

Lineáris leképezések

1. Tekintsük az alábbi leképezéseket!

$$A: R^3 \rightarrow R^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 + 3x_2, x_1 + x_2 - 3x_3)$$

$$A: R^2 \rightarrow R^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1^3 + 2x_2, 4x_2)$$

$$A: R^3 \rightarrow R, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cdot x_2, 4x_1 + x_2^4)$$

$$A: R \rightarrow R^4, x \mapsto (2x + 1, 3x^2, x + 5, 4x)$$

$$A: R^2 \rightarrow R^3, (x_1, x_2) \mapsto (3x_1 + 5x_2, 0, x_1 + x_2)$$

$$A: R^2 \rightarrow R^2, (x_1, x_2) \mapsto (5x_1 + 2x_2, x_1 + 4x_2)$$

Melyik lineáris a fenti leképezések közül? Amelyik lineáris, ott adja meg a leképezés mátrixát!

2. Adja meg azon lineáris leképezések típusát és hozzárendelési szabályát, amelyeknek a mátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = [2 \ 5 \ 0 \ 3], \quad F = [4].$$

3. Tekintsük az alábbi lineáris leképezéseket!

$$A: R^3 \rightarrow R^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 + 3x_2 + 2x_3)$$

$$B: R^3 \rightarrow R^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, 4x_2, 5x_2 + x_3)$$

a, Adja meg a fenti lineáris leképezések mátrixát!

b, Legyen $\underline{x} = (2, -1, 3)$. Adja meg az $A(\underline{x})$ és a $B(\underline{x})$ képvectort!

c, Melyik létezik az AOB és a BOA leképezések közül? Amelyik létezik, annak adja meg a mátrixát!

4. Tekintsük az alábbi lineáris transzformációkat:

$$A: R^2 \rightarrow R^2, (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + 3x_2, -x_1 + 4x_2),$$

$$B: R^2 \rightarrow R^2, (x_1, x_2) \mapsto (4x_1 + 6x_2, -2x_1 - 3x_2).$$

a, Írja fel a fenti lineáris transzformációk mátrixát!

b, Adja meg az $A+B$, $5A$, AOB , BOA lineáris leképezéseket és azok mátrixát!

c, Invertálhatóak-e a fenti lineáris transzformációk? Amelyik invertálható, annak adja meg az inverzét (az inverz transzformáció típusát és hozzárendelési szabályát)!

5. Tekintsük az alábbi lineáris transzformációkat:

$$A : R^2 \rightarrow R^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2),$$

$$B : R^2 \rightarrow R^2, (x_1, x_2) \mapsto (4x_1 + 6x_2, 2x_1 + 3x_2).$$

a, Írja fel a fenti lineáris transzformációk mátrixát!

b, Adja meg a fenti lineáris transzformációk magterét! Melyik invertálható?

c, Legyen $\underline{b} = (7, 4)$. Igaz-e, hogy $\underline{b} \in \text{im}(A)$, illetve $\underline{b} \in \text{im}(B)$? Ha igen, akkor adja meg azon \underline{x} vektorokat, amelyekre $A(\underline{x}) = \underline{b}$, illetve $B(\underline{x}) = \underline{b}$ teljesül!

6. Tekintsük az alábbi lineáris leképezéseket!

$$A : R^3 \rightarrow R^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 2x_2 - x_3) \quad \underline{b} = (2, 4)$$

$$A : R^3 \rightarrow R^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) \quad \underline{b} = (4, 5)$$

$$A : R^3 \rightarrow R^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 4x_2 + 2x_3, -3x_1 + 2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2 - x_3) \quad \underline{b} = (5, -1, 2)$$

$$A : R^3 \rightarrow R^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, 4x_1 + x_2 + 5x_3) \quad \underline{b} = (3, 4, 6)$$

$$A : R^3 \rightarrow R^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, 4x_1 + x_2 + 5x_3) \quad \underline{b} = (3, 4, 6), \text{ illetve } \underline{b} = (3, 4, 10)$$

$$A : R^4 \rightarrow R^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4, x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4) \quad \underline{b} = (2, 4, 3)$$

$$A : R^4 \rightarrow R^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_2 + 4x_3 + x_4) \quad \underline{b} = (4, 5, 1)$$

$$A : R^4 \rightarrow R^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 - 3x_4, 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4) \quad \underline{b} = (2, 3, 1)$$

a, Adja meg a fenti lineáris leképezések magterét! Invertálható-e az A leképezés?

b, Igaz-e, hogy $\underline{b} \in \text{im}(A)$? Ha igen, akkor adja meg azokat az \underline{x} vektorokat az A leképezés értelmezési tartományából, amelyekre $A(\underline{x}) = \underline{b}$!