

A. csoport

1. Legyen

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ e: y &= 3 + 2t, \quad f: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z-5, \quad S: 2x - y + 4z = 30 \\ z &= 6 \end{aligned}$$

- Milyen az  $e$  és  $f$  egyenesek kölcsönös helyzete?  
Ha metszik egymást, akkor határozza meg a metszéspontot!
- Milyen az  $f$  egyenes és az  $S$  sík kölcsönös helyzete?  
Ha metszik egymást, akkor határozza meg a metszéspontot!
- Határozza meg az  $e$  egyenes és a  $P=(3, 3, 8)$  pont távolságát!

(3+4+6 pont)

$$\begin{aligned} 2. \text{ Legyen } \underline{a} &= (1, 0, 2, -3), \quad \underline{b} = (2, 1, 4, 0), \quad \underline{c} = (0, 1, 0, 0), \\ \underline{d} &= (3, 1, 6, -3), \quad \underline{e} = (3, 2, 6, 3), \\ H &:= \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}\}. \end{aligned}$$

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)

- Mennyi a  $H$  vektorhalmaz rangja?
- Elhagyható-e a  $H$  vektorhalmazból egy vektor úgy, hogy a maradék vektorhalmaz rangja kisebb legyen, mint  $r(H)$ ?
- Előállítható-e a  $\underline{c}$  vektor az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok lineáris kombinációjaként?  
Előállítható-e a  $\underline{d}$  vektor az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok lineáris kombinációjaként?

(6 pont)

3. Legyen

$$\begin{aligned} V_1 &= \{ \lambda_1 \cdot (1, 0, 3) + \lambda_2 \cdot (2, 1, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}, \\ V_2 &= \{ \lambda \cdot (0, 1, 4) \mid \lambda \in R \}, \\ V_3 &= \{ \lambda \cdot (2, -3, 5) \mid \lambda \in R \}. \end{aligned}$$

- Hány dimenziósak a fenti alterek? Adjon meg mindegyik altérben egy bázist!
- Igaz-e, hogy  $R^3 = V_1 \oplus V_2$ , illetve, hogy  $R^3 = V_2 \oplus V_3$ ? Ha igen, akkor bázistranszformációt alkalmazva határozza meg az  $\underline{x} = (4, 2, 11)$  vektor megfelelő alterekbe eső összetevőit!

(6 pont)

B. csoport

1. Legyen

$$e: \frac{x-4}{3} = y = \frac{z-1}{2}, \quad f: \begin{matrix} x = 7 \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{matrix}, \quad S: x - y - z = 9.$$

- Milyen az  $e$  és  $f$  egyenesek kölcsönös helyzete?  
Ha metszik egymást, akkor határozza meg a metszéspontot!
- Milyen az  $e$  egyenes és az  $S$  sík kölcsönös helyzete?  
Ha metszik egymást, akkor határozza meg a metszéspontot, ha párhuzamosak, akkor a távolságukat!
- Írja fel annak a síknak az egyenletét, amelyik illeszkedik az  $f$  egyenesre és a  $Q=(8, 2, 1)$  pontra!

(3+6+4 pont)

2. Legyen  $\underline{a} = (1, 0, 3, -1)$ ,  $\underline{b} = (0, 0, 1, 0)$ ,  $\underline{c} = (0, 2, 1, 4)$ ,  
 $\underline{d} = (2, 2, 7, 2)$ ,  $\underline{e} = (-1, 2, -2, 5)$ ,  
 $H := \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}\}.$

Bázistranszformációt alkalmazva válaszoljon az alábbi kérdésekre! (Indoklás!)

- Mennyi a  $H$  vektorhalmaz rangja?
- Elhagyható-e a  $H$  vektorhalmazból egy vektor úgy, hogy a maradék vektorhalmaz rangja kisebb legyen, mint  $r(H)$ ?
- Van-e a  $H$  vektorhalmaznak 1, 2, 3 illetve 4 vektorból álló lineárisan összefüggő részhalmaza?

(6 pont)

3. Legyen

$$V_1 = \{ \lambda \cdot (1, 0, 2) \mid \lambda \in R \},$$

$$V_2 = \{ \lambda_1 \cdot (3, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (0, 1, 3) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \},$$

$$V_3 = \{ \lambda \cdot (-4, 1, 5) \mid \lambda \in R \}.$$

- Hány dimenziósak a fenti alterek? Adjon meg mindegyik altérben egy bázist!
- Igaz-e, hogy  $R^3 = V_1 \oplus V_2$ , illetve, hogy  $R^3 = V_1 \oplus V_3$ ? Ha igen, akkor bázistranszformációt alkalmazva határozza meg az  $\underline{x} = (7, 3, 7)$  vektor megfelelő alterekbe eső összetevőit!

(6 pont)