Az R^n vektortér

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

2008.09.08.

Vektorok

- Rendezett szám n-esek:
  - $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sorvektor
  - $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$ oszlopvektor

  $a_1, a_2, \ldots, a_n$: az $\underline{a}$ vektor komponensei

- R^n vektortér: rendezett szám n-esek, vagy más szóval n-dimenziós vektorok (n-vektorok) halmaza

- Két n-vektor egyenlő, ha a megfelelő komponenseik megegyeznek.

Vektorműveletek

- Két n-vektor összege:

  Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, akkor

  $$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots\ , a_n + b_n).$$

- Egy n-vektor λ-szorosa:

  Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\lambda \in R$, akkor

  $$\lambda \cdot \underline{a} = (\lambda \cdot a_1,\ \lambda \cdot a_2,\ \ldots\ , \lambda \cdot \mathrm{a}_n)\ .$$

- Két n-vektor különbsége: (származtatott művelet)

  $$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-1) \cdot \underline{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \ldots\ , a_n - b_n).$$

  - Minden $\underline{a}$ n-vektorra: $\underline{a} - \underline{a} = (0, \ldots, 0)$

    nullvektor, jelölése: $\underline{o}$

A vektorműveletek tulajdonságai

- A vektorösszeadás és skalárral való szorzás tulajdonságai:

1. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ asszociativitás
2. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ kommutativitás
3. $\underline{a} + \underline{o} = \underline{a}$
4. $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{o}$, ahol $-\underline{a} = (-1)\cdot\underline{a}$, az $\underline{a}$ vektor ellentettje
5. $(\lambda+\mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a}$
6. $\lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b}$
7. $\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{a}) = (\lambda\cdot\mu) \cdot \underline{a}$
8. $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$

Lineáris kombináció

- Vektorok lineáris kombinációja

  Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ n-vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ skalárok.

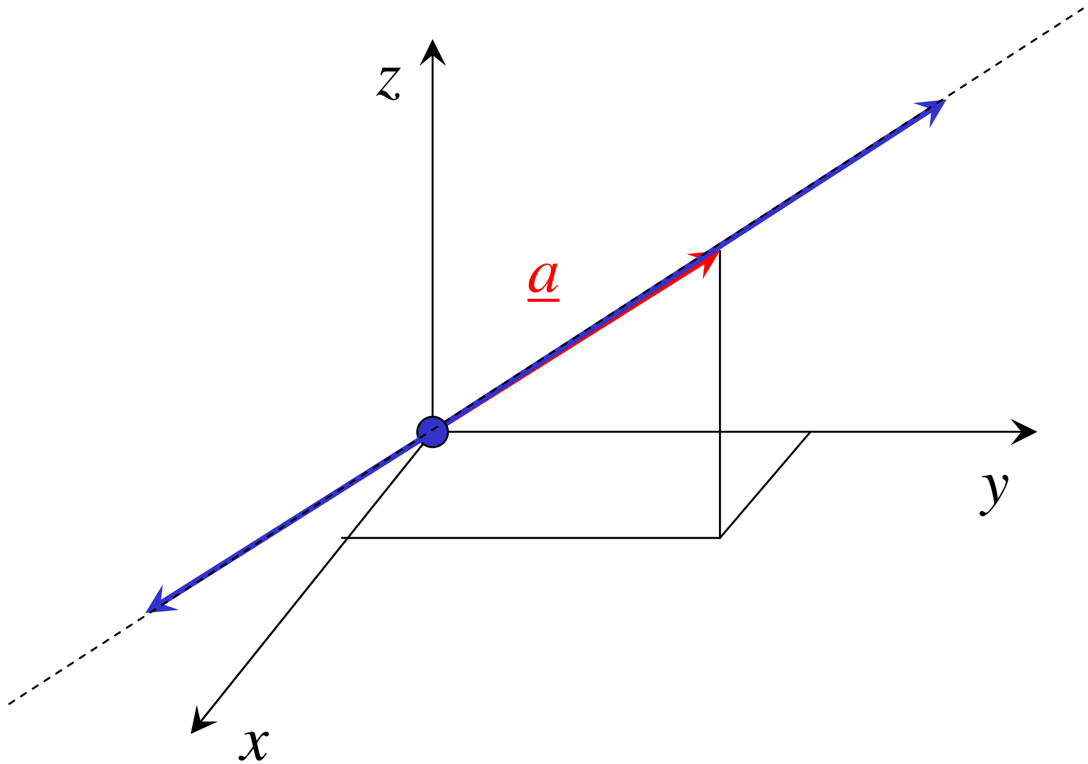
  Ekkor a $\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k$ n-vektort az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

- Triviális lineáris kombináció

  Ha a lineáris kombinációban az összes skalár nulla, akkor triviális lineáris kombinációról beszélünk.

  Triviális lineáris kombináció eredménye (bármilyen $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok esetén) mindig nullvektor.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 1.



