Az R^n vektortér

1. Legyen $\underline{a} = (2, -1, 4)$, $\underline{b} = (0, 5, -2)$, $\underline{c} = (1, 6, -4)$.
   Számítsa ki az alábbi vektorokat!
   $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{b}$, $3\underline{a}$, $-2\underline{c}$, $\underline{a} + 3\underline{b} + (-2)\underline{c}$

2. Legyen $\underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   Számítsa ki az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok 5 és -2 skalárokkal vett lineáris kombinációját!

3. a, Fejezze ki a $3\underline{x} + 2\underline{a} = 4\underline{b}$ vektoregyenletből az $\underline{x}$ vektort!
   b, Fejezze ki a $2\underline{x} + 5\underline{a} = 4\underline{b} - \underline{a} + 4\underline{x}$ vektoregyenletből az $\underline{x}$ vektort!

4. Legyen $\underline{a} = (-1, 5)$, $\underline{b} = (1, 1)$. Határozza meg azt az $\underline{x}$ vektort, amelyre $2\underline{x} - \underline{a} = 5\underline{b}$.

5. Mennyi az a_1, a_2, a_3, vektorkomponensek értéke, ha
   $2(a_1, a_2, a_3) + 3(2, 5, -1) = (8, 15, -11)$?

6. Legyen $\underline{a} = (2, -3)$, $\underline{b} = (0, 5)$. Előállítható-e az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjával a $\underline{c} = (-2, 23)$ vektor?

7. Legyen $\underline{a} = (1, -2)$, $\underline{b} = (-2, 4)$. Előállítható-e az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjával a $\underline{c} = (1, 0)$ vektor?

8. Legyen $\underline{a} = (5, 4, -2, 3)$, $\underline{b} = (2, 0, -1, 5)$, $\underline{c} = (3, 0, 4, -6)$.
   a, Végezze el az alábbi műveleteket!
   $\underline{a} + \underline{b}$, $-2\underline{c}$, $-\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c}$
   b, Adja meg azt a vektort, amely az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok 3, -1, 4 skalárokkal vett lineáris kombinációja!
   c, Előállítható-e az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjával az $\underline{x} = (6, 4, 0, 19)$ vektor?

9. Legyen $\underline{a} = (-1, 2, 0)$, $\underline{b} = (3, 5, 2)$, $\underline{c} = (-2, 1, 4)$.
   a, Állítsa elő a $2\underline{a} - 3\underline{b} - \underline{c}$ lineáris kombinációt!
   b, Legyen $H = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$. Hogyan állítható elő a H vektorhalmaz elemeiből az R^3 vektortér nullvektora? Lineárisan független, vagy lineárisan összefüggő a H vektorhalmaz?
   c, Legyen $\underline{x} = (1, 9, 2)$, $\underline{y} = (0, -3, 4)$.
   Előállítható-e az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjával az $\underline{x}$ illetve az $\underline{y}$ vektor? Geometriailag is értékelje az eredményt!

10. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 3, 2)$, $\underline{a}_2 = (2, 1, 5)$, $\underline{a}_3 = (3, 4, 2)$.
    Bázist alkotnak-e az R^3 térben az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$ vektorok? Ha igen, akkor határozza meg a $\underline{v} = (14, 17, 18)$ vektor rájuk vonatkozó koordinátáit!

11. Legyen $\underline{a} = (5, 2, 4)$, $\underline{b} = (-1, 0, 3)$, $\underline{c} = (6, -4, 5)$, $\underline{d} = (3, 2, 10)$.
   a, Hogyan állítható elő az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokból az R^3 vektortér nullvektora?
   b, Hogyan állítható elő az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{d}$ vektorokból az R^3 vektortér nullvektora?
   c, Megadható-e olyan $\underline{x} \in R^3$ vektor, amely nem állítható elő az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ (illetve az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{d}$) vektorok lineáris kombinációjaként?
   d, Bázist alkotnak-e az R^3 térben az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ (illetve az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{d}$) vektorok? Ha igen, akkor határozza meg a $\underline{v} = (16, 0, 13)$ vektor rájuk vonatkozó koordinátáit!

12. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, 0)$, $\underline{a}_2 = (0\ 1, 1)$, $\underline{a}_3 = (2, 2, -2)$.
   Megadható-e olyan $\underline{x} \in R^3$ vektor, amely az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjával nem fejezhető ki? Ha igen, akkor adjon példát ilyen vektorra!

