

DOI:10.16644/j.cnki.cn33-1094/tp.2016.11.005

基于Python求解偏微分方程的有限差分法*

王登岳, 张宏伟

(西安石油大学电子工程学院光电油气测井与检测教育部重点实验室, 陕西 西安 710065)

摘要: 偏微分方程的求解是很多科学技术问题的关键难点。随着计算机性能的不断提高,数值解法能够解复杂的偏微分方程并将计算结果图形化。相对于昂贵的科学计算软件,Python是一种免费的面向对象、动态的程序设计语言。有限差分法以其概念清晰,方法简单、直观等特点在偏微分方程的求解中得到了广泛的应用。文章对矩形区域的拉普拉斯方程进行数值求解,采用Numpy对有限差分法进行计算,运用Matplotlib绘制等值线,输出迭代次数以及误差。

关键词: 偏微分方程; Python; 数值解法; 有限差分法

中图分类号: TP3

文献标志码: A

文章编号: 1006-8228(2016)11-14-03

Python programmed finite difference method for solving partial differential equations

Wang Dengyue, Zhang Hongwei

(Xi'an Shiyou University, Electric Engineering College, Key Laboratory of Photo Electricity Gas and Oil Detecting of Ministry of Education, Xi'an, Shaanxi 710065, China)

Abstract: To solve the partial differential equations (PDE) is a key difficult point in many scientific and technical problems. With the development of computer performance, numeric solution can solve many sophisticated PDE and visualize the numeric results. Rather than the expensive science computing software, Python is a free object-oriented language, dynamic programming language. Finite difference method (FDM) is widely used for its clear, simple and intuitive. Laplace problem in a rectangular area is solved numerically in the article, computed through FDM with the Numpy library, visualized through plotting the contour by the Matplotlib library, and the number of iteration and the error are given.

Key words: partial difference equation; Python; numeric solution; finite difference method

0 引言

在数学中,偏微分方程是包含多变量和它们的偏导数在内的微分方程。偏微分方程通常被用来求解声、热、静态电场、动态电场、流体、弹性力学或者量子力学方面的问题^[1]。这些现象能够被模式化的偏微分方程描述,正如一维动态系统通常会用常微分方程描述。为了更深入地理解上述各种现象,求解偏微分方程成为理解以及解释上述现象的关键。

1 Python及相关模块简介

Python是一种面向对象、动态的程序设计语言。具有非常简洁而清晰的语法,适合完成各种高层任务。它既用来快速开发程序脚本,也可用来开发大规模的软件。随着Numpy,SciPy,Matplotlib等众多程

序库的开发,Python同样适合于做科学计算以及绘制高质量的2D和3D图像。与科学计算领域的商业软件Matlab相比,Python是一门通用的程序设计语言,比Matlab所采用的脚本语言的应用更广泛,有更多的程序库的支持。

Numpy是使用Python进行科学计算的基础包:①它的基本类型是N-维阵列对象;②提供了功能强大的函数;③可以提供C/C++与Fortran代码的接口;④强大的线性代数计算,傅里叶变换以及随机数计算^[2]。SciPy由一系列的数值计算和特定领域的工作箱构成,常用的工具箱包括信号处理,优化算法以及统计等。

Matplotlib能够产生不同格式高质量的图片,该软件可以在不同的平台上使用,例如采用Python脚本,提供python或者Ipython的命令行接口(类似于Matlab

收稿日期:2016-8-23

*基金项目:国家自然科学基金项目(51504194);陕西省科技攻关项目(2016GY-167)

作者简介:王登岳(1989-),男,陕西省渭南市人,硕士在读,主要研究方向:电磁探测技术。

或 Mathematica) 等等^[3]。Matplotlib 能够绘制直方图、功率谱图、残差图以及散点图等等。本次我们采用 Matplotlib 中的简单的绘图对象 Pyplot, Pyplot 提供了一个类 Matlab 的接口, 可以通过 Pyplot 完全控制线型、字体特征和坐标轴特征等。

2 PDE 解法简介

求解偏微分方程可以通过解析方法求解, 解析法包括建立和求解偏微分方程, 严格求解偏微分方程的经典方法是分离变量法。解析法的优点是可以求解出表示为已知函数的显式, 从而得到精确的结果。但解析法存在严重的缺点, 只有在为数不多的坐标系中进行分离变量, 对更复杂的模型很难通过解析计算得到。随着计算机性能的日益提升, 数值计算在近年来取得来巨大的进步, 不仅能够对常规的偏微分进行数值验证, 而且也能够对模型复杂的偏微分方程进行计算。常用的数值方法主要包括有限差分法, 有限元法以及有限体积法。数值方法适合求解模型比较复杂的偏微分方程^[4]。

