



# Lineáris egyenletrendszerek

---

*Összeállította: dr. Leitold Adrien  
egyetemi docens*



# Leontieff-modellek

---

- **Leontieff-modellek:** input-output modellek a gazdaság leírására
  - legyen  $n$  féle, egymással összefüggésben lévő ágazat, amelyek mindegyike egy-egy jószágot termel;
  - a saját jószágának termeléséhez minden ágazatnak szüksége van inputra legalább egy másik ágazat jószágából;
  - minden ágazatnak az általa előállított jószágból ki kell elégítenie a többi ágazat igényeit és egy bizonyos külső igényt is (végső kereslet);



## Leonteff-modellek (folyt.)

### ■ Adatok:

- $a_{ij}$ : a  $j$ -edik jószág egységnyi mennyiségének előállításakor az  $i$ -edik jószágból felhasznált mennyiség;  $(i, j = 1, \dots, n)$

input (vagy termelési) együttthatók

- $b_i$ : az  $i$ -edik jószág iránti külső igény;  $(i = 1, \dots, n)$

végső kereslet

- **Probléma:** Mennyit termeljenek az egyes ágazatok az egyes jószágokból, hogy a többi ágazat igényét és a végső keresletet biztosítani tudják?



## Leontieff-modellek (folyt.)

- Legyen  $x_1, \dots, x_n$  az egyes jószágokból előállított mennyiség.
- Feltesszük, hogy az input követelmények egyenesen arányosak a megtermelt outputokkal, azaz  $x_j$  mennyiségű  $j$ -edik jószág előállításához az  $i$ -edik jószágból felhasznált mennyiség:  $a_{ij} \cdot x_j$ .
- Ha az egyes jószágokból  $x_1, \dots, x_n$  mennyiségeket állítunk elő, akkor ehhez az  $i$ -edik jószágból felhasznált össz mennyiség:  $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n$
- Az  $i$ -edik jószágra vonatkozó kereslet és kínálat egyensúlya szerint:  $x_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n + b_i$



# A Leontieff-rendszerek általános alakja

- A teljes modell:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2$$

.....

$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n$$

- Rendezve az egyenletrendszert:

$$(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n = b_1$$

$$-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \dots - a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (1-a_{nn})x_n = b_n$$



## Leontieff-modellek (folyt.)

---

- Megjegyzés:

A fenti lineáris egyenletrendszer olyan  $(x_1, \dots, x_n)$  megoldása érdekel bennünket, ahol az  $x_i$  értékek nemnegatívak.

# Lineáris egyenletrendszerek általános alakja

## ■ Általános (részletes) alak:

$$a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

$m$  egyenlet

$n$  ismeretlen:  $x_1, \dots, x_n$

## ■ Jelölések:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



## Lin. egyenletrendszerek általános alakja (folyt.)

### ■ Tömörebb alak:

$$\underline{a}_1 \cdot x_1 + \underline{a}_2 \cdot x_2 + \dots + \underline{a}_n \cdot x_n = \underline{b}$$

### ■ Jelölés:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

együtthatómátrix

### ■ Tömör alak:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$





# Homogén és inhomogén egyenletrendszerek

- Homogén egyenletrendszer:

Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszert homogénnek nevezzük, ha  $\underline{b} = \underline{0}$ .

- Inhomogén egyenletrendszer:

Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszert inhomogénnek nevezzük, ha  $\underline{b} \neq \underline{0}$ .

- Megjegyzések:

- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, az  $\underline{x} = \underline{0}$  megoldásvektort **triviális megoldás**nak nevezzük.
- Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  lineáris egyenletrendszert **konzisztens**nek nevezzük, ha megoldható, **inkonzisztens**nek, ha nem oldható meg.



# A megoldhatóság feltétele

- Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele:
  1. Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  lin. egyenletrendszer megoldható  $\Leftrightarrow$  a  $\underline{b}$  vektor előáll az  $A$  együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjával.
  2. Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  lin. egyenletrendszer megoldható  $\Leftrightarrow r(A) = r([A, \underline{b}])$ , ahol  $[A, \underline{b}]$  az egyenletrendszer **kibővített mátrixa**:

$$[A, \underline{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m \times (n+1)}.$$



# Lin. egyenletrendszer megoldása

## ■ Lin. egyenletrendszer megoldása :

Tegyük fel, hogy az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  lin. egyenletrendszer megoldható, azaz  $r(A) = r([A, \underline{b}]) = k$ .

