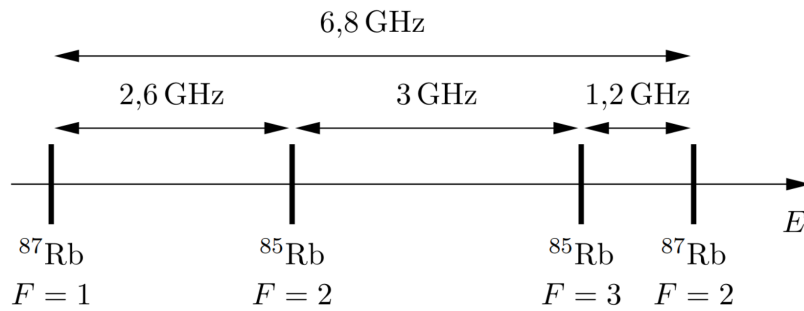


Abbildung 2.2.: Isotopieverschiebung [Quelle: [Krü12], S. 5]

2.2. Laserspektroskopie

Um anhand der zwei gängigsten laserspektroskopischen Methoden – die am Ende dieses Kapitels genauer betrachtet werden – das Experiment durchführen zu können, ist die kontinuierliche Durchstimmung der emittierten Frequenzen der AlGaAs Laser Diode essenziell. Grund dafür ist, dass die Emission einer Laserdiode durch Bandübergänge innerhalb des Halbleiters hervorgerufen wird und nicht wie bsp.-weise im HeNe-Laser durch Elektronenstöße und atomare Übergänge, die im Absorptionsspektrum scharf gepeakt sind. Der resultierende breite Verstärkungsbereich ($\approx 100 \text{ nm}$) ist größer als der freie Spektralbereich des internen Resonators der Diode, wodurch ein Mehrmoden-Betrieb ermöglicht wird. Der hier verwendete Halbleiterlaser basiert auf der Anwendung von Heterostrukturen in einem ternären Mischsystem. Im Allgemeinen ist über die Legierung des $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ Halbleiters die Bandlücke und daraus resultierend die Energie E_G für den Heteroübergang, der dem gleichen Funktionsprinzip wie der klassische p-n Übergang folgt, variabel und für den Verwendungszweck anpassbar. [Hun18]

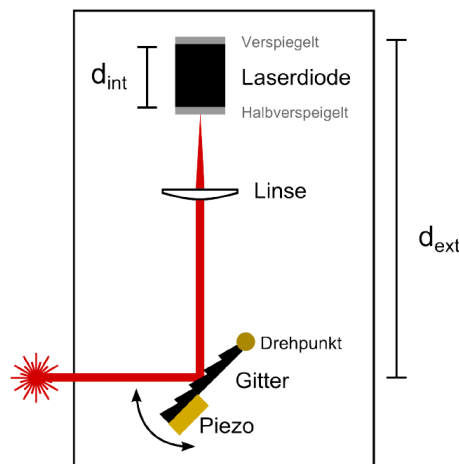


Abbildung 2.3.: Aufbau eines Diodenlasers [Quelle: [BHM21], S. 21]

Unter Verwendung eines drehbaren **Littrow-Gitters**, welches durch die Ausdehnung eines an Spannung angeschlossenen Piezo-Elements in Bewegung gesetzt wird, entsteht in Kombination mit der Laserdiode ein frequenzselektiver externer Resonator, der das 1. Beugungsmaximum am Gitter in die Diode zurückreflektiert. Diese Konfiguration, abgebildet in 2.3, führt zu einem Einmoden-Betrieb, wenn ein deutliches globales Maximum im kombinierten Verstärkungsprofil existiert. Für die Gesamtverstärkung betrachtet man neben der Verstärkung des Lasermediums und der frequenzabhängigen Reflektivität des Gitters auch die Transmission sowohl vom inter-

nen Resonator der Diode T_{int} als auch vom externen Resonator T_{ext} . Die emittierte Frequenz des Laser entspricht dabei, der Frequenz bei maximaler Verstärkung. Durch die Drehung des Gitters ändert sich der Gitterwinkel und die Länge des externen Resonators, wobei anhand der Wahl des Drehpunktes die reflektierten Resonanzen und die Verstärkung des externen Resonators synchron verschoben werden können, um im kombinierten Verstärkungsprofil ein Maximum beizubehalten. Um Modensprünge in der Gesamtverstärkung zu vermeiden, wird der Strom im Halbleiterlaser erhöht, was neben dem Brechungsindex n auch die optische Weglänge im internen Resonator erhöht. [BHM21]

Im folgenden werden nun Begriffe, Apparaturen und Methoden die für die spektroskopische Untersuchung am Rubidium essenziell waren, erklärt. Dabei sind das Zustandekommen der einzelnen Peaks im Spektrum und die Analyse der Peakbreiten für das verwendete Modell in der Auswertung von zentraler Bedeutung.

2.2.1. Linienbreite

Die absorbierte und emittierte Strahlung eines atomaren Übergangs in einem 2-Niveau-System ist nicht streng monochromatisch, sondern weist Frequenzen nahe der Resonanzbedingung (2.9) auf, wodurch die Übergangsenergien nicht beliebig scharf sind und die Spektrallinien eine **Linienbreite** besitzen.

$$\nu_{12} = (E_2 - E_1)/h \quad (2.9)$$

Aus der Betrachtung der Energie-Zeit-Unschärfe, unter Berücksichtigung der endlichen aber auch mit einer Unschärfe behafteten Lebensdauer eines angeregten Energieniveaus τ , resultiert eine endliche Energiebreite $\delta E = \frac{\hbar}{\delta \tau}$ die zu einer Frequenzbreite im Spektrallinienbild führt. Wodurch 2.9 zu 2.10 wird.

$$\delta \nu_{12} = (\delta E_2 - \delta E_1)/h \quad (2.10)$$

Das Resultat wird im Allgemeinen als **natürliche Linienbreite** bezeichnet und lässt sich nicht durch Optimierung der Messapparatur eliminieren, da sie aus der quantenmechanischen Betrachtung folgt. Die Intensitätsverteilung einer Spektrallinie unter Einfluss der natürlichen Linienbreite ist lorentzförmig 2.11.

$$I(\omega) = I_0 \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2} \quad (2.11)$$

Eine weitere wichtige Form der Linienbreite, die für unsere spektroskopische Untersuchung eine zentrale Rolle spielt, ist die **Doppler-Verbreiterung**. Anschaulich gesprochen resultiert sie aus dem Bild, dass statistisch und aus Sicht des Laborsystems alle Atome und Moleküle aufgrund ihrer thermischen Energie in Bewegung sind. Durch diese intrinsische Bewegung verschiebt sich die Resonanzfrequenz eines Übergangs in Bezug zum Beobachter, woraufhin eine Linienverbreiterung zustande kommt.

Da die Wahrscheinlichkeit ein Atom bei einer bestimmten kinetischen Energie E_{kin} vorzufinden gemäß Boltzmannstatistik proportional zu $\propto \exp\left(-\frac{E_{kin}}{k_B T}\right)$ ist, folgt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeit entlang jeder Raumrichtung $i \in \{x, y, z\}$ einer Gauß-Verteilung:

$$p_i(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \cdot e^{-\frac{mv_i^2}{2k_B T}} \quad (2.12)$$

Daraus ergibt sich für die Intensitätsverteilung $I(\omega)$ der Spektrallinien – unter Einfluss der Dopplerverbreiterung – ein gaußförmiger Verlauf. [BHM21]

$$I(\omega) = I(\omega_0) \cdot \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\frac{\Delta\omega}{2\sqrt{\ln 2}}}\right)^2\right] \quad (2.13)$$

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\ln 2} \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (2.14)$$

Darüber hinaus wird die Linienbreite auch durch die Sättigung der Absorption beeinflusst. Dies resultiert daraus, dass nicht nur Atome mit der Resonanzfrequenz, sondern auch jene in einem Bereich $\pm\epsilon$ um die Resonanzfrequenz herum angeregt werden. Insgesamt bleibt das Linienprofil bei der **Sättigungsverbreiterung** weiterhin Lorentzförmig für homogen verbreiterte Linien. Die Halbwertsbreite einer solchen Absorptionslinie hängt über den Parameter S_0 von der Intensität des einfallenden monochromatischen Lasers ab. Sie ist definiert als:

$$\Delta\omega_S = \Delta\omega_0 \sqrt{1 + S_0} \quad (2.15)$$

Wobei S_0 der Sättigungsparameter und damit ein Maß für die Stärke der Sättigung des Übergangs ist.

$$S_0 = \frac{I}{I_{Sat}} = \frac{I \cdot 3\lambda^3 \tau}{\pi \hbar c} \quad (2.16)$$

Definiert über die Sättigungsintensität I_{Sat} welche von der Wellenlänge λ und der Lebensdauer des Übergangs τ abhängt, ist er einer der wichtigsten Parameter der Licht-Atom- Wechselwirkung. Im Allgemeinen beschreibt er das Verhältnis der Rabi-Frequenz zur Dämpfung. Da wir uns allerdings in den folgenden Betrachtungen im Wesentlichen auf den Resonanzfall beschränken, genügt an dieser Stelle eine Dämpfungsfreie Betrachtung.

Zusammenfassend tragen drei Formen der Linienbreite zu unserer spektroskopischen Untersuchung bei und erhöhen damit die Ungenauigkeit unserer Resultate – wobei die natürliche Linienbreite, wie bereits erwähnt, nicht als klassischer Fehler aufgefasst werden kann. Im Folgenden Unterkapitel soll nun ein für unser Experiment essenzielles Bauteil erläutert werden.

2.2.2. Optische Resonatoren

Wie bereits einleitend zu Kapitel 2.2. beschrieben und in Abbildung 2.3 gezeigt wurde, besteht der Aufbau des verwendeten Diodenlasers im Wesentlichen aus einem externen und einem internen Resonator. Darüber hinaus enthält der experimentell Aufbau einen Referenzresonator, weshalb die grundlegenden Konzepte optischer Resonatoren skizziert werden.

