Szöveges feladatok a mátrixaritmetika alkalmazására

Bevezetés:

Tekintsük az alábbi 3×4-es mátrixot: $A=\begin{bmatrix}2&4&1&5\\3&2&8&1\\7&3&5&0\end{bmatrix}$. Szorozzuk meg ezt jobbról egy alkalmas méretű (azaz 4×1-es) oszlopvektorral, amely az R^4 tér kanonikus bázisának első vektorával, az $\underline{e}_1$ vektorral azonosítható:

$$A\cdot\underline{e}_1=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\3\\7\end{matrix}}&\begin{matrix}4\\2\\3\end{matrix}&\begin{matrix}1\\8\\5\end{matrix}&\begin{matrix}5\\1\\0\end{matrix}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\7\end{bmatrix}.$$

Megfigyelhető, hogy az eredményül kapott oszlopvektor éppen az A mátrix első oszlop-vektora.

Hasonló módon, ha az A mátrixot az R^4 tér kanonikus bázisának második vektorával, az $\underline{e}_2$ vektorral szorozzuk jobbról, akkor eredményül az A mátrix második oszlopvektorát kapjuk:

$$A\cdot\underline{e}_2=\begin{bmatrix}\begin{matrix}2\\3\\7\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}4\\2\\3\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\8\\5\end{matrix}&\begin{matrix}5\\1\\0\end{matrix}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}$$, és így tovább.

Szorozzuk meg most az A mátrixot balról egy alkalmas méretű (azaz 1×3-as) sorvektorral, amely az R^3 tér kanonikus bázisának első vektorával, az $\underline{e}_1$ vektorral azonosítható. Hangsúlyozzuk azt, hogy sorvektorral akarunk balról szorozni a transzponált jel kiírásával:

$$\underline{e}_1^{\mathrm{T}}\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}2&4&1&5\end{matrix}}\\\begin{matrix}3&2&8&1\end{matrix}\\\begin{matrix}7&3&5&0\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&1&5\end{bmatrix}.$$

Megfigyelhető, hogy az eredményül kapott sorvektor éppen az A mátrix első sorvektora.

Hasonló módon, ha az A mátrixot az R^3 tér kanonikus bázisának második vektorának megfelelő sorvektorral, azaz az $\underline{e}_2^{\mathrm{T}}$ vektorral szorozzuk balról, akkor eredményül az A mátrix második sorvektorát kapjuk:

$$\underline{e}_2^{\mathrm{T}}\cdot A=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\begin{matrix}2&4&1&5\end{matrix}\\\boxed{\begin{matrix}3&2&8&1\end{matrix}}\\\begin{matrix}7&3&5&0\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&8&1\end{bmatrix}$$, és így tovább.

Az olyan oszlopvektorokat, amelyeknek minden eleme 1, **összegző vektor**nak nevezzük. Jelölése: $\underline{1}$.

Szorozzuk meg most az A mátrixot jobbról egy alkalmas méretű (azaz 4×1-es) összegző vektorral:

$$A\cdot\underline{1}=\begin{bmatrix}2&4&1&5\\3&2&8&1\\7&3&5&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\14\\15\end{bmatrix}.$$

Megfigyelhető, hogy egy olyan oszlopvektort kaptunk eredményül, amelynek első eleme egyenlő az A mátrix első sorában lévő elemek összegével. második eleme megegyezik az A mátrix második sorában lévő elemek összegével, míg az eredményül kapott oszlopvektor harmadik eleme az A mátrix harmadik sorában lévő elemek összegével egyenlő. Vagyis az összegző vektorral (jobbról) történő szorzás hatására összeadódtak az A mátrix soraiban az elemek.

Szorozzuk meg ezután az A mátrixot balról egy alkalmas méretű (azaz 1×3-as) sorvektorral, melynek minden eleme 1. Ezt a vektort $\underline{1}^T$-vel jelöljük, hangsúlyozva azt, hogy most sorvektorral szorzunk:

$$\underline{1}^T\cdot A=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4&1&5\\3&2&8&1\\7&3&5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&9&14&6\end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a kapott sorvektor első eleme éppen az A mátrix első oszlopában elhelyezkedő elemek összegével egyenlő, a második elem éppen az A mátrix második oszlopában lévő elemek összege, és így tovább.

Végül szorozzuk meg az A mátrixot balról egy megfelelő méretű összegző vektor transzponáltjával, jobbról pedig egy alkalmas méretű összegző vektorral:

$$\underline{1}^T\cdot A\cdot\underline{1}=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4&1&5\\3&2&8&1\\7&3&5&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&9&14&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41\end{bmatrix}.$$

Észrevehetjük, hogy a kapott 1×1-es mátrix egyetlen eleme egyenlő az A mátrix összes elemének összegével.

