Feladatok lineáris algebrából szigorlatra készülő gépészmérnök szakos hallgatók számára

A vektor geometriai fogalma. Műveletek vektorokkal.

1. Legyen $\underline{v} = (2, 3, -1)$ és $\underline{u} = (0, -1, 4)$ két térbeli vektor.
   a, Ábrázolja a fenti vektorokat a térbeli koordináta-rendszerben!
   b, Határozza meg a $2\underline{v}-3\underline{u}$ vektort!
   c, Határozza meg a $\underline{v}$ és az $\underline{u}$ vektorok hosszát!
   d, Mekkora szöget zárnak be a $\underline{v}$ és az $\underline{u}$ vektorok?
   e, Adja meg a $\underline{v}$ vektor ellentettjét! Adjon meg $\underline{v}$-vel párhuzamos ill. $\underline{v}$-re merőleges vektorokat!
   f, Adja meg a $\underline{v}$ vektorral megegyező irányú, egységnyi hosszúságú vektort!

2. Legyen $\underline{v} = (3, -1, 2)$, $\underline{a} = (1, 1, -2)$.
   Határozza meg a $\underline{v}$ vektor $\underline{a}$ irányába eső merőleges vetületvektorát!

3. Legyen $\underline{v} = (4, 6, -2)$, $\underline{a} = (2, 3, 0)$.
   Bontsa fel a $\underline{v}$ vektort $\underline{a}$-val párhuzamos és $\underline{a}$-ra merőleges összetevőkre!

4. Legyen $\underline{v} = (4, 7, 9)$, $\underline{a} = (2, -1, 3)$.
   Bontsa fel a $\underline{v}$ vektort $\underline{a}$-val párhuzamos és $\underline{a}$-ra merőleges összetevőkre!

5. Legyen $\underline{a} = (2, -1, 4)$, $\underline{b} = (0, 5, -2)$, $\underline{c} = (1, 6, -4)$.
   Számítsa ki az alábbi vektorokat!
   $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}-\underline{b}$, $3\underline{a}$, $-2\underline{c}$, $\underline{a}+3\underline{b}+(-2)\underline{c}$, $\underline{a}\cdot\underline{b}$, $\underline{a}\cdot\underline{c}$, $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{b} \times \underline{a}$,
   $\underline{a} \times \underline{c}$,
   $\underline{a}\cdot(\underline{b} \times \underline{c})$

6. Legyen $\underline{a} = (4, -1, 3)$, $\underline{b} = (2, 2, -2)$, $\underline{c} = (8, -2, 6)$.
   Számítsa ki az alábbi vektorokat!
   $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}-\underline{b}$, $5\underline{a}$, $-3\underline{c}$, $2\underline{a}+\underline{b}+(-4)\underline{c}$, $\underline{a}\cdot\underline{b}$, $\underline{a}\cdot\underline{c}$, $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{b} \times \underline{a}$,
   $\underline{a} \times \underline{c}$, $\underline{a}\cdot(\underline{b} \times \underline{c})$

A tér analitikus geometriája

7. Legyen

$$e: \begin{array}{rcl} x &=& 1 - 2t \\ y &=& t \\ z &=& 2 + t \end{array}, \quad f: \begin{array}{rcl} x &=& 3t \\ y &=& 1 - t \\ z &=& 6 + 2t \end{array}, \quad S: \; x+3y-z=10 \; .$$

   a, Milyen az *e* és *f* egyenesek kölcsönös helyzete? Ha metszők, akkor határozza meg a metszéspontot!
   b, Határozza meg az *e* és *f* egyenesek szögét!
   c, Milyen az *e* egyenes és az *S* sík kölcsönös helyzete? Ha metszők, akkor határozza meg a metszéspontot, ha párhuzamosak, akkor a távolságukat!
   d, Határozza meg az *e* egyenes és az *S* sík szögét!

8. Legyen

$$e:\ \frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{4}=-z\ ,\quad S_1:\ 2x-y+5z=6\ ,\quad S_2:\ x+y-2z=3\quad .$$

a, Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az e egyenesre és tartalmazza a $P = (1, 0, -5)$ pontot!
b, Határozza meg az e egyenes és az S_1 sík szögét!
c, Milyen az S_1 és S_2 sík kölcsönös helyzete? Ha párhuzamosak, akkor határozza meg a távolságukat, ha metszők, akkor adja meg a metszésvonal paraméteres egyenletrendszerét!
d, Határozza meg az S_1 és S_2 sík szögét!