3 Python 解 PDE 流程

在数值计算方法中, 有限差分法是应用最早的一种方法, 直到今天, 它仍然以简单、直观的特点而应用广泛^[5]。不论是常微分方程还是偏微分方程, 对初值问题或者边值问题、椭圆型、双曲线型或抛物型二阶线性方程, 以及高阶或非线性方程, 通常都可以采用有限差分法将它们转化为代数方程组, 再借助计算机求其数值解。

本文结合一个简单的电场的例子, 给出求解偏微分方程的数值解法的过程。一个长直接地金属槽中的电场, 其侧壁与底面电位均为 0, 顶盖电位的相对值为 100。对于此槽中间区段的电场分析, 可以理想化

为二维平行平面场问题。选定直角坐标系如图 1 所示, 槽内电位函数满足拉普拉斯方程, 构成如下的第一类边值问题:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \in D$$

$$\varphi_{(x=0, 0 \leq y \leq 100)} = \varphi_{(y=0, 0 \leq x \leq 100)} = \varphi_{(x=100, 0 \leq y \leq 100)} = 0$$

$$\varphi_{(0 < x < 100, y=100)} = 100$$

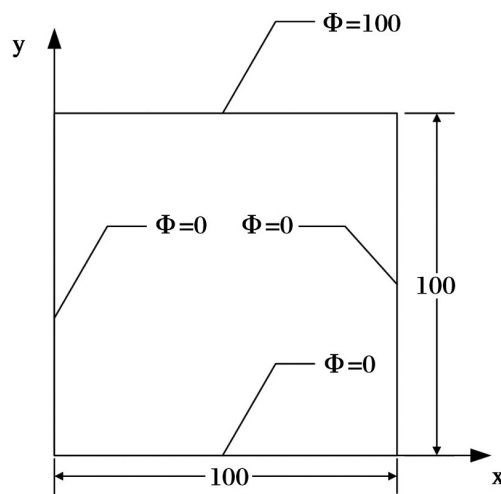


图1 求解区域

按照有限差分法的计算步骤, 上述给出的例子的解题过程如下。

(1) 场域离散化: 用正方形网格对图示区域进行剖分, 步距为 1, 剖分为 100 个点。

(2) 给出高斯-塞德尔迭代法的差分方程:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n)$$

其中程序中采用的不是单点迭代计算, 而是将所有的点分成如图 2 所示的矩阵块, 图中阴影部分矩阵代表 N-2 维矩阵, 进行迭代计算。

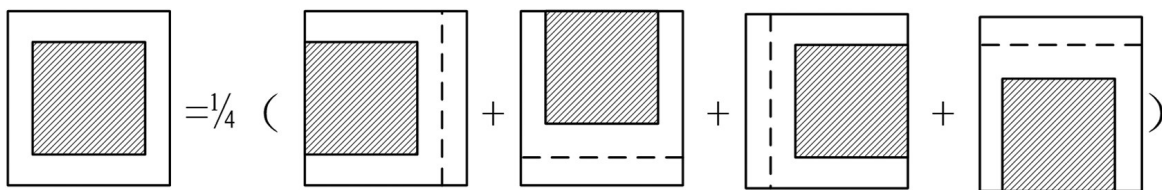


图2 迭代示意图

给定边界条件以及内点的初值, 侧壁与底面电位均为 0, 顶盖电位的相对值为 100。

给定迭代解收敛判定指标: 当每一点相邻两次迭代值得绝对误差小于可以接收的范围时; 迭代次数过

多大于所能接受的范围时。当上述两者任意一个条件满足, 则停止迭代, 输出计算结果, 迭代次数 $n=5991$, 误差 $m=0.001$, 表明经过 5991 次后误差已经达到我们所需的精度。

