Leontieff-modellek

A közgazdászok által használt különféle matematikai modellek sok esetben tartalmaznak egyenletrendszereket. Ha ezekben az egyenletek lineárisak, akkor lineáris egyenletrendszerről beszélünk. A közgazdaságtan egyik irányzata, az input-output elemzés szintén lineáris egyenletrendszereket használ. A II. világháború idején amerikai és orosz közgazdászok is fejlesztettek ki olyan több száz egyenletet és ismeretlent tartalmazó modelleket, amelyek katonai és egyéb eszközök termelésének tervezését segítették. Úttörő jelentőségűek voltak a Wassily Leontieff által kidolgozott modellek, amelyek a szerző *Az amerikai gazdaság szerkezete 1919-1939* című munkájában jelentek meg.

A **Leontieff-modellek**: a gazdaság leírására szolgáló input-output modellek. Lényegük a következő: Tegyük fel, hogy egy gazdaságban n féle, egymással összefüggésben lévő ágazat működik, amelyek mindegyike egy-egy terméket (jószágot) állít elő. Az ágazatok a saját termékük előállításához felhasználják más ágazatok termékeit. Feltételezzük, hogy minden ágazatnak szüksége van inputra a saját termékének gyártásához legalább egy másik ágazat termékéből. Minden ágazatnak az általa előállított termékből ki kell elégítenie a többi ágazat igényeit és egy bizonyos külső (pl. piaci) igényt is. Ezt végső keresletnek is szokás nevezni.

A következő adatokat ismerjük:

- a_{ij}: a j-edik termék egységnyi mennyiségének előállításakor az i-edik termékből felhasznált mennyiség; $(i,j = 1, \dots ,n)$

  (ezeket az adatokat **input (vagy termelési) együtthatók**nak nevezzük)

- b_i: az i-edik termék iránti külső igény; $(i = 1, \dots ,n)$

  végső kereslet

A probléma a következő: Mennyit termeljenek az egyes ágazatok az egyes termékekből, hogy a többi ágazat igényét és a végső keresletet biztosítani tudják?

Jelölje $x_1, \dots ,x_n$ **az egyes termékekből előállított mennyiségek**et. Feltesszük, hogy az input követelmények egyenesen arányosak a megtermelt outputokkal, azaz x_j mennyiségű j-edik termék előállításához az i-edik termékből felhasznált mennyiség: $a_{ij} \cdot x_j$. Ha az egyes termékekből $x_1, \dots ,x_n$ mennyiségeket állítunk elő, akkor ehhez az i-edik termékből felhasznált összmennyiség: $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n$

Az i-edik termékre vonatkozó kereslet és kínálat elvárt egyensúlya szerint az i-edik termékből annyit kell termelni, hogy biztosítsuk a többi ágazat által felhasznált mennyiséget és a végső keresletet:

$$x_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n + b_i \qquad i=1, \dots ,n$$

Megjegyezzük, hogy általános estben az is előfordulhat, hogy egy ágazat a saját termékének gyártásához a saját termékét is felhasználja, azaz az a_{ii} termelési együttható is lehet nullától különböző a fenti egyenletben.

A teljes modell:

$$x_1 = a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n + b_1$$

$$x_2 = a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n + b_2$$

....

$$x_n = a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n + b_n$$

A fenti egyenletrendszert úgy szokás rendezni, hogy az egyenletekben az ismeretlenek a baloldalra kerüljenek, a jobboldalon pedig konstans álljon. Ezt elvégezve az alábbi alakot kapjuk:

$$(1-a_{11})\cdot x_1 - \quad a_{12}\cdot x_2 - \ldots - \quad a_{1n}\cdot x_n = b_1$$

$$-a_{21}\cdot x_1 + \quad (1-a_{22})\cdot x_2 - \ldots - \quad a_{2n}\cdot x_n = b_2$$

......

$$-a_{n1}\cdot x_1 - \quad a_{n2}\cdot x_2 - \quad \ldots + (1-a_{nn})\cdot x_n = b_n$$

Mivel az egyes ágazatok által előállított termékmennyiségek csak nemnegatívak lehetnek, így a fenti lineáris egyenletrendszer olyan $(x_1, \ldots, x_n)$ megoldása érdekel bennünket, ahol az x_i értékek nemnegatívak.