9. Legyen

$$S:\ 2x-3y+z=6\ ,\qquad e:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-6}\ ,$$

$$f:\ \begin{array}{rcrcl} x & = & 3t & & \\ y & = & 2 & + & t \\ z & = & -2 & + & 5t \end{array}\quad .$$

a, Határozza meg a $Q = (5, -6, 6)$ pont és az S sík távolságát!
b, Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az e és f egyenesekre!
c, Határozza meg az e egyenes és az S sík szögét!
d, Határozza meg az e és f egyenesek szögét!

10. Legyen

$$e:\ \begin{array}{rcrcl} x & = & -1 & + & t \\ y & = & 2t & & \\ z & = & 1 & - & 3t \end{array}\quad ,\qquad f:\ \frac{x}{3}=y-2=\frac{z+2}{5}\quad .$$

a, Milyen az e és f egyenesek kölcsönös helyzete? Ha van közös pontjuk, akkor határozza meg a metszéspontot!
b, Határozza meg az e és f egyenesek szögét!

11. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P_1 = (1, 1, 4)$, $P_2 = (6, 0, 1)$ és $P_3 = (4, -2, 1)$ pontokra!

12. Legyen

$$e: \begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 4t \\ z = -1 - t \end{array} \quad , \quad f: \begin{array}{l} x = 10 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = -t \end{array} \quad ,$$

$S: \ 2x - y + 2z = 18$.

a, Milyen az *e* és *f* egyenesek kölcsönös helyzete? Ha van közös pontjuk, akkor határozza meg a metszéspontot!
b, Határozza meg az *e* és *f* egyenesek szögét!
c, Milyen az *e* egyenes és az *S* sík kölcsönös helyzete? Ha metszők, akkor határozza meg a metszéspontot, ha párhuzamosak, akkor a távolságukat!
d, Határozza meg az *e* egyenes és az *S* sík szögét!

13. Legyen

$$e: \begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = 2t \\ z = 3 \end{array} \quad , \quad S_1: \ 2x - y + 3z = 5 \ , \quad S_2: \ 4x - 2y + 6z = 38$$

.

a, Milyen az *e* egyenes és az S_1 sík kölcsönös helyzete? Ha metszők, akkor határozza meg a metszéspontot!
b, Határozza meg az *e* egyenes és az S_1 sík szögét!
c, Milyen az S_1 és S_2 sík kölcsönös helyzete?
d, Határozza meg a $Q = (1, 2, -3)$ pont és az S_2 sík távolságát!
e, Határozza meg az S_1 és S_2 síkok szögét!

14. Legyen

$$e: \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{array} \quad , \quad f: \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 4 - 2t \\ z = 3 \end{array} \quad ,$$

$S: \ x - y - z + 4 = 0$.

a, Milyen az *e* és *f* egyenesek kölcsönös helyzete? Ha van közös pontjuk, akkor határozza meg a metszéspontot!
b, Határozza meg az *e* és *f* egyenesek szögét!
c, Milyen az *e* egyenes és az *S* sík kölcsönös helyzete?
d, Határozza meg az *e* egyenes és az *S* sík szögét!
e, Határozza meg a $P = (4, 4, 5)$ pont *f* egyenestől való távolságát!

15. Legyen

$$e: \begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{array} , \quad f: \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 4 - t \end{array} ,$$

$S: \ -x + 2y + 3z = 5$.

a, Milyen az *e* és *f* egyenesek kölcsönös helyzete? Ha van közös pontjuk, akkor határozza meg a metszéspontot!
b, Határozza meg az *e* és *f* egyenesek szögét!
c, Milyen az *e* egyenes és az *S* sík kölcsönös helyzete?
d, Határozza meg az *e* egyenes és az *S* sík szögét!
e, Határozza meg a $P = (4, 4, 3)$ pont *e* egyenestől való távolságát!

16. Legyen

$$e: \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 4 - 3t \end{array} , \quad f: \begin{array}{l} x = 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 - 6t \end{array} ,$$

$S: \ 2x - 3y + z = 4$.

a, Milyen az *e* és *f* egyenesek kölcsönös helyzete? Határozza meg az *e* és *f* egyenesek távolságát!
b, Határozza meg az *e* és *f* egyenesek szögét!
c, Milyen az *e* egyenes és az *S* sík kölcsönös helyzete? Ha metszők, akkor határozza meg a metszéspontot, ha párhuzamosak, akkor a távolságukat!
d, Határozza meg az *e* egyenes és az *S* sík szögét!

