Экзамен 2 - 2022/2023

Линейная алгебра и геометрия

Даниил Тимижев

Введение:

Заранее предупреждаю, что тут могут быть ошибки, поэтому никому не рекомендую полагаться на ответ, а лишь следить за ходом моих мыслей, которые я постарался описать максимально четко, вспоминая рандомные факты из курса линейной алгебры. Выражаю отдельную благодарность Ане Зыковой за помощь с разборами заданий.

Задача №1:

Определите все значения, которые может принимать размерность ядра линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (1, 2, 0, -1)$.

Я пока не уверен в своем решении данного номера, поэтому пока без теха.

Ответ №1:

Неа

Задача №2:

Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей отрицательные значения на всех ненулевых векторах подпространства:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x,y,z.

Пусть $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$. Тогда S - подпространство решений ОСЛУ. Найдём базис через ФСР:

$$x - 2y + z = 0 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow S = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_2} \rangle$$

Зададим квадратичную форму Q так, чтобы $Q(S) < 0$. В таком случае векторы f_1, f_2 отобразим в отрицательные значения. Так как Q задаём на $\mathbb{R}^3$ по условию, дополним базис S до базиса всего пространства:

$$f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3) \text{ - базис в } \mathbb{R}^3$$

Q - неопределённая, если её индексы инерции i_+, i_- равны некоторым ненулевым значениям.

Пусть значение квадратичной формы Q отрицательно для f_1, f_2 (векторы базиса S), а для f_3 - положительно, тогда в базисе $\mathbb{f}$ она будет иметь нормальный вид с такой матрицей:

$$B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} i_+ = 1 \\ i_- = 2 \end{cases}$$

Мы задали неопределённую квадратичную форму в нормальном виде. Найдём её исходный вид, вспомнив *Закон инерции*:

Числа i_+ и i_- не зависят от выбора базиса, в котором Q принимает нормальный вид.

В таком неопределённость нашей квадратичной формы Q останется на месте при смене базиса.
Пусть $\mathbb{e}$ - базис, в котором Q имеет стандартный вид, причём $\mathbb{f} = \mathbb{e} \cdot C$, где C - матрица перехода. Полагаем, что $\mathbb{e}$ - стандартный базис, тогда соберём C из векторов базиса $\mathbb{f}$:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее, для нахождения матрицы стандартного вида Q рассмотрим формулу смены базиса квадратичной формы в терминах базисов $\mathbb{f}$ и $\mathbb{e}$:

$$B(Q,\mathbb{f}) = C^T \cdot B(Q,\mathbb{e}) \cdot C \implies B(Q,\mathbb{e}) = (C^{-1})^T \cdot B(Q,\mathbb{f}) \cdot C^{-1}$$

Воспользуемся методом Гаусса для нахождения C^{-1}:

$$(C \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = (E \mid C^{-1})$$

Найдем матрицу квадратичной формы Q в базисе $\mathbb{e}$:

$$B(Q,\mathbb{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $X = (x\ y\ z)$. Тогда по $B(Q,\mathbb{e})$ выпишем стандартный вид квадратичной формы Q от координат x, y, z:

$$Q(X) = 2xz - y^2 - 4yz + z^2$$

Ответ №2:

Пример подходящей квадратичной формы: $Q(X) = 2xz - y^2 - 4yz + z^2$.

Задача №3:

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением даны векторы:

$$u_1 = (-1, 1, 2),\ u_2 = (1, 1, -1),\ u_3 = (1, -1, 0)$$

Обозначим через v_1, v_2, v_3 ортогональные проекции вектора $v = (3, -5, 1)$ на подпространства $u_1^\perp, u_2^\perp, u_3^\perp$ соответственно. Найдите объем параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

Для нахождения векторов v_1, v_2, v_3 в явном виде воспользуемся таким фактом:

$$\forall\ u, v \in \mathbb{E}\colon\ \operatorname{pr}_u v = \operatorname{ort}_{u^\perp} v,\ \operatorname{ort}_u v = \operatorname{pr}_{u^\perp} v$$