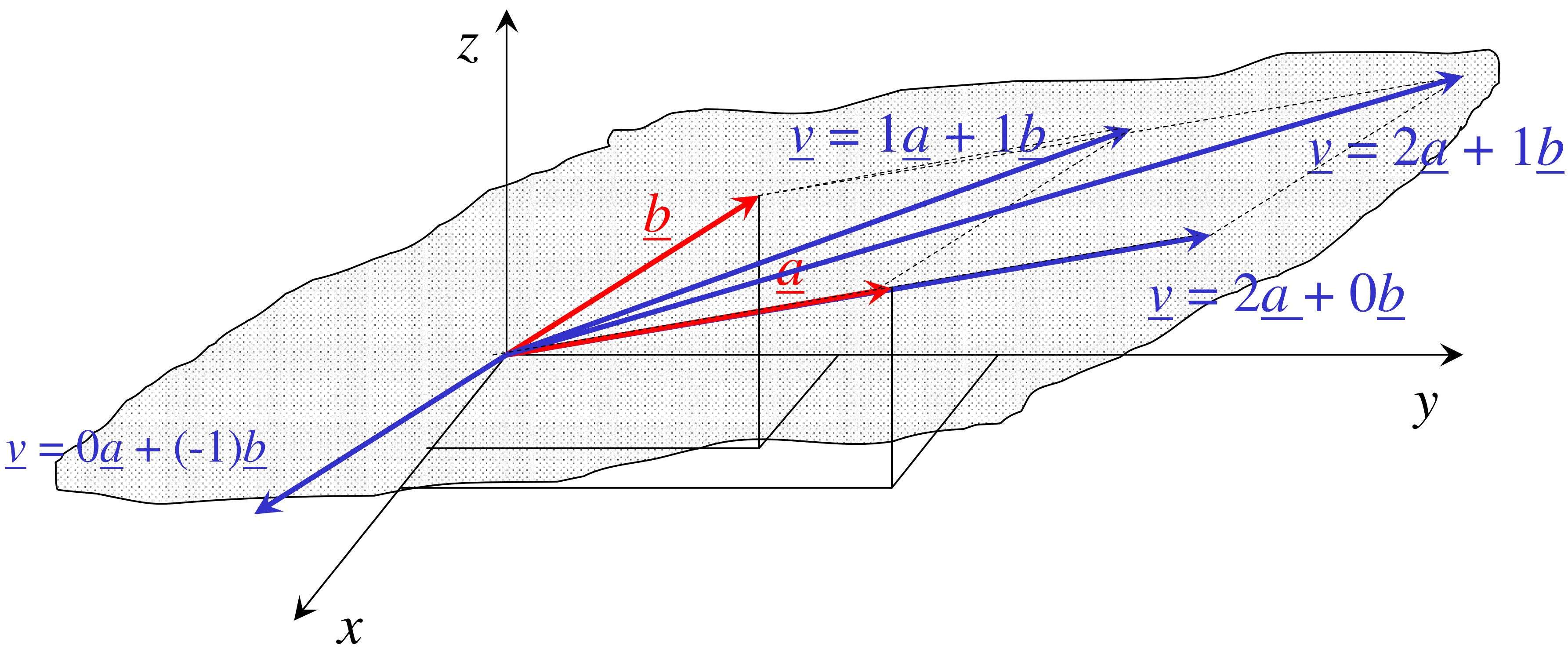
$\underline{v} = 2\underline{a}$

$\underline{v} = 0\underline{a}$

$\underline{v} = -1\underline{a}$

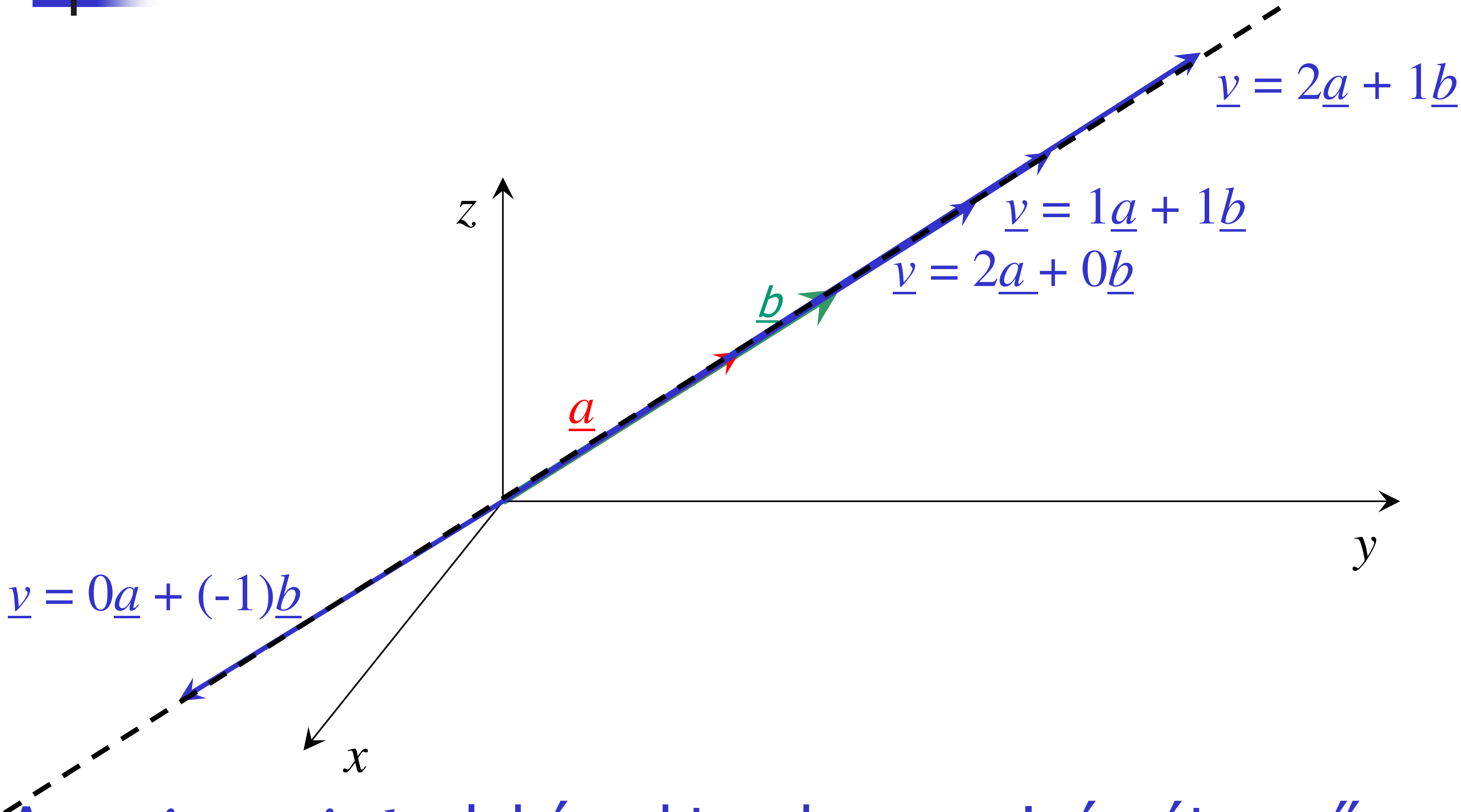
A $\underline{v} = \lambda \cdot \underline{a}$ alakú vektorok egy origón átmenő $\underline{a}$ irányvektorú egyenesre esnek.