Jelölje  $B_{m \times k}$  az  $A$  együtthatómátrix  $k$  db lin. független oszlopvektorából felépülő mátrixot, továbbá  $R_{m \times (n-k)}$  az  $A$  együtthatómátrix maradék  $n-k$  db oszlopvektorából felépülő mátrixot. A megfelelő indexű ismeretlenek alkossák az  $\underline{x}_B$  és  $\underline{x}_R$  vektorokat. Ekkor:

$$B \cdot \underline{x}_B + R \cdot \underline{x}_R = \underline{b}$$



## Lin. egyenletrendszer megoldása (folyt.)

Mivel a  $B$  oszlopvektora az  $A$  együtthatómátrix oszlopvektorainak egy maximális lin. független részhalmazát képezik, így az  $R$  oszlopvektora és a  $\underline{b}$  vektor előállnak a  $B$  oszlopvektorainak lineáris kombinációjával. Ezért van olyan  $D$  mátrix és  $\underline{d}$  vektor, melyekre:

$$R = B \cdot D \quad \text{és} \quad \underline{b} = B \cdot \underline{d}, \quad \text{ahol:}$$

- a  $D$  mátrix az  $R$  oszlopvektorainak a  $B$  oszlopvektoraira vonatkozó koordinátáit tartalmazza,
- a  $\underline{d}$  vektor a  $\underline{b}$  vektornak a  $B$  oszlopvektoraira vonatkozó koordinátáit tartalmazza.

Így:

$$B \cdot \underline{x}_B + B \cdot D \cdot \underline{x}_R = B \cdot \underline{d}, \quad \text{ebből:} \quad B(\underline{x}_B + D \cdot \underline{x}_R - \underline{d}) = \underline{0}.$$



## Lin. egyenletrendszer „megoldó képlete”

Innen, mivel  $B$  oszlopvektorai lin. függetlenek:

$$\underline{x}_B + D \cdot \underline{x}_R - \underline{d} = \underline{0}, \text{ azaz:}$$

$$\boxed{\underline{x}_B = \underline{d} - D \cdot \underline{x}_R} \quad \text{„megoldó képlet”}$$

- $\underline{x}_B$ : a kötött ismeretlenek vektora
- $\underline{x}_R$ : a szabad ismeretlenek vektora

A szabad ismeretlenek számát az egyenletrendszer **szabadsági fokának** hívjuk.



## Megoldásvektorok száma

- Homogén lin. egyenletrendszer megoldásvektorainak számára vonatkozó állítások:
  1. Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lin. egyenletrendszernek csak triviális megoldása van  $\Leftrightarrow r(A) = n$ , ahol  $n$  az ismeretlenek száma.
  2. Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lin. egyenletrendszernek van triviálistól különböző megoldása is  $\Leftrightarrow r(A) < n$ , ahol  $n$  az ismeretlenek száma.

Megjegyzés: ebben az esetben az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van.



## Homogén-inhomogén egyenletrendszer-pár

- Homogén-inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazai közötti kapcsolat:

Tekintsük az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  és  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  homogén-inhomogén egyenletrendszer-párt. Jelölje

- $M_0$  a homogén egyenletrendszer megoldáshalmazát,
- $M$  az inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazát,
- $\underline{x}_0$  az inhomogén egyenletrendszer egy rögzített megoldásvektorát.

Ekkor:  $M = M_0 + \{\underline{x}_0\}$  .

# Lineáris egyenletrendszerek: összefoglalás

Megoldásvektorok száma	Homogén lin. e.r. $A_{m \times n} \cdot \underline{x} = \underline{o}$	Inhomogén lin. e.r. $A_{m \times n} \cdot \underline{x} = \underline{b}$
Nincs megoldás (Az e. r. nem oldható meg.)	-----	$r(A) < r([A, \underline{b}])$ $M = \emptyset$
1 db. megoldásvektor (Az e.r. egyértelműen megoldható.)	$r(A) = n$ $M_0 = \{\underline{o}\}$	$r(A) = r([A, \underline{b}]) = n$ $M = \{\underline{x}_0\}$
Végtelen sok megoldásvektor	$r(A) < n$ $M_0$	$r(A) = r([A, \underline{b}]) < n$ $M = M_0 + \{\underline{x}_0\}$





## A Cramer-szabály

Tekintsük az  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  lin. egyenletrendszert, ahol az  $A$  együtthatómátrix négyzetes:  $A = [\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_n]_{n \times n}$ .

Legyen

- $D = \det(A),$
- $D_1 = \det([\underline{b} \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_n]),$
- $D_2 = \det([\underline{a}_1 \ \underline{b} \ \dots \ \underline{a}_n]),$
- ...
- $D_n = \det([\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{b}]).$

Ekkor:

$$D \cdot x_k = D_k, \quad k = 1, \dots, n.$$



# A Cramer-szabály következményei

## ■ Következmények:

1. Ha  $D \neq 0$ , akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható és a megoldásvektor  $k$ -adik komponense:  $x_k = D_k / D$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
2. Ha  $D = 0$  és valamely  $k$ -ra  $D_k \neq 0$ , akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.
3. Ha  $D = D_1 = \dots = D_n = 0$  és  $r(A) = r([A, \underline{b}])$ , akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van.

(Ebben az esetben a megoldásvektorok előállítására a Cramer-szabály nem alkalmas.)



## A Cramer-szabály következményei (folyt.)

4. Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lin. egyenletrendszernek csak triviális megoldása van  $\Leftrightarrow D \neq 0$ .
5. Az  $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$  homogén lin. egyenletrendszernek létezik triviálistól különböző megoldása is  $\Leftrightarrow D = 0$ .  
(Ebben az esetben az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van, de ezeket a Cramer-szabállyal nem tudjuk előállítani.)