# A Gauss elimináció

Tekintsünk egy lineáris egyenletrendszert, amely $m$ egyenletet és $n$ ismeretlent tartalmaz:

$$\begin{aligned}
&a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\
&a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m
\end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer együtthatómátrixa és kibővített mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad [A,\underline{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}.$$

A Gauss eliminációs módszer tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldására alkalmas, menete az alábbi két fázisra bontható:

- 1. fázis (*elimináció* = kiküszöbölés): Az egyenletrendszer átalakítása ún. lépcsős (vagy trapéz) alakra.
- 2. fázis: Az egyenletrendszer megoldáshalmazának felírása. Ehhez az ismeretlenek értékét, vagy a kötött és szabad ismeretlenek közti összefüggéséket határozzuk meg *fokozatos visszahelyettesítés*sel.

Az együtthatómátrix $a_{ij}$ elemét **vezérelem**nek hívjuk, ha az $a_{ij}$ elem az $i$-edik sor első nem nulla eleme, azaz $a_{ij}\neq 0$ és $a_{il}=0$, minden $l$=1, … ,$j$-1-re.

Az együtthatómátrixot **lépcsős** vagy **trapéz** alakúnak nevezzük, ha az egymást követő sorok vezérelemei egymástól jobbra helyezkednek el a mátrixban, azaz ha $a_{ij}$ és $a_{kl}$ két vezérelem és $k > i$, akkor $l > j$ is teljesül.

Az alábbiakban néhány lépcsős alakú mátrix látható:

$$\begin{pmatrix} * & \times & \times & \times \\ 0 & * & \times & \times \\ 0 & 0 & * & \times \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \times & \times & \times \\ 0 & * & \times & \times \\ 0 & 0 & * & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & * & \times \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & * & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & * & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & * & \times & \times \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & * & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & * & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & * & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & \times \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \times & \times & \times \\ 0 & * & \times & \times \\ 0 & 0 & * & \times \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \times & \times & \times \\ 0 & * & \times & \times \\ 0 & 0 & * & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol

$*$: az adott sor vezéreleme, nullától különböző elem;

$\times$: tetszőleges (nulla, vagy nullától különböző) elem.

Látható, hogy a lépcsős alakú mátrixokban a vezérelem oszlopában, a vezérelem alatt csak nullák állhatnak.

A Gauss elimináció első fázisában az egyenletrendszert ekvivalens átalakításokkal úgy írjuk át, hogy együtthatómátrixa lépcsős alakúvá váljon. A megengedett átalakítások:

1. Egy egyenlet szorozható egy nullától különböző skalárral.
2. Valamely egyenlethez hozzáadhatjuk egy másik egyenlet skalárszorosát.
3. Felcserélhetünk két egyenletet.
4. Ha egy egyenlet baloldalán az összes együttható nulla, továbbá az egyenlet jobb oldalán álló konstans is nulla, akkor ez az egyenlet elhagyható. (Ez a szituáció azt jelzi, hogy az adott egyenlet az eredeti egyenletrendszerben redundáns, nem független a többitől.)

A fenti átalakítások ekvivalens átalakítások, azaz az eredeti egyenletrendszer és az átalakított egyenletrendszer megoldáshalmaza ugyanaz. Megjegyezzük, hogy a fenti 1. típusú átalakítás alkalmazásával az is mindig elérhető, hogy az együtthatómátrix lépcsős alakjában valamennyi vezérelem 1 legyen. Kézi számolásnál azonban erre nem feltétlenül érdemes törekedni, mert az esetlegesen megjelenő tört együtthatók a további számolást megnehezíthetik.

Annak érdekében, hogy az ekvivalens átalakítások során ne kelljen mindig a teljes egyenletrendszert leírnunk, az átalakításokat a kibővített mátrixon hajtjuk végre, mindaddig, amíg a lépcsős alak létre nem jön. A kibővített együtthatómátrixban szaggatott vonallal választjuk el a baloldali együtthatókat a jobboldalon álló konstansoktól. A fent felsorolt megengedett ekvivalens átalakítások a kibővített mátrixra vonatkozóan a következők:

1. A kibővített mátrix egy sora szorozható egy nullától különböző skalárral.
2. A kibővített mátrix valamely sorához hozzáadhatjuk egy másik sor skalárszorosát.
3. Felcserélhetünk két sort.
4. Ha a kibővített mátrix valamelyik sorában (a szaggatott vonal előtt és után is) az összes elem nulla, akkor ez a sor elhagyható.

