Lineáris egyenletrendszerek

1. Tekintsünk egy olyan gazdaságot, amely két ágazatból (I. és II.) áll. Az I. ágazat által termelt jószág egységnyi mennyiségének előállításához 1/6 egységnyi I.-beli és 1/4 egységnyi II.-beli jószágra van szükség. A II. ágazat által előállított jószág egységéhez 1/4 egységnyi I.-beli és 1/4 egységnyi II.-beli jószágra van szükség. A végső kereslet mindkét szektorban 60 egység.
   - Írja fel a fenti gazdaság Leontieff-modelljét!
   - Számítsa ki, hogy mennyit kell az egyes ágazatoknak termelniük, hogy a végső keresletet ki tudják elégíteni!

2. Az általános Leontieff-modellben
   - mit jelent az, ha a_{ii}=0, minden i-re?
   - mi a jelentése az $a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{in}$ összegnek?
   - mi a jelentése az alábbi input együtthatóknak ($a_{1j}, a_{2j}, \dots a_{nj}$) ?
   - értelmezhető-e az $a_{1j}+a_{2j}+\dots+a_{nj}$ összeg?

3. Egy két ágazatból felépülő gazdaság esetén a termelési együtthatókat az A mátrix, a végső keresleteket a $\underline{b}$ vektor foglalja össze:
$$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3\\ 0,4 & 0,1\end{pmatrix},\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}120\\ 90\end{pmatrix}.$$
Írja fel a gazdaság Leontieff-modelljét és oldja meg azt!

4. Egy két ágazatból felépülő gazdaság esetén a termelési együtthatókat az A mátrix, a végső keresleteket a $\underline{b}$ vektor foglalja össze:
$$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3\\ 0,4 & 0,2\end{pmatrix},\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}90\\ 40\end{pmatrix}.$$
Írja fel a gazdaság Leontieff-modelljét és oldja meg azt!

5. Egy három ágazatból felépülő gazdaság esetén a termelési együtthatókat az A mátrix, a végső keresleteket a $\underline{b}$ vektor foglalja össze:
$$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,2 & 0,1\\ 0,3 & 0,2 & 0,2\\ 0,2 & 0,2 & 0,1\end{pmatrix},\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}85\\ 95\\ 20\end{pmatrix}.$$
Írja fel a gazdaság Leontieff-modelljét és mutassa meg, hogy x_1=150, x_2=200 és x_3=100 megoldás.

6. Egy három ágazatból felépülő gazdaság esetén a termelési együtthatókat az A mátrix, a végső keresleteket a $\underline{b}$ vektor foglalja össze:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 33 \\ 58 \\ 84 \end{pmatrix}.$$

Írja fel a gazdaság Leontieff-modelljét és oldja meg azt!

7. Oldja meg Gauss eliminációt alkalmazva az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

a,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

b,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 13 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 10 \end{array}$$

c,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 13 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \end{array}$$

d,

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

f,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \end{array}$$

g,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

h,

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

i,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

j,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \end{aligned}$$

k,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

8. Oldja meg bázistranszformáció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

a,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 15 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ x_2 + x_3 + 7x_4 &= 21 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -6 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

c,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

d,

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & -20 \\ x_1 & + & 8x_2 & = & 46 \\ 8x_1 & + & 9x_2 & = & 38 \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

f,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

g,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

9. Legyen $A=[\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \ldots\ \underline{a}_5]_{4\times 5}$ egy mátrix, $\underline{b}\in R^4$. Tekintsük az $A\cdot\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldása során bázistranszformációval az alábbi táblázatot nyertük.
    - Megoldható-e az $A\cdot\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszer? Ha igen, akkor írja fel a megoldáshalmazt!
    - Adja meg az $A\cdot\underline{x}=\underline{o}$ homogén egyenletrendszer megoldáshalmazát!