Выпишем векторы, заданные условием:

- $v_1 = \operatorname{pr}_{u_1^\perp} v = \operatorname{ort}_{u_1} v = v - \operatorname{pr}_{u_1} v = v - \frac{(v,u_1)}{(u_1,u_1)} u_1 = v + u_1 = (2, -4, 3)$
- $v_2 = \operatorname{pr}_{u_2^\perp} v = \operatorname{ort}_{u_2} v = v - \operatorname{pr}_{u_2} v = v - \frac{(v,u_2)}{(u_2,u_2)} u_2 = v + u_2 = (4, -4, 0)$
- $v_3 = \operatorname{pr}_{u_3^\perp} v = \operatorname{ort}_{u_3} v = v - \operatorname{pr}_{u_3} v = v - \frac{(v,u_3)}{(u_3,u_3)} u_3 = v - 4u_3 = (-1, -1, 1)$

Существует много различных способов найти объем параллелепипеда, я воспользуюсь вычислением через матрицу Грама:

$$\operatorname{vol} P(v_1, v_2, v_3)^2 = \det G(v_1, v_2, v_3)$$

Соберём матрицу Грама явно:

$$G := G(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & (v_1, v_3) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & (v_2, v_3) \\ (v_3, v_1) & (v_3, v_2) & (v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 24 & 5 \\ 24 & 32 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдём определитель для G:

$$\det G = 29 \cdot 32 \cdot 3 + 0 + 0 - 5 \cdot 5 \cdot 32 - 0 - 24 \cdot 24 \cdot 3 = 2784 - 800 - 1728 = 256$$

Тогда $\operatorname{vol} P(v_1, v_2, v_3)^2 = \det G = 256$, получаем $\operatorname{vol} P(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{256} = 16$.

Ответ №3:

Объем параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3, равен 16.

Задача №4:

Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 - 5\varphi$ диагонализуем.

Зададим $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - линейный оператор с матрицей $A := A(\varphi, \mathbb{e})$ в некотором базисе $\mathbb{e}$. φ недиагонализуем, тогда пусть матрица A имеет жорданову нормальную форму:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in \operatorname{Spec}\varphi$$

Пусть V - векторное пространство над полем F. Тогда $\forall\ \varphi, \psi \in L(V),\ \lambda \in F$ в некотором базисе $\mathbb{e}$ имеем:

$$A(\varphi \circ \psi, \mathbb{e}) = A(\varphi, \mathbb{e}) \cdot A(\psi, \mathbb{e}), \quad A(\lambda\varphi, \mathbb{e}) = \lambda \cdot A(\varphi, \mathbb{e})$$

Вычислим явно, чему будет равна матрица оператора $\varphi^2 - 5\varphi$:

$$A(\varphi^2 - 5\varphi, \mathbb{e}) = A^2 - 5A = \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5x & 5 \\ 0 & 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x-5) & 2x-5 \\ 0 & x(x-5) \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\varphi^2 - 5\varphi$ диагонализуем, если $2x - 5 = 0$ (так как матрица уже будет иметь диагональный вид). Тогда нам подойдёт значение $x = \frac{5}{2}$:

$$A(\varphi^2 - 5\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} x(x-5) & 2x-5 \\ 0 & x(x-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{25}{4} \end{pmatrix}$$

Подставим значение в матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ - ЖНФ}$$

Ответ №4:

Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемый матрицей:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Задача №5:

Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & * & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ \diamond & 2/3 & \circ \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

Для начала разберёмся с неизвестными значениями. Знаем, что матрица ортогонального оператора является *ортогональной* (столбцы матрицы образуют ортонормированную систему).

$$A := A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 2/3 & * & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ \diamond & 2/3 & \circ \end{pmatrix}$$

Найдём значения, при которых длины столбцов матрицы A равны 1:

- $(A^{(1)}, A^{(1)}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \diamond^2 = 1 \implies \diamond = \pm\frac{2}{3}$
- $(A^{(2)}, A^{(2)}) = *^2 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1 \implies * = \pm\frac{1}{3}$
- $(A^{(3)}, A^{(3)}) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \circ^2 = 1 \implies \circ = \pm\frac{1}{3}$