17. Legyen

$$e: \begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + t \end{array} , \quad f: \begin{array}{l} x = 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 6 + t \end{array} ,$$

$S: \ x - 2y - z = 10$.

a, Milyen az *e* és *f* egyenesek kölcsönös helyzete? Ha metszők, akkor határozza meg a metszéspontot!
b, Határozza meg az *e* és *f* egyenesek szögét!
c, Milyen az *f* egyenes és az *S* sík kölcsönös helyzete? Ha metszők, akkor határozza meg a metszéspontot, ha párhuzamosak, akkor a távolságukat!
d, Határozza meg az *f* egyenes és az *S* sík szögét!

Az R^n vektortér (a vektorfogalma, műveletek vektorokkal, lineáris kombináció, altér)

18. Legyen $\underline{a} = (2, -3)$, $\underline{b} = (0, 5)$. Előállítható-e az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjával a $\underline{c} = (-2, 23)$ vektor?

19. Legyen $\underline{a} = (1, -2)$, $\underline{b} = (-2, 4)$. Előállítható-e az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjával a $\underline{c} = (1, 0)$ vektor?

20. Legyen $\underline{a} = (5, 4, -2, 3)$, $\underline{b} = (2, 0, -1, 5)$, $\underline{c} = (3, 0, 4, -6)$.
    a, Végezze el az alábbi műveleteket!
       $\underline{a} + \underline{b}$, $-2\underline{c}$, $-\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c}$
    b, Adja meg azt a vektort, amely az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok 3, -1, 4 skalárokkal vett lineáris kombinációja!
    c, Előállítható-e az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjával az $\underline{x} = (6, 4, 0, 19)$ vektor?

21. a, Az alábbi vektorhalmazok közül melyek alterek az R^3 térben? Az altereknél adja meg az altér dimenzióját és egy bázisát!
    - $H_1 = \{ \lambda_1 \cdot (1, 0, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$,
    - $H_2 = \{ \lambda \cdot (1, 2, -5) \mid \lambda \in R^+ \}$,
    - $H_3 = \{ \lambda \cdot (1, 2, -5) \mid \lambda \in R \}$,
    - $H_4 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1, x_2, x_3 < 0 \}$
    - $H_5 = \{ \lambda \cdot (3, -4, 2) \mid \lambda \in R \}$,
    - $H_6 = \{ \lambda \cdot (3, -4, 2) + (1, 1, 1) \mid \lambda \in R \}$,
    - $H_7 = \{ \lambda_1 \cdot (3, -4, 2) + \lambda_2 \cdot (1, 1, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$,
    - $H_8 = \{ (\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in R \}$.

    b, Melyek azok az alterek a fentiek közül, amelyeknek direkt összege az R^3 vektortér?

Vektorok lineáris függetlensége. A lineárisan független és a lineárisan összefüggő vektorhalmazok tulajdonságai. Vektorhalmaz rangja.

22. Legyen $\underline{a} = (-1, 2, 0)$, $\underline{b} = (3, 5, 2)$, $\underline{c} = (-2, 1, 4)$.
    a, Állítsa elő a $2\underline{a} - 3\underline{b} - \underline{c}$ lineáris kombinációt!
    b, Legyen $H = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$. Hogyan állítható elő a H vektorhalmaz elemeiből az R^3 vektortér nullvektora? Lineárisan független, vagy lineárisan összefüggő a H vektorhalmaz?
    c, Legyen $\underline{x} = (1, 9, 2)$, $\underline{y} = (0, -3, 4)$.
       Előállítható-e az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjával az $\underline{x}$ illetve az $\underline{y}$ vektor?
       Geometriailag is értékelje az eredményt!

23. Legyen $\underline{a} = (5, 2, 4)$, $\underline{b} = (-1, 0, 3)$, $\underline{c} = (6, -4, 5)$, $\underline{d} = (3, 2, 10)$.
    a, Hogyan állítható elő az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokból az R^3 vektortér nullvektora?
    b, Hogyan állítható elő az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{d}$ vektorokból az R^3 vektortér nullvektora?

24. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, 4)$, $\underline{a}_2 = (-3\ 1, 2)$, $\underline{a}_3 = (-2, 3, 6)$, $\underline{a}_4 = (-1\ 5, 10)$,
    $\underline{a}_5 = (4, 1, 2)$,

$H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$. Mennyi a H vektorhalmaz rangja?

25. Legyen $\underline{a} = (1, 0, 2)$, $\underline{b} = (3, 2, 1)$, $\underline{c} = (-1, 4, 0)$, $\underline{d} = (6, 2, 7)$.
   a, Bázist alkotnak-e a térben az $\underline{a}$, $\underline{b}$, és $\underline{c}$ vektorok? Ha igen, akkor határozza meg az $\underline{x} = (-8, -2, 1)$ vektor ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!
   b, Hogyan állítható elő az $\underline{a}$, $\underline{b}$, és $\underline{d}$ vektorok lineáris kombinációjával az R^3 tér nullvektora?
   c, Mennyi a $H = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}\}$ vektorhalmaz rangja?

26. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\underline{a}_2 = (-1, -3, -1, 3)$, $\underline{a}_3 = (3, 7, -1, -3)$, $\underline{a}_4 = (2, 5, 0, -3)$, $\underline{a}_5 = (0, 1, 2, -3)$. $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.
   a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
   b, Adjon meg olyan $\underline{a} \neq \underline{o}$ vektort, amelyet a H vektorhalmazhoz csatolva nem növeli a vektorhalmaz rangját!

27. Egy bázistranszformációs eljárás során a következő táblázathoz jutottunk:

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{a}_2$			1		-3
$\underline{e}_2$			0		0
$\underline{a}_4$			2		4
$\underline{a}_1$			3		0

   Számolás nélkül válaszoljon az alábbi kérdésekre!
   a, Mely vektortér elemei az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$, $\underline{a}_5$ vektorok?
   b, Töltse ki a táblázat hiányzó adatait!
   c, Mennyi a $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$ vektorhalmaz rangja?
   d, Adja meg a H vektorhalmaz egy maximális lineárisan független részhalmazát!
   e, A H vektorhalmaz mely elemei állíthatók elő $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_4$ lineáris kombinációjaként?

28. Egy bázistranszformációs eljárás során a következő táblázathoz jutottunk:

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{e}_1$	3			2	0
$\underline{a}_2$	2			-2	0
$\underline{a}_3$	3			0	-2
$\underline{e}_4$	0			0	0

Számolás nélkül válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a, Mely vektortér elemei az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$, $\underline{a}_5$ vektorok?

b, Töltse ki a táblázat hiányzó adatait!

c, Mennyi a $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$ vektorhalmaz rangja?

d, Adja meg a H vektorhalmaz egy maximális lineárisan független részhalmazát!

e, A H vektorhalmaz mely elemei állíthatók elő $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$ lineáris kombinációjaként?

29. Egy bázistranszformációs eljárás során a következő táblázathoz jutottunk:

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{e}_1$	0		0		0
$\underline{a}_2$	1		3		-2
$\underline{a}_4$	-2		0		0
$\underline{e}_4$	0		0		0

Számolás nélkül válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a, Mely vektortér elemei az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$, $\underline{a}_5$ vektorok?

b, Töltse ki a táblázat hiányzó adatait!

c, Mennyi a $H_1 = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$ vektorhalmaz rangja?

d, Mennyi a $H_2 = \{\underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_5\}$ vektorhalmaz rangja?

e, Előállítható-e az $\underline{a}_1$ vektor az $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként?

f, Előállítható-e az $\underline{a}_1$ vektor az $\underline{a}_3$ és $\underline{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként?

g, Előállítható-e az $\underline{a}_1$ vektor az $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként?

Generátorrendszer, bázis. A bázisokra vonatkozó tételek.

30. Legyen $\underline{a} = (5, 2, 4)$, $\underline{b} = (-1, 0, 3)$, $\underline{c} = (6, -4, 5)$, $\underline{d} = (3, 2, 10)$.
    a, Bázist alkotnak-e az R^3 térben az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ (illetve az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{d}$) vektorok? Ha igen, akkor határozza meg a $\underline{v} = (16, 0, 13)$ vektor rájuk vonatkozó koordinátáit!
    b, Megadható-e olyan $\underline{x} \in R^3$ vektor, amely nem állítható elő az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ (illetve az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{d}$) vektorok lineáris kombinációjaként?

31. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, 0)$, $\underline{a}_2 = (0\ 1, 1)$, $\underline{a}_3 = (2, 2, -2)$.
    Megadható-e olyan $\underline{x} \in R^3$ vektor, amely az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjával nem fejezhető ki? Ha igen, akkor adjon példát ilyen vektorra!

32. Legyen $H_1 = \{ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0) \}$,
    $H_2 = \{ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0) \}$,
    $H_3 = \{ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0),\ (0, 1, 1) \}$.
    A fenti vektorhalmazokra mi illik az alábbi felsorolásokból?
    - lineárisan független,
    - lineárisan összefüggő,
    - bázis
    - a vektorhalmaz vektoraiból lineáris kombinációval előállítható az R^3 vektortér összes vektora.

33. Adjon példát az R^4 vektortérben olyan vektorhalmazra, amely
    - lineárisan összefüggő és nem generátorrendszer,
    - lineárisan összefüggő és generátorrendszer,
    - lineárisan független és nem bázis,
    - lineárisan független és bázis.

