

# 从明暗恢复形状(SFS)的几类典型算法分析与评价

廖 熠 赵荣椿

(西北工业大学计算机科学与工程系, 西安 710072)

**摘 要** 从明暗恢复形状(shape from shading, 简称 SFS)是计算机视觉中三维形状恢复问题的关键技术之一, 其任务是利用单幅图象中物体表面的明暗变化来恢复其表面三维形状. 为了使人们对 SFS 研究现状及求解 SFS 问题的各种算法的优缺点有个概略了解, 首先介绍了求解传统 SFS 问题的 4 类方法中几个典型算法的基本原理及求解方法, 并给出了实验结果, 然后从算法解的唯一性、对真解的逼近程度、求解效率及适用范围等方面对这 4 类算法进行了比较和评价.

**关键词** 从明暗恢复形状 朗伯体反射模型 光滑表面模型 最小值方法 演化方法 局部方法 线性化方法  
**中图法分类号**: TP391.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2001)10-0953-09

## Analysis and Evaluation of Several Typical SFS Algorithms

LIAO Yi, ZHAO Rong-chun

(Northwest Polytechnical University, Xi'an 710072)

**Abstract** Shape from shading(SFS) is one of the critical techniques to shape recovery in computer vision, which obtains 3-D shape of the visible surface of an object from only one image of it using the shading knowledge in the given picture. In order to give an outline of over 30 years' research work on SFS problems and try to make sense to beginners of advantages and disadvantages of various methods to solve such problems, this paper adopted the common classification of all SFS methods presented up to now, namely, minimization methods, propagation methods, localization methods, and linearization methods, to each of which some typical algorithms were analyzed both from principles and experiments point of view. Comparisons between and evaluations of these methods together with their corresponding algorithms were also given in several aspects, such as the uniqueness of the recovered surface, the approximation ability to the true surface, the effectiveness and applicability of the algorithm, etc. Through the discussion, we agreed that there is no method applicable to all kinds of SFS problems, and each method has its own range of applicability. In the end, the paper concluded in the unresolved problems to SFS as well as some indications to future work.

**Keywords** Shape from shading, Lambertian reflectance model, Smooth surface model, Minimization method, Propagation method localization method, Linearization method

### 三维重构奠定基础.

对实际图象而言, 其表面点图象亮度受到了许多因素, 如光源、物体表面材料性质和形状, 以及摄像机(或观察者)位置和参数等的影响, 为简化问题, 传统 SFS 方法均进行了如下假设: (1)光源为无限远处点光源; (2)反射模型为朗伯体表面反射模型(Lambertian Surface Model); (3)成象几何关系为正交投影<sup>[1]</sup>, 这样物体表面点图象亮度  $E$  仅由该点

## 0 引 言

从明暗恢复形状(shape from shading, 简称 SFS)是计算机视觉中三维形状恢复(3D shape recovery)问题关键技术之一, 其任务是利用单幅图象中物体表面的明暗变化来恢复其表面各点的相对高度或表面法方向等参数值, 为进一步对物体进行

光源入射角  $\theta_i$  的余弦决定,即  $E = \cos\theta_i$ . 若以摄像机坐标系为参照系,并将物体表面高度表示为  $z = z(x, y)$ ,则物体表面法方向可由其表面各点法向量  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 、表面梯度  $(p, q)$  或表面倾角 (slant)  $\gamma$  和偏角 (tilt)  $\tau$  表示,它们之间的关系如下

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (1)$$

$$p = -\frac{n_1}{n_3}, q = -\frac{n_2}{n_3} \quad (2)$$

$$n_1 = l \sin \gamma \cos \tau, n_2 = l \sin \gamma \sin \tau, n_3 = l \cos \gamma \quad (3)$$

其中,  $l$  为表面点法向量的模. 这样朗伯体表面反射模型就可以表示为

$$E(x, y) = \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}\|} = \frac{n_{01}n_1 + n_{02}n_2 + n_{03}n_3}{\sqrt{n_{01}^2 + n_{02}^2 + n_{03}^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (4)$$

或

$$E(x, y) = R(p(x, y), q(x, y)) = \frac{p_0 p + q_0 q + 1}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{n}_0 = (n_{01}, n_{02}, n_{03})$  或  $(-p_0, -q_0, 1)$  表示光源方向 (显然由式(2)有  $p_0 = -\frac{n_{01}}{n_{03}}, q_0 = -\frac{n_{02}}{n_{03}}$ );  $E(x, y)$  为归一化的图象亮度,  $R(p, q)$  为反射函数. 一般情况下, 仅由该模型所确定的 SFS 问题是病态的 (没有唯一解)<sup>[2,3]</sup>, 因此为消除其病态性, 并建立相应的正则化模型, 必须对其表面形状进行约束, 现有的 SFS 算法基本上都假设所研究的对象均为光滑表面物体<sup>[2~5]</sup>, 即认为物体表面高度函数  $C^2$  (或至少是  $C^1$ ) 是连续的, 实际上, 通过建立物体的光滑表面模型这种假设, 已对其表面形状进行了约束, 这样, 将上述物体表面反射模型与物体的光滑表面模型相结合, 再利用一些已知条件 (如关于物体表面形状的初边值条件), 就构成了 SFS 问题的正则化模型. 根据建立正则化模型方式的不同, 现有的 SFS 算法大致可分为最小值方法、演化方法、局部方法和线性化方法<sup>[1]</sup>4 类. 本文将对这 4 类方法的典型算法进行介绍, 并就各算法解的唯一性、收敛性、稳定性, 以及对真解的逼近程度和适用范围等方面进行比较.

