Lineáris leképezések

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Lineáris leképezés fogalma

- Lineáris leképezés:

  Az $A : R^m \rightarrow R^n$ típusú fv.-t lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{x}, \underline{y} \in R^m$, $\lambda \in R$ esetén:

  $A(\underline{x}+\underline{y}) = A(\underline{x}) + A(\underline{y})$ additív

  $A(\lambda \underline{x}) = \lambda \cdot A(\underline{x})$ homogén

- Megjegyzések:
  - Ha speciálisan $m = n$, akkor lineáris transzformációról beszélünk.
  - Ha az A leképezés $R^m \rightarrow R^n$ típusú, akkor
    $dom\ (A) = R^m, \quad im\ (A) \subseteq R^n.$

Lineáris leképezések tulajdonságai

- Bármely lineáris leképezés nullvektorhoz nullvektort rendel .
- Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in R^m$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in R$, akkor

$$A(\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k) = \lambda_1 \cdot A(\underline{v}_1) + \ldots + \lambda_k \cdot A(\underline{v}_k)$$

- Legyen $A : R^m \to R^n$ lin. leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ bázis R^m-ben. Ekkor bármely $\underline{x} \in R^m$ esetén az $A(\underline{x})$ képvektorra:

ha $\underline{x} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{b}_m$, akkor

$$A(\underline{x}) = \lambda_1 A(\underline{b}_1) + \ldots + \lambda_m A(\underline{b}_m) \ ,$$

azaz a képvektort egyértelműen meghatározzák a bázisvektorok képei.

Magtér, képtér

- Lineáris leképezés magtere:

  Legyen $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés. Az A leképezés magtere olyan R^m-beli vektorokból áll, amelyekhez A az R^n nullvektorát rendeli.

  $$ker(A) = \{\underline{x} \in R^m \mid A(\underline{x}) = \underline{o}\}$$

  Megjegyzés: Minden lineáris leképezés magtere tartalmazza a nullvektort.

- Lineáris leképezés képtere: a képvektorok halmaza.

  $$im(A) = \{\underline{y} \in R^n \mid létezik\, \underline{x} \in R^m : A(\underline{x}) = \underline{y}\}$$

  Megjegyzés: Minden lineáris leképezésnél a magtér altér R^m-ben, a képtér altér R^n-ben.

Lineáris leképezés mátrixa

- Lineáris leképezés mátrixa:

  Legyen $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés, $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_m$ a kanonikus bázis R^m-ben. Az A lin. leképezés mátrixán azt az $n \times m$-es mátrixot értjük, amelynek oszlopvektorai az $A(\underline{e}_1),\ldots, A(\underline{e}_m)$ képvektorok.

  Jel.: $M(A),\ A$

- Megjegyzés:

  Az $\underline{x} \in R^m$ vektor képe az $M(A) \cdot \underline{x}$ mátrixszorzással is megkapható, ahol $\underline{x}$-et oszlopvektorként írjuk fel.

Műveletek lineáris leképezésekkel

- Lineáris leképezések összege:

  Legyenek $A : R^m \to R^n, B : R^m \to R^n$ lineáris leképezések.

  Az A és B összege:

  $(A+B)(\underline{x}) = A(\underline{x}) + B(\underline{x})$, minden R^m-beli $\underline{x}$-re.

- Igazolhatóak az alábbiak:
  - Az $A+B$ leképezés is lineáris.
  - $M(A+B) = M(A) + M(B)$

Műveletek lineáris leképezésekkel (folyt.)

- Lineáris leképezés skalárszorosa:

  Legyen $A: R^m \to R^n, \lambda \in R$.

  Ekkor az A leképezés λ-szorosa:

  $(\lambda \cdot A)(\underline{x}) = \lambda \cdot A(\underline{x})$, minden R^m-beli $\underline{x}$-re.

- Igazolhatóak az alábbiak:
  - A $\lambda \cdot A$ leképezés is lineáris.
  - $M(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot M(A)$

Műveletek lineáris leképezésekkel (folyt.)

- Lineáris leképezések összetétele (kompozíciója):

  Legyenek $A : R^m \to R^n$ és $B : R^\ell \to R^m$ lin. leképezések.
  Ekkor az $A \circ B : R^\ell \to R^n$ leképezés is lineáris.

- Igazolható:

$$M(A \circ B) = M(A) \cdot M(B)$$

- Megjegyzés:

  A fentiek alapján lineáris leképezések és mátrixok között kölcsönösen egyértelmű, művelettartó megfeleltetés létesíthető.

Lineáris leképezések invertálhatósága

- Lin. leképezés invertálhatóságának feltétele:

Az $A: R^m \to R^n$ lin. leképezés invertálható $\Leftrightarrow$ $ker(A) = \{\underline{o}\}$

- Lin. transzformációs invertálhatóságának feltétele:
  - Az $A: R^n \to R^n$ lin. transzformáció invertálható $\Leftrightarrow$ az A lin. transzformáció mátrixa invertálható.
  - Az $A: R^n \to R^n$ lin. transzformáció invertálható $\Leftrightarrow$ $det\,(M\,(A)\,) \neq 0$.
- Ha az $A: R^n \to R^n$ lin. transzformáció invertálható, akkor az inverz transzformáció mátrixa:

$$M\,(A^{-1}) = (M\,(A)\,)^{-1}\ .$$