Elemi bázistranszformáció.

34. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, 2,-1)$, $\underline{a}_2 = (0, -1, 1, -1)$, $\underline{a}_3 = (2, 5, 3, -1)$, $\underline{a}_4 = (1, 3, 1, 0)$, $\underline{a}_5 = (1, 4, 0, 1)$. $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.
    a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
    b, Adjon meg olyan $\underline{a} \in R^4$ vektort, amely nem állítható elő a H vektorhalmaz vektorainak lineáris kombinációjaként!

35. Legyen $\underline{a}_1 = (-3,4, 2)$, $\underline{a}_2 = (1, 0, 0)$, $\underline{a}_3 = (1, 2, -1)$, $\underline{a}_4 = (-5, 0, 7)$, $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$.
    a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
    b, Előállítható-e az $\underline{a}_1$ vektor az $\underline{a}_3$ és $\underline{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként?
    c, Előállítható-e az $\underline{a}_2$ vektor az $\underline{a}_3$ és $\underline{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként?

36. Legyen $\underline{a}_1 = (1, -2, 3)$, $\underline{a}_2 = (-3, 1, -1)$, $\underline{a}_3 = (-4, -2, 4)$, $\underline{a}_4 = (-6, 0, -4)$, $\underline{a}_5 = (2, -1, -4)$,
    $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.
    a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
    b, Van-e a H vektorhalmaznak olyan legalább 3 elemű részhalmaza, amelynek rangja kisebb a H rangjánál?

c, Van-e a H vektorhalmaznak 1, 2, 3 ill. 4 elemű lineárisan független részhalmaza? (Ha van, akkor adjon példát, ha nincs, akkor indoklást!)
d, Van-e a H vektorhalmaznak 1, 2, 3 ill. 4 elemű lineárisan összefüggő részhalmaza? (Ha van, akkor adjon példát, ha nincs, akkor indoklást!)

37. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\underline{a}_2 = (-1, 0, 3)$, $\underline{a}_3 = (2, 1, 3)$, $\underline{a}_4 = (4, 1, -3)$, $\underline{a}_5 = (2, -1, -1)$,
$H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.
a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
b, Válasszon ki H-ból egy maximális lineárisan független részhalmazt, és annak elemeivel állítsa elő H elemeit!
c, Előállítható-e az R^3 vektortér minden vektora H elemeinek lineáris kombinációjaként? Ha igen: adjon meg olyan részhalmazt H-ban, amely bázis az R^3 térben! Ha nem: egészítse ki H-t úgy további vektorokkal, hogy az R^3 tér minden vektora előállítható legyen!

38. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 1, 2)$, $\underline{a}_2 = (1, 2, -1)$, $\underline{a}_3 = (2, 3, 1)$, $\underline{a}_4 = (0, -1, 3)$, $\underline{a}_5 = (3, 4, 3)$,
$H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.
a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
b, Válasszon ki H-ból egy maximális lineárisan független részhalmazt, és annak elemeivel állítsa elő H elemeit!
c, Előállítható-e az R^3 vektortér minden vektora H elemeinek lineáris kombinációjaként? Ha igen: adjon meg olyan részhalmazt H-ban, amely bázis az R^3 térben! Ha nem: egészítse ki H-t úgy további vektorokkal, hogy az R^3 tér minden vektora előállítható legyen!

Mátrixok. Műveletek mátrixokkal. Mátrix rangja.

39. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Mutassa meg, hogy $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$!

40. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
Mutassa meg, hogy a fenti mátrixokra:
- $A \cdot B = B \cdot A = 0$
- $A \cdot C = A$
- $C \cdot A = C$.

41. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ellenőrizze az $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ disztributív tulajdonságot!

42. Legyen $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 0 & -1\\ 6 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$2A-C$, $3C+D$, $C+D^T$, $4B+2E$, $A\cdot B$, $A\cdot C$, $A\cdot D$, $E\cdot B$, $B\cdot E$, B^2, E^3, $A\cdot E$, $E\cdot A$, $C\cdot F$, $D\cdot C$, $C\cdot D$, $D\cdot E$.

43. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 0 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -3 & 2\\ 0 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 5\\ 2 & 6\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}5 & 2\end{pmatrix}$.

Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$A+B$, $C+B$, $C+D$, $E+F$, $E+F^T$, $5A$, $3F$, $B\cdot C$, $B\cdot C^T$, $B^T\cdot C$, $B\cdot A$, $A\cdot B$, $B\cdot D$, $B\cdot E$, $A\cdot D$, $D\cdot E$, $E\cdot E$, $E\cdot F$, $F\cdot E$.

44. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 6 & 10 & -4\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ -1 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}$. $D=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 5\\ 2 & 3 & 7 & -1\\ 3 & 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Határozza meg a fenti mátrixok rangját!

Négyzetes mátrix inverze

45. Legyen $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 2/3 & -1\end{pmatrix}$. Mutassa meg, hogy az A és B mátrixok egymás inverzei!

46. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 6\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ és $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ a & 1/4 & b\\ 1/8 & 1/8 & -1/8\end{pmatrix}$. Megválaszthatóak-e az a és b valós

paraméterek úgy, hogy A és B egymás inverzei legyenek?

47. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$D=\begin{pmatrix}2 & -3 & -4\\ -1 & 7 & 2\\ 3 & 1 & -6\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & 5 & 4\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad .$$

Invertálhatóak-e a fenti mátrixok? Ha igen, akkor bázistranszformáció alkalmazásával határozza meg az inverzüket!

Determinánsok. A Cramer szabály

48. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát! Milyen egyéb mátrixtulajdonságokra következtethetünk a determináns értékéből?

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 10 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ -2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ 5 & -6 & 3\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 5 & -1\\ -4 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$$J=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -9 & 3 \\ 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad K=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$L=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

49. Legyen $A=\begin{pmatrix} c & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & c & 3 \\ 1 & -3 & -c \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & c \end{pmatrix}$.

Milyen legyen a c valós paraméter értéke, hogy a fenti mátrixok invertálhatóak legyenek?

50. Legyen $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 13 & c \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -c \end{pmatrix}$.

Milyen legyen a c valós paraméter értéke, hogy a fenti mátrixok <u>ne</u> legyenek invertálhatóak?

51. Oldja meg Cramer-szabállyal az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

a,

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 5 \\ -3x + 2y + z &= -1 \\ 4x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 2 \\ 3x + 8y - 6z &= -5 \\ 6x + 10y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

c,

$$\begin{aligned} x + y - z &= 6 \\ 3x - 2y + 5z &= 3 \\ 6x + y + 2z &= 21 \end{aligned}$$

d,

$$\begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ 2x - 3y + z &= -5 \\ 4x - y - z &= -3 \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszerek

52. Oldja meg bázistranszformáció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

a,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 15 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ x_2 + x_3 + 7x_4 &= 21 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -6 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

c,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

d,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 &= -20 \\ x_1 + 8x_2 &= 46 \\ 8x_1 + 9x_2 &= 38 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

f,

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

53. Legyen A=[$\underline{a}_1$ $\underline{a}_2$ $\underline{a}_3$ $\underline{a}_4$]$_{4x4}$ egy mátrix, $\underline{b} \in R^4$.
Az alábbi táblázatot ismerjük:

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
$\underline{a}_1$	1	0	0	6	0
$\underline{e}_2$	0	0	0		
$\underline{a}_2$	0	1	0	3	2
$\underline{a}_3$	0	0	1	0	-1

A táblázat hiányzó helyeire válasszon számértékeket úgy, hogy

- az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek ne legyen megoldása;
- az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldásvektora legyen;
- az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora legyen!

Az utóbbi két esetben adja meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát

Lineáris leképezések (definíció, alapfogalmak). Műveletek lineáris leképezésekkel.

54. Tekintsük az alábbi leképezéseket!

$A : R^3 \to R^2,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 + 3x_2\ ,\ x_1 + x_2 - 3x_3)$

$A : R^2 \to R^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1^3 + 2x_2\ ,\ 4x_2)$

$A : R^2 \to R^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cdot x_2,\ 4x_1 + x_2^4)$

$A : R \to R^4,\ x \mapsto (2x+1,\ 3x^2\ ,\ x+5\ ,\ 4x)$

$A : R^2 \to R^3,\ (x_1, x_2) \mapsto (3x_1 + 5x_2\ , 0\ ,\ x_1 + x_2)$

$A : R^2 \to R^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (5x_1 + 2x_2\ ,\ x_1 + 4x_2)$

Melyik lineáris a fenti leképezések közül? Amelyik lineáris, ott adja meg a leképezés mátrixát!