Im Allgemeinen besteht ein **Fabry-Pérot-Resonator (FPI)** aus zwei zueinander parallelen Spiegeln, die einen einfallenden Laserstrahl zwischen sich hin und her reflektieren lassen und dabei an beiden Enden einen geringen Anteil absorbieren und transmittieren. Der reflektierte Strahl sammelt pro Umlauf eine Phase $\phi = 2dk$ auf, wobei d für den Spiegelabstand und k für die Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = 2\pi \frac{\nu}{c}$ steht. Es kommt zu einer Interferenz zweier aufeinander folgender transmittierter Lichtfelder, sobald die aufgesammelte Phase pro Umlauf einem ganzzahligen Vielfachen $n \in \mathbb{N}$ von 2π entspricht. In diesem Fall spricht man von einem sich reproduzierenden Strahl im Resonator.

$$\phi = 2dk = 2d \frac{2\pi\nu_n}{c} \stackrel{!}{=} 2\pi \cdot n \quad (2.17)$$

Aus Gleichung 2.17 resultiert die Resonanzfrequenz ν_n des Resonators und damit folgt für den freien Spektralbereich ν_{FSR} , der den Frequenzabstand zweier aufeinanderfolgender Resonanzen mit der Geometrie des Resonators kombiniert:

$$\nu_n - \nu_{n-1} = \nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2d} \quad (2.18)$$

Da der Laser aus unserem Experiment allerdings Gaußsche Strahlen generiert, die eine gekrümmte Wellenfront aufweisen, war es sinnvoll einen **konfokalen Resonator (KR)** zu verwenden, um sowohl die Einkopplung des Strahls in den Resonator zu gewährleisten, als auch dessen Reproduktion im Resonator sicher zu stellen. So können Verluste durch einen zunehmenden Divergenz des Strahls minimiert werden. Im wesentlichen unterscheidet sich diese Anordnung durch seine gekrümmten Spiegel vom zuvor diskutierten FPI. Auszeichnend für diese Art von Resonatoren ist, dass der Krümmungsradius der Spiegel R_{KR} der Resonatorlänge d entspricht, wodurch sich der optische Weg im Vergleich zum FPI verdoppelt und damit der freie Spektralbereich halbiert – für $d_{\text{FPI}} = d_{\text{KR}}$.

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{4d} \quad (2.19)$$

Die Verwendung des freien Spektralbereichs des Referenzresonators ist elementar, um die Zeitachse des Spektrums in Frequenzen ausdrücken zu können, um so später in Kapitel 4 aussagekräftige Frequenzabstände zu generieren. Doch dafür muss zunächst ein Spektrum aufgenommen werden. Um dies zu erreichen, bedienen wir uns der folgenden Methoden.

2.2.3. Absorptions- & Sättigungsspektroskopie

Aufgrund der in Kapitel 2.1. diskutierten Isotopieverschiebung, die für Rubidium höher als die Dopplerverbreiterung ist und der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustandes, die ebenfalls bei beiden Isotopen die Dopplerverbreiterung übersteigt, kann dieser vollständig mittels der Absorptionsspektroskopie aufgelöst werden. Mit Hilfe der Sättigungsspektroskopie wird dies auch für den stark dopplerverbreiterten angeregten $P_{3/2}$ -Zustand erreicht.

Im Wesentlichen basieren beide spektroskopischen Methoden auf dem Prinzip, dass ein Laserstrahl durch eine Probe gesendet und im Anschluss die transmittierte Intensität in Abhängigkeit

der Frequenz gemessen wird. Bei der **Absorptionsspektroskopie** zeichnet sich jeder atomare Übergang über einen Einbruch in der Intensität aus. Liegen allerdings zwei Übergänge im Bereich der Dopplerverbreiterung, die für Gase bei $T = 300\text{ K}$ in etwa 1 GHz beträgt, erscheinen beide Übergänge im Transmissionsspektrum als eine verbreiterte Linie und können daher mittels dieser Methodik nicht aufgelöst werden. Im Falle des Rubidiums erwarten wir resultierend daraus gemäß Abbildung 2.1 pro Isotop zwei Peaks in unserem Spektrum. Durch die kontinuierliche Durchstimmung der Frequenzen wird das gesamte Spektrum abgedeckt.

Anhand der **Sättigungsspektroskopie** können Übergänge, die zuvor im Absorptionsspektrum nicht zu erkennen waren, dopplerrfrei untersucht werden. Dafür lässt man zwei Teilstrahlen eines Laser – Pump - und Teststrahl – in jeweils entgegengesetzter Richtung durch die Probe propagieren. Entspricht die Frequenz beider Strahlen der Übergangsfrequenz $\nu_a = \nu_{\text{Pump}} = \nu_{\text{Test}}$, sind alle Atome mit $v_z = 0$, die also keine Bewegung entlang der optischen Achse aufweisen, aufgrund der fehlenden Dopplerverschiebung mit beiden Teilstrahlen resonant. Da der deutlich stärkere Pumpstrahl den Übergang sättigt und ein Besetzungsgleichgewicht erzeugt, sinkt die Absorptionswahrscheinlichkeit des Teststrahls und dessen Transmission zeigt sich im Absorptionsspektrum als **Lamb-Peak**, wie in Abbildung 2.4 gezeigt. Alle weiteren Atome für die $v_z \neq 0$ gilt, sind nur mit einem der zu ihnen dopplerverschobenen Strahlen resonant, welche abhängig von der Bewegungsrichtung des Atoms in dessen Inertialsystem entweder rot- oder blauverschoben sind. Sobald der Teststrahl mit der Übergangsfrequenz resonant ist, befinden sich die Atome im Grundzustand, die Absorptionswahrscheinlichkeit des Teststrahls ist sehr hoch und es wird ein gaußförmiger Einbruch in der Transmission verzeichnet.

Liegen im Falle der Sättigungsspektroskopie zwei Übergänge mit den Frequenzen ν_a, ν_b im Bereich der Dopplerverbreiterung, macht sich dies im spektroskopischen Bild erkenntlich durch die in Abbildung 2.5 auftretenden drei Peaks. Die zwei äußeren Lamb-Peaks resultieren wie zuvor schon aus den Atomen mit $v_z = 0$ und der Resonanz beider Teilstrahlen mit jeweils einem Übergang. Zusätzlich wird allerdings die Laserfrequenz genau zwischen den zwei Übergangsfrequenzen auf $\nu_L = \frac{\nu_a + \nu_b}{2}$ gesetzt. Daraus folgt, dass es Atome mit den Geschwindigkeiten $\pm v_c$ gibt, bei denen aufgrund der gegenläufigen Dopplerverschiebung beide Teilstrahlen mit jeweils einer Übergangsfrequenz resonant sind. Während der Pumpstrahl den Übergang zu ν_a sättigt und somit ein Besetzungsgleichgewicht erzeugt, sinkt die Wahrscheinlichkeit für den Teststrahl die Atome in den Zustand zu ν_b anzuregen und dessen Transmission wird schließlich als **Cross-Over Peak**, mittig zwischen den beiden Lamb-Peaks auftretend, sichtbar. Da sowohl Atome mit $+v_c$ als auch Atome mit $-v_c$ zu einem Cross-Over Peak beitragen, ist dieser im spektroskopischen Bild wesentlich stärker zu erkennen als die Lamb-Peaks. Anhand der Breite der Geschwindigkeitsverteilung aus 2.12 und dem Abstand zwischen den beteiligten Übergängen lässt sich eine statistische Approximation für die Anzahl der zum Peak beitragenden Atome angeben. Für die Lamb-Peaks berechnet sich die Anzahl der beteiligten Atome über das Maximum von 2.12.[BHM21]

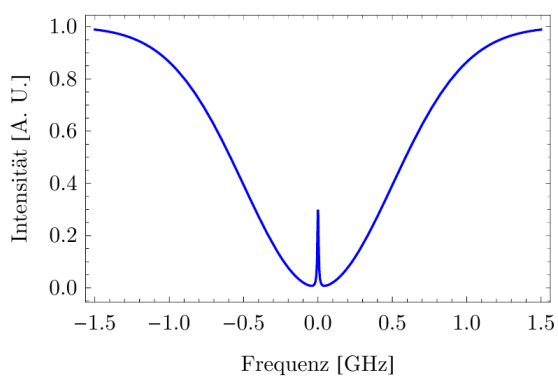


Abbildung 2.4.: Lamb-Peak [Quelle: [BHM21], S. 26]

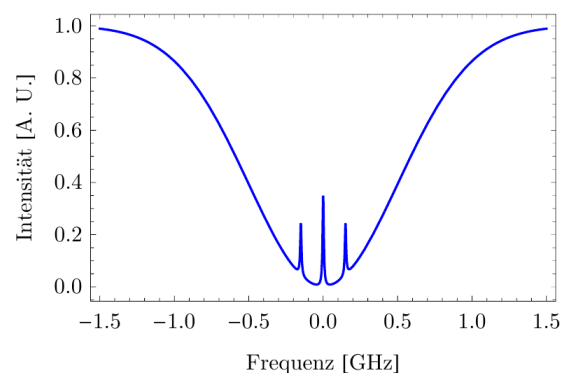


Abbildung 2.5.: Cross-Over Peak [Quelle: [BHM21], S. 30]

3. Experimenteller Aufbau

Im folgenden wird nun der experimentelle Aufbau zur Messung der Transmissionsspektren betrachtet und die verwendeten Bauteile erklärt. Dazu werden sämtliche Informationen der Versuchsanleitung [BHM21] entnommen und zur Vollständigkeit gebündelt dargestellt.

Da die verwendete Laserdiode aufgrund ihrer Bauweise und Geometrie einen stark elliptischen Strahl emittiert, muss dieser unter Verwendung des **anamorphotischen Prismenpaares**, bestehend aus zwei jeweils 30° Prismen, in eine runde Form gebracht werden, um die Einkopplung eines Teilstrahls gemäß Abbildung 3.1 in den konfokalen **Referenzresonator** mit $R_c = 10\text{ cm}$ zu gewährleisten.