## 1 典型算法简介

### 1.1 最小值方法

SFS 问题最小值方法就是将由物体表面反射模型所确定的亮度方程 (式 5) 和光滑表面模型均表示

为能量函数的形式, 然后再将它们联合表示为一个泛函极值问题或最优化控制问题, 并使得相应问题取最小值的解, 即为原 SFS 问题的解. 下面本文以 Horn、Zheng 和 Chellappa、Lee 和 Kuoad 的算法<sup>[3,6,7]</sup>为例, 来介绍这类方法的基本思想及求解方法.

#### (1) Horn 的方法<sup>[3]</sup>

Horn 在连续域讨论 SFS 问题时, 首先将其归结为一个泛函极值问题, 然后通过求该泛函的变分, 其所得到的问题极小解即为原 SFS 问题的解. 考虑已知图象数据与由反射模型所确定的物体表面图象亮度之间可能存在误差, 该方法先将亮度方程 (式(5)) 转化为误差函数的形式, 即

$$J_1 = \iint_{\Omega} (E(x, y) - R(p(x, y), q(x, y)))^2 dx dy \quad (6)$$

其中,  $\Omega$  为  $(x, y)$  的取值范围, 然后将光滑表面模型表示为

$$J_2 = \iint_{\Omega} (p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2) dx dy \quad (7)$$

其中,  $p_x, p_y$  和  $q_x, q_y$  分别为函数  $p$  和  $q$  关于  $x, y$  的偏导数, Horn 称之为光滑性约束条件 (smoothness constraint). 该约束条件指出光滑物体表面相邻各点的表面法方向是相似的, 即物体表面高度函数  $z(x, y)$  具有  $C^2$  连续性 ( $z(x, y)$  关于  $x$  和  $y$  的二阶偏导数存在, 且连续). Horn 进一步利用  $p, q$  与  $z$  之间的关系, 又加上了一个可积性约束条件 (integrability constraint)

$$J_3 = \iint_{\Omega} [(z_x - p)^2 + (z_y - q)^2] dx dy \quad (8)$$

其中,  $z_x, z_y$  是函数  $z$  关于  $x, y$  的偏导数, 从而得到如下新的泛函极值问题

$$J = J_1 + \lambda J_2 + \mu J_3 = \iint_{\Omega} [(E(x, y) - R(p(x, y), q(x, y)))^2 + \lambda(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 + \mu((z_x - p)^2 + (z_y - q)^2))] dx dy \quad (9)$$

其中,  $\lambda$  和  $\mu$  为拉格朗日常数,  $J, J_1, J_2, J_3$  均为泛函.

Horn 首先通过对上述泛函求变分, 得到其极值存在的必要条件为如下偏微分方程组成立

$$\begin{cases} \lambda \nabla^2 p = -(E - R)R_p - \mu(z_x - p) \\ \lambda \nabla^2 q = -(E - R)R_q - \mu(z_y - q) \\ \nabla^2 z = p_x + q_y \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $\nabla^2$  表示拉普拉斯算子,  $R_p, R_q$  是函数  $R$  关于  $p$  和  $q$  的偏导数; 然后应用交错网格方法<sup>[3]</sup>将  $p, q, z, p_x, q_y, z_x, z_y$  及  $\nabla^2$  算子离散化, 即得到式(10)的离散

形式方程组,再利用 Gauss-Seidel 迭代方法,同时求解得到物体表面梯度  $p, q$  和表面高度  $z$  的网格点值.

(2) Zheng 和 Chellappa 的方法<sup>[6]</sup>

Zheng 和 Chellappa 用图象梯度约束条件取代了 Horn 的光滑性约束条件,即,使得表面恢复结果图象与原图象数据更接近,其泛函数值表示形式为

$$\iint ((E - R)^2 + ((R_x - E_x)^2 + (R_y - E_y)^2) + \mu((z_x - p)^2 + (z_y - q)^2))dxdy$$

在求解该泛函极值问题时,Zheng 和 Chellappa 对其相应的欧拉方程作了一些变化,即首先对反射函数  $R$  作 Talor 级数展开,并保留其线性项,然后将高度函数和表面梯度及其各阶导数离散化,就得到了一个线性收敛的迭代格式,并应用多网格方法快速实现了该算法.

(3) Lee 和 Kuo 的方法<sup>[7]</sup>

Lee 和 Kuo 只使用了亮度约束关系和光滑性约束条件,没有用显式表示的可积性约束条件,而是直接将表面高度函数用有限元方法离散化,即应用三角形小面元来逼近表面,其表面高度函数在这些三角形顶点的值即称为格点值,只有这些格点值才直接通过上述约束来恢复得到,而非格点值则要通过插值得到,从而构成了一个离散化的极值问题,即一个最优化控制问题.Lee 和 Kuo 在求解这个最优化控制问题时,也对反射函数作了线性化,同时应用多网格方法实现了这个最优化问题的求解.

