

1. Tekintsük az alábbi mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} c & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a, Milyen legyen a $c \in \mathbb{R}$ paraméter értéke, hogy az A mátrix invertálható legyen?

b, Legyen $c = 1$. Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$A \cdot B \cdot C^T, \quad A \cdot B^T \cdot C$$

c, Invertálható-e a C mátrix? Ha igen, akkor határozza meg az inverzét! (6 pont)

2. Oldja meg bázistranszformáció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Adja meg a fenti egyenletrendszer homogén párjának a megoldáshalmazát! (7 pont)

3. Adottak az

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 2x_2, -2x_1 + 4x_2),$$

$$\mathcal{B}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (3x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2) \quad \text{lineáris transzformációk és a}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ mátrix.}$$

a, Írja fel a fenti lineáris transzformációk mátrixát!

b, Injektív-e a fenti lineáris transzformációk? Amelyik injektív, annak adja meg az inverzét (az inverz transzformáció típusát és hozzárendelési szabályát)!

c, Adja meg az \mathcal{A} és \mathcal{B} lineáris transzformációk magterét!

d, Adja meg azt a \mathcal{C} lineáris leképezést (típusát és hozzárendelési szabályát), amelynek a mátrixa C !

e, Melyik létezik az $\mathcal{A} \circ \mathcal{C}$ illetve $\mathcal{C} \circ \mathcal{A}$ összetett leképezések közül? Amelyik létezik, annak adja meg a mátrixát!

(Indoklás!)

(12 pont)

1. Tekintsük az alábbi mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

- a, Milyen legyen a $c \in \mathbb{R}$ paraméter értéke, hogy a B mátrix ne legyen invertálható?
b, Legyen $c = 1$. Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$C \cdot A \cdot B^T, \quad C \cdot A^T \cdot B$$

- c, Invertálható-e a C mátrix? Ha igen, akkor határozza meg az inverzét! (6 pont)

2. Oldja meg bázistranszformáció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Adja meg a fenti egyenletrendszer homogén párjának a megoldáshalmazát! (7 pont)

3. Adottak az

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (4x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2),$$

$$\mathcal{B}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 5x_2, -2x_1 + 10x_2) \quad \text{lineáris transzformációk és a}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ mátrix.}$$

- a, Írja fel a fenti lineáris transzformációk mátrixát!
b, Injektívek-e a fenti lineáris transzformációk? Amelyik injektív, annak adja meg az inverzét (az inverz transzformáció típusát és hozzárendelési szabályát)!
c, Adja meg az \mathcal{A} és \mathcal{B} lineáris transzformációk magterét!
d, Adja meg azt a \mathcal{C} lineáris leképezést (típusát és hozzárendelési szabályát), amelynek a mátrixa C !
e, Melyik létezik az $\mathcal{A} \circ \mathcal{C}$ illetve $\mathcal{C} \circ \mathcal{A}$ összetett leképezések közül? Amelyik létezik, annak adja meg a mátrixát!
(Indoklás!)

(12 pont)

1. Tekintsük az alábbi mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a, Invertálható-e az A mátrix? Ha igen, akkor bázistranszformációval határozza meg az inverzét! Milyen egyéb mátrixtulajdonságokra lehet még következtetni a kapott eredményekből

b, Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$A^T \cdot B \cdot C, \quad B \cdot A^T \cdot C \quad (7 \text{ pont})$$

2. A Cramer szabályt alkalmazva határozza meg az x_2 ismeretlen értékét az alábbi lineáris egyenletrendszerben!

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

A kapott eredmények alapján eldönthető-e, hogy mi a fenti egyenletrendszer homogén párjának a megoldáshalmaza? (Indoklás!) (4 pont)

3. Adott az

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4, x_2 + x_3 + 2x_4, -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4)$ lineáris leképezés és a $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix.

a, Írja fel a fenti lineáris leképezés mátrixát!

b, Határozza meg az \mathcal{A} lineáris leképezés rangját!

c, Határozza meg az \mathcal{A} lineáris leképezés magterét!

d, Legyen $\underline{b} = (2, 0, 0)$. Igaz-e, hogy $\underline{b} \in \text{im}(\mathcal{A})$? Ha igen, akkor adja meg azon \underline{x} vektorok halmazát, amelyekre $\mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{b}$!

e, Adja meg azt a \mathcal{B} lineáris leképezést (típusát és hozzárendelési szabályát), amelynek a mátrixa B !

f, Melyik létezik az $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ illetve $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ összetett leképezések közül? Amelyik létezik, annak adja meg a mátrixát!

(Indoklás!)

(14 pont)

1. Tekintsük az alábbi mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a, Invertálható-e az A mátrix? Ha igen, akkor bázistranszformációval határozza meg az inverzét! Milyen egyéb mátrixtulajdonságokra lehet még következtetni a kapott eredményekből?

b, Melyik létezik az alábbi mátrixok közül? Amelyik létezik, azt számítsa ki!

$$A^T \cdot B \cdot C, \quad B \cdot A^T \cdot C \quad (7 \text{ pont})$$

2. A Cramer szabályt alkalmazva határozza meg az x_1 ismeretlen értékét az alábbi lineáris egyenletrendszerben!

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

A kapott eredmények alapján eldönthető-e, hogy mi a fenti egyenletrendszer homogén párjának a megoldáshalmaza? (Indoklás!) (4 pont)

3. Adott az

$\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4, 2x_1 - x_2 + x_4, x_2 + 2x_3 + x_4)$
lineáris leképezés és a $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix.

a, Írja fel a fenti lineáris leképezés mátrixát!

b, Határozza meg az \mathcal{A} lineáris leképezés rangját!

c, Határozza meg az \mathcal{A} lineáris leképezés magterét!

d, Legyen $\underline{b} = (-1, 5, 0)$. Igaz-e, hogy $\underline{b} \in \text{im}(\mathcal{A})$? Ha igen, akkor adja meg azon \underline{x} vektorok halmazát, amelyekre $\mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{b}$!

e, Adja meg azt a \mathcal{B} lineáris leképezést (típusát és hozzárendelési szabályát), amelynek a mátrixa B !

f, Melyik létezik az $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ illetve $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ összetett leképezések közül? Amelyik létezik, annak adja meg a mátrixát!

(Indoklás!)

(14 pont)