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 2.



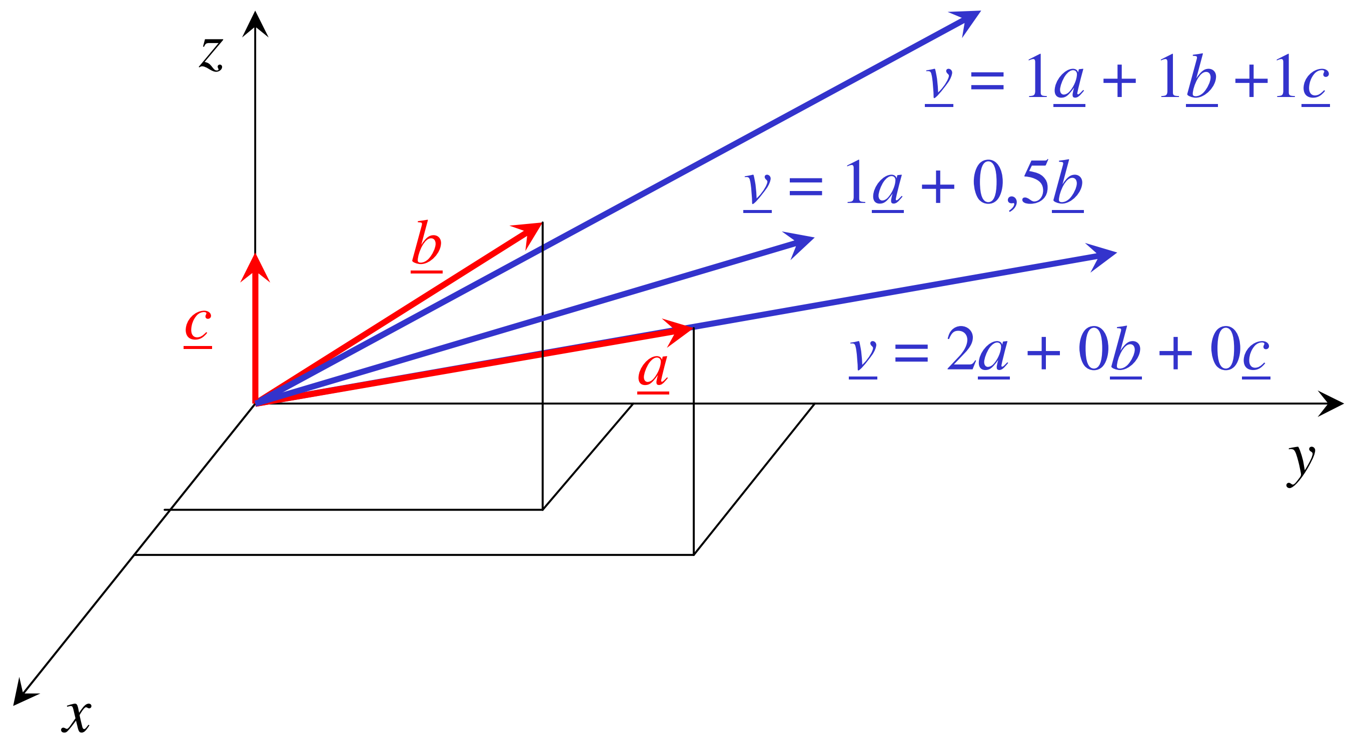
A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b}$ alakú vektorok egy origón átmenő $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített síkra esnek.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 3.