1. **Minta feladat:** (*Lineáris egyenletrendszerek* feladatsor 1. feladat)

Tekintsünk egy olyan gazdaságot, amely két ágazatból (I. és II.) áll. Az I. ágazat által termelt jószág egységnyi mennyiségének előállításához 1/6 egységnyi I.-beli és 1/4 egységnyi II.-beli jószágra van szükség. A II. ágazat által előállított jószág egységéhez 1/4 egységnyi I.-beli és 1/4 egységnyi II.-beli jószágra van szükség. A végső kereslet mindkét szektorban 60 egység.

a. Írja fel a fenti gazdaság Leontieff-modelljét!

b. Számítsa ki, hogy mennyit kell az egyes ágazatoknak termelniük, hogy a végső keresletet ki tudják elégíteni!

Megoldás:

Azonosítsuk először a termelési együtthatókat:

Az I. ágazat által termelt jószág egységnyi mennyiségének előállításához 1/6 egységnyi I.-beli és 1/4 egységnyi II.-beli jószágra van szükség. Ebből: a_{11}=1/6, és a_{21}=1/4.

A II. ágazat által előállított jószág egységéhez 1/4 egységnyi I.-beli és 1/4 egységnyi II.-beli jószágra van szükség. Így a_{12}=1/4 és a_{22}=1/4.

A végső kereslet a két jószágra: b_1=60 és b_2=60.

Jelölje x_1 és x_2 az egyes jószágokból gyártott mennyiségeket.

A fenti adatokat az általános modellbe helyettesítve az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{6}\, x_1 + \tfrac{1}{4}\, x_2 + 60 \\ x_2 &= \tfrac{1}{4}\, x_1 + \tfrac{1}{4}\, x_2 + 60 \end{aligned}$$

Rendezzük az egyenletrendszert úgy, hogy az ismeretlenek a baloldalra, a konstansok a jobboldalra kerüljenek!

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{6}\, x_1 - \tfrac{1}{4}\, x_2 &= 60 \\ -\tfrac{1}{4}\, x_1 + \tfrac{3}{4}\, x_2 &= 60 \end{aligned}$$

A fenti lineáris egyenletrendszert a tanult módszerek bármelyikével megoldhatjuk, vagy kis mérete miatt középiskolai módszert, például az egyenlő együtthatók módszerét is alkalmazhatjuk. Az egyenletrendszer megoldása: x_1=960/9≅106,67 és x_2=1040/9≅115,56.

Mivel a kapott értékek nemnegatívak, a modell szempontjából is megfelelőek. Így tehát az I. ágazatnak 106,67 egységnyi jószágot, míg a II. ágazatnak 115,56 egységnyi jószágot kell termelnie.

2. **Minta feladat:** (*Lineáris egyenletrendszerek* feladatsor: 5. feladat)

Egy három ágazatból felépülő gazdaság esetén a termelési együtthatókat az A mátrix, a végső keresleteket a $\underline{b}$ vektor foglalja össze:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 85 \\ 95 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Írja fel a gazdaság Leontieff-modelljét és mutassa meg, hogy x_1=150, x_2=200 és x_3=100 megoldás!

Megoldás:

Az adatok közvetlenül behelyettesíthetők az általános modellbe:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 85 \\ x_2 &= 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 + 95 \\ x_3 &= 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 20 \end{aligned}$$

A megadott megoldás helyességét közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

3. **Minta feladat:**

Tekintsünk egy három ágazatból felépülő gazdaságot. Az I. ágazat által termelt jószág egységnyi mennyiségének előállításához 0,1 egység I. ágazatbeli, 0,4 egység II. ágazatbeli és 0,2 egység III.

ágazatbeli termékre van szükség. A II. ágazat által előállított jószág egységnyi mennyiségéhez 0,3 egység szükséges mindhárom ágazat termékéből. A III. ágazat termékének egységnyi mennyiségéhez az egyes ágazatok termékeiből rendre 0,3, 0,4 és 0,1 egység szükséges. A termékek iránti végső kereslet 75, 100 és 60 egység.

a. Írja fel a gazdaság Leontieff-modelljét és rendezze azt!
b. Mit jelentenek a modellben szereplő ismeretlenek és mit fejeznek ki a felírt egyenletek?