Die Implimentierung des **optischen Isolators** in den Versuchsaufbau ist notwendig, um potentielle Rückreflexe zu filtern und so einen stabilen Laserbetrieb sicher zu stellen. Das Funktionsprinzip basiert auf einem optisch aktiven Medium – meist dotiertem Glas – in einem starken Magnetfeld, wodurch mittels dem Faraday-Effekt linear polarisiertes Licht um 45° rotiert wird. Zusätzlich befinden sich vor und nach dem Glas Polarisatoren, die um 45° zueinander verdreht stehen. Der erste Polarisator ist parallel zur Durchlassrichtung des eintretenden Laserstrahls positioniert, um eine Propagation durch den Isolator zu erlauben. Da die Rückreflexe durch den Faraday-Effekt senkrecht zur Durchlassrichtung auf den ersten Polarisator treffen, werden diese dort absorbiert.

In Abbildung 3.1 ist eine schematische Darstellung des Versuchsaufbaus für die Absorptionsspektroskopie zu sehen. Nachdem der Strahl für ein Referenzsignal geteilt wurde, passiert der transmittierte Teil eine $\frac{\lambda}{2}$ -Platte und wird in seiner Polarisationsrichtung um π gedreht, um anschließend unter Verwendung eines **polarisierenden Strahlteilers** in seine s-polarisierte und p-polarisierte Komponenten aufgeteilt zu werden. Der p-polarisierte Strahl trifft auf die Probe in der **Rubidium Zelle**, während der s-polarisierte Teil reflektiert wird.

Zur Qualitätsoptimierung der Messung wird der Strahl mittels einer plankonvexen **Linse** auf die **Photodiode** fokussiert um die maximale Intensität detektieren zu können. Indem ein **Bandpass**, der auf die Laserwellenlänge von $(780 \pm 5)\text{ nm}$ abgestimmt ist, vor die Photodiode geschaltet wird, reduziert sich der störende Einfluss des aus der Umgebung kommenden Lichtes auf ein Minimum und das Signal kann näherungsweise als störungsfrei angenommen werden.

Der Versuchsaufbau für die Sättigungsspektroskopie aus Abbildung 3.2 unterscheidet sich im Wesentlichen darin, dass das Kollektiv bestehend aus Linse, Bandpass und Photodiode nun auf den reflektierten Strahl aus dem polarisierenden Strahlteiler fokussiert wird. An die ursprüngliche Position der Photodiode kommt ein Kombination aus **ND-Filter**, $\frac{\lambda}{4}$ -Platte und **Spiegel**, um den aus Kapitel 2.2.3 erläuterten Teststrahl zu erzeugen. Dabei reduziert der ND-Filter die Intensität des durchlaufenden Strahls um $T = 10^{-D(\lambda)}$. In diesem Fall bezeichnet $D(\lambda) = \log(1 - e^{-\alpha(\lambda) \cdot \ell})$ die optische Dichte, $\alpha(\lambda)$ den Absorptionskoeffizienten nach dem *Lambert-Beerschen Gesetz* und ℓ die Strecke auf der es zur Absorption kommt.

Aufgrund der $\frac{\lambda}{4}$ -Platte, die bei jedem Durchgang die Phase um $\frac{\pi}{2}$ verzögert und dem Phasensprung um π , der beim Übergang vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium zustande kommt, befindet sich der Teststrahl beim Durchlaufen der Probe in Phase mit dem Pumpstrahl. Im Experiment wird dafür das Plättchen in der x - y Ebene (unter der Annahme die optische

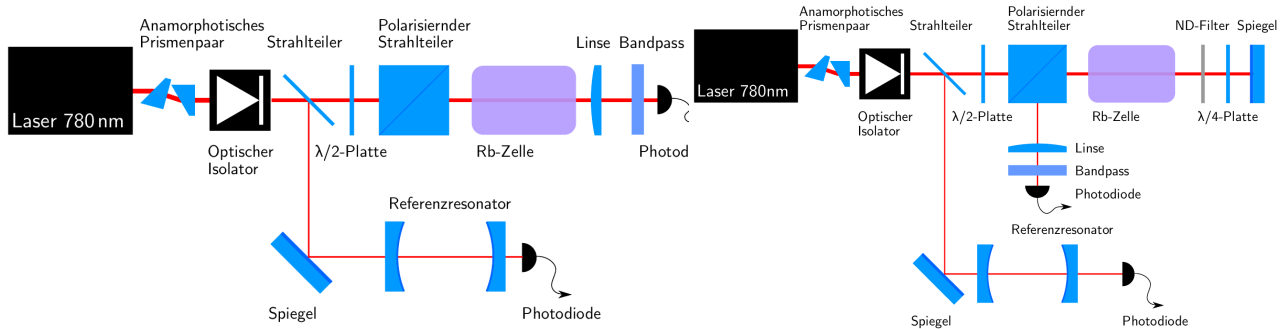


Abbildung 3.1.: Aufbau Absorptionsspektroskopie [Quelle: [BHM21], S. 32]

Abbildung 3.2.: Aufbau Sättigungsspektroskopie [Quelle: [BHM21], S. 36]

Achse liege parallel zur z -Achse) so lange rotiert, bis die Peaks des Intensitätsverlaufs auf dem Oszilloskop maximal werden.

Auf die für den Laserbetrieb notwendige Elektronik wie Temperatur- und Stromcontroller, Funktionsgenerator und Oszilloskop oder Spannungsaddierer wird an dieser Stelle nicht explizit eingegangen. Diesbezüglich sind sämtliche Informationen der Versuchsanleitung [BHM21] zu entnehmen.

Während des Versuchs wurden alle Parameter laufend überwacht und können als konstant angenommen werden. Durch die vom Funktionsgenerator ausgegebene Dreiecksfunktion konnte die Laserfrequenz moduliert werden.

Nachdem sowohl die theoretischen Grundlagen, als auch der experimentelle Aufbau ausführlich diskutiert worden sind, beschäftigt sich das nächste Kapitel dieser Arbeit mit der Auswertung unserer Messwerte.

4. Daten, Fehleranalyse und Diskussion

Im Folgenden werden die gemessenen Daten betrachtet, mögliche Fehlerquellen analysiert und das Resultat des Experiments diskutiert. Hierbei unterteilen wir das Experiment in die beiden Teilversuche *Absorptionsspektroskopie* und *Sättigungsspektroskopie*.

4.1. Absorptionsspektroskopie

4.1.1. Daten und Messungen

Zunächst betrachten wir die Messdaten während der Absorptionsspektroskopie. Hierbei wurde die Durchstimmspannung des Lasers (DS), die Spannung der Photodiode hinter dem Referenzresonator (Res) sowie die Spannung der Photodiode hinter der Rubidiumzelle (Rb) gemessen und mittels eines Oszilloskops der zeitliche Verlauf dieser Spannungen visuell dargestellt.

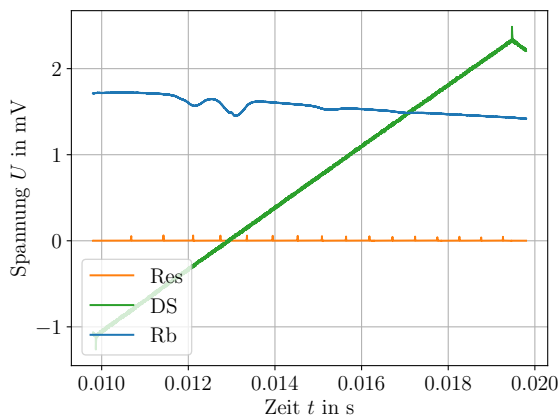


Abbildung 4.1.: Rohdaten der Spannungsverläufe

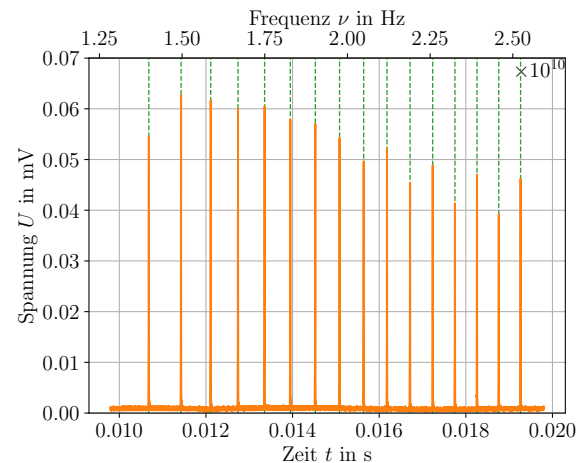


Abbildung 4.2.: Resonator-Peaks

Ziel ist es, die Frequenzabstände der lokalen Spannungsminima für die Rubidiumzelle aus diesen Spannungsverläufen zu ermitteln. Um die Zeitskala in Frequenzen auszudrücken, betrachten wir zunächst nur den Spannungsverlauf der Photodiode hinter dem Resonator (Res).

Die Abstände nebeneinander liegender Peaks entsprechen nämlich genau dem freien Spektralbereich des Resonators, welcher sich mit (2.19) berechnen lässt.

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass diese Abstände nicht alle exakt die gleichen sind, weswegen hier zunächst der Mittelwert $\langle t_{i,i+1} \rangle$ aller Zeitabstände errechnet wird. Die Peaks sind hier von links nach rechts mit 1 bis 16 durchnummeriert und die jeweilige Zeit mit i indiziert (siehe Tabelle B.1). Für den Mittelwert der Zeitabstände folgt somit

$$\langle t_{i,i+1} \rangle = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} t_{i+1} - t_i = 0,000\,572\,128\,\text{s}. \quad (4.1)$$

Mit dem Abstand der Resonatorspiegel $d = 10\text{ cm}$ folgt für den freien Spektralbereich

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{4d} = 749\,481\,145\text{ Hz} \hat{=} \langle t_{i,i+1} \rangle. \quad (4.2)$$

Damit lässt sich die Zeit t in Frequenz ν mit

$$\nu(t) = \frac{c}{4d} \frac{1}{\langle t_{i,i+1} \rangle} t = \frac{749\,481\,145\text{ Hz}}{0,000\,572\,128\text{ s}} t \quad (4.3)$$

umrechnen.

Nun ist es möglich, den Spannungsverlauf der Photodiode hinter der Rubidiumzelle (Rb) in Abhängigkeit zur Frequenz zu betrachten, um somit auch die Frequenzabstände zwischen den lokalen Spannungsminima zu bestimmen. Ein genauer Blick auf die Rohdaten des Spannungsverlaufes zeigt einen linear abfallenden Trend, der zunächst mittels einer linearen Funktion approximiert wurde (siehe Abbildung 4.3).