A Gauss elimináció 1. fázisának lépései a következők:

1. **lépés**: Tekintsük az $a_{11}$ elemet a kibővített mátrixban. Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$. (Ha $a_{11} = 0$ lenne a kiindulási egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixában, akkor először cseréljünk fel két sort úgy, hogy a csere után $a_{11} \neq 0$ teljesüljön.) Ekkor $a_{11}$ lesz az első sor vezéreleme. 2. típusú átalakításokkal - az első sor skalárszorosát a többi sorhoz adva – érjük el, hogy a kibővített mátrixban az $a_{11}$ vezérelem alatt valamennyi elem nullává váljon.

2. **lépés**: Tekintsük az $a_{22}$ elemet az átalakított mátrixban. Ha $a_{22} \neq 0$, akkor ez lesz a második sor vezéreleme. 2. típusú átalakításokkal - a második sor skalárszorosát a többi sorhoz adva – érjük el, hogy a mátrixban az $a_{22}$ vezérelem alatt valamennyi elem nullává váljon. (Figyelem: eközben az előző lépésben az első oszlopban a vezérelem alatt létrehozott nulláknak meg kell őrződniük!) Ha az 1. lépés után az átalakított mátrixban $a_{22} = 0$, akkor a második egyenletet cseréljük meg valamelyik alatta lévő egyenlettel úgy, hogy a csere után $a_{22} \neq 0$ legyen. Ha nincs mód ilyen cserére, azaz a második oszlopban az $a_{22}$ elem alatt is csupa nulla áll, akkor ez azt jelenti, hogy a kibővített mátrix lépcsős alakjában a második oszlopban nem lesz vezérelem. (Ilyen volt a korábban bemutatott lépcsős alakú mátrixok közül a harmadik és a hatodik mátrix.) Ez esetben a második sorban eggyel jobbra lépve próbáljunk vezérelemet keresni, majd alatta 2. típusú átalakításokkal nullázzuk ki az elemeket.

3. **lépés:** A kibővített mátrix harmadik sorában a korábbiakhoz hasonlóan keressük meg az előző sor vezérelemtől jobbra elhelyezkedő legközelebbi vezérelemet, majd a harmadik sort felhasználva 2. típusú átalakításokkal az új vezérelem alatt nullázzuk ki az elemeket.

…

A fenti lépéseket addig folytatjuk, amíg a következő sorban a szaggatott vonal előtt találunk újabb vezérelemet, azaz amíg létre nem jön az együtthatómátrix lépcsős alakja.

Ha létrehoztuk a lépcsős alakot, akkor az egyenletrendszer megoldhatóságára vonatkozóan az alábbi értékelést végezhetjük:

**Tilos sor**nak nevezünk a kibővített mátrixban egy olyan sort, amelyben a szaggatott vonal előtti elemek mind nullák, de a szaggatott vonal után nullától különböző elem áll.

**Tétel:**

- **I.** Az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha nincs a lépcsős alakban tilos sor.
- **II.** Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyértelmű megoldása (egy megoldásvektora), ha a lépcsős alakban nincs tilos sor és a vezérelemek száma megegyezik az ismeretlenek számával.
- **III.** Az egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldásvektora, ha a lépcsős alakban nincs tilos sor és a vezérelemek száma kisebb az ismeretlenek számánál.

A Gauss módszer 2. fázisában az egyenletrendszer megoldáshalmazát határozzuk meg a kibővített mátrix lépcsős alakját felhasználva. Először hagyjuk el a csupa nullákat tartalmazó sorokat. Ha a lépcsős alak tartalmaz tilos sort, akkor az egyenletrendszer megoldáshalmaza üres halmaz, azaz nincs megoldás.

Ha a lépcsős alakban a vezérelemek száma megegyezik az ismeretlenek számával, akkor az egyenletrendszernek egy megoldásvektora van, ilyenkor valamennyi ismeretlen kötött. A lépcsős alakot alapul véve, alulról felfelé haladva visszahelyettesítésekkel valamennyi ismeretlen értéke meghatározható, ezekből pedig felírható a megoldásvektor.