绘制电场分布的等值线图,所得的结果如图3所示。

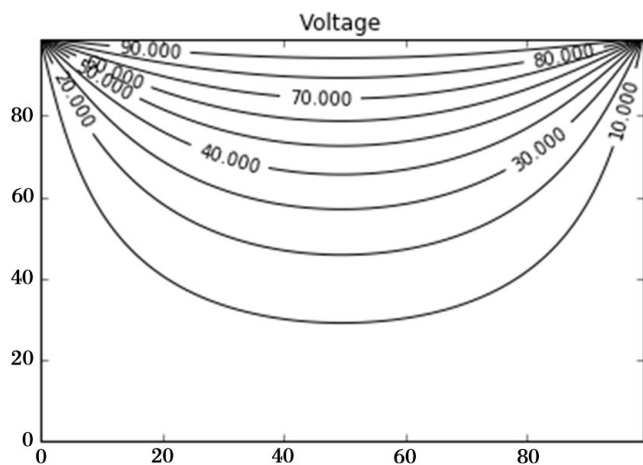


图3 电势结果图

上述计算的整个过程如图4所示。

4 结束语

偏微分方程的求解在科学和工程计算中占据重要地位。虽然Matlab能够进行大部分PDE方程求解,但是价格昂贵,对三维的PDE方程组的支持并不完善,而且因其闭源软件属性,对软件的扩展使用必须经过厂商认证之后,厂商才会添加其接口。Python进行科学计算时只需要根据功能选择好相关的库即可,Numpy模块以及Matplotlib模块中的pyplot子模块便能够解决矩形区域的拉普拉斯方程求解以及将其图形化。现实中的求解问题通常并不是针对规则区域,因此对于不同类型的模型,建模问题还有待进一步研究,并将其他软件中的模型导入作为更深层次研究的重点内容。

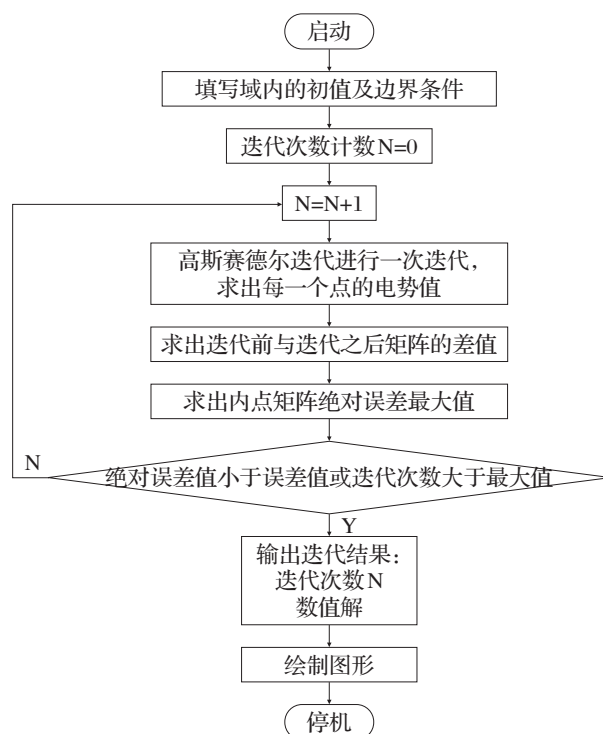



图4 计算流程图

参考文献(References):

- [1] Partial differential equation. [EB/OL]. [2016-08-11]. https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation
- [2] Numpy.[EB/OL] [2016-08-11].<http://www.numpy.org/>
- [3] Matplotlib.[EB/OL] [2016-08-11].<http://matplotlib.org/index.html>
- [4] 王秉中.计算电磁学[M].科学出版社,2002.
- [5] 倪光正,杨仕友,邱捷.工程电磁场数值计算[M].机械工业出版社,2010. 

(上接第13页)

参考文献(References):

- [1] 孙伟,鲁骏,李艳灵.一种面向用户的约束角色挖掘优化[J].信阳师范学院学报:自然科学版,2014.27(4):589-592,618
- [2] ZHANG YUE,JOSHI J B D.Uaq:a framework for user authorization query processing in RBAC extended with hybrid hierarchy and constraints[C]//Proceedings of the 13th ACM Symposium on Access Control Models and Technologies.New York:ACM Press,2008:83-92
- [3] 马晓普,李瑞轩,胡劲伟.访问控制中的角色工程[J].小型微型计算机系统,2013.34(6):1301-1306
- [4] 王婷,陈性元,任志宇.授权管理中的权限衍生计算方法[J].计算机应用,2011,31(5):1291-1294.
- [5] 王婷,陈性元,张斌,等.基于互斥角色约束的静态职责分离策

- 略[J].计算机应用,2011,31(7):1884-1886,1890
- [6] 杨柳,唐卓,李仁发,等.云计算环境中基于用户访问需求的角色查找算法[J].通信学报,2011,32(7):169-175
- [7] Zhang Dana, Ramamohanarao K, Ebringer T.Role engineering using graph optimisation[C]//Proc. of the 12th ACM Symposium on Access Control Models and Technologies.Sophia Antipolis:ACM Press,2007: 139-144
- [8] FU ZHAOHUI,MALIK S.On solving the partial MAX-SAT problem[C]//Proceedings of the 9th International Conference on the Theory and Application of Satisfiability Testing-SAT 2006. Seattle: IEEE Press, 2006:252-265 