1.2 演化方法

所谓演化方法,实际上是一类求解动力系统(dynamic system)问题的方法.Oliensis,Bruckstein,Tourin 和 Osher 等人均指出,从动力学的角度而言,SFS 基本问题(式(5))可以看作是一个 Hamilton 系统问题<sup>[8~15]</sup>,求解该问题就是求解如下 Hamilton-Jacobi 方程

$$E(x,y) - \frac{p_0p+q_0q+1}{\sqrt{p_0^2+q_0^2+1}\sqrt{p^2+q^2+1}}=0 \tag{11}$$

其 Hamilton 函数  $H$  为

$$H=E(x,y) - \frac{p_0p+q_0q+1}{\sqrt{p_0^2+q_0^2+1}\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

由于  $p=z_x, q=z_y$ ,因此式(11)是一个一阶非线性偏微分方程,当给定初值或边界条件时,该偏微分方程就构成了一个 Cauchy 问题(初值问题)或 Dirichlet 问题(边界问题),这类问题大致有如下 3 种求解方法,即特征线(characteristic strips)方法<sup>[9,10]</sup>、vis-

cosity solution 及相关方法<sup>[14,16,17]</sup>以及 level sets 方法<sup>[11,15]</sup>. 这些算法的一个关键步骤是找到图象中可唯一确定形状的某一点或某些点,并从这些点出发,进而求得整个表面的解.由于演化过程是关于时间可微的<sup>[9,10]</sup>,故应用演化方法来求解 SFS 问题,实际上也隐含地利用了光滑物体表面模型.下面仅介绍其中一个较为简单的算法,即 Bichsel 和 Pentland 的最小下山法(minimum downhill approach)<sup>[17]</sup>.

Bichsel 和 Pentland 基于 Dupuis 和 Oliensis 的方法<sup>[8]</sup>,提出了用一种称为最小下山法的算法来求解 SFS 演化问题<sup>[17]</sup>,该方法指出,演化过程就是从图象奇点(图象灰度最大值点,在一定条件下,该点所对应的表面形状可唯一确定<sup>[6]</sup>)出发,然后搜索当前点的邻点,并找出其中远离光源方向的所有点,同时从这些远离光源的点中,选择离光源方向最近的点,再沿着这样构成的演化路径来计算图象中每一点的高度值,从而得到整个表面的高度.计算过程中,首先将图象旋转一个角度,使得图象的  $x$  轴与光源方向在图象平面上的投影方向一致,当计算完高度后,再将图象逆方向旋转至原来的位置,即得到原位置上与图象点所对应的表面点的高度.该算法原理和步骤可简述为:设表面某点沿偏角为  $\varphi$  方向的切向量为  $(dx=\cos\varphi ds, dy=\sin\varphi ds, dz)$ ,其中  $(dx, dy, dz)$  为表面某点  $(x, y, z)$  沿角度  $\varphi$  切线方向的无穷小增量,  $s$  为路径参数.若与该点对应的表面法向量为  $\boldsymbol{n}(n_1, n_2, n_3)$ ,则它们之间应满足如下关系

$$dx \cdot n_1 + dy \cdot n_2 + dz \cdot n_3 = 0$$

令表面斜率为  $\sigma(\varphi, \boldsymbol{n}) = \frac{dz}{ds}(\varphi, \boldsymbol{n})$ .

则有  $\sigma(\varphi, \boldsymbol{n}) = \frac{\cos(\varphi)n_1 + \sin(\varphi)n_2}{n_3}$ ,对每一个方向  $\varphi$  的邻点,在由该邻域点亮度决定的等亮度线(即式(5)的最左端为常数)上寻找最速上升斜率  $\sigma(\varphi)$ ,并利用表面梯度  $(p, q)$  和  $\boldsymbol{n}$  的关系  $p = -\frac{n_1}{n_3}, q = -\frac{n_2}{n_3}$  来得到  $\frac{d}{d\alpha}(\cos(\varphi)p(\alpha) + \sin(\varphi)q(\alpha)) = 0$ ,其中,  $\alpha$  为等亮度线参数,这样对每一个方向  $\varphi$ ,将会得到两组具有相反关系的表面梯度值  $(p_1, q_1)$  和  $(p_2, q_2)$ ,而且此时应首先选择使  $(\cos\varphi, \sin\varphi, \sigma(\varphi)) \cdot \boldsymbol{l} \geq 0$  ( $\boldsymbol{l}$  为光源方向)的表面梯度值(不妨设为  $(p_2, q_2)$ ),即通过选择远离光源方向的表面梯度值(此即为下山原则(downhill principle))来求得  $\sigma(\varphi)$ ,然后由各方向上的邻域点高度值所求得的当前点高度值为

$$z^{(t+1)}(x,y)=\max(\sup_{\varphi}(\hat{z}^{(t+1)}(x,y,\varphi)),z^{(t)}(x,y))$$

其中,  $t$  为迭代次数,且

$$\hat{z}^{(t+1)}(x,y,\varphi)=z^{(t)}(x+d\sigma\cos\varphi,y+d\sigma\sin\varphi)-d\sigma(\varphi)$$

此即为最小下山原则(minimum downhill principle).

1.3 局部分分析方法

上述两类 SFS 问题的求解方法需要通过迭代或演化过程来将边界条件或初值条件扩展到整个物体表面,其求解过程是全局的,且不能独立得到物体表面的局部形状表示,而 SFS 问题局部分分析方法则是将反射模型与假设的物体表面局部形状相结合来构成关于物体局部形状参数的线性偏微方程组,再利用已知边界条件来求得该方程组的唯一解,这样即可直接确定物体的局部三维表面形状.常用的局部形状假设为球形表面<sup>[18]</sup>,显然这种假设所确定的物体表面是光滑的.下面以 Rosenfeld 的方法<sup>[19]</sup>为例来介绍这类 SFS 问题的局部分分析方法.