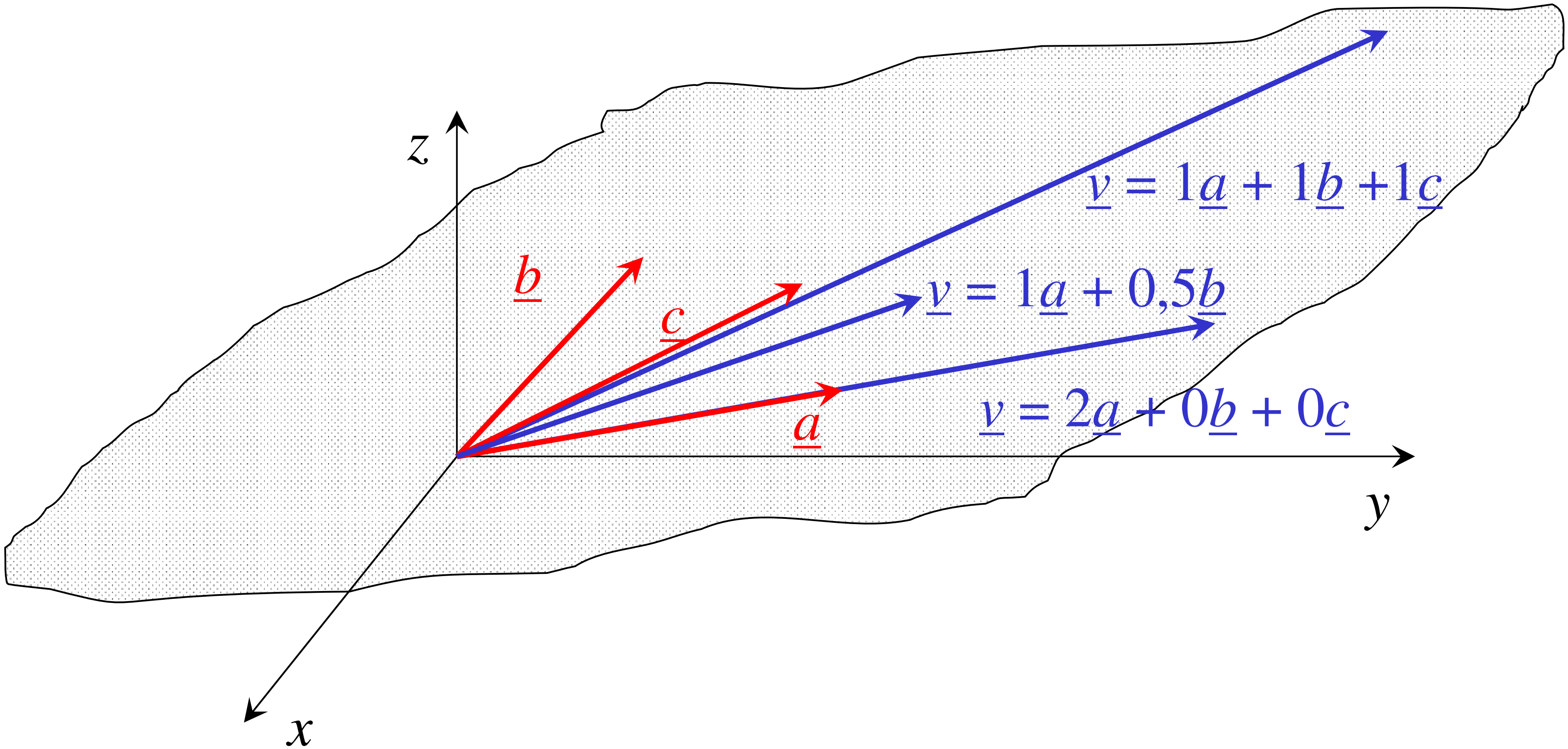
A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b}$ alakú vektorok egy origón átmenő egyenesre esnek, amelynek az irányvektora az $\underline{a}$ vagy a $\underline{b}$ vektor.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 4.



A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} + \lambda_3 \cdot \underline{c}$ alakú vektorok kitöltik a teljes teret.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 5.



A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} + \lambda_3 \cdot \underline{c}$ alakú vektorok az origón átmenő $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített síkra esnek.