55. Adja meg azon lineáris leképezések típusát és hozzárendelési szabályát, amelyeknek a mátrixa:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1 & 4\\ 3 & 5 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 6\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix},\qquad F=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad G=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0 & 3\end{bmatrix},\qquad H=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}.$$

56. Tekintsük az alábbi lineáris leképezéseket!

$$A: R^3 \to R^2,\ \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_2 + 4x_3\ ,\ x_1 + 3x_2 + 2x_3)$$
$$B: R^3 \to R^3,\ \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3\ , 4x_2\ ,\ 5x_2 + \mathrm{x}_3\ )$$

a, Adja meg a fenti lineáris leképezések mátrixát!
b, Legyen $\underline{x}$ = (2, -1, 3). Adja meg az $A(\underline{x})$ és a $B(\underline{x})$ képvektort!
c, Melyik létezik az *A*o*B* és a *B*o*A* leképezések közül? Amelyik létezik, annak adja meg a mátrixát!

57. Határozza meg az alábbi lneáris leképezések rangját!

$A:\ R^2 \to R^4,\ \ (x, y) \mapsto (3x\ , 0\ , x+y\ , -3y),$
$A:\ R^3 \to R^3,\ \ (x, y, z) \mapsto (3x-y+2z\ , 2y\ , 3x+3y+2z),$
$A:\ R^3 \to R^2,\ \ (x, y, z) \mapsto (x+y-2z\ , 2x+z).$

58. Tekintsük az alábbi lineáris transzformációkat:

$A:\ R^2 \to R^2,\ \ (x_1, x_2) \mapsto (2x_1+3x_2\ , -x_1+4x_2),$
$B:\ R^2 \to R^2,\ \ (x_1, x_2) \mapsto (4x_1+6x_2\ , -2x_1-3x_2).$

a, Írja fel a fenti lineáris transzformációk mátrixát!
b, Adja meg az *A*+*B*, 5*A*, *A*o*B*, *B*o*A* lineáris leképezéseket és azok mátrixát!
c, Invertálhatóak-e a fenti lineáris transzformációk? Amelyik invertálható, annak adja meg az inverzét (az inverz transzformáció típusát és hozzárendelési szabályát)!

59. Tekintsük az alábbi lineáris transzformációkat:

$A:\ R^2 \to R^2,\ \ (x_1, x_2) \mapsto (x_1+3x_2\ , 2x_1+x_2),$
$B:\ R^2 \to R^2,\ \ (x_1, x_2) \mapsto (4x_1+6x_2\ , 2x_1+3x_2).$

a, Írja fel a fenti lineáris transzformációk mátrixát!
b, Adja meg a fenti lineáris transzformációk magterét! Melyik invertálható? Az invertálható leképezések esetén adja meg az inverz leképezést!

c, Legyen $\underline{b} = (7 , 4)$. Igaz-e, hogy $\underline{b} \in \mathrm{im}(A)$. illetve $\underline{b} \in \mathrm{im}(B)$? Ha igen, akkor adja meg azon $\underline{x}$ vektorokat, amelyekre $A(\underline{x}) = \underline{b}$, illetve $B(\underline{x}) = \underline{b}$ teljesül!

Lineáris transzformáció sajátértékei, sajátvektorai

60. A definíció alapján ellenőrizze, hogy a megadott vektorok közül melyik sajátvektora az A lineáris transzformációnak!

a, $A : R^2 \to R^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1+3x_2 , 2x_2)$, $\underline{v}_1=(3,1)$, $\underline{v}_2=(5,2)$, $\underline{v}_3=(3,3)$, $\underline{v}_4=(2,-2)$

b, $A : R^2 \to R^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (3x_1+x_2 , 4x_2)$, $\underline{v}_1=(3,0)$, $\underline{v}_2=(5,1)$, $\underline{v}_3=(3,3)$, $\underline{v}_4=(2,-2)$.

61. A definíció alapján ellenőrizze, hogy a megadott vektorok közül melyik sajátvektora az A négyzetes mátrixnak!

a, $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

b, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

c, $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

62. Határozza meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit, sajátaltereit! Adja meg a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását!

Adjon példát egy sajátvektorra!

a, $A : R^2 \to R^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (2x_1-x_2 , x_1+4x_2)$

b, $A : R^2 \to R^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1+3x_2 , 2x_2)$

c, $A : R^2 \to R^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (2x_1+2x_2 , -2x_1+6x_2)$

d, $A : R^2 \to R^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (2x_1+3x_2 , x_1+4x_2)$

e, $A : R^2 \to R^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1+x_2 , 9x_1+7x_2)$

f, $A : R^2 \to R^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (-x_1+2x_2 , -10x_1-5x_2)$

g, $A : R^3 \to R^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1+x_2 , -2x_1+4x_2 , x_1+2x_2)$

h, $A : R^3 \to R^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1+x_2 , x_2+x_3 , x_1+x_3)$

i, $A : R^3 \to R^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (3x_1-x_2-x_3 , -x_1+3x_2-x_3 , -x_1-x_2+3x_3)$

Skaláris szorzat. A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség

63. Legyen $\underline{x} = (2, 0, -3, 4)$, $\underline{y} = (1, -1, 0, 2)$, $\underline{z} = (0, 0, 1, 3)$.
    Határozza meg az $\underline{x}$ és $\underline{y}$, az $\underline{x}$ és $\underline{z}$ valamint az $\underline{y}$ és $\underline{z}$ vektorok skaláris szorzatát!

