# Capítulo 2

## Variáveis Aleatórias e Distribuições

# Experimento Aleatório

Não existe uma definição satisfatória de Experimento Aleatório. Os exemplos dados são de fenômenos para os quais modelos probabilísticos são adequados e por simplicidade, são denominados de experimentos aleatórios.

Ao descrever um experimento aleatório deve-se especificar não somente que operação ou procedimento deva ser realizado, mas também o que é que deverá ser observado.

E1: Joga-se um dado e observa-se o número obtido na face superior.
E2: Joga-se uma moeda 4 vezes e o observa-se o número de caras obtido.
E3: Uma lâmpada nova é ligada e observa-se o tempo gasto até queimar.
E4: Lançam-se dois dados e anota-se a soma dos pontos.

# Características dos Experimentos Aleatórios

Observando-se os exemplos acima pode-se destacar algumas características comuns:

1. Podem ser repetidos indefinidamente sob as mesmas condições.
2. Não se pode adiantar um resultado particular, mas pode-se descrever todos os resultados possíveis
3. Se repetidos muitas vezes apresentarão uma regularidade em termos de freqüência de resultados.

**Espaço Amostral:**

é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Se denota por $\Omega$

**Evento:**

é qualquer subconjunto do espaço amostral ($\Omega$). Denotamos por $A, B, C, \ldots$

# Operações com Eventos

Dados os eventos $A, B \in \Omega$

- **Igualdade de eventos:** $(A = B)$ A e B são iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$.
- **União de eventos:** $(A \cup B)$ evento formado pelos sucessos que pertencem a A ou a B ou a ambos.
- **Interseção de eventos:** $(A \cap B)$ evento formado por todos os sucessos favoráveis a A e a B.
- **Diferença de eventos:** $(A - B)$ evento formado pelos sucessos favoráveis a A e que não são favoráveis a B.
- **Complemento:** $(A^c)$ evento formado por todos os sucessos que não pertencem a A

# Algumas Propriedades

Dados os eventos $A, B, C \in \Omega$

**Lei Distributiva:**

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Lei de DeMorgan:**

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

# Definição Clássica de Probabilidades

A definição clássica de probabilidades foi dada por Laplace em sua obra *Teoria Analítica das Probabilidades*, publicada em 1812. Esta definição baseia-se no suposto que todos os resultados possíveis de um experimento aleatório são igualmente prováveis, isto é, cada um dos elementos do espaço amostral tem a mesma probabilidade de sair. Sejam

$N(\Omega) = n_\Omega$: número de elementos do espaço amostral

$N(A) = n_A$: número de elementos do evento A

Assim a probabilidade do evento A acontecer é

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento A}}{\text{número de casos possíveis}}$$

# Definição Formal de Probabilidades

Uma função $P(.)$ é denominada probabilidade se satisfaz:

1. $\forall A \subset \Omega, \quad 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Se os eventos $A_j$'s são disjuntos ou mutuamente exclusivos, então $P(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

## Propriedades

1. Se $\phi$ é o evento impossível então $P(\phi) = 0$
2. $P(A^c) = 1 - P(A), \quad P(A) = 1 - P(A^c)$
3. Sejam os eventos $A$ e $B$ tais que $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$
4. Sejam $A$ e $B$ dois eventos então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. Sejam $A, B$ e $C$ três eventos então

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

# Variável Aleatória

Seja E um experimento aleatório e $\Omega$ o espaço amostral associado. Uma função de X que associa cada elemento em $\Omega$, a um número real $X(\Omega)$ é denominado **variável aleatória.**

$$X : \Omega \to R$$

**Variável Aleatória Discreta**

Quando a imagem da variável aleatória X é um conjunto finito ou infinito enumerável.

**Variável Aleatória Contínua**

Quando a imagem de uma variável aleatória X é um intervalo sob a reta dos números reais.