Lineáris függetlenség és összefüggőség

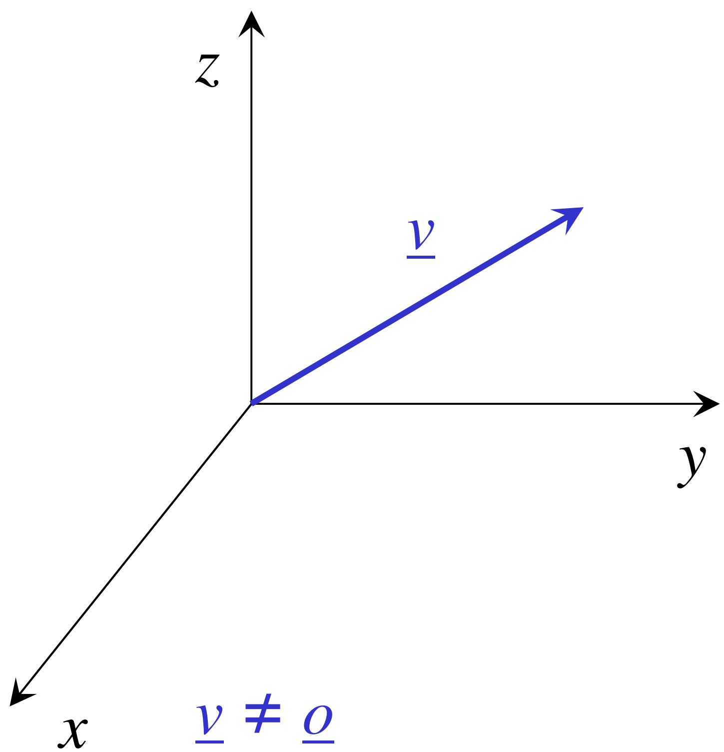
- Lineárisan független vektorok:

  Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ n-vektorokat lineárisan függetleneknek nevezzük, ha belőlük csak triviális lineáris kombinációval (csupa nulla együtthatóval) állítható elő a nullvektor.

- Lineárisan összefüggő vektorok:

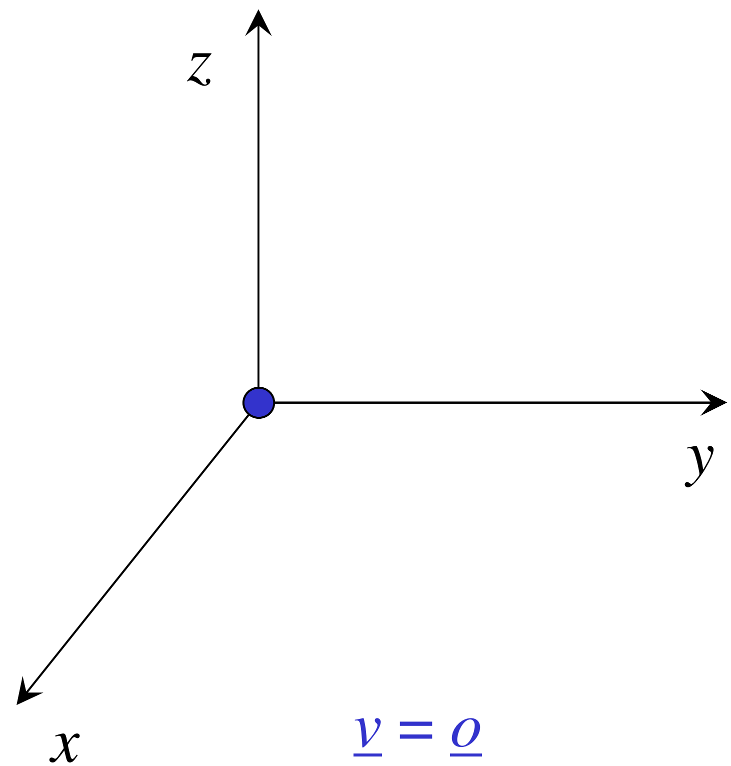
  Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ n-vektorokat lineárisan összefüggő-eknek hívjuk, ha belőlük nem triviális lineáris kombinációval is előállítható a nullvektor.