1. **Minta feladat:**

Tekintsük az $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixot.

a. Mivel egyenlők az alábbi kifejezések?

$$\underline{e}_2^{\mathrm{T}}\cdot A, \quad A\cdot\underline{e}_3, \quad \underline{1}^{\mathrm{T}}\cdot A, \quad A\cdot\underline{1}, \quad \underline{e}_3^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot\underline{1}, \quad \underline{1}^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot\underline{e}_1$$

(Feltételezzük, hogy a kifejezésekben szereplő sor- és oszlopvektorok olyan méretűek, hogy valamennyi szorzás elvégezhető, azaz valamennyi sorvektor 1×4-es, és valamennyi oszlopvektor 5×1-es méretű.)

b. Írja fel a tanult mátrixaritmetikát alkalmazva azt a kifejezést, amely megadja

- az A mátrix második oszlopvektorát;
- az A mátrix negyedik sorvektorát;
- az A mátrix ötödik oszlopában lévő elemek összegét;
- az A mátrix első sorában lévő elemek összegét;
- minden egyes sorra vonatkozóan a sorokban lévő elemek összegét;
- minden egyes oszlopra vonatkozóan az oszlopokban lévő elemek összegét;
- az A mátrix összes elemének összegét!

Számolja is ki a felírt kifejezéseket!

Megoldás:

a. Felhasználva a bevezető részben szerzett tapasztalatokat, a felírt kifejezések minimális számolással megadhatóak:

Ha az $\underline{e}_2^{\mathrm{T}}$ sorvektorral szorozzuk balról az A mátrixot, akkor a második sort „vágjuk ki” az eredeti mátrixból:

$$\underline{e}_2^{\mathrm{T}}\cdot A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Ha az $\underline{e}_3$ vektorral szorozzuk jobbról az A mátrixot, akkor a harmadik oszlopot „vágjuk ki” az eredeti mátrixból:

$$A\cdot\underline{e}_3=\begin{bmatrix}2&4&6&3&0\\1&5&4&7&2\\0&3&1&5&2\\4&1&1&3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\4\\1\\1\end{bmatrix}$$

Az $\underline{1}^{\mathrm{T}}\cdot A$ kifejezés egy olyan sorvektort ad eredményül, amelyben az elemek egyenlők az A mátrix egy-egy oszlopában elhelyezkedő elemek összegével:

$$\underline{1}^{\mathrm{T}}\cdot A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4&6&3&0\\1&5&4&7&2\\0&3&1&5&2\\4&1&1&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&13&12&18&4\end{bmatrix}$$

Az $A\cdot\underline{1}$ kifejezés eredménye egy olyan oszlopvektor, amelynek elemei egyenlők az A mátrix egy-egy sorában lévő elemek összegével:

$$A\cdot\underline{1}=\begin{bmatrix}2&4&6&3&0\\1&5&4&7&2\\0&3&1&5&2\\4&1&1&3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\19\\11\\9\end{bmatrix}$$

Az $\underline{e}_3{}^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot\underline{1}$ kifejezésben $\underline{e}_3{}^{\mathrm{T}}\cdot A$ az A mátrix harmadik sorvektorával egyenlő. Ezt jobbról szorozva egy összegző vektorral, eredményül egy olyan 1×1-es mátrixot kapunk, melynek eleme az A mátrix harmadik sorában lévő elemek összegével egyenlő:

$$\underline{e}_3{}^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot\underline{1}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4&6&3&0\\1&5&4&7&2\\0&3&1&5&2\\4&1&1&3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&1&5&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\end{bmatrix}$$

Az $\underline{1}^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot\underline{e}_1$ kifejezésben $A\cdot\underline{e}_1$ az A mátrix első oszlopvektorával egyenlő. Ha ezt balról szorozzuk egy összegző vektor transzponáltjával, akkor eredményül egy olyan 1×1-es mátrixot kapunk, melynek eleme az A mátrix első oszlopában lévő elemek összegével egyenlő:

$$\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

b. Írjuk fel a megfelelő kifejezéseket!