a,

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$
$\underline{e}_1$	0	0	0	0	0	0
$\underline{a}_4$	0	-2	2	1	0	2
$\underline{e}_3$	0	0	0	0	0	0
$\underline{a}_1$	1	3	1	0	5	3

b,

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$
$\underline{a}_3$	1	0	1	4	-1	2
$\underline{e}_2$	0	0	0	0	0	3
$\underline{e}_3$	0	0	0	0	0	0
$\underline{a}_2$	-2	1	0	5	6	4

c,

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$
$\underline{e}_1$	0	0	0	0	0	0
$\underline{a}_3$	-2	4	1	2	3	5
$\underline{e}_3$	0	0	0	0	0	0
$\underline{e}_4$	0	0	0	0	0	0

d,

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$	0	1	0	-2	0	1
$\underline{a}_5$	0	0	0	0	1	2
$\underline{a}_1$	1	0	0	3	0	0
$\underline{a}_3$	0	0	1	4	0	4

10. Legyen $A=[\underline{a}_1\ \underline{a}_2\ \ \underline{a}_3\ \ \underline{a}_4]_{4\times 4}$ egy mátrix, $\underline{b}_1, \underline{b}_2 \in R^4$. Tekintsük az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}_1$ és az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}_2$ lineáris egyenletrendszereket.
    Az egyenletrendszerek megoldása során bázistranszformációval az alábbi táblázatot nyertük.
    - Megoldható-e az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}_1$ és az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}_2$ egyenletrendszer? Ha igen, akkor írja fel a megoldáshalmazokat!
    - Adja meg az $A\cdot\underline{x} = \underline{o}$ homogén egyenletrendszer megoldáshalmazát!

a,

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$
$\underline{a}_2$	3	2	-1	1
$\underline{e}_2$	0	0	0	1
$\underline{a}_4$	-2	1	4	0
$\underline{e}_4$	0	0	0	0

b,

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$
$\underline{e}_1$	0	0	0	1	0
$\underline{a}_3$	-1	3	5	2	1
$\underline{e}_3$	0	0	0	0	0
$\underline{e}_4$	0	0	0	0	0

c,

bázis	$\underline{a}_3$	$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$
$\underline{a}_2$	-1	1	-2
$\underline{e}_2$	0	1	0
$\underline{a}_1$	5	1	3
$\underline{a}_4$	2	1	4

d,

bázis	$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$
$\underline{a}_3$	-2	0
$\underline{a}_2$	5	2
$\underline{a}_1$	4	-1
$\underline{a}_4$	3	6

11. Legyen $A=[\underline{a}_1\ \ \underline{a}_2\ \ \underline{a}_3\ \ \underline{a}_4]_{4\times 4}$ egy mátrix, $\underline{b}\in R^4$.
Az alábbi táblázatot ismerjük:

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
$\underline{a}_1$	1	0	0	6	0
$\underline{e}_2$	0	0	0		
$\underline{a}_2$	0	1	0	3	2
$\underline{a}_3$	0	0	1	0	-1

A táblázat hiányzó helyeire válasszon számértékeket úgy, hogy

- az $A\cdot\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek ne legyen megoldása;
- az $A\cdot\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldásvektora legyen;
- az $A\cdot\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora legyen!

Az utóbbi két esetben adja meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát!

12. Oldja meg Cramer-szabállyal az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

a,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & + & 2z & = & 5 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 4x & - & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

b,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 8y & - & 6z & = & -5 \\ 6x & + & 10y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$

c,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 6 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & 3 \\ 6x & + & y & + & 2z & = & 21 \end{array}$$

d,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -5 \\ 4x & - & y & - & z & = & -3 \end{array}$$

13. Hogyan kell megválasztani a c paraméter értékét, hogy az alábbi egyenletrendszernek csak triviális megoldása legyen?

a,

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + c\cdot y + 3z &= 0 \\ x - 3y - c\cdot z &= 0 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 3z &= 0 \\ 3x - 2y &= 0 \\ 4x + 3y + c\cdot z &= 0 \end{aligned}$$

14. Hogyan kell megválasztani a c paraméter értékét, hogy az alábbi egyenletrendszernek legyen a triviálistól különböző megoldása? A c paraméter ilyen értéke mellett oldja meg az egyenletrendszert!

a,

$$\begin{aligned} c\cdot x + y + 3z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ -3x + y - c\cdot z &= 0 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 0 \\ -3x + 13y + c\cdot z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

15. Melyik tanult módszert lehet alkalmazni az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldására? Amelyik módszer használható, azzal oldja meg az egyenletrendszert!

a,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 4 \end{aligned}$$

c,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 13 \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \end{array}$$

f,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \end{array}$$

g,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$