- 1 vektor esetén



$\underline{v} \neq \underline{o}$

lineárisan független

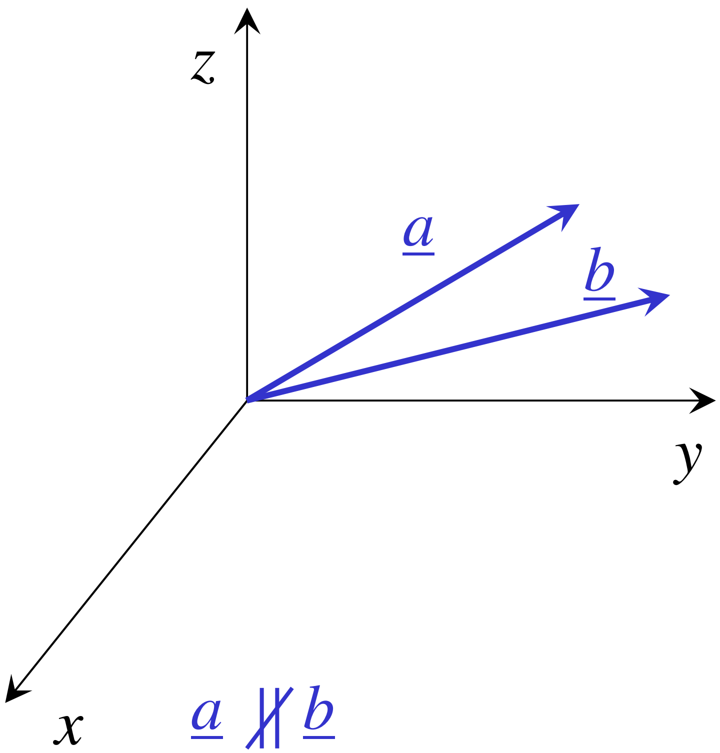


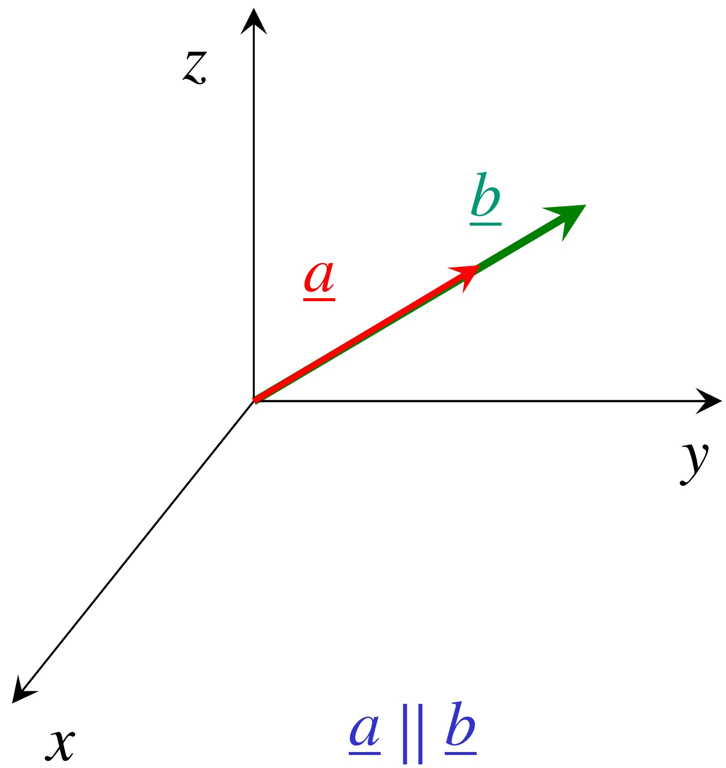
$\underline{v} = \underline{o}$

lineárisan összefüggő

Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

- 2 vektor esetén



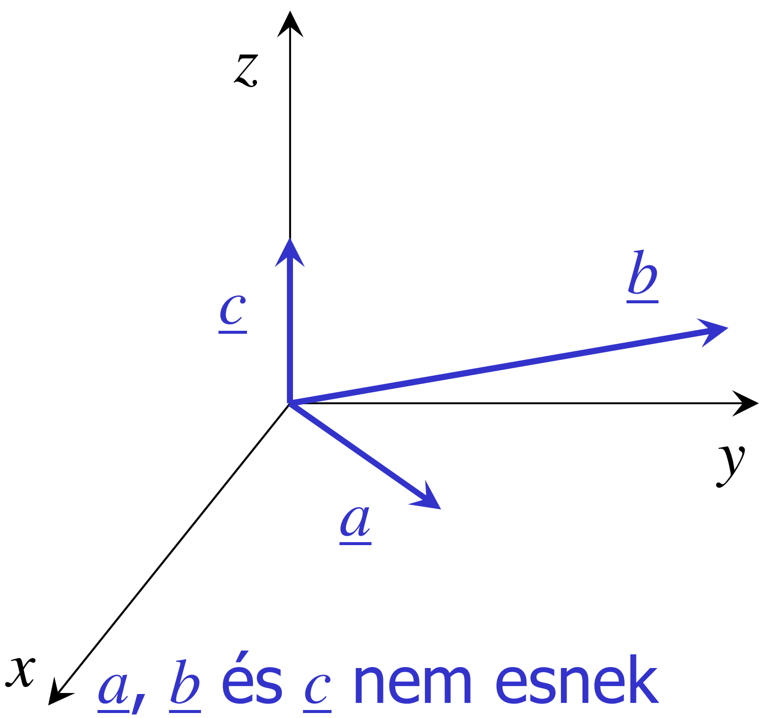


lineárisan független

lineárisan összefüggő

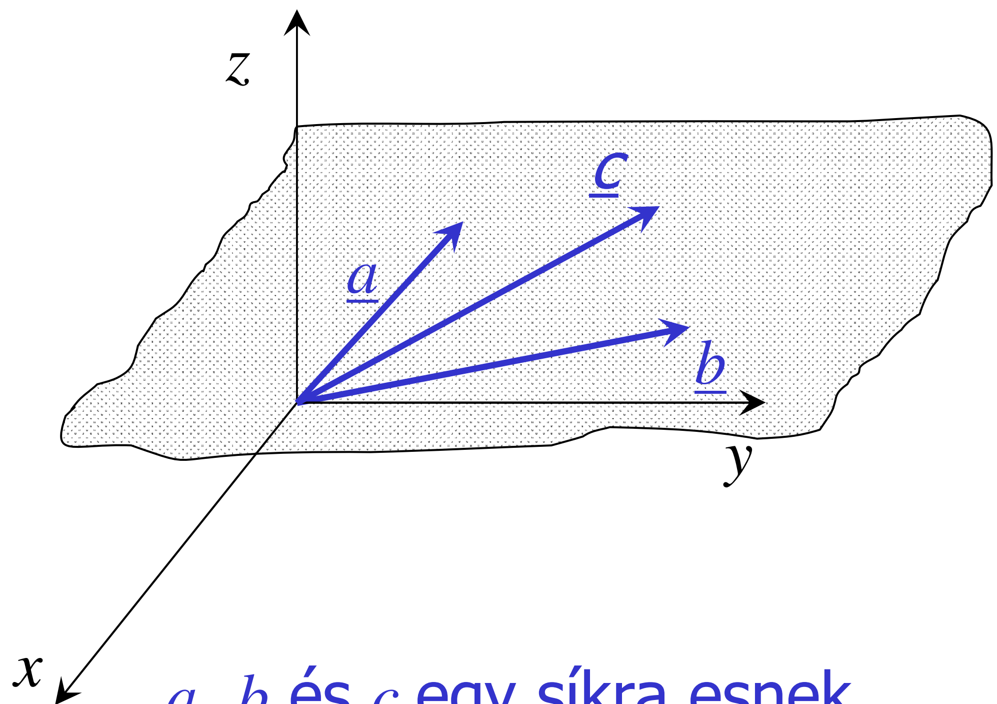
Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

- 3 vektor esetén



$\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ nem esnek egy síkra

lineárisan független



$\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ egy síkra esnek

lineárisan összefüggő

Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

- 4 vagy több vektor esetén

Az R^3 térben 4 vagy több vektor mindig lineárisan összefüggő.

Lin. függetlenség ill. összefüggőség: állítások

- Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ n-vektorok pontosan akkor lineárisan összefüggőek, ha valamelyikük előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
- Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ n-vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha egyikük sem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként.
- Ha egy vektorhalmazban szerepel a nullvektor, akkor az lineárisan összefüggő.
- Lin. független vektorhalmaz részhalmaza is lin. független.
- Lin. összefüggő vektorhalmazt bővítve az összefüggőség megőrződik.
- Az R^n vektortérben $n+1$ db vektor mindig lin. összefüggő.

Vektorhalmaz rangja

- Vektorhalmaz rangja:

  Az a szám, amely megmutatja, hogy az adott vektorok közül maximálisan hány darab lin. független vektort tudunk kiválasztani.
- Megjegyzések:
  - Az R^n vektortérben bármely vektorhalmaz rangja kisebb vagy egyenlő, mint n.
  - Lineárisan független vektorhalmaz rangja megegyezik a vektorhalmazban lévő vektorok számával.

