Mátrixok

1. Adja meg azt a 2×3-as mátrixot, amelynek (i,j)-edik eleme: $a_{ij}=i+2j$!

2. Adja meg azt a 2×3-as mátrixot, amelynek (i,j)-edik eleme:
   $a_{ij}=i+j$, ha $i\le j$,
   $a_{ij}=0$, ha $i>j$.

3. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -5 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$.
   Határozza meg az $A+B$, $A-B$, $3A$, $-B$, $4A+5B$ mátrixokat!

4. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.
   Melyik létezik az $A\cdot B$ és a $B\cdot A$ szorzatok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

5. Legyen $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 5\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 7\end{pmatrix}$.
   Mutassa meg, hogy $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$!

6. Legyen $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$.
   Mutassa meg, hogy a fenti mátrixokra:
   - $A\cdot B=B\cdot A=0$
   - $A\cdot C=A$
   - $C\cdot A=C$

7. Legyen $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}$. $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
   Ellenőrizze az $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ disztributív tulajdonságot!

8. Legyenek A és B $n\times n$-es mátrixok. Igazolja, hogy általában
   - $(A+B)\cdot(A-B)\ne A\cdot A-B\cdot B$
   - $(A+B)\cdot(A+B)\ne A\cdot A+2A\cdot B+B\cdot B$

   Adja meg mindkét esetben az egyenlőség teljesüléséhez szükséges feltételt!

9. Legyen $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 0 & -1\\ 6 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$2A\text{-}C$, $3C+D$, $C+D^T$, $4B+2E$, $A\cdot B$, $A\cdot C$, $A\cdot D$, $E\cdot B$, $B\cdot E$, B^2, E^3, $A\cdot E$, $E\cdot A$, $C\cdot F$, $D\cdot C$, $C\cdot D$, $D\cdot E$.

10. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 0 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -3 & 2\\ 0 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 5\\ 2 & 6\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}5 & 2\end{pmatrix}$.

Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$A+B$, $C+B$, $C+D$, $E+F$, $E+F^T$, $5A$, $3F$, $B\cdot C$, $B\cdot C^T$, $B^T\cdot C$, $B\cdot A$, $A\cdot B$, $B\cdot D$, $B\cdot E$, $A\cdot D$, $D\cdot E$, $E\cdot E$, $E\cdot F$, $F\cdot E$.

11. Megválaszthatóak-e az a és b valós paraméterek úgy, hogy $A\cdot A=A$ teljesüljön, ha

- $A=\begin{pmatrix}a & -2\\ 3 & b\end{pmatrix}$,
- $A=\begin{pmatrix}a & 2\\ 5 & b\end{pmatrix}$.

12. Egy fuvarozással foglalkozó vállalatnak 4 telephelye van. Mindegyik telephelyen 5-féle különböző típusú gépjárművet tárolnak. Az alábbi táblázat megadja, hogy az egyes telephelyeken az egyes gépjárműfajtákból hány darab található.

	A	B	C	D	E
1. telephely	8	12	7	4	6
2. telephely	6	9	10	5	7
3. telephely	10	5	8	7	3
4. telephely	4	7	10	6	5

a, Legyen A a táblázat adataiból nyerhető mátrix, $\underline{1}$ az összegző vektor.
Számítsa ki és magyarázza meg a következő kifejezések jelentését!

- $(\underline{e}_1+\underline{e}_3)^T \cdot A$
- $\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{e}_2$
- $\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{1}$

b, Írja fel és számítsa ki azt a kifejezést, amely megadja, hogy
- hány gépjárművet tárolnak a 3. telephelyen összesen,
- hány B és D típusú gépjárművet tárol összesen a vállalat,
- mennyi az egyes telephelyeken tárolt gépjárművek száma?

13. Egy középiskolában 4 éven keresztül figyelték 3 különböző osztályban az adott évben sikeresen nyelvvizsgázó tanulók számát:

	A osztály	B osztály	C osztály
1. év	0	1	0
2. év	2	3	1
3. év	4	3	4
4. év	8	6	5

a, Legyen A a táblázat adataiból nyerhető mátrix, $\underline{1}$ az összegző vektor.
Számítsa ki és magyarázza meg a következő kifejezések jelentését!
- $A \cdot \underline{e}_1$
- $A \cdot (\underline{e}_3 - \underline{e}_1)$
- $\underline{1}^T \cdot A$
- $\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{e}_2$
- $\underline{e}_3^T \cdot A$

b, Írja fel és számítsa ki azt a kifejezést, amely megadja, hogy
- hányan nyelvvizsgáztak az első évben az egyes osztályokban,
- hányan nyelvvizsgáztak összesen a 3. évben,
- mennyivel nyelvvizsgáztak többen az egyes osztályokban a 4. évben, mint az 1. évben,
- hányan nyelvvizsgáztak a 4 év alatt összesen a C osztályban,
- mennyivel nyelvvizsgáztak többen a 4 év alatt az A osztályban, mint a C osztályban?

