Lineáris algebra **Név:...**

MIMAB112A **Szak:………………………………**

2009. január 6. **Neptun kód:……………………….**

Elméleti kérdések

1. Mit értünk azon, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ n-vektorok lineárisan függetlenek ill. lineárisan összefüggőek? Milyen állításokat ismer a lineáris függetlenségre ill. összefüggőségre vonatkozóan? (6 pont)
2. Mit értünk két n-vektor skaláris szorzatán? Ismertesse a skaláris szorzat tulajdonságait! Mit mond ki a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség ill. a Minkowsky egyenlőtlenség? (6 pont)
3. Hogyan értelmezzük két mátrix szorzatát? Milyen tulajdonságai vannak a mátrixszorzásnak? (4 pont)
4. Írja fel a lineáris egyenletrendszerek általános, részletes alakját! Mi a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele? Írja fel a „megoldó képletet" és értelmezze azt! (6 pont)
5. Ismertesse a Leontieff-modellek lényegét! (6 pont)

Feladatok

1. Tekintsük az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & c\cdot x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

   a, Adja meg az x_3-t a Cramer szabállyal c=0 esetén!
   b, Milyen c érték esetén nincs megoldása a fenti egyenletrendszernek? Mit mondhatunk ebben az esetben az egyenletrendszer homogén párjának megoldáshalmazáról? (6 pont)

2. Tekintsük az alábbi lineáris leképezéseket:

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad (x_1, x_2) \mapsto (2x_1+3x_2, x_1-x_2),$$
$$\mathcal{B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\quad x \mapsto (-x, 2x).$$

   a, Írja fel az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés mátrixát!
   b, Injektív-e az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés? Ha injektív, akkor adja meg az inverzét (az inverz transzformáció típusát és hozzárendelési szabályát)!
   c, Mennyi az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés rangja?
   d, Melyik létezik az $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ illetve $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ leképezések közül? Amelyik létezik, annak adja meg a mátrixát! (8 pont)

Teszt kérdések

1. Melyik állítás igaz? (egyszeres választás)

A – Lineárisan összefüggő vektorhalmaz részhalmaza is lineárisan összefüggő.

B – Ha egy R^n –beli lineárisan független vektorhalmaz n vektorból áll, akkor az bázis.

C – Minden lineárisan összefüggő vektorhalmaz tartalmazza a nullvektort.

D – Ha egy vektorhalmaz rangja r, akkor a vektorhalmazt egy vektorral bővítve a rang r+1-re nő.

2. Melyik állítás <u>nem</u> igaz? (egyszeres választás)

A – Ha A invertálható mátrix, akkor A négyzetes.

B – Ha $\det(A)\neq 0$, akkor az $A\underline{x}=\underline{o}$ lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

C – Ha $A = A^T$, akkor az A mátrix invertálható.

D – Ha az A mátrix speciálisan egy sorvektor, akkor az $A \cdot B$ szorzat eredménye (ha létezik), szintén sorvektor.

3. Melyik állítás igaz? (többszörös választás)

A – $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$

B – A determináns értéke -1-szeresére változik, ha a mátrixban felcserélünk két sort.

C – Ha A invertálható, akkor $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=1$.

D – A determináns értéke nem változik, ha a mátrixban valamelyik oszlopot megszorozzuk egy skalárral, majd ehhez hozzáadjuk egy másik oszlopot.

4. Melyik állítás <u>nem</u> igaz? (többszörös választás)

A – Ha az $A\underline{x}=\underline{o}$ lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor az inhomogén párja is megoldható.

B – Ha az együtthatómátrix rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.

C – Ha egy inhomogén egyenletrendszer egyértelműen megoldható, akkor a homogén párjának csak triviális megoldása van.

D – Ha az A mátrix nxn-es, akkor az $A\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszernek n különböző megoldásvektora van.

(4x2 pont)