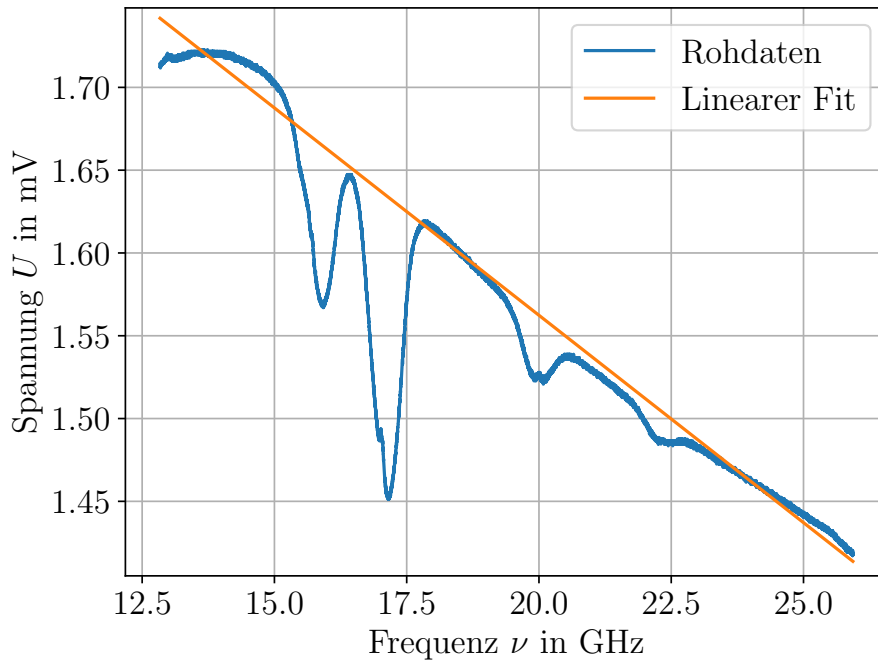


Abbildung 4.3.: Rohdaten `data00.csv` mit linearem Fit

Der Spannungsverlauf der Rohdaten lässt sich dann normieren, indem mit dem linearen Fit dividiert wird. Betrachtet man das Verhältnis U/U_{fit} , lassen sich geeignete Gauß-Funktionen der Form (siehe zum Vergleich (2.13))

$$I(\nu) = -I_0 \exp \left[- \left(\frac{\nu - \nu_0}{\frac{\Delta\nu}{2\sqrt{\ln 2}}} \right)^2 \right] + I_y \quad (4.4)$$

für die vier Dips im jeweiligen Intervall fitten.

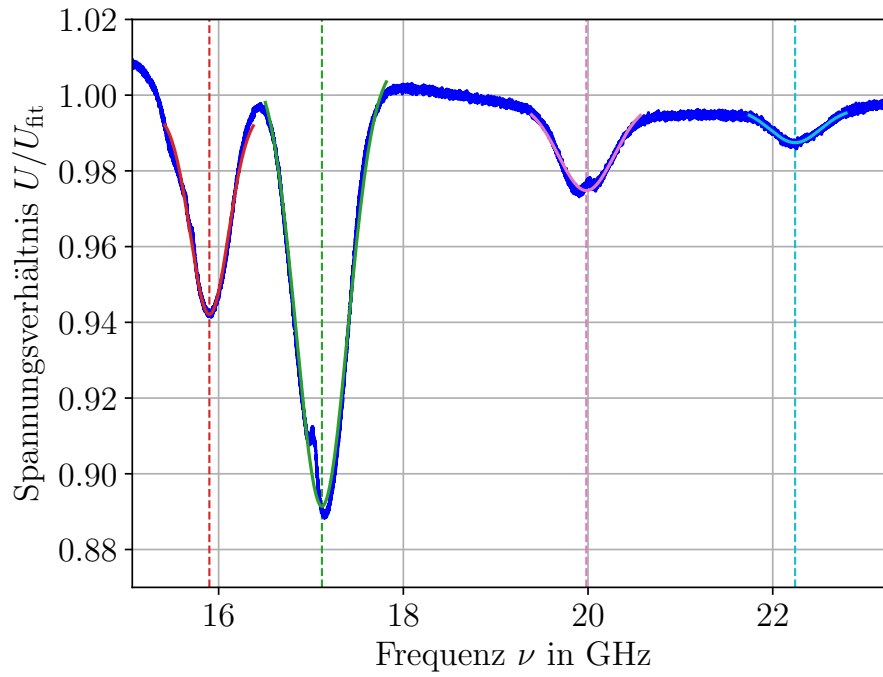


Abbildung 4.4.: Gauß-Fits für normierten Spannungsverlauf

Die vier Spannungsminima werden im Folgenden von links nach rechts von #1 bis #4 durchnummeriert. Aus den gefitteten Kurven und deren mittleren Position ergeben sich die Frequenzabstände in Tabelle 4.1.

#i, #j	$\nu_{i,j}$ in GHz
#1, #2	1,218
#2, #3	2,862
#3, #4	2,261
#4, #1	6,342

Tabelle 4.1.: Errechnete Frequenzabstände

#i, #j	$\nu_{i,j}$ in GHz
$^{87}\text{Rb}(F=2) \longleftrightarrow ^{85}\text{Rb}(F=3)$	1,297
$^{85}\text{Rb}(F=2) \longleftrightarrow ^{85}\text{Rb}(F=3)$	3,036
$^{87}\text{Rb}(F=1) \longleftrightarrow ^{85}\text{Rb}(F=2)$	2,501
$^{87}\text{Rb}(F=1) \longleftrightarrow ^{87}\text{Rb}(F=2)$	6,834

Tabelle 4.2.: Literaturwerte für $5^2S_{1/2}$
[Quelle: [BHM21], S. 12]

4.1.1.1. Temperaturbestimmung der Rubidiumzelle und Isotopieverhältnis

Mittels der Formel (2.14) lässt sich die Temperatur der Rubidiumzelle wie folgt bestimmen:

$$\Delta\nu = 2\sqrt{\ln(2)}\frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{8\ln(2)k_B T}{m}} \Rightarrow T = \frac{mc^2}{8\ln(2)k_B}\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2.$$

Zunächst berechnen wir, welches Verhältnis von Halbwertsbreite $\Delta\nu$ zur Peak Position ν_0 bei Raumtemperatur ($T \approx 300$ K) für ^{85}Rb ($m =: m_{85} \approx 1,409 \cdot 10^{-25}$ kg, siehe [Ste21a], S. 16, Tabelle 2) und für ^{87}Rb ($m =: m_{87} \approx 1,443 \cdot 10^{-25}$ kg, siehe [Ste21b], S. 17, Tabelle 2) zu

erwarten ist.

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)_{85} \approx \sqrt{\frac{8 \ln(2) \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K}}{1,409 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot (299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}} \approx 1,346 \cdot 10^{-6}$$

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)_{87} \approx \sqrt{\frac{8 \ln(2) \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K}}{1,443 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot (299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}} \approx 1,330 \cdot 10^{-6}$$

Für jeden Dip in der Absorptionsspektroskopie (siehe Abbildung 4.4) lässt sich mit den ermittelten Parametern für $\Delta\nu_i$ und $\nu_{0,i}$ deren Verhältnis und somit auch eine Temperatur bestimmen.

#i	$\Delta\nu_i/\nu_{0,i}$	T in K
#1	0,0305	157810701996
#2	0,0384	245088487859
#3	0,0353	206345708607
#4	0,0290	143143992759

Tabelle 4.3.: Ermittelte Temperaturen

Auf den ersten Blick wird deutlich, dass diese Werte in der Größenordnung $\sim 10^{12}\text{K}$ keinem realistischen Ergebnis entsprechen. Zum Vergleich: die Temperatur im Kern der Sonne entspricht etwa $1,57 \cdot 10^7 \text{ K}$.

Dieser exorbitant hohe Wert resultiert aller Wahrscheinlichkeit nach aus der in Kapitel 2.2.1 diskutierten Linienbreite. Dabei tragen vor allem die Doppler- und Sättigungsverbreiterung maßgeblich zur Verfälschung des Ergebnisses bei.

Zuletzt wird noch das Verhältnis der Isotope ^{85}Rb und ^{87}Rb in der Rubidiumzelle abgeschätzt. Dafür werden die Amplituden der Dips gemäß ihrer Zuordnung paarweise betrachtet.

#i, #j	Anteil ^{85}Rb in %	Anteil ^{87}Rb in %
#1, #2	68,66	31,33
#3, #4	72,15	27,84

Tabelle 4.4.: Ermitteltes Isotopieverhältnis von ^{85}Rb und ^{87}Rb

4.1.2. Fehleranalyse und Diskussion

Durch den Vergleich mit den Literaturwerten in Tabelle 4.2 ergibt sich eine relativ eindeutige Zuordnung für die $5^2S_{1/2}$ -Zustände,

$$\begin{aligned} \#1 &\mapsto ^{87}\text{Rb}(F=2), & 1 - \frac{\nu_{1,2}}{\nu_{(87,F=2),(85,F=3)}} &\approx 6,1\%, \\ \#2 &\mapsto ^{85}\text{Rb}(F=3), & 1 - \frac{\nu_{2,3}}{\nu_{(85,F=2),(85,F=3)}} &\approx 5,8\%, \\ \#3 &\mapsto ^{85}\text{Rb}(F=2), & 1 - \frac{\nu_{3,2}}{\nu_{(87,F=1),(85,F=2)}} &\approx 9,6\%, \\ \#4 &\mapsto ^{87}\text{Rb}(F=1), & 1 - \frac{\nu_{3,4}}{\nu_{(87,F=1),(87,F=2)}} &\approx 7,2\%, \end{aligned}$$

welche unter anderem zeigt, dass der Unterschied zu den errechneten Frequenzabständen jeweils unter 9,6% liegt.