Ha a lépcsős alakban a vezérelemek száma kisebb az ismeretlenek számánál, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van. A vezérelemeknek megfelelő ismeretlenek lesznek a kötött ismeretlenek (például ha $a_{33}$ vezérelem, akkor, mivel $a_{33}$ az $x_3$ ismeretlen együtthatója, ezért $x_3$ kötött ismeretlen lesz), a többi ismeretlen pedig szabad ismeretlen. Utóbbiak értéke szabadon megválasztható. A lépcsős alakot tekintve, alulról felfelé haladva visszahelyettesítésekkel a kötött és szabad ismeretlenek közötti összefüggések megállapíthatóak. Ezek alapján az egyenletrendszer megoldáshalmaza felírható.

Megjegyezések:

1. Kézi számolásnál is érdemes lehet arra törekedni, hogy a vezérelem 1 legyen. Ezt 1. vagy 3. típusú átalakításokkal érhetjük el. 1. típusú átalakítást erre a célra csak akkor érdemes alkalmaznunk, ha ez nem jár törtszámok megjelenésével.

2. Ha a lépcsős alak létrehozása során menet közben észrevesszük, hogy tilos sor jelent meg a kibővített mátrixban, akkor ez már jelzi, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Ebben az esetben az átalakítást befejezhetjük.

A Gauss elimináció alkalmazását példákon mutatjuk be.

**1. Minta feladat:** (*Lineáris egyenletrendszerek* c. feladatsor 7./a)

Oldja meg Gauss elimináció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

**Megoldás:**

Írjuk fel először az egyenletrendszer kibővített mátrixát:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Az első fázisban az együtthatómátrixot lépcsős alakúvá transzformáljuk.

Az $a_{11} = 1$ elem lesz az első sor vezéreleme. Az 1. lépésben az 1. sor felhasználásával 2. típusú átalakításokat alkalmazva nullázzuk ki az $a_{11}$ alatti elemeket a kibővített mátrixban.

A végrehajtandó átalakítások:

- a második sorhoz adjuk hozzá az első sor -2-szeresét (azaz a második sorból vonjuk ki az első sor kétszeresét);
- a harmadik sorhoz adjuk hozzá az első sor -1-szeresét (azaz a harmadik sorból vonjuk ki az első sort;
- a negyedik sorhoz adjuk hozzá az első sort.

A fenti átalakításokat a megfelelő sorok közötti nyilakkal, a megfelelő szorzószámok feltüntetésével jelöljük:

$$\begin{array}{c l} \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -2 \quad -1 \quad 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Az átalakítások végrehajtása után az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\begin{array}{c l} \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ /\cdot(-1) \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Ebben a mátrixban érdemes a harmadik sort -1-gyel szorozni, majd a második sort és a harmadik sort megcserélni (ezeket az átalakításokat jelöltük a fenti mátrixon), így az átalakítások után a második sorban a vezérelem 1 lesz:

$$\begin{array}{c l} \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ 3 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Ezután az átalakított mátrixban a második sor $a_{22} = 1$ vezéreleme alatt a 2. oszlopban kell az elemeket kinullázni 2. típusú átalakításokkal, a 2. sor felhasználásával. A szükséges átalakítások (ezeket jelöltük a fenti mátrixon):

- a harmadik sorhoz adjuk hozzá a második sor 3-szorosát;
- a negyedik sorhoz adjuk hozzá a második sor -3-szorosát (azaz a negyedik sorból vonjuk ki a második sor 3-szorosát).

Így a következő mátrixot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Látható, hogy az egyenletrendszer együtthatómátrixában (a kibővített mátrixban a szaggatott vonal előtti részben) létrejött a lépcsős alak, így a Gauss módszer első fázisa befejeződött.