64. Legyen $\underline{a} = (1, -2, -4)$, $\underline{b} = (-1, 0, 3)$, $\underline{c} = (2, -1, 1)$.
    a, Ellenőrizze a skaláris szorzatra vonatkozó tulajdonságokat a fenti vektorok esetén!
    b, Ellenőrizze a Cauchy- Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ illetve a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokra!

65. Legyen $\underline{x} = (2, 5, -1, 4)$, $\underline{v} = (-1, 0, -3, 1)$.
    a, Határozza meg az $\underline{x}$ vektor $\underline{v}$ –re vonatkozó Fourier-együtthatóját!
    b, Bontsa fel az $\underline{x}$ vektort $\underline{v}$ –vel párhuzamos és $\underline{v}$ –re merőleges összetevőkre!

66. Legyen $\underline{x} = (3, -1, 0, 1)$, $\underline{v} = (0, 2, 1, -1)$.

    a, Határozza meg az $\underline{x}$ vektor $\underline{v}$ –re vonatkozó Fourier-együtthatóját!
    b, Bontsa fel az $\underline{x}$ vektort $\underline{v}$ –vel párhuzamos és $\underline{v}$ –re merőleges összetevőkre!

Norma, távolság, szög. Az ortogonális felbontás tétele.

67. Legyen $\underline{x} = (2, 0, -3, 4)$, $\underline{y} = (1, -1, 0, 2)$, $\underline{z} = (0, 0, 1, 3)$.
    a, Határozza meg az $\underline{x}$, az $\underline{y}$ valamint a $\underline{z}$ vektorok normáját (hosszát)!
    b, Adja meg az $\underline{x}$, az $\underline{y}$ valamint a $\underline{z}$ vektorokkal egyirányú, egységre normált vektorokat!
    c, Határozza meg az $\underline{x}$ és $\underline{y}$, az $\underline{x}$ és $\underline{z}$ valamint az $\underline{y}$ és $\underline{z}$ vektorok szögét!

68. Legyen $\underline{a} = (1, -2, -4)$, $\underline{b} = (-1, 0, 3)$, $\underline{c} = (2, -1, 1)$.
    a, Ellenőrizze a skaláris szorzatra vonatkozó tulajdonságokat a fenti vektorok esetén!
    b, Számítsa ki a következő normákat! $\| \underline{a} \|$, $\| \underline{b} \|$, $\| \underline{c} \|$
    c, Ellenőrizze a Cauchy- Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ illetve a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokra!
    d, Ellenőrizze a Minkowsky egyenlőtlenséget az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ illetve a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokra!
    e, Számítsa ki az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ illetve a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok szögét!

69. Az alábbi vektorok közül melyek ortogonálisak?
    - (-4, 2) és (1, 2),
    - (2, 0, -3) és (3, 5, -1),
    - (0, 4, -5) és (6, 10, 8),
    - (1, -1, 0, 1) és (1, 0, 6, -1),
    - (2, 4, -3, 0) és (1, -5, 1, 1).

70. x mely értékeire lesznek ortogonálisak az alábbi vektorok?

- $(x, 0, -3, 2x)$ és $(4, 5, 2, 1)$,
- $(x, 4, 1)$ és $(x, -x, 3)$,
- $(2, 3x, 2)$ és $(5, -2, 3x)$.

71. Adja meg a H altér ortogonális komplementerét!

a, $H = \{ (t, 0, t) \mid t \in R \}$,
b, $H = \{ (0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in R \}$,
c, $H = \{ \lambda_1 \cdot (1, -1, 2) + \lambda_2 \cdot (0, 1, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$,
d, $H = R^3$.

72. Adja meg az $\underline{x} \in R^3$ vektor H és $H^\perp$ alterekbe eső összetevőit!

a, $\underline{x} = (-5, 4, 2)$
$H = \{ (x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in R \}$,

b, $\underline{x} = (3, 2, 2)$
$H = \{ \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (0, 1, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$,

c, $\underline{x} = (0, 5, 2)$
$H = \{ \lambda_1 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$,

d, $\underline{x} = (2, 4, -1)$
$H = \{ \lambda \cdot (1, 1, 1) \mid \lambda \in R \}$.