Lee 和 Rosenfeld 的局部分分析方法<sup>[19]</sup>实际上是 Pentland 局部分分析方法<sup>[16]</sup>的一种改进,该方法也假设物体表面的局部形状是一个球形表面,其关键也是要首先找到图象的奇点,并通过对图象进行旋转,来使得图象的  $x$  轴与光源方向在图象平面上的投影方向一致,同时计算在该坐标系下表面点的倾角( $\gamma$ )和偏角( $\tau$ ),然后再将所得结果转换至原图象坐标系即可.Lee 和 Rosenfeld 证明,表面点方向的偏角可由下式计算得到

$$\tau=\arctan \frac{E_y\cos\tau_s-E_x\sin\tau_s}{E_x\cos\tau_s\cos\gamma_s+E_y\sin\tau_s\cos\gamma_s}$$

其中,  $E_x, E_y$  分别为图象灰度沿  $x, y$  方向上的导数,  $\gamma_s, \tau_s$  分别为光源方向的倾角和偏角,而表面点的倾角  $\gamma$  可在旋转至光源坐标系后,通过迭代计算得到(详见文献<sup>[19]</sup>).

1.4 线性化方法

SFS 问题的线性化方法是指通过对反射函数的线性化,以便将原 SFS 非线性问题,转化为一个线性问题并进行求解的方法,该方法的基本思想是认为在反射函数中,低阶项占主要部分,而且将反射函数作 Talor 展开后,其舍去非线性项的结果与原反射函数非常接近.这种线性化方法虽然没有明确提出一种表面模型,但线性化反射函数时,对变量高阶项的舍弃已暗示了物体表面形状变化是缓慢的.下面以 Pentland, Tsai 和 Shah 的方法为例,来介绍这种线性化方法.

(1) Pentland 的方法<sup>[4]</sup>

Pentland 以表面梯度( $p, q$ )为变量来对反射函数进行线性化,即首先将反射函数  $R$  表示为( $p, q$ )的函数,并对  $R$  作 Talor 级数展开,然后只保留关于( $p, q$ )的常数项和一次项,这样就得到了  $R$  的线性化表示,在此基础上,再进一步对亮度方程的两边都进行 Fourier 变换,即得到

$$F_E=F_z(\omega_1,\omega_2)(-i\omega_1)\sin\gamma_s\cos\tau_s+\\ F_z(\omega_1,\omega_2)(-i\omega_2)\sin\gamma_s\sin\tau_s \tag{12}$$

其中,  $F_E$  是图象亮度的 Fourier 变换,  $F_z(\omega_1, \omega_2)$  是高度函数  $z$  的 Fourier 变换, ( $\omega_1, \omega_2$ ) 为与( $p, q$ )对应的 Fourier 变量,  $i$  满足  $i^2=-1$ ,  $\gamma_s$  和  $\tau_s$  分别为光源方向的倾角和偏角,这样,通过对式(12)中  $z$  的 Fourier 变换  $F_z(\omega_1, \omega_2)$  进行重组,再进行逆 Fourier 变换,就可得到最终的物体表面的高度值.

(2) Tsai 和 Shah 的方法<sup>[20]</sup>

Tsai 和 Shah 首先应用有限差分方法将反射函数离散化,即令  $p=\frac{\partial z}{\partial x}=z_{i,j}-z_{i,j-1}, q=\frac{\partial z}{\partial y}=z_{i,j}-z_{i-1,j}, i=0, \cdots, M-1; j=0, \cdots, N-1; M, N$  分别为离散图象的行数和列数.这样即可将亮度方程重写为

$$f(z_{i,j})=E_{i,j}-R(z_{i,j}-z_{i,j-1}, z_{i,j}-z_{i-1,j})=0 \tag{13}$$

然后,对式(13)进行 Talor 展开,即得到

$$0=f(z_{i,j})\approx f(z_{i,j}^{n-1})+(z_{i,j}-z_{i,j}^{n-1})\frac{\partial f}{\partial z_{i,j}}(z_{i,j}^{n-1}) \tag{14}$$

若令高度值的第  $n$  次迭代结果  $z_{i,j}^n=z_{i,j}$ ,则由式(11)有

$$z_{i,j}^n=z_{i,j}^{n-1}+\frac{-f(z_{i,j}^{n-1})}{\frac{\partial f}{\partial z_{i,j}}(z_{i,j}^{n-1})} \tag{15}$$

其中,

$$\frac{\partial f}{\partial z_{i,j}}(z_{i,j}^{n-1})=-1\times\left[\frac{p_0+q_0}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}-\frac{(p+q)\times (pp_0+qq_0+1)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}}\right]$$

这样,只要给定初值  $z_{i,j}^0=0$ ,就可以迭代计算得到最终的表面高度结果.

2 实验结果

实验所用的图象包括 4 幅人工合成图象和一幅实际图象(见图 1),其中,图 1(c)和图 1(d)是图 1(a)中的半球形表面分别在光源方向(1, -1, 2)和(0, 0, 1)照射下所得到的图象,图 1(e)和图 1(f)

是图 1(b)中的表面分别在光源方向 $(1,-1,2)$ 和 $(0,0,1)$ 照射下所得到的图象,图 1(g)是一幅实际的山地图象,用 Rosenfeld 的方法<sup>[17]</sup>估计得到光源方向为 $(0.011\ 07,-0.000\ 06,0.999\ 94)$ 。

应用上述各种 SFS 算法对不同人工图象和实际自然表面图象进行三维恢复的结果分别示于图 2~图 9,其中,图 2~图 8 中(a)(b)(c)(d)分别对应于图 1 中(c)(d)(e)(f)的三维恢复结果。