- Az A mátrix második oszlopvektorát úgy kapjuk meg, hogy az A mátrixot jobbról az $\underline{e}_2$ oszlopvektorral szorozzuk:

$$A \cdot \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Az A mátrix negyedik sorvektorát úgy kapjuk meg, hogy az A mátrixot balról szorozzuk az $\underline{e}_4^T$ sorvektorral:

$$\underline{e}_4^T \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Az A mátrix ötödik oszlopában lévő elemek összegét úgy kaphatjuk meg, hogy az A mátrix ötödik oszlopvektorát előállítjuk az $A \cdot \underline{e}_5$ szorzattal, ezt pedig balról szorozzuk az összegző vektor transzponáltjával:

$$\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{e}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

- Az A mátrix első sorában lévő elemek összegét úgy kaphatjuk meg, hogy az $\underline{e}_1^T \cdot A$ szorzattal előállítjuk az A mátrix első sorvektorát, majd ezt jobbról szorozzuk az összegző vektorral:

$$\underline{e}_1^{T} \cdot A \cdot \underline{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$$

- Minden egyes sorra vonatkozóan a sorokban lévő elemek összegét kapjuk, ha az A mátrixot jobbról az összegző vektorral szorozzuk:

$$A \cdot \underline{1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 19 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- Minden egyes oszlopra vonatkozóan az oszlopokban lévő elemek összegét kapjuk, ha az A mátrixot balról szorozzuk az összegző vektor transzponáltjával:

$$\underline{1}^{T} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 12 & 18 & 4 \end{bmatrix}$$

- Az A mátrix összes elemének összegét akkor kapjuk, ha balról az összegző vektor transzponáltjával, jobbról az összegző vektorral szorzunk:

$$\underline{1}^{T} \cdot A \cdot \underline{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 12 & 18 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \end{bmatrix}$$

2. **Minta feladat:**

Egy vállalat az év első négy hónapjában háromféle termékből az alábbi mennyiségeket gyártja:

	1. termék	2. termék	3. termék
Január	24	32	18
Február	30	34	22
Március	35	40	34
Április	28	36	40

Az egyes termékek eladási árait tartalmazó árvektor (eFt-ban): $\underline{p} = [100, 200, 150]^T$.

Legyen A a táblázat adataiból nyert mátrix.

a. Számítsa ki és értelmezze az alábbi kifejezéseket!

$\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{e}_2$, $A \cdot \underline{e}_1$, $\underline{e}_3^T \cdot A \cdot \underline{p}$.

b. Írja fel és számítsa ki azokat a kifejezéseket, amelyek megadják, hogy

- mennyi április hónapban az egyes termékekből gyártott mennyiség;
- mennyi az egyes hónapokban a vállalat árbevétele:
- mennyi az egyes termékekből a négy hónap alatt gyártott összes mennyiség.

Megoldás:

a. Az $A \cdot \underline{e}_2$ szorzat az A mátrix második oszlopvektorával egyenlő, azaz megadja, hogy az egyes hónapokban a vállalat mennyit gyártott a második termékből. Ha ezt még balról szorozzuk az összegző vektorral, akkor az A mátrix második oszlopában lévő elemek összegét kapjuk. Tehát az $\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{e}_2$ szorzat megadja, hogy a vállalat az év első négy hónapjában összesen mennyit gyártott a második termékből:

$$\underline{1}^T \cdot A \cdot \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 32 & 18 \\ 30 & 34 & 22 \\ 35 & 40 & 34 \\ 28 & 36 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 32 \\ 34 \\ 40 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 142 \end{bmatrix}$$

Az $A \cdot \underline{e}_1$ szorzat az A mátrix első oszlopvektorával egyenlő, azaz megadja, hogy az egyes hónapokban a vállalat mennyit gyártott az első termékből:

$$A \cdot \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 24 & 32 & 18 \\ 30 & 34 & 22 \\ 35 & 40 & 34 \\ 28 & 36 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ 35 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{e}_3^T \cdot A$ szorzat az A mátrix harmadik sorvektorával egyenlő, amely megadja, hogy a vállalat márciusban mennyit gyártott az egyes termékekből. Ha ezt jobbról a $\underline{p}$ árvektorral szorozzuk, akkor megkapjuk, hogy a háromféle termékből mennyi volt a vállalat márciusi összes árbevétele (eFt-ban):

$$\underline{e}_3^T \cdot A \cdot \underline{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 32 & 18 \\ 30 & 34 & 22 \\ 35 & 40 & 34 \\ 28 & 36 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 40 & 34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16600 \end{bmatrix}$$

b. Az április hónapban az egyes termékekből gyártott mennyiségek az A mátrix negyedik sorában találhatóak, a mátrix negyedik sorvektora az $\underline{e}_4^T \cdot A$ szorzattal kapható meg:

$$\underline{e}_4^T \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 32 & 18 \\ 30 & 34 & 22 \\ 35 & 40 & 34 \\ 28 & 36 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 36 & 40 \end{bmatrix}$$