# Variável Aleatória Discreta

## Função de Probabilidade

A função de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma função que atribui probabilidades a cada um dos possíveis valores assumidos pela variável.

$$p(x_i) = P(X = x_i) = P(\{w \in \Omega | X(w) = x_i\})$$

Uma função de probabilidade satisfaz

1. $0 \leq p(x_i) \leq 1, \quad \forall i$
2. $\sum_i p(x_i) = 1$

## Função de Distribuição ou Função Acumulada de Probabilidade

é definida por:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \forall x$$

# Algumas distribuições discretas

## Distribuição Bernoulli ($X \sim B(p)$)

Dizemos que uma variável aleatória $X$ tem *Distribuição Bernoulli com parâmetro p* ($0 \leq p \leq 1$), se $X$ assume apenas os valores 0 e 1, assim as probabilidades ficam:

$$P(X = 1) = p \quad \text{e} \quad P(X = 0) = 1 - p$$

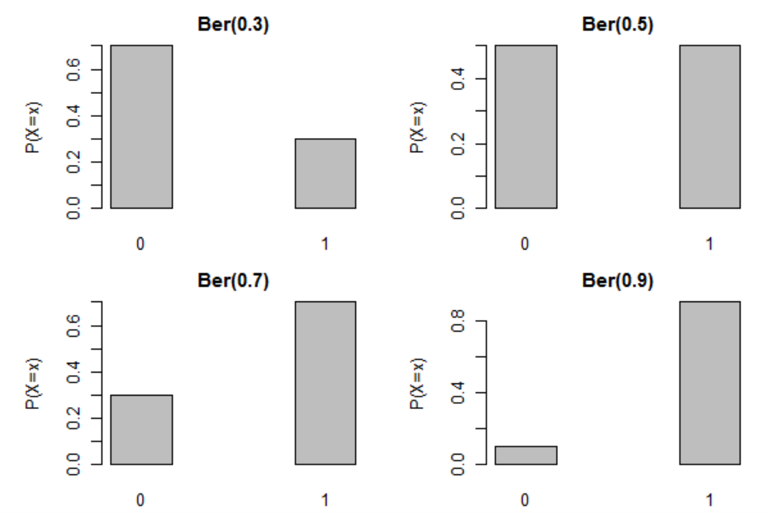
Sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

A esperança e variância é dada por:

$$\mu = E(X) = p \qquad \sigma^2 = Var(X) = p(1 - p)$$

# Distribuição Bernoulli



# Algumas distribuições discretas

**Distribuição Binomial** ($X \sim Bi(n,p)$)

Considere $n$ ensaios de Bernoulli independentes, com probabilidade de sucesso $p$. A variável aleatória $X$ que conta o número total de sucessos é uma variável Binomial com parâmetros $n$ e $p$ e sua função de probabilidade é dada por:

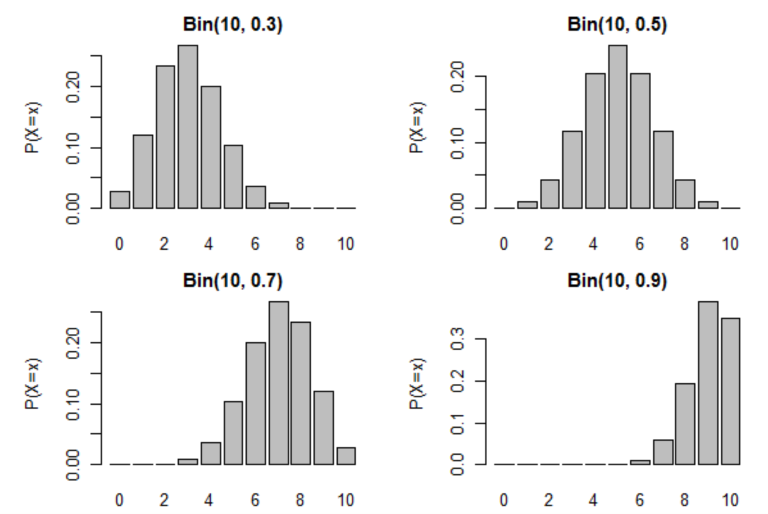
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

onde $\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$

A esperança e variância é dada por:

$$\mu = E(X) = np \qquad \sigma^2 = Var(X) = np(1-p)$$

# Distribuição Binomial



## Distribuição Multinomial

A distribuição multinomial é uma generalização da binomial; na binomial, temos $n$ repetições de um experimento de Bernoulli e a variável em estudo, que segue a distribuição binomial, corresponde ao número de sucessos obtidos. Os experimentos de Bernoulli se caracterizam pelo fato de haver apenas dois resultados possíveis, que são, então, denotados por 0 (fracasso) e 1 (sucesso). Na distribuição multinomial, temos $n$ repetições independentes de um experimento que tem $k$ resultados possíveis, com respectivas probabilidades dadas por $p_1, p_2, \ldots, p_k$ e $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. O vetor aleatório em estudo é $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, onde $X_i$ é o número de ocorrências do i-ésimo resultado.