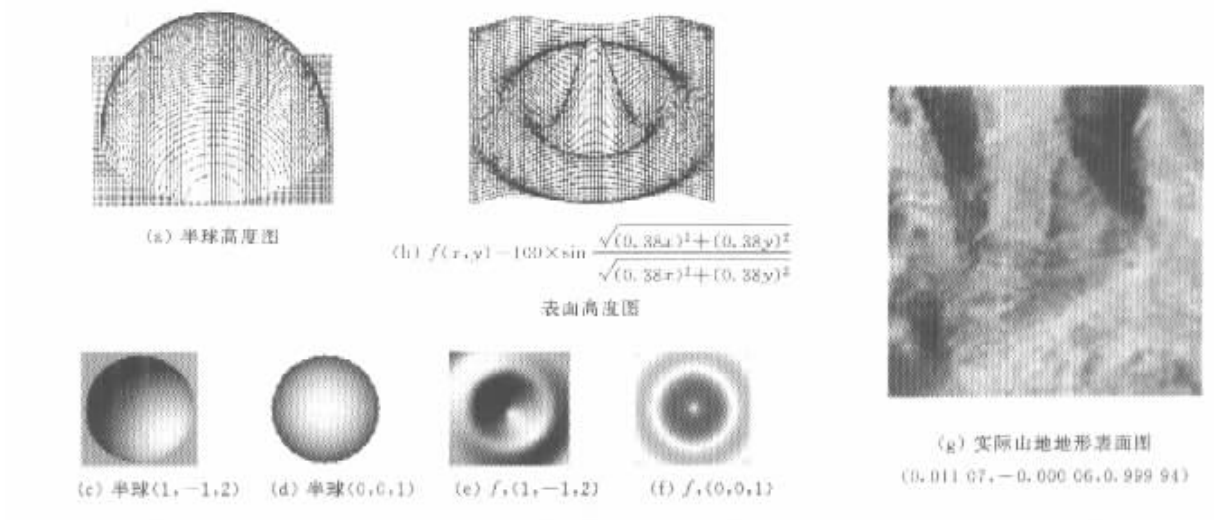


图 1 用 SFS 算法对各种图象的三维恢复结果

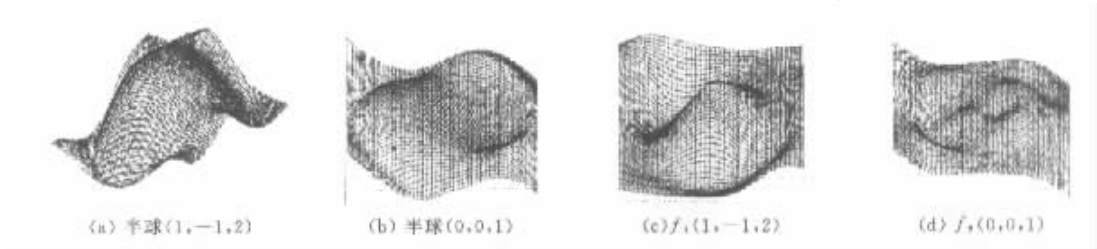


图 2 Horn 的方法

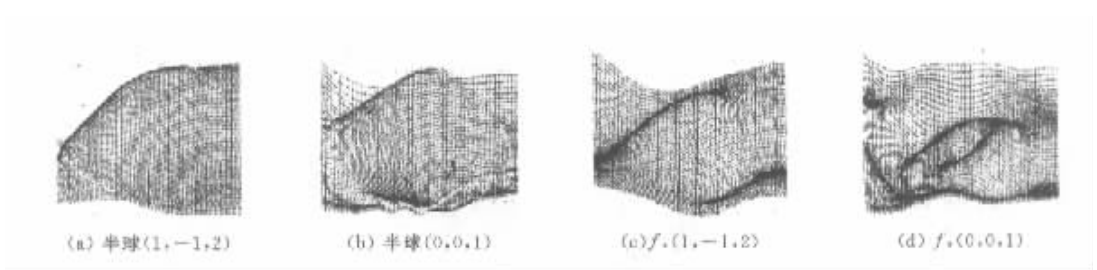


图 3 Bichsel 和 Pentland 的方法

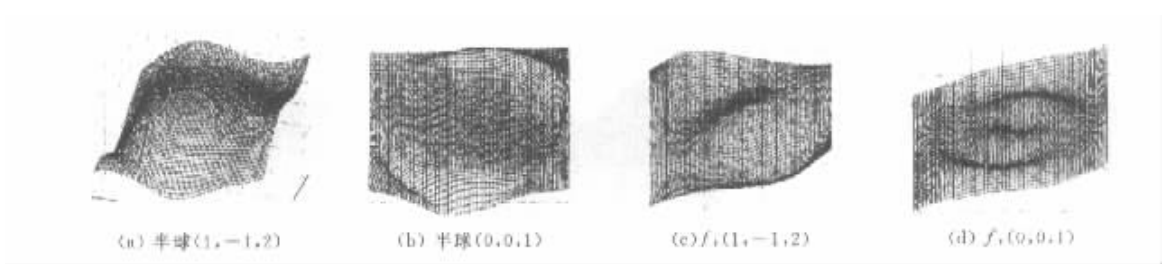
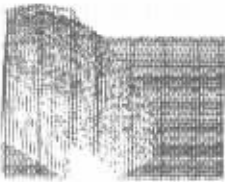
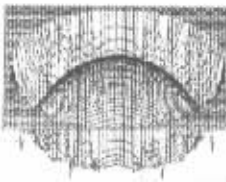


图 4 Lee 和 Rosenfeld 的方法



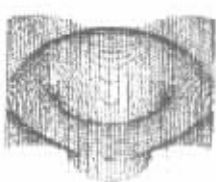
(a) 半球(1, -1, 2)



(b) 半球(0, 0, 1)

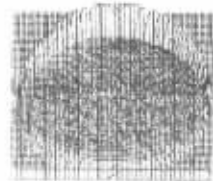


(c)  $f, (1, -1, 2)$

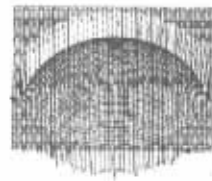


(d)  $f, (0, 0, 1)$

图 5 Bichsel 和 Pentland 的方法



(a) 半球(1, -1, 2)



