

1. Legyen

$$e: \frac{x+2}{-6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{2},$$

$$f: \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 2 \\ z &= 3 - 2t \end{aligned}$$

a) Illeszkedik-e az  $A = (1, 2, -1)$  pont az  $e$  illetve az  $f$  egyenesre?

b) Milyen az  $e$  és  $f$  egyenesek kölcsönös helyzete?

Ha metszik egymást, akkor határozza meg a metszéspontot, ha nem, akkor a távolságukat!

c) Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az  $e$  egyenesre és illeszkedik

a  $P = (8, 7, 1)$  pontra!

(1+5+3 pont)

2. Legyen  $\underline{a} = (2, 1, -4, 3)$ ,  $\underline{b} = (1, -5, 2, 0)$ ,  $\underline{c} = (3, 7, -10, 6)$ ,

$$\underline{d} = (5, -14, 2, 3), \quad \underline{v} = (1, 2, 0, 6).$$

$$A := \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}.$$

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)

a) Mennyi az  $A$  vektorhalmaz rangja?

b) Adja meg az  $A$  vektorhalmaz egy  $H$  maximális lineárisan független részhalmazát!

Írja fel az  $A$ -beli vektorokat a  $H$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként!

c) Előállítható-e a  $\underline{v}$  vektor az  $A$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként?

A végső táblázat alapján írja fel a  $\underline{v}$  vektor bázisvektorokkal történő előállítását!

Melyek a  $\underline{v}$  vektornak a  $H$ -beli vektorokra vonatkozó koordinátái?

d) További számolás nélkül adja meg a  $C = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, 2\underline{a} + \underline{d}\}$  vektorhalmaz rangját!

(10 pont)

3.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$A \cdot (2B + C^T), \quad B^T \cdot A \cdot D^T, \quad D^T \cdot D, \quad B^T \cdot C \cdot D^T$$

(6 pont)

1. Legyen

$$\begin{aligned} x &= -2 - 6t \\ e: y &= 2 + 4t, & S: 2x - y + z &= 13 \\ z &= 5 + 2t \end{aligned}$$

- a) Adjon meg egy olyan pontot a térben, amely illeszkedik az  $S$  síkra, de nem illeszkedik az  $e$  egyenesre!  
b) Milyen az  $e$  egyenes és az  $S$  sík kölcsönös helyzete?  
Ha metszők, akkor határozza meg a metszéspontot, ha nem, akkor a távolságukat!  
c) Írja fel a  $P_1 = (5, 3, 0)$  és  $P_2 = (2, 3, 7)$  pontokon átmenő egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét!

(1+5+3

pont)

2. Legyen  $\underline{a} = (-1, 2, 0, 3)$ ,  $\underline{b} = (4, 2, 3, -1)$ ,  $\underline{c} = (7, 6, 6, 1)$ ,  
 $\underline{d} = (-3, -4, -3, -2)$ ,  $\underline{v} = (2, 1, 0, -6)$ .  
 $A := \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$ .

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)

- a) Mennyi az  $A$  vektorhalmaz rangja?  
b) Adja meg az  $A$  vektorhalmaz egy  $H$  maximális lineárisan független részhalmazát!  
Írja fel az  $A$ -beli vektorokat a  $H$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként!  
c) Előállítható-e a  $\underline{v}$  vektor az  $A$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként?  
A végső táblázat alapján írja fel a  $\underline{v}$  vektor bázisvektorokkal történő előállítását!  
Melyek a  $\underline{v}$  vektornak a  $H$ -beli vektorokra vonatkozó koordinátái?  
d) Adjon meg egy olyan  $R^4$ -beli vektort, amely lineáris kombinációja a  $H \cup \{\underline{v}\}$ -beli vektoroknak, de nem lineáris kombinációja a  $H$ -beli vektoroknak!

(10 pont)

3.