Bázis

- Bázis: Legyen $B \subseteq R^n$ egy vektorhalmaz, amely
  - lineárisan független,
  - elemeiből lineáris kombinációval az R^n vektortér bármely vektora előállítható.

  Ekkor a B vektorhalmazt az R^n vektortér egy bázisának hívjuk.
- Példa bázisra: kanonikus (standard bázis)

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots \ , \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bázis, koordináták

- R^n-ben minden bázis n darab vektorból áll.
- R^n-ben bármely n darab lineárisan független vektor bázist alkot.
- Legyen $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázis R^n-ben. Ekkor bármely $\underline{x} \in R^n$ vektor *egyértelműen* előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjával:

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{b}_n$$

Ekkor a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számokat az $\underline{x}$ vektor B bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Elemi bázistranszformáció

- Elemi bázistranszformáció

  Legyen $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ egy bázis R^n -ben, $\underline{c} \in R^n$, $\underline{c} \neq \underline{o}$.

  Ekkor a B bázis vektorai között van olyan, amely kicserélhető a $\underline{c}$ vektorral úgy, hogy a vektorcsere után is bázist kapjunk.

  Az új bázisra vonatkozó koordináták számolásának algoritmusát elemi bázistranszformációnak nevezzük.

Az új koordináták számolása

- Legyen az $\underline{x}$ vektor B bázisra vonatkozó előállítása:

  $$\underline{x} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{b}_n$$

  Legyen a $\underline{c}$ vektor B bázisra vonatkozó előállítása:

  $$\underline{c} = \gamma_1 \underline{b}_1 + \gamma_2 \underline{b}_2 + \ldots + \gamma_n \underline{b}_n$$

  Tegyük fel, hogy $\gamma_i \neq 0$.

  Cseréljük ki a B bázisban a $\underline{b}_i$ vektort a $\underline{c}$ vektorral.