(b) 半球(0, 0, 1)

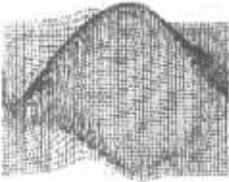


(c)  $f, (1, -1, 2)$

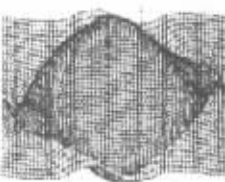


(d)  $f, (0, 0, 1)$

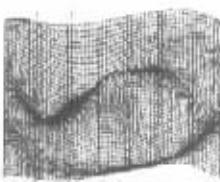
图 5 Lee 和 Rosenfeld 的方法



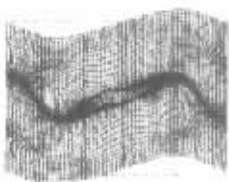
(a) 半球(1, -1, 2)



(b) 半球(0, 0, 1)

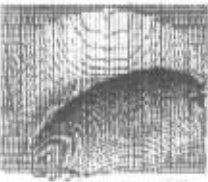


(c)  $f, (1, -1, 2)$

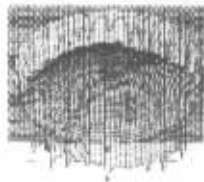


(d)  $f, (0, 0, 1)$

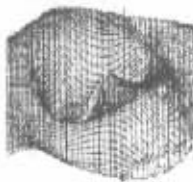
图 7 Pentland 的方法



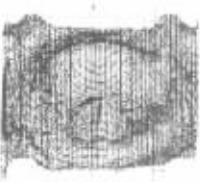
(a) 半球(1, -1, 2)



(b) 半球(0, 0, 1)

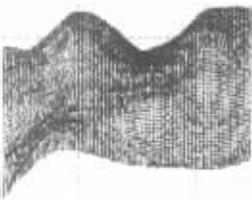


(c)  $f, (1, -1, 2)$



(d)  $f, (0, 0, 1)$

图 8 Tsai 和 Shah 的方法



(a) Horn



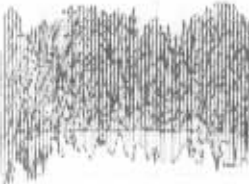
(b) Zheng & Chellappa



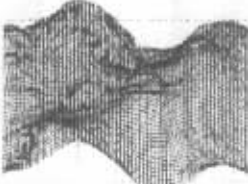
(c) Lee & Kuo



(d) Bichsel 和 Pentland



(e) Lee & Rosenfeld



(f) Pentland



(g) Tsai & Shah

图 9

### 3 各类算法性能比较与评价

前面给出了 SFS 的 4 类典型算法的基本原理、求解方法和实验结果,本节将结合实验结果进一步从这 4 类算法的正则性(解的存在性、唯一性、收敛性)来对真解的逼近程度、算法的求解效率以及适用范围等方面做一个较为全面的比较和评价。

#### (1) 解的正则性

对 SFS 问题正则性进行专题讨论较多的是 Oliensis<sup>[5,9]</sup>,Kozera<sup>[21]</sup>,但它们主要是针对 SFS 演化问题模型(即 Hamilton-Jacobi 方程)进行讨论的,这里本文将给出上述 4 类 SFS 算法正则性的简单讨论和比较。

因为 SFS 最小值方法所决定的正则化模型(包括光滑性约束条件和可积性约束条件)是一个非线性二次泛函(对离散情况则是非线性最优化问题),且当初始条件或边界条件未知时,该模型有有限个局部极小值和一个全局极小值,所以该全局极小值所对应的极小解就是 SFS 问题的解,但利用遮挡边界(物体表面方向与光源方向垂直的点所构成的曲线)条件而得到的解,则具有凹凸二义性。从图 2(b)和(d)可以看到,图象三维恢复表面均发生了拓扑形变,即表面的凸性变成了凹性,这是因为当初始条件或边界条件未知时,该方法的结果本身就具有凹凸二义性,而且图象的奇点至少应具有对应于极大值点、极小值点或鞍点 3 类表面的拓扑关系。虽然当光源方向为表面正上方时,图象的奇点本应对应于表面的极大值点,但由于该方法对图象的奇点及其表面的拓扑关系没有进行有效的约束,从而导致在图象的奇点发生了拓扑关系的变化,即表面极大值点变成了鞍点。这里应当说明的是,对图 1(d)即便此时已知边界条件,由于该半球的边界为遮挡边界,且其邻近表面点可以是凸的,也可以是凹的,因此实际上也无法对算法提供有效的约束。

由于 SFS 演化方法已暗含了各待求量关于时间的可秘性,因此求解的关键在于确定演化初始点的状态,如果所有初始点的表面方向和凹凸性已知,则相应的 SFS 问题有唯一解。由于图象的奇点可能对应了物体表面上的极大值点(凸点)、极小值点(凹点)或鞍点,而且 Oliensis<sup>[9]</sup>也指出,演化过程中只能消除是否是鞍点的歧义<sup>[9]</sup>,因此最后的结果将会具有凹凸二义性,但 Oliensis 又指出,如果考虑所谓图

