Tópicos:

- Introdução à Análise Multivariada

- Regressão Linear Múltipla

- Álgebra Matricial: Autovalores e Autovetores

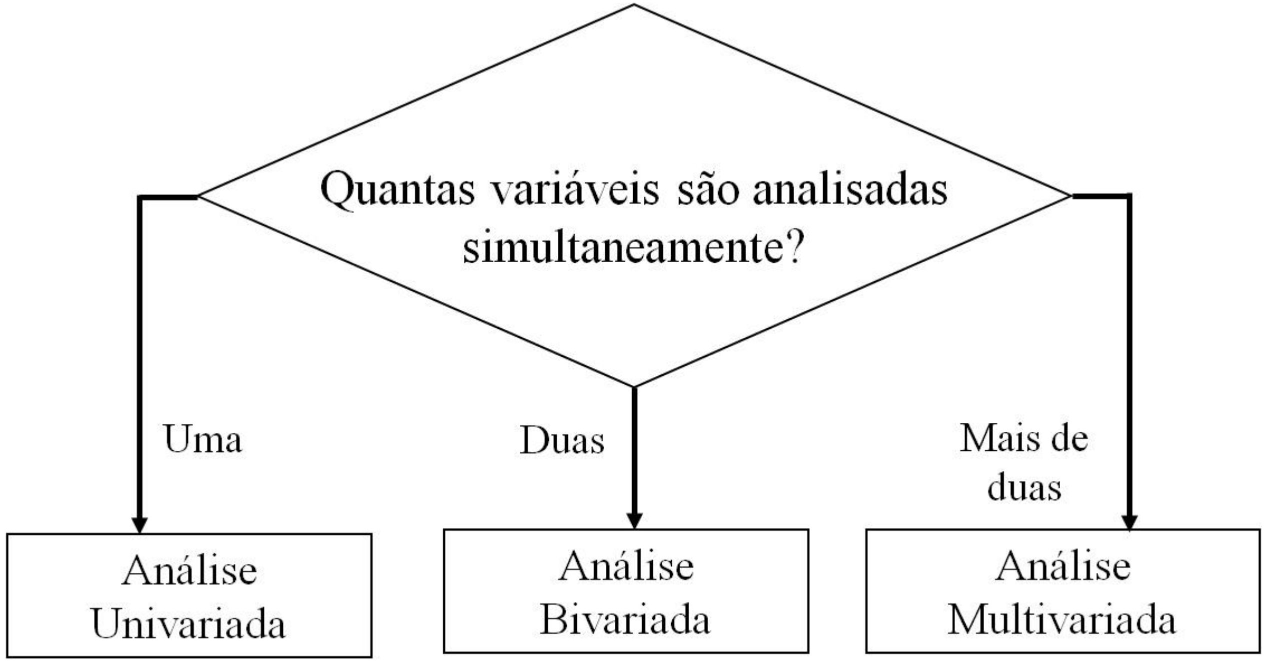
- Estatística Descritiva, Covariância, Correlação

Bibliografia:

- R.A. **Johnson**, Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice Hall, 1992
- N.K. **Malhotra**, Pesquisa de marketing, 4a ed., Bookman, 2006

Introdução à Análise Multivariada

Análise multivariada: De um modo geral, refere-se a todos os métodos estatísticos que simultaneamente analisam múltiplas medidas sobre cada indivíduo ou objeto sob investigação. Qualquer análise simultânea de mais de duas variáveis de certo modo pode ser considerada análise multivariada



Utilização de computação

- Possibilita a análise de grande quantidade de dados
- "Pacotes estatísticos" são acessíveis a não-especialistas
- A organização dos dados para acesso deve ser feita de forma apropriada. Neste contexto os dados devem ser organizados na forma matricial:

Observação	variável 1	variável 2	variável 3	...	variável k
Obs$_1$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$	x_{1k}
Obs$_2$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$	x_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
Obs$_n$	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$\cdots$	x_{nk}

x_{ij} é a medida da **variável j** sobre o item ou **indivíduo i**

A álgebra matricial é fundamental para desenvolver métodos de estatística multivariada.

As observações x_{ij} podem ser tratadas como uma matriz $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

A **matriz quadrada** $\mathbf{A}$ tem autovalor λ, com autovetor correspondente não nulo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, se

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

onde $\mathbf{0}$ é o **vetor** nulo.

Os **autovalores** λ são determinados resolvendo-se a equação

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad \text{ou} \quad det\,(\mathbf{A}\text{-}\lambda\mathbf{I})$$

denominada: polinômio característico.

Autovalores

Exemplo: Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$

Cada autovalor corresponde a um autovetor. Para encontrar o autovetor substitua o autovalor na expressão $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e encontre $\mathbf{x}$.

Autovetores: determinação de $\mathbf{x}_1$

De acordo com o exemplo temos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, ou seja dois autovalores. Vamos determinar os dois autovetores correspondentes $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

Autovetor $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \quad \text{então:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo o produto:

$$x_{11} = x_{11}$$

$$x_{11} + 3x_{21} = x_{21}$$

Existem muitas soluções. Se escolhermos $x_{21} = 1$, temos:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovetores: determinação de $\mathbf{x}_2$

Autovetor $\mathbf{x}_2$: Vamos determinar o autovetor $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$ ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo o produto:

$$x_{12} = 3x_{12}$$

$$x_{12} + 3x_{22} = 3x_{22}$$

Vemos que $x_{12} = 0$, e que x_{22} pode ter qualquer valor. Assim, o autovetor $\mathbf{x}_2$ pode ser dado por:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Um resumo com os autovetores normalizados

Considerando a matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}, \text{ foi determinado } \mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$$

Autovalores:

$\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$

Autovetores:

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

Os autovetores podem ser **normalizados**, ou seja ter módulo igual a 1. $\mathbf{x}_2$ já é normalizado.

Como $|\mathbf{x}_1|=\sqrt{5}$ os autovetores normalizados são:

$$|\mathbf{x}_1|=\sqrt{\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_1}$$

$$\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=4+1$$

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

Matriz de correlação

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & . & . & . & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & . & . & . & r_{2k} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & . & . & . & r_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

R é uma matriz simétrica

$$r_{ij} = \frac{\left(\sum x_i x_j\right) - n\bar{x}_i \bar{x}_j}{(n-1)s_{x_i} s_{x_j}}$$

A matriz de covariâncias

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & . & . & . & s_{1k} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & . & . & . & s_{2k} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & . & . & . & s_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ s_{k1} & s_{k2} & s_{k3} & . & . & . & s_{kk} \end{bmatrix}$$

S é uma matriz simétrica $\qquad s_{ij} = r_{ij} s_i s_j$