Megoldás:

a. Azonosítsuk először a termelési együtthatókat:

Az I. ágazat által termelt jószág egységnyi mennyiségének előállításához 0,1 egységnyi I.-beli, 0,4 egységnyi II.-beli, és 0,2 egység III. ágazatbeli termékre van szükség. Ebből: a_{11}=0,1, a_{21}=0,4 és a_{31}=0,2.

A II. ágazat által előállított jószág egységnyi mennyiségéhez 0,3 egység szükséges mindhárom ágazat termékéből, így $a_{12}=a_{22}=a_{32}$=0,3.

A III. ágazat termékének egységnyi mennyiségéhez az egyes ágazatok termékeiből rendre 0,3, 0,4 és 0,1 egység szükséges, tehát a_{13}=0,3, a_{23}=0,4 és a_{33}=0,1.

A termékek iránti végső keresletek: b_1= 75, b_2= 100 és b_3= 60.

Jelölje x_1, x_2 és x_3 az egyes termékekből gyártott mennyiségeket.

A fenti adatokat az általános modellbe helyettesítve az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & 0{,}1x_1 & + & 0{,}3x_2 & + & 0{,}3x_3 & + & 75 \\ x_2 & = & 0{,}4x_1 & + & 0{,}3x_2 & + & 0{,}4x_3 & + & 100 \\ x_3 & = & 0{,}2x_1 & + & 0{,}3x_2 & + & 0{,}1x_3 & + & 60 \end{array}$$

Rendezzük a fenti egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0{,}9x_1 & - & 0{,}3x_2 & - & 0{,}3x_3 & = & 75 \\ -0{,}4x_1 & + & 0{,}7x_2 & - & 0{,}4x_3 & = & 100 \\ -0{,}2x_1 & - & 0{,}3x_2 & + & 0{,}9x_3 & = & 60 \end{array}$$

b. A modellben szereplő ismeretlenek az egyes ágazatok által termelt jószágok mennyiségét adják meg.

A modell egyenletei az egyes termékekre vonatkozó kereslet-kínálati egyensúlyt fogalmazzák meg: az i-edik egyenlet (i=1, 2, 3) szerint az i-edik termékből annyit kell gyártani, hogy biztosítsuk valamennyi ágazat igényét az adott termékből (ami a saját termelésük megvalósításához szükséges), továbbá biztosítsuk az i-edik termék iránti végső keresletet.

4. **Minta feladat:** (*Lineáris egyenletrendszerek* feladatsor 2. feladat)

Az általános Leontieff-modellben

a. mit jelent az, ha a_{ii}=0, minden i-re?
b. mi a jelentése az $a_{i1}+a_{i2}+ \dots +a_{in}$ összegnek?
c. mi a jelentése az alábbi input együtthatóknak (a_{1j}, a_{2j}, … a_{nj}) ?
d. értelmezhető-e az $a_{1j}+ a_{2j}+ \dots +a_{nj}$ összeg?

Megoldás:

a. Ha a_{ii}=0, minden i-re, akkor valamennyi ágazatra igaz az, hogy az ágazatok a saját termékük gyártásához a saját termékükből nem használnak fel semennyit.
b. Az $a_{i1}+a_{i2}+ \dots +a_{in}$ összeg megadja azt, hogy ha minden ágazat a saját termékéből egységnyi mennyiséget gyárt, akkor ehhez mennyit használnak fel az i-edik termékből.
c. A (a_{1j}, a_{2j}, … a_{nj}) vektorban lévő input együtthatók megadják, hogy a j-edik termék egységnyi mennyiségének gyártásához mennyi szükséges az 1., 2., …,n. termékből.
d. Az $a_{1j}+ a_{2j}+ \dots +a_{nj}$ összeg nem értelmezhető, hiszen különböző termékek mennyiségei általában nem adhatóak össze.