Für die Fehlerbetrachtung ist es sinnvoll, die Standardabweichung $\sigma_{\Delta\nu}$ der Halbwertsbreiten $\Delta\nu_i$ der Dips heranzuziehen. Die Standardabweichung $\sigma_{\Delta\nu}$ ist hierbei ein Maß dafür, wie ähnlich die Halbwertsbreiten $\Delta\nu_i$ sind beziehungsweise, wie stark die Verteilung der Halbwertsbreiten $\Delta\nu_i$ gestreut ist. Ähneln sich die Werte für $\Delta\nu_i$, ergibt sich eine kleine Standardabweichung $\sigma_{\Delta\nu}$. Unterscheiden sich die Werte für $\Delta\nu_i$ jedoch stark, so ist $\sigma_{\Delta\nu}$ groß. Für die Standardabweichung gilt

$$\sigma_{\Delta\nu} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta\nu_i - \langle \Delta\nu \rangle)^2} \quad (4.5)$$

mit dem Mittelwert

$$\langle \Delta\nu \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta\nu_i, \quad (4.6)$$

wobei hier $i \in [1, 4]$.

# i	$\Delta\nu_i$ in GHz
#1	0,485
#2	0,658
#3	0,705
#4	0,646

Tabelle 4.5.: Ermittelte Parameter

Aus den durch das `scipy.optimize.curve_fit` Python-Modul ermittelten Parametern (siehe Tabelle 4.5) für die jeweiligen Halbwertsbreiten $\Delta\nu_i$ ergibt sich $\langle \Delta\nu \rangle = 0,624$ GHz und $\sigma_{\Delta\nu} = 0,083$ GHz.

Da die Halbwertsbreiten $\Delta\nu_i$ den Fit, damit auch die Position der Dips $\nu_{0,i}$ und somit die Frequenzabstände zwischen den Dips beeinflussen, kann der Fehler der Frequenzabstände mit $\pm\sigma_{\Delta\nu}$ abgeschätzt werden. Damit würde jedoch einzig der Frequenzabstand $^{87}\text{Rb}(F=2) \longleftrightarrow ^{85}\text{Rb}(F=3)$ mit 1,218(83) GHz den Literaturwert 1,297 GHz umfassen.

Wird der Fehler mit $\langle \Delta\nu \rangle = 0,624$ GHz abgeschätzt, so liegen zwar für alle Frequenzabstände der Literaturwerte innerhalb von $\nu_{i,j} \pm \langle \Delta\nu \rangle$, dieser Fehler wäre aber im Vergleich zu den Werten $\nu_{i,j}$ ausgesprochen groß für den Abstand $^{87}\text{Rb}(F=2) \longleftrightarrow ^{85}\text{Rb}(F=3)$ mit $\frac{\langle \Delta\nu \rangle}{\nu_{1,2}} \approx 51,2\%$, für den Abstand $^{85}\text{Rb}(F=2) \longleftrightarrow ^{85}\text{Rb}(F=3)$ mit $\frac{\langle \Delta\nu \rangle}{\nu_{2,3}} \approx 21,8\%$ und für den Abstand $^{87}\text{Rb}(F=1) \longleftrightarrow ^{85}\text{Rb}(F=2)$ mit $\frac{\langle \Delta\nu \rangle}{\nu_{3,4}} \approx 27,6\%$.

Maßgeblich für eine präzise Bestimmung der Frequenzabstände ist es, einen geeigneten Fit mit Startparametern zu wählen, welcher sich im besten Fall auf entsprechend relevante Intervalle bezieht. Die Peaks in der Region um das lokale Spannungsminimum führen zur Versetzung der Dip Position ν_0 , was beispielsweise im Falle von #2 in Abbildung 4.4 deutlich wird.

4.2. Sättigungsspektroskopie

4.2.1. Daten und Messungen

Für die Sättigungsspektroskopie wurde der Transimpedanzverstärker der Photodiode mit einstellbarer Verstärkung zwischen 10 dB und 50 dB erhöht. Im Folgenden wird der Spannungsverlauf der Photodiode hinter der Rubidiumzelle bei einer Verstärkung von 30 dB betrachtet. Ziel ist es zunächst, die Frequenzabstände der Peaks in Region der lokalen Spannungsminima des jeweiligen Dips (siehe Abbildung 4.4) zu bestimmen. Gleichwohl muss in der Auswertung berücksichtigt werden, welche dieser Peaks durch atomare Übergänge zustande kommen und welche als Cross-Over Peaks dem Doppler-Effekt geschuldet sind.

4.2.1.1. Dip #1 und Dip #2

Da der Datensatz `data20-gain30-01.csv` sowohl Dip #1 als auch Dip #2 beinhaltet, werden beide Dips in diesem Abschnitt gemeinsam betrachtet. Nachdem analog zur Absorptionsspektroskopie die Umrechnung der Abszissenachse von Zeit t in Frequenz ν erfolgt (siehe Gleichung (4.3)), wird zunächst an den Rohdaten für jeden Dip ein Gauß-Fit der Form (4.4) angelegt.

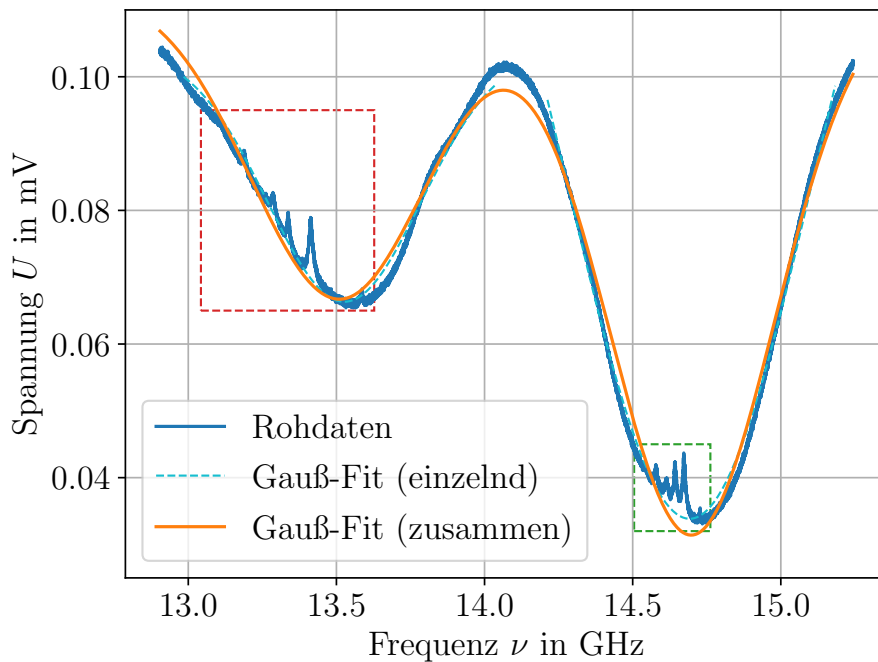


Abbildung 4.5.: Rohdaten `data20-gain30-01.csv` mit Gauß-Fit

Nun werden die normierten Spannungsverläufe U/U_{fit} in den rechteckig eingezeichneten Intervallen, wo sich jeweils die Peaks befinden, näher betrachtet. Für jeden Peak wird eine Lorentz-Funktion der Form

$$I(\nu) = I_0 \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\gamma}{2}}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2} + I_y \quad (4.7)$$

im jeweiligen Intervall gefittet.

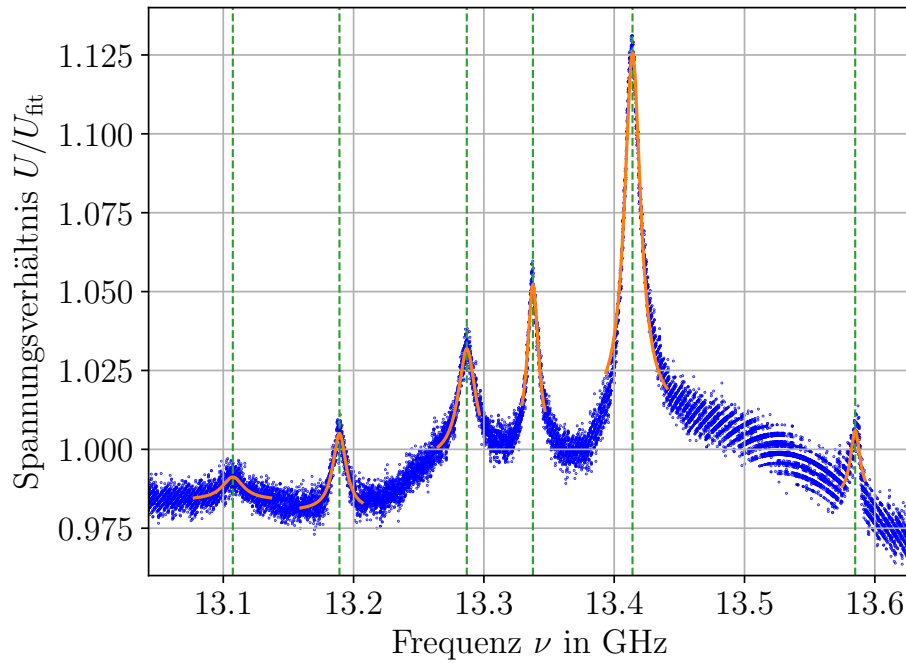


Abbildung 4.6.: Normierter Spannungsverlauf für Peaks in Region von Dip **#1** mit Lorentz-Fit

Die sechs Peaks werden von links nach rechts von **#1** bis **#6** durchnummeriert. Aus den gefitteten Kurven und deren mittleren Position ergeben sich die Frequenzabstände in Tabelle 4.6. Hierbei ist zu beachten, dass zur Bestimmung der Peaks, welche aus atomaren Übergängen resultieren, zunächst alle möglichen Frequenzabstände (anstatt ausschließlich Abstände benachbarter Peaks analog zu Tabelle 4.1) betrachtet werden. Auf den ersten Blick wird anhand der Amplitude deutlich, dass es sich bei Peak **#5** um einen Cross-Over Peak handeln muss. Ein Vergleich mit den Literaturwerten (Tabelle 4.7) zeigt, dass es sich ebenfalls bei Peak **#3** um einen Cross-Over Peak handelt.

