

Сборник задач по курсу "Машинное обучение"

авторы: Кантонистова Е.О., Титов В.В., Широков А., Поликарпов К.

18 сентября 2020 г.

Содержание

1	Матричное дифференцирование	2
1.1	Теория	2
1.2	Семинар	2
1.3	Домашняя работа	2

1 Матричное дифференцирование

1.1 Теория

Иногда при взятии производных по вектору или от вектор-функций удобно оперировать матричными операциями. Это сокращает запись и упрощает вывод формул. Введём следующие определения:

- При отображении вектора в число $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\nabla_x f(x) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]^T$.
- При отображении матрицы в число $f(A) : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\nabla_A f(A) = (\frac{\partial f}{\partial A_{ij}})_{i,j=1}^{n,m}$.

Мы хотим оценить, как функция изменяется по каждому из аргументов по отдельности. Поэтому производной функции по вектору будет вектор, по матрице — матрица.

Полезные свойства:

- 1) $d(XY) = dX \cdot Y + X \cdot dY$
- 2) Если A - матрица константа, то $dA = 0$
- 3) $d(X') = dX'$
- 4) $d \det X = \det X \operatorname{tr}(X^{-1}dX)'$

1.2 Семинар

Задача 1.1. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — вектор параметров, а $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных. Необходимо найти производную их скалярного произведения по вектору переменных $\nabla_x a^T x$.

Задача 1.2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_A \det A$.

Задача 1.3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_A \operatorname{tr}(AB)$.

Задача 1.4. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $y \in \mathbb{R}^m$. Необходимо найти $\nabla_A x^T A y$.

1.3 Домашняя работа

Задача 1.5. Пусть t — скалярная переменная, r , s — векторные переменные, R , S — матричные переменные. Кроме того, a , b — векторы констант, A , B — матрицы констант. Применив базовые правила дифференцирования найдите:

1. $d(ARB)$
2. $d(r'r)$

3. $d(r'Ar)$
4. $d(R^{-1})$, воспользовавшись тем, что $R^{-1}\dot{R} = I$
5. $d(\cos(r'r))$
6. $d(r'Ar/r'r)$

Задача 1.6. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_x x^T Ax$