象的一般性(general image),则可以进一步消除凹凸二义性,而得到物体表面三维形状的唯一解,但对于有阴影区域的图象,其恢复结果只有部分是正确的。从图 5(a)和(c)可以看出,只有部分表面被恢复出来,这是由于这两幅图中,图象的奇点并未对应于表面的极大值点,且部分表面有阴影效果,而算法过程中的图象旋转操作,将会导致这部分阴影表面无法正确计算而造成的;由于图 5(b)和(d)的图象的奇点正好对应于表面的极大值点,因此效果相对较好,但是也可以看到,由于实际图象的奇点往往易与图象噪声混淆,从而导致恢复结果几乎与期望结果完全不同,因此这种方法不适用于实际图象或含噪声图象的三维恢复问题。

由于 SFS 局部方法是通过对局部物体表面形状的假设,来保证求解局部形状参数的问题具有唯一全局极小解,从而整个物体表面形状也是唯一确定的。从图 6 和图 9(e)可以看到,该方法对人工合成的光滑表面物体图象,其恢复效果较好,特别是当光源方向与观察者坐标系的  $z$  轴重合时,效果尤佳(图 6(b)和(d)),但对于实际地形图象的恢复效果则很差,因为实际自然表面图象往往呈现出一些纹理特征,其表面局部特性基本难以满足该方法的假设,故计算结果与期望结果相差很多。

SFS 的线性化方法则是通过对反射函数的线性化来将式(5)转化为一个一阶线性偏微分方程,当给定适当的边界条件时,该方程有唯一解。从图 7(a)和(b)可以看出,其恢复效果较差,而对实际地形表面图象的三维恢复结果却相对较好,这是由于 Pentland 在利用  $p, q$  对反射函数作线性化时,将关于  $p, q$  的二阶项略去了的缘故,但对球形表面的反射函数而言, $p, q$  的二阶项则很重要,若这样处理,将导致计算结果的近似误差很大。Tsai 和 Shah<sup>[20]</sup>指出对球形物体表面而言,由于利用  $z$  线性化反射函数时的误差,比 Pentland 线性化方法<sup>[4]</sup>的误差小<sup>[20]</sup>,因此该方法与 Pentland 方法相比,对球形表面的恢复结果相对较好(见图 8(a)和(b)),但对实际图象则易受到噪声的影响,因此恢复结果相对较差(见图 9(g))。另外,与 Pentland 方法相比,该方法由于没有正反 Fourier 变换,从而使得计算更简单和快速。

#### (2) 对真解的逼近程度

如果物体表面高度函数确实是  $C^2$  连续的,那么 SFS 最小值问题和演化问题,在有唯一解的情况下,该唯一解在理论上可以无限精确逼近 SFS 问题的

真解,而局部问题和线性化问题则分别由于对物体表面局部形状的人为假设偏差和对反射函数的线性化误差,而导致最后结果只是对真解的一种近似,即系统误差始终存在,无法精确逼近真解(参见图2~图9)。

### (3) 求解算法的效率

Ulich 应用不同的有限差分格式,分别对线性和非线性 SFS 问题的基本模型,即式(5)进行了离散化处理<sup>[22]</sup>,并证明了在一定条件下,这两个问题均是稳定收敛的。这里,将对本文讨论的4类 SFS 正则化模型,就算法的求解效率(算法收敛性、稳定性、速度)作一个粗略的比较。

SFS 最小值问题中泛函极值问题(如本文中介绍的 Horn 方法)的求解方法是首先求得对应的欧拉方程组,然后再将该方程组离散化,并利用 Gauss-Seidel 或 Jacobbi 迭代方法来进行求解,这种算法实际上等效于最优化控制问题中的最快速度梯度下降法,其缺点是对 SFS 这类非线性问题容易陷入局部极小解。而对于相应的最优化控制问题则可以充分利用最优化理论中的各种优化算法,以保证得到问题的全局极小解(如文献[23]的启发式搜索算法),而且还可以应用金字塔算法<sup>[24]</sup>、小波算法<sup>[25]</sup>等多分辨分析方法来加快算法速度。总的来讲,SFS 最小值问题的求解算法一般都是稳定的。

由于 SFS 演化问题本身已保证了其求解算法的收敛性,因此应用该问题的3种求解方法,即特征线方法、viscosity solution 及相关方法和 level sets 方法,都可以得到 SFS 演化问题的期望结果,但至今基本上还没有人提出这3种方法的快速算法,而且由于这些方法都必须确定图象的奇点,因此容易受到图象噪声的影响,导致求解过程不太稳定。

相对来讲,尽管 SFS 局部问题和线性化问题的解与 SFS 问题真解只能在一定程度上近似,但它们均能保证提供稳定收敛的算法来得到这个近似解,而且由于通过求局部问题的解可以直接得到物体表面的局部形状,而不需要多次迭代过程,因此这类算法的速度都较快(如 Lee 和 Rosenfeld 的方法)。由于线性化问题是通过反射函数的线性化操作来使得对解的搜索控制在一个线性空间中,因此其搜索效率比原 SFS 非线性问题提高了许多(如 Tsai 和 Shah 的方法、Pentland 的方法)。

### (4) 适用范围

迄今为止,几乎所有的 SFS 问题都是针对光滑

物体表面的,即由于假设物体表面高度函数是  $C^2$  (或至少是  $C^1$ ) 连续的,因此上述所有方法都适用于这类物体表面,可是对自然物体表面,如由山脉、树干等形成的图象,则其三维恢复效果较差。另外,对光滑物体表面形成的图象,如果图象含有一定的噪声,则应当应用 SFS 最小值问题的方法来恢复物体的三维表面;如果图象清晰,且没有阴影(shadowing)和遮挡(occluding)现象,则演化方法的三维恢复效果相对较好(如图5(b));如果形成图象的物体表面与局部问题分析方法中局部形状的假设较为接近,则应用局部方法也能获得较好的三维恢复结果;同样,如果物体表面所对应的反射函数的高阶分量很小,那么应用线性化方法也可以得到与真实表面非常接近的结果(如图8(b))。