# <i>i</i> , # <i>j</i>	$\nu_{i,j}$ in MHz
#1, #2	81,837
#1, #3	179,550
#1, #4	230,291
#1, #5	306,719
#1, #6	477,617
#2, #3	97,713
#2, #4	148,454
#2, #5	224,881
#2, #6	395,780
#3, #4	50,741
#3, #5	127,168
#3, #6	298,067
#4, #5	76,427
#4, #6	247,326
#5, #6	170,898

Tabelle 4.6.: Errechnete Frequenzabstände der Peaks für Dip **#1**

# <i>i</i> , # <i>j</i>	$\nu_{i,j}$ in MHz
$F = 0 \longleftrightarrow F = 1$	72,218
$F = 1 \longleftrightarrow F = 2$	156,947
$F = 2 \longleftrightarrow F = 3$	266,650

Tabelle 4.7.: Literaturwerte für $5^2P_{3/2}$, ^{87}Rb
[Quelle: [Ste21b], S. 26, Fig. 2]

Für alle weiteren Dips ist die Vorgehensweise zur Bestimmung der Frequenzabstände der Peaks identisch:

1. Geeigneten Gauß-Fit (siehe Gleichung (4.4)) an Rohdaten für relevanten Intervall des Dips anlegen.
2. Betrachtung des normierten Spannungsverlaufes U/U_{fit} in der Region um das lokale Spannungsminimum (Peaks).
3. Geeigneten Lorentz-Fit (siehe Gleichung (4.7)) für jeden Peak anlegen.
4. Peaks werden von links nach rechts entsprechend ihrer Anzahl durchnummeriert (#1, #n).
5. Betrachtung aller möglichen Frequenzabstände und Identifikation der Cross-Over Peaks anhand ihrer (im Vergleich zu Lamb Peaks größeren) Amplitude und Abgleich mit Literaturwerten.

Wir fahren fort mit der Betrachtung von Dip #2.

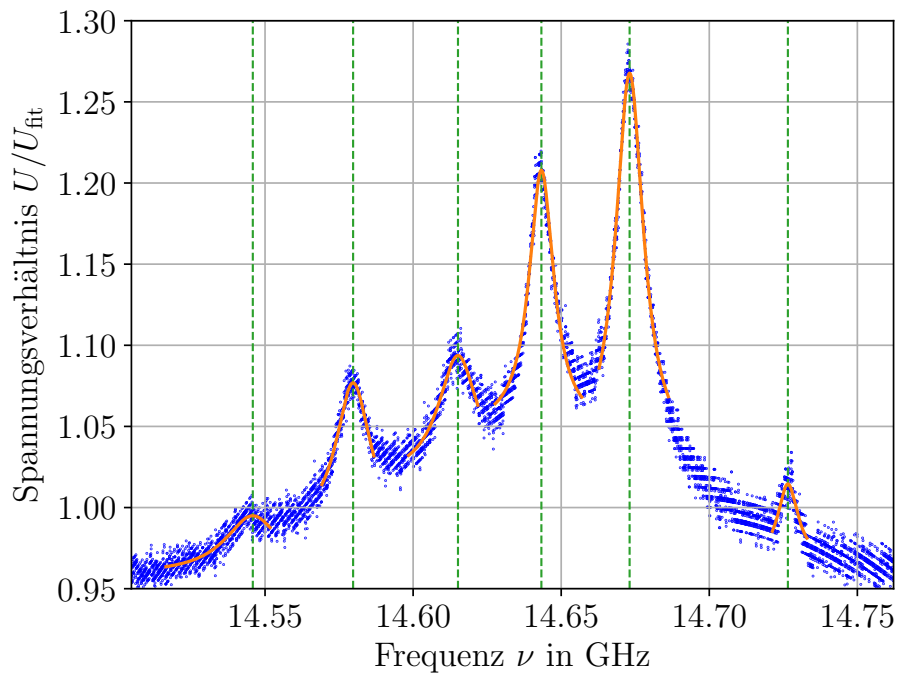


Abbildung 4.7.: Normierter Spannungsverlauf für Peaks in Region von Dip #2 mit Lorentz-Fit

#i, #j	$\nu_{i,j}$ in MHz
#1, #2	33,869
#1, #3	69,280
#1, #4	97,442
#1, #5	127,230
#1, #6	180,675
#2, #3	35,411
#2, #4	63,573
#2, #5	93,361
#2, #6	146,806
#3, #4	28,162
#3, #5	57,950
#3, #6	111,394
#4, #5	29,788
#4, #6	83,232
#5, #6	53,444

Tabelle 4.8.: Errechnete Frequenzabstände der Peaks für Dip #2

#i, #j	$\nu_{i,j}$ in MHz
$F = 1 \longleftrightarrow F = 2$	29,372
$F = 2 \longleftrightarrow F = 3$	63,401
$F = 3 \longleftrightarrow F = 4$	120,640

Tabelle 4.9.: Literaturwerte für $5^2P_{3/2}$, ^{85}Rb
[Quelle: [Ste21a], S. 25, Fig. 2]

4.2.1.2. Dip #3

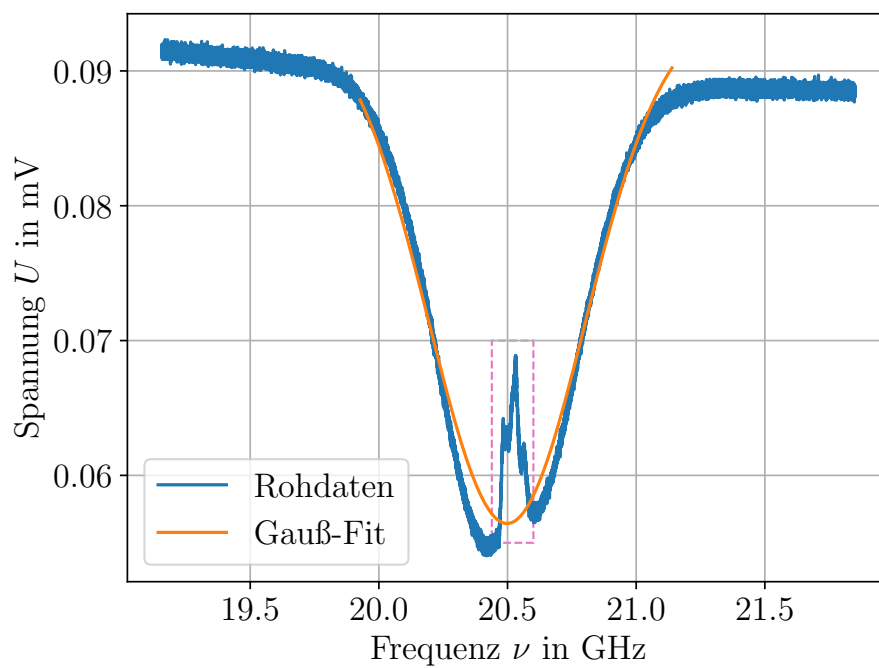
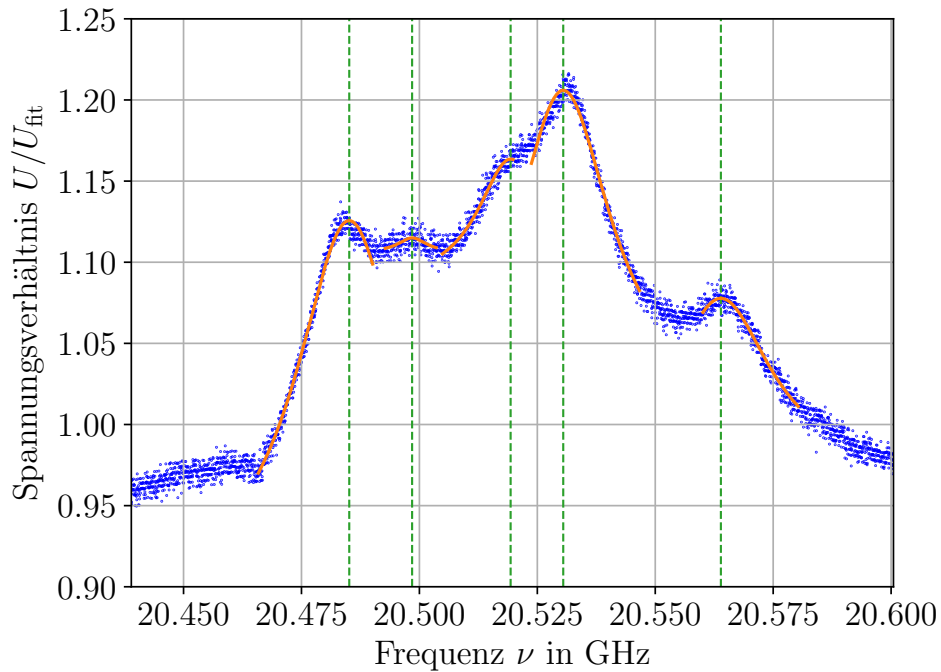


Abbildung 4.8.: Rohdaten data20-gain30-03.csv mit Gauß-Fit



$\#i, \#j$	$\nu_{i,j}$ in MHz
#1, #2	13,325
#1, #3	34,210
#1, #4	45,365
#1, #5	78,785
#2, #3	20,884
#2, #4	32,039
#2, #5	65,460
#3, #4	11,155
#3, #5	44,575
#4, #5	33,420

Tabelle 4.10.: Errechnete Frequenzabstände der Peaks für Dip **#3**

Abbildung 4.9.: Normierter Spannungsverlauf für Peaks in Region von Dip **#3** mit Lorentz-Fit