  Ekkor az $\underline{x}$ vektor új bázisra vonatkozó koordinátái:

  $$\hat{\lambda}_j = \lambda_j - \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \cdot \gamma_j \qquad j \neq i$$

  $$\hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma_i} = \delta$$

Bázistranszformációs táblázat

- A régi és az új koordináták táblázatos elrendezése:

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{c} & \underline{x} \\
\hline
\underline{b}_1 & \gamma_1 & \lambda_1 \\
\underline{b}_2 & \gamma_2 & \lambda_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{b}_i & \gamma_i & \lambda_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{b}_n & \gamma_n & \lambda_n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{c} & \underline{x} \\
\hline
\underline{b}_1 & 0 & \lambda_1 - \delta \cdot \gamma_1 \\
\underline{b}_2 & 0 & \lambda_2 - \delta \cdot \gamma_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{c} & 1 & \delta \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{b}_n & 0 & \lambda_n - \delta \cdot \gamma_n
\end{array}
$$

- A γ_i számot generálóelemnek hívjuk.

Vektorok skaláris szorzata

- Legyen $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ két n-vektor. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ n-vektorok skaláris szorzatán (skalárszorzatán) az alábbi számot értjük:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$$

- A skaláris szorzat tulajdonságai:

1. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
2. $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$
3. $(\lambda \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\lambda \cdot \underline{b}) = \lambda \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b})$
4. $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$, és $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{o}$

Vektorok hossza, két vektor távolsága

- Az $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-vektor hosszán (normáján) az alábbi számot értjük:

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}\ ,$$

azaz

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

- Az $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ n-vektorok távolságán az alábbi számot értjük:

$$\|\underline{a} - \underline{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

A Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség, ortogonalitás

- Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség:

  Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két tetszőleges n-vektor. Ekkor:

  $$|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|$$

- Ortogonalitás:

  Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ n-vektorokat ortogonálisaknak (merőlegeseknek) nevezzük, ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

  Jelölés: $\underline{a} \perp \underline{b}$

Két n-vektor szöge

- Két n-vektor szöge

  Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két, nullvektortól különböző n-vektor. Ekkor azt a $\varphi \in [0,\pi]$ szöget, melyre

  $$cos\,\varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|}$$

  teljesül, az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szögének nevezzük.
- Speciális esetek: Legyen $\underline{a}, \underline{b} \in R^n$, $\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{o}$.
  - Ha $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$, akkor $\varphi = \pi/2$, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ ortogonális.
  - Ha $\underline{a} = \lambda \cdot \underline{b}$, akkor
    - $\lambda > 0$ esetén $\varphi = 0$, ilyenkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egyirányú,
    - $\lambda < 0$ esetén $\varphi = \pi$, ilyenkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ ellentétes.

Alterek az R^n vektortérben

- Altér

  A $H \subseteq R^n$ vektorhalmazt altérnek hívjuk az R^n vektortérben, ha bármely $\underline{a}, \underline{b} \in H$ vektorok és $\lambda \in R$ esetén $\underline{a}+\underline{b} \in H$ és $\lambda \cdot \underline{a} \in H$ is teljesül.

- Triviális alterek

  A $H = \{\underline{o}\}$ és $H = R^n$ esetekben teljesül a fenti definíció, ezeket az altereket az R^n vektortér triviális (nem valódi) altereinek hívjuk.

- Megjegyzések:
  - R^n minden altere tartalmazza a nullvektort.
  - Alterek metszete is mindig altér.

Alterek az R^3 térben

- $H = \{\underline{o}\}$: 0-dimenziós, triviális altér.
- Legyen $\underline{v} \in R^3$, $\underline{v} \neq \underline{o}$ rögzített.

  $H = \{\lambda \cdot \underline{v} \mid \lambda \in R\}$: origón átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenesre eső vektorok összessége.
  1-dimenziós altér.

- Legyen $\underline{a}, \underline{b} \in R^3$ két lineárisan független vektor.

  $H = \{\lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$: origón átmenő, az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra eső vektorok összessége. 2-dimenziós altér.

- $H = R^3$: 3-dimenziós, triviális altér.

Egyenesek R^n-ben

- Egyenes

  R^n-ben az 1 dimenziós altereket vagy azoknak egy rögzített vektorral való eltoltját egyeneseknek hívjuk.

- Az $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ és $\underline{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:

  $\underline{x} = (1-t)\cdot\underline{a} + t\cdot\underline{b}$, ahol $t \in R$.

- Az $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ ponton átmenő, $\underline{v}=(v_1,\ldots,v_n)$ irányvektorú egyenes egyenlete:

  $\underline{x} = \underline{a} + t\cdot\underline{v}$, ahol $t \in R$.

Hipersíkok R^n-ben

- Hipersík

  R^n-ben az n-1 dimenziós altereket vagy azoknak egy rögzített vektorral való eltoltját hipersíkoknak hívjuk.

- Hipersík egyenlete

  Az $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ ponton átmenő, a $\underline{p}=(p_1,\ldots,p_n) \neq \underline{o}$ vektorra merőleges hipersík egyenlete:

  $$\underline{p} \cdot (\underline{x} - \underline{a}) = 0$$

  A $\underline{p}$ vektort a hipersík normálvektorának nevezzük.