14. Az alábbi táblázatban egy áruházban a hét egyes napjain 3 különböző árufajtából eladott mennyiségek szerepelnek:

	I.	II.	III.
Hétfő	15	21	15
Kedd	22	17	12
Szerda	18	14	16
Csütörtök	20	18	20
Péntek	16	15	14
Szombat	12	10	9

Az árufélék egységárait tartalmazó árvektor: $\underline{p}=\begin{pmatrix}1580\\2100\\1990\end{pmatrix}$.

a, Legyen A a táblázat adataiból nyerhető mátrix, $\underline{1}$ az összegző vektor.
Számítsa ki és magyarázza meg a következő kifejezések jelentését!

- $(\underline{e}_2+\underline{e}_4)^T \cdot A$
- $\underline{e}_3^T \cdot A \cdot \underline{p}$
- $\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{p}$
- $\underline{e}_1^T \cdot A \cdot \underline{1}$
- $A \cdot (\underline{e}_1+\underline{e}_2)$

b, Írja fel és számítsa ki azt a kifejezést, amely megadja, hogy
- mennyit adott el a héten az áruház az egyes árufélékből,
- mennyi volt a hét egyes napjain a három áruféleség eladásából származó napi bevétel,
- mennyi volt az áruház összes árbevétele a három áruféleségből a hét első három napján,
- mennyi volt a héten az összes eladott mennyiség?

15. Az alábbi táblázatban három különböző banknál az elmúlt hét egyes napjain egy adott valutából eladott mennyiségek találhatóak:

	1. bank	2. bank	3. bank
Hétfő	22	18	15
Kedd	20	14	16
Szerda	17	16	15
Csütörtök	14	20	14
Péntek	19	18	16

A valuta napi árfolyama: $\underline{p}=\begin{pmatrix}285\\287\\287\\286\\285\end{pmatrix}$.

a, Legyen A a táblázat adataiból nyerhető mátrix, $\underline{1}$ az összegző vektor.
Számítsa ki és magyarázza meg a következő kifejezések jelentését!
- $(\underline{e}_4+\underline{e}_5)^T \cdot A$
- $A \cdot \underline{1}$
- $\underline{p}^T \cdot A$
- $\underline{p}^T \cdot A \cdot \underline{e}_2$

b, Írja fel és számítsa ki azt a kifejezést, amely megadja, hogy
- mennyivel volt több a valutaeladás az egyes bankoknál hétfőn, mint kedden,
- mennyivel volt több a valutaeladásból származó árbevétel az egyes bankoknál hétfőn, mint kedden,
- mennyi volt a héten az 1. banknál a megfigyelt valuta eladásából származó összes bevétel,
- mennyi volt az egyes bankoknál a héten eladott összes valuta?

16. Egy jegyiroda három héten keresztül árusított négy koncertre jegyeket. Az egyes heteken eladott jegyek számát tartalmazza az alábbi táblázat:

	1. koncert	2. koncert	3. koncert	4. koncert
1. hét	25	48	32	46
2. hét	46	52	36	58
3. hét	40	55	42	52

Az egyes koncertek jegyárai: $\underline{p}^T$=(1500, 2000, 1800, 2000).

a, Legyen A a táblázat adataiból nyerhető mátrix, $\underline{1}$ az összegző vektor.
Számítsa ki és magyarázza meg a következő kifejezések jelentését!

- $\underline{e}_3^T \cdot A$
- $\underline{1}^T \cdot A$
- $A \cdot \underline{p}$
- $A \cdot \underline{1}$

b, Írja fel és számítsa ki azt a kifejezést, amely megadja, hogy

- mennyi az egyes koncertekre eladott összes jegyek száma,
- mennyi az egyes koncertekre befolyó árbevétel,
- mennyi a három hét alatt eladott jegyek összértéke,
- mennyi az egyes heteken eladott összes jegyek száma,
- mennyi a második héten eladott összes jegyek száma,
- mennyi az egyes heteken befolyó árbevétel?

17. Egy híradástechnikai vállalat 4-féle TV-készüléket gyárt. Egy beszállító 6-féle alkatrészt szállít a vállalatnak. Az alábbi táblázat az egyes készüléktípusokhoz az egyes alkatrészfajtákból felhasznált darabszámot adja meg:

	1. alkatrész	2. alkatrész	3. alkatrész	4. alkatrész	5. alkatrész	6. alkatrész
1. TV	5	8	0	4	10	6
2. TV	6	10	2	1	8	5
3. TV	10	6	4	0	8	4
4. TV	8	8	3	3	10	4

A következő táblázat az első negyedév hónapjaiban az egyes típusokból gyártott TV-készülékek darabszámát mutatja:

	1. TV	2. TV	3. TV	4. TV
Január	240	350	150	220
Február	300	320	160	240
Március	280	290	200	250
Április	320	300	180	220

A hatféle alkatrész beszerzési árát tartalmazza az alábbi vektor: $\underline{p}^T$=(28, 15, 30, 22, 14, 8).
A TV-készülékek árait tartalmazza az alábbi vektor: $\underline{r}^T$=(350, 800, 520, 280).

a, Legyen A az első, míg B a második táblázat adataiból nyerhető mátrix, $\underline{1}$ az összegző vektor.
Számítsa ki és magyarázza meg a következő kifejezések jelentését!