A kibővített mátrixban nincs tilos sor, tehát az egyenletrendszer megoldható. Az együttható-mátrixban négy vezérelem található: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -5$ és $a_{44} = 7$, így az egyenletrend-szerben mind a négy ismeretlen kötött, az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

A második fázisban a kötött ismeretlenek értékét határozzuk meg a lépcsős alakú mátrix segítségével fokozatos visszahelyettesítésekkel:

A negyedik sornak megfelelő egyenlet:

$$7x_4 = 0, \text{ innen } x_4 = 0.$$

A harmadik sornak megfelelő egyenlet:

$$-5x_3 - 3x_4 = 0 \text{ , innen } x_4 = 0 \text{ behelyettesítésével } x_3 = 0 \text{ adódik.}$$

A második sornak megfelelő egyenlet:

$$1x_2 - 2x_4 = 2, \text{ innen } x_4 = 0 \text{ behelyettesítésével } x_2 = 2 \text{ adódik.}$$

Az első sornak megfelelő egyenlet:

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 1x_4 = 5, \text{ innen } x_2 = 2,\ x_3 = 0 \text{ és } x_4 = 0 \text{ visszahelyettesítésével } x_1 = 1.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$M = \{(1, 2,0,0)\}.$$

**2. Minta feladat:** (*Lineáris egyenletrendszerek* c. feladatsor 7./c)

Oldja meg Gauss elimináció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 13 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \end{array}$$

**Megoldás:**

Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & 5 & 13 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 13 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -2 \quad -3 \quad -2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Az első fázisban az együtthatómátrix lépcsős alakját hozzuk létre. Az első lépésben az első sor $a_{11} = 1$ vezéreleme alatt az első oszlopban nullázzuk ki az elemeket. A szükséges átalakítások (ezeket jelöltük a fenti mátrixon):

- a második sorhoz hozzáadjuk az első sor -2-szeresét (azaz a második sorból kivonjuk az első sor 2-szeresét);
- a harmadik sorhoz hozzáadjuk az első sor -3-szorosát (azaz a harmadik sorból kivonjuk az első sor 3-szorosát);
- a negyedik sorhoz hozzáadjuk az első sor -2-szeresét (azaz a második sorból kivonjuk az első sor 2-szeresét).

Így az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Észrevehetjük, hogy a mátrixban a negyedik sor tilos sor, tehát az egyenletrendszer nem oldható meg:

$$M = \emptyset.$$

**3. Minta feladat:** (*Lineáris egyenletrendszerek* c. feladatsor 7./f)

Oldja meg Gauss elimináció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \end{array}$$

**Megoldás:**

Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 7 \end{array}\right) & \begin{array}{cc} -1 & -2 \\ & \\ & \end{array} \end{array}$$

A lépcsős alak létrehozásához először az első sor vezéreleme ($a_{11} = 1$) alatt nullázzuk ki az elemeket az első oszlopban. A szükséges átalakítások (ezeket jelöltük a fenti mátrixon):

- a második sorhoz adjuk hozzá az első sor -1-szeresét (azaz a második sorból vonjuk ki az első sort);
- a harmadik sorhoz adjuk hozzá az első sor -2-szeresét (azaz a harmadik sorból vonjuk ki az első sor 2-szeresét).

Így az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Vegyük észre, hogy az együtthatómátrix máris lépcsős alakú, így a Gauss módszer első fázisa befejeződött. A kibővített mátrixban nincs tilos sor, tehát az egyenletrendszer megoldható. A lépcsős alakú mátrixban három vezérelem található: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$és $a_{33} = 1$. Így az egyenletrendszerben az $x_1$, $x_2$ és $x_3$ ismeretlenek kötöttek, az $x_4$ pedig szabad.

A Gauss módszer második fázisában a kötött és szabad ismeretlenek közti összefüggéseket határozzuk meg a lépcsős alak alapján fokozatos visszahelyettesítéssel:

A lépcsős alakú mátrix harmadik sorának megfelelő egyenlet:

$$x_3 = 3$$

A második sornak megfelelő egyenlet:

$$x_2 = 2$$

Az első sornak megfelelő egyenlet:

$1x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2$, innen $x_2 = 2$ *és* $x_3 = 3$ visszahelyettesítésével $x_1 = 4 - 3x_4$.