4.2.1.3. Dip **#4**

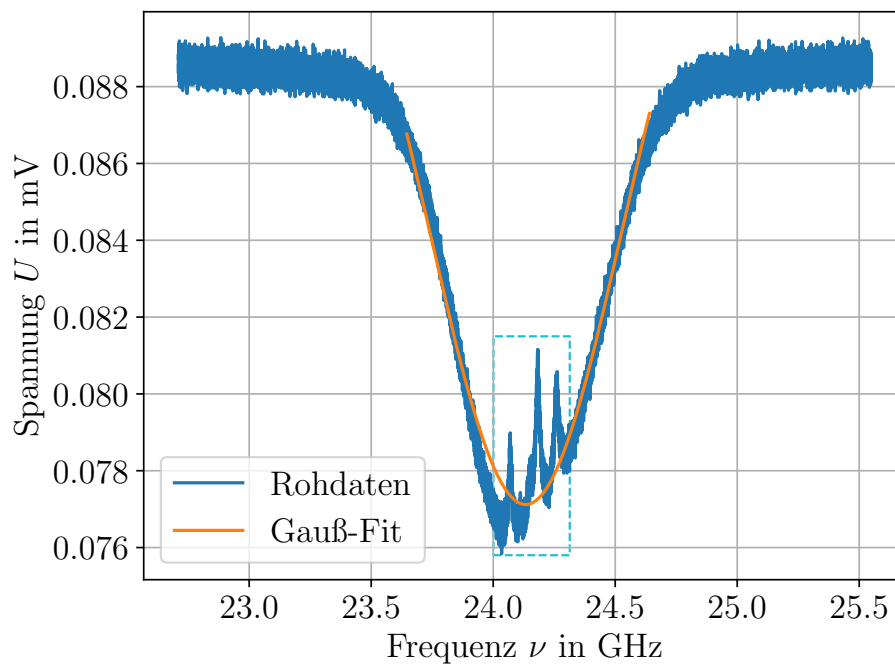


Abbildung 4.10.: Rohdaten data20-gain30-04.csv mit Gauß-Fit

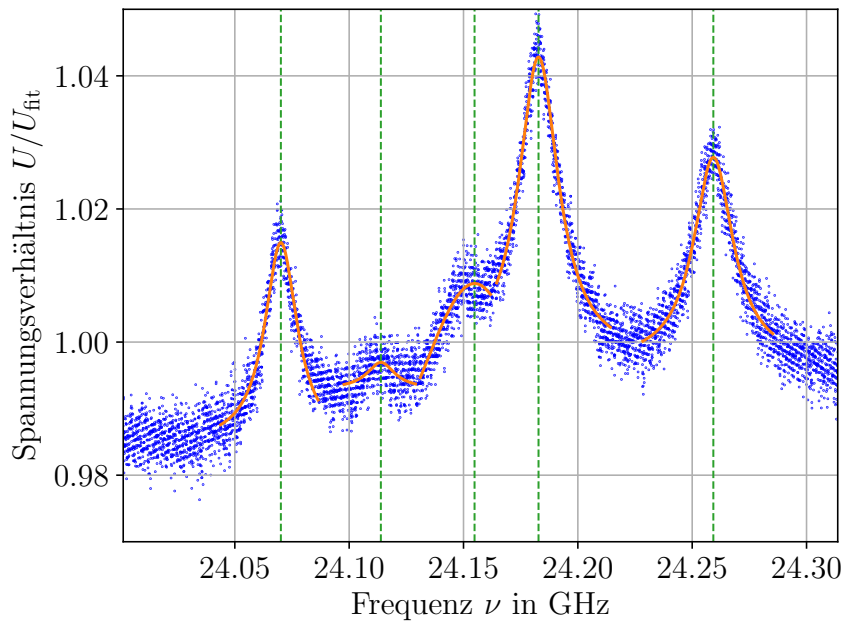


Abbildung 4.11.: Normierter Spannungsverlauf für Peaks in Region von Dip #4 mit Lorentz-Fit

#i, #j	$\nu_{i,j}$ in MHz
#1, #2	43,723
#1, #3	84,692
#1, #4	112,668
#1, #5	189,112
#2, #3	40,969
#2, #4	68,944
#2, #5	145,388
#3, #4	27,975
#3, #5	104,419
#4, #5	76,443

Tabelle 4.11.: Errechnete Frequenzabstände der Peaks für Dip #4

4.2.2. Fehleranalyse und Diskussion

4.2.2.1. Dip #1

Durch den Vergleich der ermittelten Frequenzabstände (Tabelle 4.6) mit den Literaturwerten (Tabelle 4.7) ergibt sich eine relativ eindeutige Zuordnung für den $5^2P_{3/2}$ -Zustand (bei ^{87}Rb),

$$\begin{aligned}
 \#1 &\mapsto ^{87}\text{Rb}(F=0), & 1 - \frac{\nu_{1,2}}{\nu_{(F=0,F=1)}} &\approx -13,3\%, \\
 \#2 &\mapsto ^{87}\text{Rb}(F=1), & 1 - \frac{\nu_{2,4}}{\nu_{(F=1,F=2)}} &\approx 5,4\%, \\
 \#3 &\mapsto \text{Cross-Over Peak zwischen } F=1 \text{ und } F=2, \\
 \#4 &\mapsto ^{87}\text{Rb}(F=2), & 1 - \frac{\nu_{4,6}}{\nu_{(F=2,F=3)}} &\approx 7,2\%, \\
 \#5 &\mapsto \text{Cross-Over Peak zwischen } F=2 \text{ und } F=3, \\
 \#6 &\mapsto ^{87}\text{Rb}(F=3),
 \end{aligned}$$

welche unter anderem zeigt, dass der Unterschied zu den errechneten Frequenzabständen jeweils unter 13,3% liegt.

Auch an dieser Stelle ist es für die Fehlerbetrachtung sinnvoll, die Standardabweichung σ_γ und den Mittelwert $\langle\gamma\rangle$ der Halbwertsbreiten γ_i der Lorentz-förmigen Peaks heranzuziehen.

#i	γ_i in MHz
#1	19,767
#2	12,267
#3	16,307
#4	10,086
#5	14,795
#6	8,894

Tabelle 4.12.: Ermittelte Parameter für γ_i , Dip #1

Aus den durch das `scipy.optimize.curve_fit` Python-Modul ermittelten Parametern (siehe Tabelle 4.12) für die jeweiligen Halbwertsbreiten γ_i ergibt sich $\langle\gamma\rangle = 13,686$ MHz und $\sigma_\gamma = 3,719$ MHz.

Des Weiteren wird beim Vergleich der ermittelten Frequenzabstände (Tabelle 4.6) zu den Literaturwerten (Tabelle 4.7) im Kontext der Abweichungen zueinander deutlich, dass der Fehler in etwa auf $\langle\gamma\rangle = 13,686$ MHz geschätzt werden muss, da

$$\begin{aligned} |\nu_{1,2} - \nu_{(F=0),(F=1)}| &= |81,837 \text{ MHz} - 72,218 \text{ MHz}| = 9,619 \text{ MHz} \approx 0,7\langle\gamma\rangle, \\ |\nu_{2,4} - \nu_{(F=1),(F=2)}| &= |148,454 \text{ MHz} - 156,947 \text{ MHz}| = 8,493 \text{ MHz} \approx 0,6\langle\gamma\rangle, \\ |\nu_{4,6} - \nu_{(F=2),(F=3)}| &= |247,326 \text{ MHz} - 266,650 \text{ MHz}| = 19,323 \text{ MHz} \approx 1,4\langle\gamma\rangle. \end{aligned}$$

4.2.2.2. Dip #2

Durch den Vergleich der ermittelten Frequenzabstände (Tabelle 4.8) mit den Literaturwerten (Tabelle 4.9) ergibt sich eine ungefähre Zuordnung für den $5^2P_{3/2}$ -Zustand (bei ^{85}Rb),

$$\begin{aligned} \#1 &\mapsto ^{85}\text{Rb}(F=1), & 1 - \frac{\nu_{1,2}}{\nu_{(F=1,F=2)}} &\approx -15,3\%, \\ \#2 &\mapsto ^{85}\text{Rb}(F=2), & 1 - \frac{\nu_{2,4}}{\nu_{(F=2,F=3)}} &\approx -0,3\%, \\ \#3 &\mapsto \text{Cross-Over Peak zwischen } F=2 \text{ und } F=3, \\ \#4 &\mapsto ^{85}\text{Rb}(F=3), & 1 - \frac{\nu_{4,6}}{\nu_{(F=3,F=4)}} &\approx 31,0\%, \\ \#5 &\mapsto \text{Cross-Over Peak zwischen } F=3 \text{ und } F=4, \\ \#6 &\mapsto ^{85}\text{Rb}(F=4), \end{aligned}$$

welche unter anderem zeigt, dass der Unterschied zu den errechneten Frequenzabständen jeweils unter 31,0% liegt.

Auffällig ist hier, dass die Zuordnung von $\#2 \mapsto ^{85}\text{Rb}(F=2)$ sehr präzise zu sein scheint, durch die großen Abweichungen von $\#1 \mapsto ^{85}\text{Rb}(F=1)$ und insbesondere $\#4 \mapsto ^{85}\text{Rb}(F=3)$ zu den Literaturwerten zumindest diese Zuordnungen fraglich bleiben.

Eine alternative Zuordnung wäre

$$\#3 \mapsto ^{85}\text{Rb}(F=3), \quad 1 - \frac{\nu_{3,6}}{\nu_{(F=3),(F=4)}} \approx 7,6\%,$$

wonach aber $\#4$ als Cross-Over Peak betrachtet werden müsste und damit neben $\#5$ als Cross-Over Peak liegt, was der theoretischen Grundlage, dass zu je einem Paar von Lamb Peaks jeweils ein dazwischenliegender Cross-Over Peak liegen muss, widerspricht.

Auch an dieser Stelle ist es für die Fehlerbetrachtung sinnvoll, die Standardabweichung σ_γ und den Mittelwert $\langle\gamma\rangle$ der Halbwertsbreiten γ_i der Lorentz-förmigen Peaks heranzuziehen.

#i	γ_i in MHz
#1	23,157
#2	14,235
#3	16,368
#4	10,080
#5	11,331
#6	8,252

Tabelle 4.13.: Ermittelte Parameter für γ_i , Dip #2

Aus den durch das `scipy.optimize.curve_fit` Python-Modul ermittelten Parametern (siehe Tabelle 4.12) für die jeweiligen Halbwertsbreiten γ_i ergibt sich $\langle\gamma\rangle = 13,904$ MHz und $\sigma_\gamma = 4,915$ MHz.

