Lineáris algebra | **Név:..**
MIMAB112A | **Szak:………………………………**
2009. január 13. | **Neptun kód:……………………….**

Elméleti kérdések

1. Mit értünk azon, hogy az $\underline{a}_1$,…, $\underline{a}_k$ n-vektorok lineárisan függetlenek? Mit értünk bázison? Milyen állításokat ismer bázisokkal kapcsolatban? (5 pont)

2. Mit értünk egy négyzetes mátrix adott elemhez tartozó részmátrixán? Hogyan értelmezzük négyzetes mátrix determinánsát? Ismertesse a determináns tulajdonságait! (7 pont)

3. Mit jelent az, hogy egy négyzetes mátrix invertálható? Mi az invertálhatóság szükséges és elégséges feltétele? (Két feltételt fogalmazzon meg!) Milyen módszereket ismer az inverz mátrix meghatározására? (7 pont)

4. Írja fel a lineáris egyenletrendszerek általános, részletes alakját! Mi a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele? Mikor van az $A\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora, és mikor van 1darab megoldásvektora? (5pont)

5. Ismertesse a Cramer szabályt és következményeit! (6 pont)

Feladatok

1. Tekintsük az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}$$

a, Adja meg az x_1-t a Cramer szabály alkalmazásával!
b, Alkalmazható-e az inverz mátrix módszer a fenti egyenletrendszer megoldására? (Indoklás!)
c, Mit mondhatunk a fenti egyenletrendszer homogén párjának megoldáshalmazáról? (5 pont)

2. Tekintsük az alábbi lineáris leképezést:

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3 ,\ x_1 + 2x_2 + 4x_3),$$

a, Írja fel az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés mátrixát!

b, Határozza meg az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés magterét!

c, Injektív-e az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés? (Indoklás!)

c, Mennyi az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés rangja?

d, Adja meg azon lineáris leképezések típusát és hozzárendelési szabályát, amelynek mátrixa

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad !$$

(7 pont)

Teszt kérdések

1. Melyik állítás <u>nem</u> igaz? (egyszeres választás)

   Legyen A lineárisan összefüggő, B pedig lineárisan független vektorhalmaz az R^n vektortérben. Ekkor:

   A – $A \cup B$ lineárisan független.

   B – $A \cup B$ lineárisan összefüggő.

   C – $B \setminus A$ lineárisan független.

   D – $A \cap B$ lineárisan független.

2. Melyik állítás igaz? (többszörös választás)

   A – Ha az A és B mátrixok összeszorozhatóak, akkor a B és az A is összeszorozhatóak.

   B – Ha az A és B mátrixok összeadhatóak, akkor az A és B^T mátrixok összeszorozhatóak.

   C – Ha az A mátrix rangja 0, akkor minden eleme 0.

   D – Vannak olyan A és B nem nulla mátrixok, hogy $A \cdot B = 0$.

3. . Melyik állítás <u>nem</u> igaz? (többszörös választás)

   A – $\det(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$

   B – A determináns értéke nem változik, ha a mátrixban felcserélünk két oszlopot.

   C – Ha A invertálható, akkor $\det(A) + \det(A^{-1}) = 1$.

   D – A determináns értéke nem változik, ha valamelyik oszlophoz hozzáadjuk egy másik oszlop skalárszorosát.

4. Melyik állítás <u>nem</u> igaz? (egyszeres választás)

   Legyen A egy négyzetes mátrix, és tegyük fel, hogy az $A\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása. Ekkor:

   A – $\underline{b} \neq \underline{o}$

   B – $det(A)=0$

   C – Az $A\underline{x}=\underline{o}$ lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van.

   D – Az A mátrix invertálható.

(4x2 pont)