Ezután felírható az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$M = \left\{ \underline{x} \in R^4 \,\middle|\, x_4 \in R,\ x_1 = 4 - 3x_4,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 3 \right\}.$$

**4. Minta feladat:** (*Lineáris egyenletrendszerek* c. feladatsor 7./i)

Oldja meg Gauss elimináció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
4x_1 & + & & & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0
\end{array}
$$

**Megoldás:**

Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát:

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
2 & 6 & 4 & 8 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 2 & -2 & 0
\end{array}\right)
$$

A lépcsős alak kialakításánál az 1. lépés során érdemes először az első és második sort megcserélni, így az átalakítás után az első sor vezéreleme 1 lesz:

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 6 & 4 & 8 & 0 \\
4 & 0 & 2 & -2 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
-2 \quad -4 \\
\\
\\
\end{array}
$$

Ezután az $a_{11} = 1$ vezérelem alatt nullákat hozunk létre. A szükséges átalakítások (ezeket jelöltük a fenti mátrixon):

- a második sorhoz hozzáadjuk az első sor -2-szeresét (azaz a második sorból kivonjuk az első sor 2 szeresét);
- a harmadik sorhoz hozzáadjuk az első sor -4-szeresét (azaz a harmadik sorból kivonjuk az első sor 4-szeresét.

Így az alábbi mátrixot kapjuk:

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 4 & 2 & 6 & 0 \\
0 & -4 & -2 & -6 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
1 \\
\\
\end{array}
$$

A második lépésben a második sor vezérelemét azonosítjuk: $a_{22} = 4$, és a második sor felhasználásával az alatta lévő elemet nullázzuk. a szükséges átalakítás:

- a harmadik sorhoz hozzáadjuk a második sort.

Az alábbi mátrixhoz jutunk:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 4 & 2 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

A harmadik sorban nem találunk vezérelemet, a lépcsős alak létrejött.

A kibővített mátrixban nincs tilos sor, az egyenletrendszer megoldható. (Ez előre tudható eredmény, hiszen egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható.) A harmadik sor csupa nullát tartalmaz, ez a sor elhagyható (figyelmen kívül hagyható). A lépcsős alakú mátrixban két vezérelem található: $a_{11} = 1$ és $a_{22} = 4$. Ennek megfelelően két kötött ismeretlenünk van: $x_1$ és $x_2$. A másik két ismeretlen, $x_3$ és $x_4$ szabad ismeretlen. A Gauss módszer második fázisában a köztük lévő összefüggéseket határozzuk meg fokozatos visszahelyettesítéssel.

A lépcsős alakú mátrix második sora alapján:

$$4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0$$

Innen kifejezzük az $x_2$ kötött ismeretlent a szabad ismeretlenek segítségével:

$$x_2 = -{}^{1}\!/_{2}\, x_3 - {}^{3}\!/_{2}\, x_4$$

A lépcsős alakú mátrix első sorának megfelelő egyenlet:

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 0$$

Ebbe visszahelyettesítjük az $x_2$-re kapott $x_2 = -{}^{1}\!/_{2}\, x_3 - {}^{3}\!/_{2}\, x_4$ összefüggést, majd az egyenletből kifejezzük az $x_1$ kötött ismeretlent a szabad ismeretlenek segítségével:

$$x_1 = -{}^{1}\!/_{2}\, x_3 + {}^{1}\!/_{2}\, x_4$$

Ezután felírható az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$M = \left\{ \underline{x} \in R^4 \,\middle|\, x_3, x_4 \in R,\ \ x_1 = -{}^{1}\!/_{2}\, x_3 + {}^{1}\!/_{2}\, x_4,\ \ x_2 = -{}^{1}\!/_{2}\, x_3 - {}^{3}\!/_{2}\, x_4 \right\}$$

**5. Minta feladat:** (*Lineáris egyenletrendszerek* c. feladatsor 7./j)

Oldja meg Gauss elimináció alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 3x_4 & - & 9x_5 & = & 3 \end{array}$$

**Megoldás:**

Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ \\ \\ \end{array}$$

A lépcsős alak létrehozásához először az első sor vezéreleme ($a_{11} = 1$) alatt nullázzuk ki az elemeket az első oszlopban. A szükséges átalakítások (ezeket jelöltük a fenti mátrixon):

- a második sorhoz adjuk hozzá az első sor -2-szeresét (azaz a második sorból vonjuk ki az első sor 2-szeresét);
- a harmadik sorhoz adjuk hozzá az első sor -3-szorosát (azaz a harmadik sorból vonjuk ki az első sor 3-szorosát).

