

Сборник задач по курсу "Машинное обучение"

авторы: Кантонистова Е.О., Титов В.В., Широков А., Поликарпов К.

7 сентября 2020 г.

Содержание

| | | |
|----------|------------------------------------|----------|
| 1 | Матричное дифференцирование | 2 |
| 1.1 | Теория | 2 |
| 1.2 | Семинар | 2 |
| 1.3 | Домашняя работа | 2 |

1 Матричное дифференцирование

1.1 Теория

Иногда при взятии производных по вектору или от вектор-функций удобно оперировать матричными операциями. Это сокращает запись и упрощает вывод формул. Введём следующие определения:

- При отображении вектора в число $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\nabla_x f(x) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]^T$.
- При отображении матрицы в число $f(A) : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\nabla_A f(A) = (\frac{\partial f}{\partial A_{ij}})_{i,j=1}^{n,m}$.

Мы хотим оценить, как функция изменяется по каждому из аргументов по отдельности. Поэтому производной функции по вектору будет вектор, по матрице — матрица.

Полезные свойства:

- 1) $d(XY) = dX \cdot Y + X \cdot dY$
- 2) Если A - матрица константа, то $dA = 0$
- 3) $d(X') = dX'$
- 4) $d \det X = \det X \operatorname{tr}(X^{-1}dX)'$

1.2 Семинар

Задача 1.1. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ – вектор параметров, а $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных. Необходимо найти производную их скалярного произведения по вектору переменных $\nabla_x a^T x$.

Задача 1.2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_A \det A$.

Задача 1.3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_A \operatorname{tr}(AB)$.

Задача 1.4. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Необходимо найти $\nabla_A x^T A y$.

Задача 1.5. Доказать в матричном виде, что $d(AB) = dA \cdot B + A \cdot dB$.

1.3 Домашняя работа

Задача 1.6. Пусть t – скалярная переменная, r, s – векторные переменные, R, S – матричные переменные. Кроме того, a, b – векторы констант, A, B – матрицы констант. Применив базовые правила дифференцирования найдите:

1. $\det(ARB)$
2. $\det(r'r)$
3. $\det(r'Ar)$
4. $\det(R^{-1})$, воспользовавшись тем, что $R^{-1}\dot{R} = I$
5. $\det(\cos(r'r))$
6. $\det(r'Ar/r'r)$

Задача 1.7. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_x x^T A x$.