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Melyek léteznek az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$B \cdot (A^T + 3D), \quad D^T \cdot B \cdot C, \quad D^T \cdot A \cdot C, \quad C \cdot C^T$$

(6 pont)

1. Legyen  $S_1 : 2x - y + 5z = 6$  és  $S_2 : x + y - 2z = 3$ .

- a) Adjon meg egy olyan pontot a térben, amely illeszkedik az  $S_1$  síkra, de nincs rajta az  $S_2$  síkon!  
b) Milyen az  $S_1$  és  $S_2$  síkok kölcsönös helyzete?  
Ha párhuzamosak, akkor számítsa ki a távolságukat, ha metszők, akkor adja meg a metszésvonal paraméteres egyenletrendszerét!

(9 pont)

2. Legyen  $\underline{a} = (3, 2, -1, 0)$   $\underline{b} = (2, 4, 1, 3)$   $\underline{c} = (1, -2, -2, -3)$   
 $\underline{d} = (8, 8, -1, 3)$   $\underline{v} = (2, -1, 0, 12)$

$A := \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$ .

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)

- a) Mennyi az  $A$  vektorhalmaz rangja?  
b) Adja meg az  $A$  vektorhalmaz egy  $H$  maximális lineárisan független részhalmazát!  
Írja fel az  $A$ -beli vektorokat a  $H$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként!  
c) Előállítható-e a  $\underline{v}$  vektor az  $A$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként?  
A végső táblázat alapján írja fel a  $\underline{v}$  vektor bázisvektorokkal történő előállítását!  
Melyek a  $\underline{v}$  vektornak a  $H$ -beli vektorokra vonatkozó koordinátái?  
d) További számolás nélkül adja meg a  $C = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{b} + 2\underline{d}\}$  vektorhalmaz rangját!

(10 pont)

3.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B := [2 \quad -1], \quad C := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Melyik létezik az alábbi mátrixok közül?  
Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$D \cdot (4A - C^T), \quad B^T \cdot B, \quad A^T \cdot C \cdot B^T, \quad A^T \cdot D \cdot B^T$$

(6 pont)

1. Legyen  $S_1 : x - 2y + 5z = 6$  és  $S_2 : -2x + 4y - 10z = 7$ .

- a) Adjon meg egy olyan pontot a térben, amely illeszkedik az  $S_1$  síkra, de nincs rajta  $S_2$  síkon!  
b) Milyen az  $S_1$  és  $S_2$  síkok kölcsönös helyzete?  
Ha párhuzamosak, akkor számítsa ki a távolságukat, ha metszők, akkor adja meg a metszésvonal paramétermentes egyenletrendszerét!

(9 pont)

2. Legyen  $\underline{a} = (-1, 2, -3, 5)$ ,  $\underline{b} = (2, 1, 4, 6)$ ,  $\underline{c} = (3, 4, 5, 17)$ ,  
 $\underline{d} = (4, -3, 10, -4)$ ,  $\underline{v} = (-1, 0, 1, 3)$ .  
 $A := \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$ .

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)

- a) Mennyi az  $A$  vektorhalmaz rangja?  
b) Adja meg az  $A$  vektorhalmaz egy  $H$  maximális lineárisan független részhalmazát!  
Írja fel az  $A$ -beli vektorokat a  $H$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként!  
c) Előállítható-e a  $\underline{v}$  vektor az  $A$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként?  
A végső táblázat alapján írja fel a  $\underline{v}$  vektor bázisvektorokkal történő előállítását!  
Melyek a  $\underline{v}$  vektoroknak a  $H$ -beli vektorokra vonatkozó koordinátái?  
d) Adjon meg egy olyan  $\mathbb{R}^4$ -beli vektort, amely lineáris kombinációja a  $H \cup \{\underline{v}\}$ -beli vektoroknak, de nem lineáris kombinációja a  $H$ -beli vektoroknak!

(10 pont)

3.

$$A := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$C \cdot (B^T + 2D), \quad D^T \cdot B \cdot A, \quad A \cdot A^T, \quad D^T \cdot C \cdot A$$

(6 pont)