Így az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ /\cdot(-1) \end{array}\end{array}$$

A következő lépés előtt érdemes a harmadik sort -1-gyel szorozni, majd a második és harmadik sort megcserélni. Így az átalakított mátrix vezéreleme a második sorban $a_{22} = 1$ lesz:

$$\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ 3 \\ \\ \end{array}\end{array}$$

Ezután az $a_{22} = 1$ alatti pozícióban kell nulláznunk, ehhez a következő átalakítás szükséges:

- a harmadik sorhoz adjuk hozzá a második sor 3-szorosát.

Így a következő – már lépcsős alakú- mátrixhoz jutunk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 0 \end{array}\right)$$

Látható, hogy a lépcsős alakú mátrixban nincs tilos sor, tehát az egyenletrendszer megoldható. A vezérelemek: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{34} = 1$. Ennek megfelelően az $x_1$, $x_2$ és $x_4$ ismeretlenek kötöttek lesznek, a többi ismeretlen ($x_3$ és $x_5$) szabad.

A Gauss módszer második fázisában a lépcsős alakú mátrix segítségével a kötött és szabad ismeretlenek közti összefüggéseket határozzuk meg.

A harmadik sornak megfelelő egyenlet:

$$18x_4 + 54x_5 = 0$$

Fejezzük ki ebből az $x_4$ kötött ismeretlent:

$$x_4 = -3x_5$$

A második sornak megfelelő egyenlet:

$$1x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0$$

Helyettesítsük ide vissza az $x_4 = -3x_5$ összefüggést, majd fejezzük ki az $x_2$ kötött ismeretlent:

$$x_2 = 2x_3$$

Végül írjuk fel az első sornak megfelelő egyenletet:

$$1x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 + 3x_5 = 1$$

Helyettesítsük ide vissza az $x_2 = 2x_3$ és $x_4 = -3x_5$ összefüggéseket, majd fejezzük ki az $x_1$ kötött ismeretlent:

$$x_1 = 1$$

Ezután felírhatjuk az egyenletrendszer megoldáshalmazát:

$$M = \left\{ \underline{x} \in R^5 \,\middle|\, x_3, x_5 \in R,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = 2x_3,\ \ x_4 = -3x_5 \right\}$$

## Az inverz mátrix módszer

Tekintsünk egy olyan lineáris egyenletrendszert, amelyben az ismeretlenek és egyenletek száma megegyezik, azaz az egyenletrendszer együtthatómátrixa négyzetes ($n \times n$-es). Tömör írásmódot alkalmazva az egyenletrendszer így írható fel:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer $A$ együtthatómátrixa invertálható, és szorozzuk meg a fenti egyenlet mindkét oldalát balról az $A^{-1}$ inverz mátrixszal:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

Az inverz mátrix definíciója szerint $A^{-1} \cdot A = E$, ahol $E$ az $n \times n$-es egységmátrix, továbbá $E \cdot \underline{x} = \underline{x}$, így:

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

Látható tehát, hogy négyzetes együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszerek esetén, ha az együtthatómátrix invertálható (azaz az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával), az egyenletrendszer mindig egyértelműen megoldható, és a megoldásvektort megkaphatjuk az együtthatómátrix inverzének és a jobboldali konstansok $\underline{b}$ vektorának a szorzataként.

**Minta feladat:**

Oldjuk meg az inverz mátrix módszer alkalmazásával az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 13 \end{array}$$

**Megoldás:**

Az egyenletrendszer együtthatómátrixa négyzetes, így próbálkozhatunk az inverz mátrix módszer alkalmazásával. Vizsgáljuk meg, hogy invertálható-e az együtthatómátrix, és ha igen, akkor határozzuk meg az inverzét. Bázistranszformációt alkalmazva az induló táblázat:

| bázis | $\underline{a}_1$ | $\underline{a}_2$ | $\underline{a}_3$ | $\underline{e}_1$ | $\underline{e}_2$ | $\underline{e}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{e}_1$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| $\underline{e}_2$ | 2 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| $\underline{e}_3$ | 3 | 5 | 6 | 0 | 0 | 1 |