13. Legyen $H_1 = \{ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0) \}$,
   $H_2 = \{ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0) \}$,
   $H_3 = \{ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0),\ (0, 1, 1) \}$.
   A fenti vektorhalmazokra mi illik az alábbi felsorolásokból?
   - lineárisan független,
   - lineárisan összefüggő,
   - bázis
   - a vektorhalmaz vektoraiból lineáris kombinációval előállítható az R^3 vektortér összes vektora.

14. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, 4)$, $\underline{a}_2 = (-3\ 1, 2)$, $\underline{a}_3 = (-2, 3, 6)$, $\underline{a}_4 = (-1\ 5, 10)$, $\underline{a}_5 = (4, 1, 2)$, $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$. Mennyi a H vektorhalmaz rangja?

15. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\underline{a}_2 = (-1, -3, -1, 3)$, $\underline{a}_3 = (3, 7, -1, -3)$, $\underline{a}_4 = (2, 5, 0, -3)$, $\underline{a}_5 = (0, 1, 2, -3)$. $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.
   a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
   b, Adjon meg olyan $\underline{a} \neq \underline{o}$ vektort, amelyet a H vektorhalmazhoz csatolva nem növeli a vektorhalmaz rangját!

16. Legyen $\underline{a}_1 = (1, 2, 2,-1)$, $\underline{a}_2 = (0, -1, 1, -1)$, $\underline{a}_3 = (2, 5, 3, -1)$, $\underline{a}_4 = (1, 3, 1, 0)$, $\underline{a}_5 = (1, 4, 0, 1)$. $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\}$.
   a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
   b, Adjon meg olyan $\underline{a} \in R^4$ vektort, amely nem állítható elő a H vektorhalmaz vektorainak lineáris kombinációjaként!

17. Legyen $\underline{a}_1 = (-3, 4, 2)$, $\underline{a}_2 = (1, 0, 0)$, $\underline{a}_3 = (1, 2, -1)$, $\underline{a}_4 = (-5, 0, 7)$, $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4,\}$.
   a, Mennyi a H vektorhalmaz rangja?
   b, Előállítható-e az $\underline{a}_1$ vektor az $\underline{a}_3$ és $\underline{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként?
   c, Előállítható-e az $\underline{a}_2$ vektor az $\underline{a}_3$ és $\underline{a}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként?

18. Legyen $\underline{a} = (-2, 1)$ és $\underline{b} = (5, 3)$.
   a, Számítsa ki az alábbiakat: $\underline{a} \cdot \underline{a}$, $\underline{a} \cdot \underline{b}$, $\underline{a} \cdot (\underline{a} + \underline{b})$.
   b, Ellenőrizze, hogy $\underline{a} \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{a} + \underline{a} \cdot \underline{b}$.
   c, Számítsa ki az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok hosszát!
   d, Számítsa ki az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által bezárt szöget!

19. Legyen $\underline{a} = (1, -2, -4)$, $\underline{b} = (-1, 0, 3)$, $\underline{c} = (2, -1, 1)$.
   a, Ellenőrizze a skaláris szorzatra vonatkozó tulajdonságokat a fenti vektorok esetén!
   b, Számítsa ki a következő normákat! $\| \underline{a} \|$, $\| \underline{b} \|$, $\| \underline{c} \|$
   c, Ellenőrizze a Cauchy- Schwarz-egyenlőtlenséget az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ illetve a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokra!
   d, Számítsa ki az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ illetve a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok szögét!

20. Az alábbi vektorok közül melyek ortogonálisak?
   - (-4, 2) és (1, 2),
   - (2, 0, -3) és (3, 5, -1),
   - (0, 4, -5) és (6, 10, 8),
   - (1, -1, 0, 1) és (1, 0, 6, -1),
   - (2, 4, -3, 0) és (1, -5, 1, 1).

21. *x* mely értékeire lesznek ortogonálisak az alábbi vektorok?
   - $(x, 0, -3, 2x)$ és $(4, 5, 2, 1)$,
   - $(x, 4, 1)$ és $(x, -x, 3)$,
   - $(2, 3x, 2)$ és $(5, -2, 3x)$.