- $B \cdot A$
- $\underline{e}_3^{\mathrm{T}} \cdot B \cdot \underline{r}$
- $\underline{1}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \underline{p}$
- $\underline{e}_2^{\mathrm{T}} \cdot B \cdot A \cdot \underline{p}$

b, Írja fel és számítsa ki azt a kifejezést, amely megadja, hogy

- mennyi a 2. típusú TV-készülékhez szükséges alkatrészek összértéke,
- mennyi a januárban gyártott TV-készülékek összértéke,
- mennyi a márciusban felhasznált alkatrészek darabszáma fajtánként,
- mennyi az egyes hónapokban a felhasznált alkatrészek összértéke,
- hány TV-készüléket gyártottak összesen a negyedév során?

18. Az első évben három vállalat (A, B és C) részesedése egy adott árufeléség piacán: 30%, 50% és 20%. A második évben a részesedésekben az alábbi változások történnek:
    - A fogyasztóinak 85%-a nála marad, 5% B-hez, 10% C-hez kerül,
    - B fogyasztóinak 60%-a nála marad, 15% A-hoz, 25% C-hez kerül,
    - C fogyasztóinak 90%-a nála marad, 5% A-hoz, 5% B-hez kerül.

    a, Adja meg az első év piaci részesedési vektorát! (Legyen ez $\underline{x}$.) Írja fel azt a T átmeneti mátrixot, amelynek (i,j)-edik eleme megadja, hogy a j-edik vállalat fogyasztóinak hányadrésze vált az i-edik vállalat fogyasztójává!

    b, Számítsa ki és értelmezze a $T \cdot \underline{x}$ vektort!

    c, Feltételezve, hogy a változások tendenciája változatlan, mit ad meg a $T \cdot (T \cdot \underline{x})$ vektor?

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

    $E = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

    Határozza meg a fenti mátrixok rangját!

20. Mutassa meg, hogy általában $\mathrm{r}(A \cdot B) \neq \mathrm{r}(B \cdot A)$!
    Útmutatás: 2×2-es mátrixokkal próbálkozzon!

21. Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}$. Mutassa meg, hogy az A és B mátrixok egymás inverzei!

22. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & 1/4 & b \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$. Megválaszthatóak-e az a és b valós paraméterek úgy, hogy A és B egymás inverzei legyenek?

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & -3 & -4\\ -1 & 7 & 2\\ 3 & 1 & -6\end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 4\\ 7 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

Invertálhatóak-e a fenti mátrixok? Ha igen, akkor bázistranszformáció alkalmazásával határozza meg az inverzüket!

24. Legyen $A=\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$. Mutassa meg, hogy $A^3=E$! Ezt felhasználva keresse meg az A^{-1} inverzmátrixot!

25. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ és $B=1/12\cdot\begin{pmatrix}a & b & 3\\ 7 & -8 & 3\\ 1 & b & -3\end{pmatrix}$, ahol a és b valós számok.

a, Mutassa meg, hogy a és b megválaszthatóak úgy, hogy az A és B mátrixok egymás inverzei legyenek!

b, Határozza meg azt az X mátrixot, amelyre teljesül a $DX= 2X+C$ egyenlet, ahol

$D=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$ és $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

Útmutatás: használja fel az a, pont eredményét!

26. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát! Milyen egyéb mátrixtulajdonságokra következtethetünk a determináns értékéből?

$A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 10 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$F=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ -2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ 5 & -6 & 3\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 5 & -1\\ -4 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

$$J=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 2\\ -4 & 2 & -9 & 3\\ 2 & -6 & 4 & -2\\ 1 & 3 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 7 & 5 & -2\\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 5 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 4 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

27. Legyen $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

A determináns kifejtése nélkül igazolja, hogy $det(A)=0$!

28. Legyen $A=\begin{pmatrix}c & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & c & 3\\ 1 & -3 & -c\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 3 & -2 & 0\\ 4 & 3 & c\end{pmatrix}$.

Milyen legyen a c valós paraméter értéke, hogy a fenti mátrixok invertálhatóak legyenek?

29. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -3 & 13 & c\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}c & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 1 & -c\end{pmatrix}$.

Milyen legyen a c valós paraméter értéke, hogy a fenti mátrixok <u>ne</u> legyenek invertálhatóak?

30. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$,

$F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 8 & 5 & 8\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 4 & 1 & -3\\ -6 & 4 & -2\end{pmatrix}$

a, Határozza meg a fenti mátrixok adjungált mátrixát!

b, Invertálhatóak-e a fenti mátrixok? Ha igen, akkor az adjungált mátrix felhasználásával adja meg az inverzmátrixot!