# Algumas distribuições discretas

## Distribuição Multinomial

Considere $n$ repetições independentes de um experimento aleatório; em cada repetição há $k$ possíveis resultados com probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Se $X_i$ é o número de ocorrências do i-ésimo resultado, então o vetor $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ tem distribuição multinomial com parâmetros $n, k, p_1, p_2, \ldots, p_k$ cuja distribuição de probabilidades é dada por

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!, \ldots, x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_n}$$

onde $x_1, \ldots, x_k$ são números inteiros não negativos satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ e $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

A esperança e variância é dada por:

$$\mu_i = E(X_i) = np_i \qquad \sigma_i^2 = Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$$

# Variável Aleatória Contínua

## Função de Densidade de Probabilidade:

Dizemos que $f(x)$ é uma **função de densidade de probabilidade** para uma variável contínua X se satisfaz duas condições

1. $f(x) > 0, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

## Função de Distribuição Acumulada:

Seja X uma v.a. contínua com função de densidade f(x). A **função de distribuição acumulada**, denotada por $F_X(x)$ é definida por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in R$$

## Observações

1. $f(x)$ não representa probabilidades, a integral de $f(x)$ entre dois pontos produz uma probabilidade.
2. Seja $x_0 \in R$

$$P(X = x_0) = P(x_0 < X \leq x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

3. Se X é uma variável contínua, então

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$$

# Variável Aleatória Contínua

## Propriedades

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad \forall x \in R$
2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$
3. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$
4. A função de distribuição acumulada é não decrescente, isto é, se $a \leq b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$
5. $lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F(x), \quad \forall x \in R$, com $h > 0$, isto é $F_X$ é contínua à direita em todos os pontos
6. Do segundo teorema fundamental do cálculo, temos que, se $F_X$ é uma função derivável, então $f(x) = \frac{d}{dx}(F_X(x))$, isto é, podemos encontrar a função densidade a partir da função de distribuição

# Valor Esperado

Seja X uma v.a. com imagem $Img_X$ e função de probabilidade $p(x) = P(X = x)$ se X for discreta e função de densidade $f(x)$ se X contínua. O **valor esperado ou esperança matemática** de X denota-se por $E(X)$ ou $\mu$ e define-se da maneira seguinte:

- Se X for uma variável aleatória discreta

$$E(X) = \sum_{x_i \in Img_X} x_i p(x_i) = \sum_{x_i \in Img_X} x_i P(X = x_i)$$

- Se X for uma variável aleatória contínua

$$E(X) = \int_{x \in Img_X} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

sempre que $\sum_{x_i \in Img_X} x_i p(x_i)$ seja absolutamente convergente e $\int_{x \in Img_X} xf(x)dx$ seja finita, respectivamente.

# Valor Esperado

## Propriedades

Se X é uma variável aleatória e $a, b$ constantes, então

1. $E(a) = a$
2. $E(aX) = aE(X)$
3. $E(aX + b) = aE(X) + b$

# Variância

Seja X uma v.a. com imagem $Img_X$ e função de probabilidade $p(x) = P(X = x)$ se X for discreta e função de densidade $f(x)$ se X contínua. A **variância** de X denota-se por $Var(X)$ ou $\sigma^2$ é definida como:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

- Se X for uma variável aleatória discreta

$$Var(X) = \sum_{x_i \in Img_X} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

- Se X for uma variável aleatória contínua

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

# Variância

## Propriedades

Se X é uma variável aleatória e $a, b$ constantes, então

1. $Var(X) \geq 0$
2. Se $X = a$ com probabilidade 1, $Var(X) = 0$
3. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