## 4 结束语

本文介绍了传统 SFS 问题4类方法各自的一些典型算法的基本原理、求解方法及实验结果,并就各类算法的正则性、对真解的逼近程度、求解效率及适用范围等方面进行了比较与评价。

笔者认为,这些方法对自然景物图象的三维恢复更有实用性,由于它们都是基于光滑物体表面模型的假设,其对具有分形特性的自然物体表面的三维恢复效果则比较差,因此探索对噪声具有较强鲁棒性的重建方法就成为了今后研究 SFS 问题的主流方向。针对这类问题,许多学者已进行了大量的研究<sup>[1]</sup>,笔者认为,在这些研究基础上,进一步构造适于描述自然景物的表面模型和反射模型,将具有重要的理论和实际意义。另外,由于求解传统 SFS 问题时,现有方法的搜索策略往往容易陷入局部极小值,因此讨论如何寻求全局最优解也是一个非常重要的问题。这些问题已超出了传统 SFS 问题的范围,是后续工作的研究重点。

## 参 考 文 献

- 1 廖熠,赵荣椿. 从明暗恢复形状方法综述[A]. 见:中国体视学会图象分析、中国体视学会仿真与虚拟现实、中国航空学会信号与信息处理专业第一届联合学术会议论文集[C]. 山西五台山. 2000;310~315.
- 2 Horn B K P, Brooks M J. The variational approach to shape from shading[J]. CVGIP, 1986, (33):174~208.
- 3 Horn B K P. Height and gradient from shading[J]. International Journal of Computer Vision, 1990, 5(1):37~75.



4 Pentland A. Shape information from shading;A theory about human perception[A]. In:Proc. Intl. Conf. CV[C]. Tampa,1988: 404~413.

5 Dupuis P, Oliensis J. Shape from shading:Provably convergent algorithms and uniqueness results [A]. In: Computer Vision-ECCV'94[C]. Stockholm,Sweden,1994:259~268.

6 Zheng Q, Chellappa R. Estimation of illuminant direction,albedo,and shape from shading[J]. IEEE Trans. on PAMI. 1991,13 (7):680~702.

7 Lee K M,Kuo C-C J. Shape from shading with a linear triangular element surface model[J]. IEEE Trans. on PAMI. 1993,15(8): 815~822.

8 Oliensis J. Shape from shading as a partially well-constrained problem. [J] CVGIP;IU. , 1991,54(2):163~183.

9 Oliensis J. Uniqueness in shape from shading[J]. International Journal of Computer Vision. 1991,6(2):75~104.

10 Bruckstein A M. On shape from shading [J]. CVGIP. ,1988, (44):139~154.

11 Kimmel R, Bruckstein A M. Tracking level sets by level stes:A method for solving the shape from shading problem[J]. CVIU. , 1995,62(2):47~58.

12 Kimmel R, Bruckstein A M. Global shape from shading [J]. CVIU. ,1995,62(3):360~369.

13 Shimshoni I, Kimmel R, Bruckstein A M. Dialogur:Global shape from shading[J].CVIU. ,1996,64(1):188~189.

14 Rouy E, Tourin A. A viscosity solutions approach to shape-from-shading[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis. ,1992, 29(3):867~884.

15 Osher S. A level set formulation for the solution of the dirichlet problem for hamilton-jacobi equation[J]. SIAM J. Math. Anal. , 1993,24(5):1145~152.

16 Dupuis P, Oliensis J. Direct method for reconstructing shape from shading [A]. In: IEEE Computer Society Conference on CVPR[C]. Urbana Champaign,1992:453~458.

17 Bichsel M, Pentland A P. A simple algorithm for shape from shading[A]. In: IEEE Computer Society Conference on CVPR [C]. Urbana Champaign,1992:459~465.

18 Pentland A P. Local shading analysis[J]. IEEE Trans. on PAMI. , 1984,6(2):170~187.

19 Lee C-H, Rosenfeld A. Impoved methods of estimating shape from shading using the light source coordinate system[J]. Artificial Intelligence, 1985,(26):125~143.

20 Tsai P-S, Shah M. A fast linear shape from shading[A]. In: IEEE Computer Society Conference on CVPR [C]. Urbana Champaign,1992,734~736.

21 Kozera R. Uniqueness in shape from shading revisited[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision. , 1997,7(2):123~138.

22 Ulich G. Provably convergent methods for the linear and nonlinear shape from shading problem [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision,1998,9(1):69~82.

23 Vega O E, Yang H. Shading logic:A heuristic approach to recover shape from shading[J]. IEEE Trans. on PAMI. ,1993,15 (6):592~597.

24 Szeliski R. Fast shape from shading[J]. CVGIP;IU. ,1991,53 (2):129~153.

25 Hsieh J-W, Liao H-Y M, Ko M-T *et al.* Wavelet-based shape from shading[J]. Graphical Models and Image Processing, 1995, 57(4):343;362.

廖 熠 1974 年生,1996 年获西北工业大学计算机专业学士学位,1999 年获西北工业大学计算机应用专业硕士学位,现于西北工业大学攻读博士学位. 目前的主要研究兴趣在三维图象重建及计算机视觉方面.

赵荣椿 1960 年毕业于解放军军事工程学院,1989~1990 年于英国 Surrey 大学进修访问,现任西北工业大学信号处理研究所所长、博士生导师、中国电子学会信号处理分会副主任委员、电子学会高级会员、中国图象图形学学会和中国体视学会副理事长. 研究领域为信号、图象处理、模式识别与计算机视觉. 已发表论文 90 余篇、著作 5 部.