Beim Vergleich der ermittelten Frequenzabstände (Tabelle 4.8) zu den Literaturwerten (Tabelle 4.9) im Kontext der Abweichungen zueinander wird deutlich, dass der Fehler für die Zuordnungen $\#1 \mapsto {}^{85}\text{Rb}(F=1)$ und $\#2 \mapsto {}^{85}\text{Rb}(F=2)$ in etwa auf $\sigma_\gamma = 4,915$ MHz geschätzt werden kann, da

$$\begin{aligned} |\nu_{1,2} - \nu_{(F=1),(F=2)}| &= |33,869 \text{ MHz} - 29,372 \text{ MHz}| = 4,497 \text{ MHz} \approx 0,9\sigma_\gamma, \\ |\nu_{2,4} - \nu_{(F=2),(F=3)}| &= |63,573 \text{ MHz} - 63,401 \text{ MHz}| = 0,172 \text{ MHz} \approx 0,035\sigma_\gamma, \end{aligned}$$

aber

$$|\nu_{4,6} - \nu_{(F=3),(F=4)}| = |83,232 \text{ MHz} - 120,640 \text{ MHz}| = 37,408 \text{ MHz} \approx 7,6\sigma_\gamma.$$

Selbst mit der Schätzung des Fehlers auf $\langle\gamma\rangle = 13,904$ MHz ergäbe sich noch immer $|\nu_{4,6} - \nu_{(F=3),(F=4)}| \approx 2,7\langle\gamma\rangle$.

Es bleibt also festzuhalten, dass diese Zuordnung nur teilweise eine Nähe zu den Literaturwerten rechtfertigt.

4.2.2.3. Dip #3 und Dip #4

In Anbetracht dessen, dass eine Auflösung einzelner Peaks (siehe Abbildung 4.9 und Abbildung 4.11) hier nur noch kaum oder teilweise gar nicht möglich ist und die gemittelte Halbwertsbreite der Peaks ($\langle\gamma\rangle = 17,593$ MHz für Dip #3 und $\langle\gamma\rangle = 24,111$ MHz für Dip #4) größer ist als einige Peak-Abstände (siehe Tabelle 4.10 und Tabelle 4.11), erlaubt sich für beide Dips keine sinnvolle, quantitative Fehleranalyse.

Qualitativ lässt sich sagen, dass eine breite Streuung der Datenpunkte (sehr deutlich bei Peak #2 und #3 für Dip #4) das Fitten einer Lorentz-Kurve erschwert oder gar unmöglich macht (deutlich bei Abbildung 4.9).

Abschließend ist für eine qualitative Betrachtung der Fehler anzumerken, dass möglichst scharf definierte Peaks eine exaktere Bestimmung der (mittleren) Positionen (bei $\nu_{0,i}$) erlauben. Hierbei spielt das Auflösungsvermögen der Peaks eine tragende Rolle. Kleinere Halbwertsbreiten und höhere Amplituden führen zu genaueren Fits.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend ist zu sagen, dass es uns gelungen ist, die gesamte Hyperfeinstruktur der $D2$ -Linie aufzulösen und auszuwerten. Unsere Ergebnisse entsprechen mit einigen Abweichungen den im Rahmen der Fehleranalyse diskutierten Literaturwerten. Im Allgemeinen können die Fehler durch präzisere Justage und Einkopplung des Strahls in den Referenzresonator und den polarisierenden Strahlteiler reduziert werden. Ebenso trägt die Wahl geeigneter Fit-Parameter maßgeblich dazu bei, mit welcher Genauigkeit die Peaks und damit unsere Frequenzabstände bestimmt werden.

In unserem Experiment haben wir für eine dopplerfreie Auflösung der Hyperfeinstruktur am Rubidium die Sättigungsspektroskopie verwendet. Allerdings gibt es auch noch weitere spektroskopische Methoden wie die Mehrphotonen- und die Polarisationspektroskopie mittels derer dopplerfreie Untersuchungen durchgeführt werden können [Dem00]. Die Sättigungsspektroskopie in Gaszellen ist die simpelste dieser Formen und dennoch absolut ausreichend für die Anwendung in diesem Experiment. Mittels dieser Methode können auch weitere gasförmige Proben wie Cäsium [Kna93] und Kalziumdampf [Bac05] untersucht werden und bleibt damit auch weiterhin ein wichtiger Bestandteil für die Wissenschaft um atomare Übergänge explizit untersuchen und auflösen zu können.

A. Anhang: Datensätze und Quellcodes

Alle Datensätze und Quellcodes, welche dieser Auswertung zu Grunde liegen, sind auf [GitHub](https://github.com/DaHaCoder/H2-Auswertung)¹ zu finden. Im Folgenden wird aufgelistet, welche Datensätze und Quellcodes den Abbildungen und Tabellen zu Grunde liegen:

1. Datensatz: `data-00.csv`

- Abbildung 4.1 [Quellcode: `plot-data00-all.py`]
- Abbildung 4.2 [Quellcode: `plot-data00-resonator.py`]
- Abbildung 4.3 [Quellcode: `plot-data00-rubidium.py`]
- Abbildung 4.4 [Quellcode: `plot-data00-rubidium.py`]
- Tabelle 4.1 [Quellcode: `plot-data00-rubidium.py`]
- Tabelle 4.3 [Quellcode: `plot-data00-rubidium.py`]
- Tabelle 4.4 [Quellcode: `plot-data00-rubidium.py`]
- Tabelle 4.5 [Quellcode: `plot-data00-rubidium.py`]
- Tabelle B.1 [Quellcode: `plot-data00-resonator.py`]

2. Datensatz: `data20-gain30-01.csv`

- Abbildung 4.5 [Quellcode: `plot-data20-gain30-01-rubidium.py`]
- Abbildung 4.6 [Quellcode: `plot-data20-gain30-01-rubidium.py`]
- Abbildung 4.7 [Quellcode: `plot-data20-gain30-01-rubidium.py`]
- Tabelle 4.6 [Quellcode: `plot-data20-gain30-01-rubidium.py`]
- Tabelle 4.8 [Quellcode: `plot-data20-gain30-01-rubidium.py`]
- Tabelle 4.12 [Quellcode: `plot-data20-gain30-01-rubidium.py`]
- Tabelle 4.13 [Quellcode: `plot-data20-gain30-01-rubidium.py`]

3. Datensatz: `data20-gain30-03.csv`

- Abbildung 4.8 [Quellcode: `plot-data20-gain30-03-rubidium.py`]
- Abbildung 4.9 [Quellcode: `plot-data20-gain30-03-rubidium.py`]
- Tabelle 4.10 [Quellcode: `plot-data20-gain30-03-rubidium.py`]

4. Datensatz: `data20-gain30-04.csv`

- Abbildung 4.10 [Quellcode: `plot-data20-gain30-04-rubidium.py`]
- Abbildung 4.11 [Quellcode: `plot-data20-gain30-04-rubidium.py`]
- Tabelle 4.11 [Quellcode: `plot-data20-gain30-04-rubidium.py`]

¹<https://github.com/DaHaCoder/H2-Auswertung>

B. Anhang: Zeitabstände der Resonator-Peaks

peaks $\#i, \#i + 1$	$t_{i,i+1}$ in ms
#1, #2	7,4416
#2, #3	6,8432
#3, #4	6,2992
#4, #5	6,1408
#5, #6	5,9376
#6, #7	5,7712
#7, #8	5,5952
#8, #9	5,5664
#9, #10	5,3872
#10, #11	5,3216
#11, #12	5,2272
#12, #13	5,1312
#13, #14	5,0912
#14, #15	5,0320
#15, #16	5,0336

Tabelle B.1.: Zeitabstände benachbarter Resonator-Peaks von links nach rechts

Literatur

- [FLS64] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton und Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Bd. 1. California Institute of Technology, Michael A. Gottlieb und Rudolf Pfeiffer, 1964. ISBN: 978-0-465-02414-8. URL: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_01.html.
- [Kna93] Kai-Martin Knaak. "Sättigungsspektroskopie der Cäsium-D2-Linie im schwachen Magnetfeld". In: (1993). URL: <http://www.familieknaak.de/kai-martin/plom>.
- [Bra+99] Michael P. Bradley u. a. "Penning Trap Measurements of the Masses of ^{133}Cs , $^{87,85}\text{Rb}$, and ^{23}Na with Uncertainties ≤ 0.2 ppb". In: *Phys. Rev. Lett.* 83 (22 Nov. 1999), S. 4510–4513. DOI: [10.1103/PhysRevLett.83.4510](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.4510). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.4510>.
- [Dem00] Wolfgang Demtröder. *Laserspektroskopie, Grundlagen und Techniken*. Auflage 4. Springer, Berlin, 2000. ISBN: 978-3-540-33795-8.
- [Bac05] Michael Bacher. "Sättigungsspektroskopie an Kalziundampf und Laserstabilisierung für Photoionisationsexperimente". In: (2005). URL: https://quantumoptics.at/images/publications/diploma/diplom_bacher.pdf.
- [Foo05] Christopher J. Foot. *Atomic Physics*. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2005. ISBN: 978-0-19-850695-9.
- [Krü12] Artjom Krüchow. *Laserspektroskopie der Rubidium D2 Linie*. Universität Ulm, Sep. 2012. URL: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/fortgeschrittenenpraktikum/fp/Laserspektroskopie.pdf>.
- [Blo16] Prof.Dr. Bloch. *E4 Atom und Molekülphysik*. LMU München, 2016. URL: https://www2.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/sose_20/E4-E4p-Atom-und-Molekuelphysik/vorlesung/_auth/Atomphysik.pdf.
- [Dem16] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*. Auflage 5. Springer, Berlin, 2016. ISBN: 978-3-66-249094-5.
- [Hun18] Siegfried Hunklinger. *Festkörperphysik*. Auflage 5. De Gruyter, Oldenbourg, 2018. ISBN: 978-3-11-056775-5.
- [BHM21] Julia Benedikter, Thomas Hümmer und Matthias Mader. *Fortgeschrittenenpraktikum Versuch H2: Laserspektroskopie*. Ludwig-Maximilians-Universität München, Mai 2021. URL: http://www2.mpg.de/~haensch/pdf/Versuch%20H2%20Laserspektroskopie7_main.pdf.
- [Ste21a] Daniel A. Steck. *Rubidium 85 D Line Data*. University of Oregon, Juli 2021. URL: <https://steck.us/alkalidata/rubidium85numbers.pdf>.
- [Ste21b] Daniel A. Steck. *Rubidium 87 D Line Data*. University of Oregon, Juli 2021. URL: <https://steck.us/alkalidata/rubidium87numbers.pdf>.
- [Che] Chemie.de. *Rubidium*. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Rubidium.html>.