# Algumas Distribuições Contínuas

**Distribuição Uniforme** ($X \sim U((a, b))$

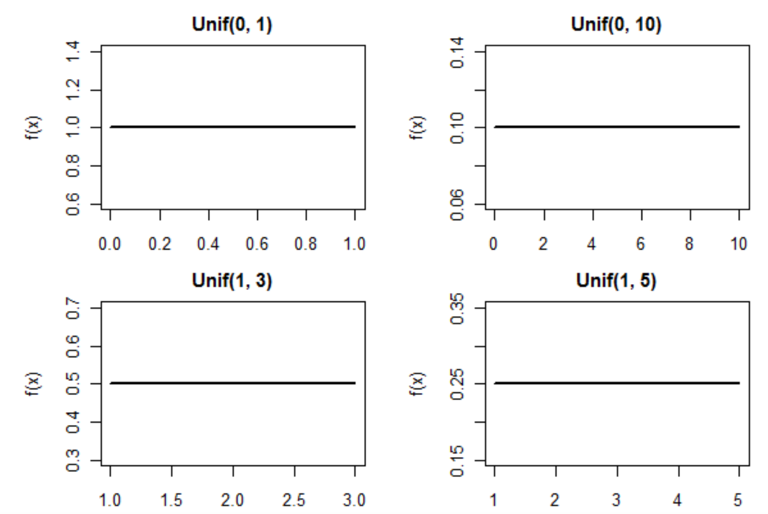
Uma variável aleatória $X$ tem distribuição **Uniforme Contínua** no intervalo $[a, b]$, $\quad a < b$, se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b - a}, \text{se} \quad a \leq x \leq b$$

A esperança e variância é dada por:

$$\mu = E(X) = \frac{a + b}{2} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

# Distribuição Uniforme



# Algumas Distribuições Contínuas

**Distribuição Gamma** ($X \sim Gama(\alpha, \beta)$)

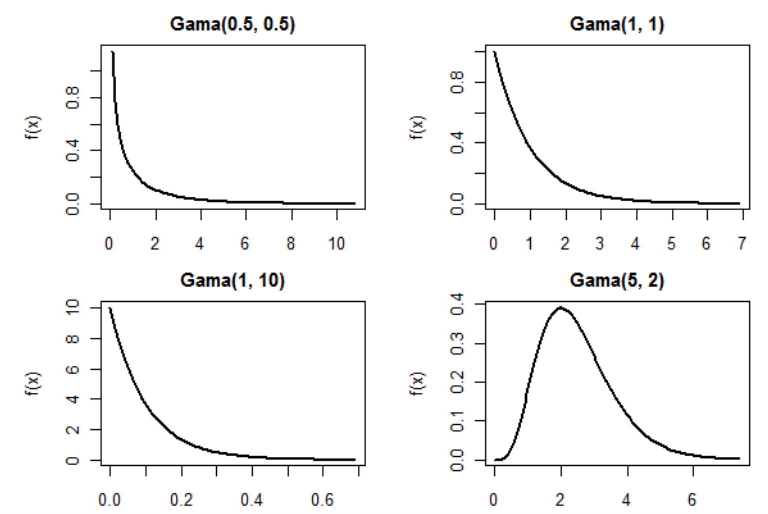
Dizemos que uma variável aleatória $X$ tem *Distribuição Gamma com parâmetros* $\alpha$ *e* $\beta$, $(\alpha > 0, \beta > 0)$ se sua função de de densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad \text{para} \quad x > 0$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$.
A esperança e variância é dada por:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \qquad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

# Distribuição Gamma



# Algumas Distribuições Contínuas

**Distribuição Exponencial** ($X \sim Exp(\lambda)$)

Dizemos que uma variável aleatória $X$ tem *Distribuição Exponencial com parâmetro* $\beta$, ($\beta > 0$) se sua função de de densidade é dada por:

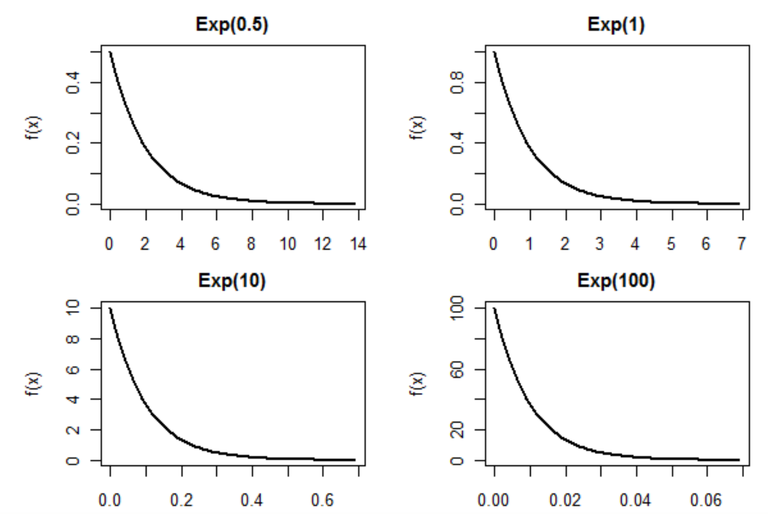
$$f(x) = \beta e^{-\beta x} \quad \text{para} \quad x > 0$$

A esperança e variância é dada por:

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \qquad Var(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

Nota: Distribuição Exponencial é caso particular da Distribuição *Gama*$(\alpha, \beta)$) quando $\alpha = 1$.

# Distribuição Exponencial



# Algumas Distribuições Contínuas

## Distribuição Beta ($X \sim Beta(\alpha, \beta)$)

Dizemos que uma variável aleatória $X$ tem *Distribuição Beta com parâmetros* $\alpha$ *e* $\beta$, ($\alpha > 0, \beta > 0$) se sua função de de densidade é dada por:

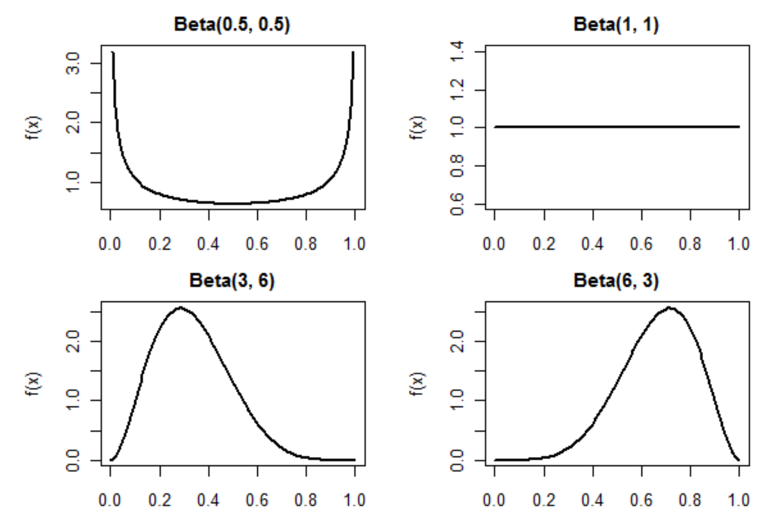
$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1$$

A esperança e variância é dada por:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{E(X)(1-E(X))}{(\alpha+\beta+1)}$$

# Distribuição Beta



**Distribuição Dirichlet** ($X \sim Dir(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k)$)

Dizemos que uma variável aleatória $X = [x_1, x_2 \ldots x_k]$ onde $x_j \in [0,1], j = 1 \ldots k, \sum_{j=1}^{k} x_j = 1$ tem *Distribuição de Dirichlet com parâmetros* $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, $\alpha_j > 0, j = 1 \ldots k$, se sua função de de densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} \ldots x_k^{\alpha_k - 1}$$

onde $A = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$.
A esperança e variância é dada por:

$$E(X_j) = \frac{\alpha_j}{A} \qquad Vax(X_i) = \frac{\alpha_i(A - \alpha_i)}{A^2(A+1)} = \frac{E(X_j)(1 - E(X_j))}{(A+1)}$$

# Algumas Distribuições Contínuas

## Distribuição Normal ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

Uma v.a. contínua $X$ tem distribuição **Normal** com parâmetros $\mu$ e $\sigma^2$, se sua função de densidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty$$

- $f(x)$ é simétrica em relação à $\mu$
- $f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$
- O valor máximo que assume $f(x)$ no intervalo $[a, b]$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} dx$$

- A esperança e variância é dada por:

$$E(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2$$

**Distribuição Normal Padrão** ($X \sim N(0,1)$)

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e definamos a nova variável

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Para determinar $P(a \leq X \leq b)$ calculamos

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma})$$

Estes valores são calculados por meio da tabela.

# Distribuição Normal