Vonjuk be az $\underline{a}_1$vektort a bázisba az $\underline{e}_1$ helyére:

| bázis | $\underline{a}_2$ | $\underline{a}_3$ | $\underline{e}_1$ | $\underline{e}_2$ | $\underline{e}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{a}_1$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| $\underline{e}_2$ | 0 | -1 | -2 | 1 | 0 |
| $\underline{e}_3$ | -1 | -3 | -3 | 0 | 1 |

Hajtsuk végre ezután az $\underline{a}_2 \rightarrow \underline{e}_3$ vektorcserét:

| bázis | $\underline{a}_3$ | $\underline{e}_1$ | $\underline{e}_2$ | $\underline{e}_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\underline{a}_1$ | -3 | -5 | 0 | 2 |
| $\underline{e}_2$ | -1 | -2 | 1 | 0 |
| $\underline{a}_2$ | 3 | 3 | 0 | -1 |

Végül vonjuk be az $\underline{a}_3$ vektort az $\underline{e}_2$ helyére. Megjegyezzük, hogy itt már látszik, hogy az $A$ mátrix rangja 3, azaz teljes rangú, így invertálható.

| bázis | $\underline{e}_1$ | $\underline{e}_2$ | $\underline{e}_3$ |
|---|---|---|---|
| $\underline{a}_1$ | 1 | -3 | 2 |
| $\underline{a}_3$ | 2 | -1 | 0 |
| $\underline{a}_2$ | -3 | 3 | -1 |

A kapott táblázat alapján felírható az *A* mátrix inverze. Az inverzmátrix felírásánál arra kell figyelnünk, hogy a kanonikus bázis vektorainak az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$ vektorokra vonatkozó koordinátáit a megfelelő sorrendben kell az inverzmátrix oszlopaiba beírni, azaz a bázistranszformációs táblázat sorait kell a megfelelő módon rendezni:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel az együtthatómátrix invertálható, így az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. A megoldásvektor:

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$M = \{(1, 2, 0)\}$$

**Összefoglalás a tanult lineáris egyenletrendszert megoldó módszerek alkalmazhatóságáról**

Lineáris egyenletrendszerek megoldására az alábbi módszereket tanultuk:

- bázistranszformációs módszer
- Cramer szabály
- Gauss elimináció
- inverzmátrix módszer.

A négyféle módszer közül a *bázistranszformációs módszer* és a *Gauss elimináció* bármilyen lineáris egyenletrendszer megoldására használható, alkalmazásuk során az alábbi eredményeket kaphatjuk:

- Az egyenletrendszer nem oldható meg.
- Az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Ilyenkor valamennyi ismeretlen kötött, az egyetlen megoldásvektor meghatározható.
- Az egyenletrendszer megoldható és végtelen sok megoldásvektor létezik. Ilyenkor meghatározhatók a kötött és szabad ismeretlenek közti összefüggések, melyek segítségével a megoldásvektorok jellemezhetőek, a megoldáshalmaz felírható.

A *Cramer szabály*t és az *inverz mátrix módszer*t csak négyzetes együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszerek esetén használhatjuk, de ezekre is csak korlátozottan. Mindkét módszer akkor használható, ha az $A$ együtthatómátrix nemszinguláris (ilyenkor $D = \det(A) \neq 0$, illetve $A$ invertálható). Ez esetben az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, az egyértelműen létező megoldásvektor mindkét módszerrel megkapható. A problémát az jelenti, hogy amikor elkezdjük az egyenletrendszert ezekkel a módszerekkel megoldani, nem tudjuk általában előre, hogy az együtthatómátrix nemszinguláris-e. Az, hogy az együtthatómátrix szinguláris, csak menet közben derül ki, így előfordul, hogy feleslegesen dolgozunk.

Megjegyezzük még, hogy a *Cramer szabály* és az *inverz mátrix módszer* műveleti igénye (számolási munka) is lényegesen nagyobb, mint a *bázistranszformációs módszer* és a *Gauss elimináció* műveleti igénye, így ebben a tekintetben is kevésbé hatékony az alkalmazhatóságuk.