22. Az *A* vállalat négyféle termékből rendre 8, 5, 6 és 3 egységnyi mennyiséget rendelt. A *B* vállalat rendelése ugyanezen termékekre: 5, 0, 10 és 4 egység. A négyféle termék egységára: 12, 8, 15, 10 eFt. Legyenek $\underline{x}_A$ és $\underline{x}_B$ az *A* illetve *B* vállalatok által rendelt termékmennyiségeket tartalmazó vektorok. Legyen $\underline{p} = (12, 8, 15, 10)$ az árvektor. Ezen vektorok felhasználásával adja meg az alábbiakat!
   - Mennyi az *A* és *B* vállalat együttes rendelése? Összesen mennyi a két vállalat rendelésének az összértéke?
   - Mennyi a rendelés értéke külön-külön a két vállalatnál?

23. Egy vállalat termelése 5 féle termékből 12, 8, 5, 9 és 10 egység, míg a felhasználása ugyanezen termékekből 5, 10, 4, 11 és 6. A termékek egységára rendre 2, 5, 7, 4 és 8 eFt.
   a, A termeléseket és a felhasználásokat tartalmazó vektorok , valamint az árvektor segítségével adja meg a nettó kibocsátás vektorát !
   b, Számítsa ki a cég bevételét és kiadását!
   c, Mutassa meg, hogy a vállalat profitját a $\underline{p} \cdot \underline{z}$ skaláris szorzat adja, ahol $\underline{p}$ az árvektor, $\underline{z}$ pedig a nettó kibocsátások vektora! Mit jelent az, ha a $\underline{p} \cdot \underline{z}$ skaláris szorzat negatív?

24. Az alábbi vektorhalmazok közül melyek alterek az R^3 térben?
- $H_1 = \{ \lambda_1 \cdot (1, 0, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$,
- $H_2 = \{ \lambda \cdot (1, 2, -5) \mid \lambda \in R^+ \}$,
- $H_3 = \{ \lambda \cdot (1, 2, -5) \mid \lambda \in R \}$,
- $H_4 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1, x_2, x_3 < 0 \}$
- $H_5 = \{ \lambda \cdot (3, -4, 2) \mid \lambda \in R \}$,
- $H_6 = \{ \lambda \cdot (3, -4, 2) + (1, 1, 1) \mid \lambda \in R \}$,
- $H_7 = \{ \lambda_1 \cdot (3, -4, 2) + \lambda_2 \cdot (1, 1, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$,
- $H_8 = \{ (\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in R \}$.

25. Adja meg annak az egyenesnek a paraméteres vektoregyenletét ill. paraméteres egyenletrendszerét, amely
   a, áthalad az $\underline{a} = (2, -3, 4)$ és a $\underline{b} = (5,0\ 1)$ pontokon!
   b, áthalad az $\underline{a} = (3, 5, -1)$ ponton és irányvektora $\underline{v} = (2, -1, 3)$!

26. Egy egyenes paraméteres egyenletrendszere:
$$x_1 = 2 + 3t$$
$$x_2 = 4t$$
$$x_3 = 1 - 2t$$
   a, Adja meg az egyenes néhány pontját és egy irányvektorát!
   b, Illeszkedik-e az egyenesre a (8, 8, -3) és a (2, 4. 0) pont?

27. Adja meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $\underline{a} = (2, 0, 5)$ pontra és normálvektora $\underline{p} = (2, -1, 4)$.

28. Adja meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $\underline{a} = (4, 1, 5)$, $\underline{b} = (6, 0, 3)$ és $\underline{c} = (3, 3, 6)$ pontokra!

29. Egy sík egyenlete: $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 10$.
   a, Adjon meg néhány, a síkra illeszkedő pontot! Adja meg a sík egy normálvektorát!
   b, Illeszkednek-e a síkra az alábbi pontok?
   (1, 1, 1), (6, 0, 2), (1, 1, -5).

30. Egy egyenes paraméteres egyenletrendszere:
$$x_1 = 5 + t$$
$$x_2 = -2 + 4t$$
$$x_3 = 3 - 2t$$
   Adja meg annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a fenti egyenesre és áthalad az $\underline{a} = (2, 0, 3)$ ponton!

31. Egy sík egyenlete $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$.
   Adja meg annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely merőleges a fenti síkra és áthalad az $\underline{a} = (2, -1, 5)$ ponton!