Az egyes hónapokban a vállalat árbevételét az $A \cdot \underline{p}$ szorzat adja meg:

$$A \cdot \underline{p} = \begin{bmatrix} 24 & 32 & 18 \\ 30 & 34 & 22 \\ 35 & 40 & 34 \\ 28 & 36 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11500 \\ 13100 \\ 16600 \\ 16000 \end{bmatrix}$$

Az egyes termékekből a négy hónap alatt gyártott összes mennyiségeket az $\underline{1}^T \cdot A$ szorzattal kapjuk:

$$\underline{1}^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 32 & 18 \\ 30 & 34 & 22 \\ 35 & 40 & 34 \\ 28 & 36 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117 & 142 & 114 \end{bmatrix}$$

3. **Minta feladat:**

Egy koncertre 3 héten keresztül négyféle kategóriában árultak jegyeket. Az alábbi táblázat az egyes heteken az egyes kategóriákban eladott jegyek számát tartalmazza:

	1. kategória	2. kategória	3. kategória	4. kategória
1. hét	150	100	70	50
2. hét	200	120	100	80
3. hét	180	80	120	100

Az egyes kategóriák jegyárait tartalmazza a következő árvektor (eFt-ban): $\underline{p} = [1, 1.5, 2, 3]^T$.

Legyen A a táblázat adataiból nyert mátrix.

a. Számítsa ki és értelmezze az alábbi kifejezéseket!

$1^T \cdot A$, $A \cdot \underline{e}_2$, $\underline{e}_1^T \cdot A \cdot \underline{p}$.

b. Írja fel és számítsa ki azokat a kifejezéseket, amelyek megadják, hogy

- mennyi a második héten az egyes kategóriákban értékesített jegyek száma;
- mennyi az egyes heteken az eladott összes jegyek száma;
- mennyi a 3 hét alatt a jegyek eladásából származó összes árbevétel?

Megoldás:

a. Az $1^T \cdot A$ szorzat egy olyan sorvektort ad eredményül, amelyben oszloponként összegezzük az A mátrix elemeit, azaz megkapjuk, hogy az egyes kategóriákban hány jegyet adtak el a 3 hét alatt összesen:

$$1^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 & 100 & 70 & 50 \\ 200 & 120 & 100 & 80 \\ 180 & 80 & 120 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 530 & 300 & 290 & 230 \end{bmatrix}$$

Az $A \cdot \underline{e}_2$ szorzat az A mátrix második oszlopvektorával egyenlő, azaz megadja, hogy a második kategóriájú jegyekből az egyes heteken hány darabot adtak el:

$$A \cdot \underline{e}_2 = \cdot \begin{bmatrix} 150 & 100 & 70 & 50 \\ 200 & 120 & 100 & 80 \\ 180 & 80 & 120 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{e}_1^T \cdot A$ szorzat egyenlő az A mátrix első sorvektorával, azaz megadja, hogy az első héten hány jegyet adtak el az egyes kategóriákban. Ezt jobbról szorozva az árvektorral, megkapjuk az első heti árbevételt (eFt-ban):

$$\underline{e}_1^T \cdot A \cdot \underline{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 & 100 & 70 & 50 \\ 200 & 120 & 100 & 80 \\ 180 & 80 & 120 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & 100 & 70 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 590 \end{bmatrix}$$

b. A második héten az egyes kategóriákban értékesített jegyek számát az A mátrix második sorában találjuk, a mátrix második sorvektorát az $\underline{e}_2^T \cdot A$ szorzat adja meg:

$$\underline{e}_2^T \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 & 100 & 70 & 50 \\ 200 & 120 & 100 & 80 \\ 180 & 80 & 120 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 120 & 100 & 80 \end{bmatrix}$$

Az egyes heteken az eladott összes jegyek számát az $A \cdot \underline{1}$ szorzattal adhatjuk meg:

$$A \cdot \underline{1} = \begin{bmatrix} 150 & 100 & 70 & 50 \\ 200 & 120 & 100 & 80 \\ 180 & 80 & 120 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 370 \\ 500 \\ 480 \end{bmatrix}$$

Az $1^T \cdot A$ szorzat egy olyan sorvektort ad eredményül, amely megadja, hogy az egyes kategóriákban hány jegyet adtak el a 3 hét alatt összesen. Ezt kell még jobbról a $\underline{p}$ árvektorral szorozni, hogy megkapjuk a 3 hét alatt a jegyek eladásából származó összes árbevételt (eFt-ban):

$$1^T \cdot A \cdot \underline{p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 & 100 & 70 & 50 \\ 200 & 120 & 100 & 80 \\ 180 & 80 & 120 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 530 & 300 & 290 & 230 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2250 \end{bmatrix}$$