Система векторов называется ортогональной, если попарное скалярное произведение векторов из системы равно нулю. Методом перебора понимаем, что нам подходят такие значения:

$$\diamond = -\frac{2}{3}, \quad * = \frac{1}{3}, \quad \circ = \frac{1}{3}$$

Тогда, перед нами матрица ортогонального оператора φ:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Классификация ортогональных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве:

$$\exists\, \mathbb{e} \text{ - ОНБ } : A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Примечательный факт: $\operatorname{Spec}\varphi$, где φ - ортогональный линейный оператор, всегда хранит в себе значение 1 или -1.

Посчитаем характеристический многочлен:

$$\chi_t(\varphi) = (-1)^3 \det(A - tE) = \frac{3t^3 - t^2 - t + 3}{3} = \frac{1}{3}(t+1)(3t^2 - 4t + 3) \implies -1 \in \operatorname{Spec}\varphi$$

Найдём базис для собственного подпространства $V_{-1}(\varphi)$ через ФСР:

$$(A - (-1)\cdot E) = (A + E) = \begin{pmatrix} 5/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектор e_3 находится в искомом базисе. Оставшиеся векторы e_1, e_2 найдём как $\langle e_3 \rangle^\perp = \langle e_1, e_2 \rangle$ через ФСР:

$$(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что e_1, e_2 - ортогональны друг другу (в ином случае потребовалось бы ортогонализовать), тогда система (e_1, e_2, e_3) является ортогональной. Нормируем:

- $f_1 = \frac{1}{|e_1|} e_1 = e_1 = (1, 0, 0)$
- $f_2 = \frac{1}{|e_2|} e_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} e_2 = \left(0,\ \frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
- $f_3 = \frac{1}{|e_3|} e_3 = \frac{\sqrt{5}}{5} e_3 = \left(0,\ -\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Получаем систему $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3)$ - ортонормированный базис, в котором матрица ортогонального оператора имеет канонический вид.

$$\cos\alpha = (\varphi(f_1), f_1), \quad \sin\alpha = (\varphi(f_1), f_2)$$

Найдём $\varphi(f_1)$:

$$\varphi(f_1) = Af_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

- $\cos\alpha = (\varphi(f_1), f_1) = \frac{2}{3}$.
- $\sin\alpha = (\varphi(f_1), f_2) = -\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{4\sqrt{5}}{15} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Итого, в базисе $\mathbb{f}$ матрица оператора φ имеет такой канонический вид:

$$A(\varphi, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 2/3 & \sqrt{5}/3 & 0 \\ -\sqrt{5}/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Данная матрица является матрицей поворота вокруг вектора f_3 на угол $\arccos \frac{2}{3}$ с зеркальным отражением.

Ответ №5:

- Базис $\mathbb{f} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix})$.
- Канонический вид: $A(\varphi, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 2/3 & \sqrt{5}/3 & 0 \\ -\sqrt{5}/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Поворот вокруг вектора $\left(0,\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ на угол $\arccos \frac{2}{3}$ и зеркальное отражение.

Задача №6:

Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:

1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{20}$;

2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

Рассмотрим теоретическое сингулярное разложение матрицы A. Пусть:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

где $U = (u_1 \ \ u_2)$, $V^T = (v_1 \ \ v_2 \ \ v_3)$ и $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$, причём $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ и $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$.

Вспомним предложение с лекции:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T$$

Рассмотрим теорему о низкоранговом приближении:

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rk} A = r$. Пусть $A = U\Sigma V^T$ - SVD для A. $\forall\ k = 1, \ \ldots, \ r-1$ положим:

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ - первые } k \text{ сингулярных значений}$$

Тогда минимум величины $\|A - B\|$ (норма Фробениуса) среди всех матриц B ранга $\leqslant k$ достигается при $B = U\Sigma_k V^T$.

По теореме понимаем, что матрица B ранга 1 максимально приближает неизвестную матрицу A, если $B = U\Sigma_1 V^T$. Тогда $\Sigma_1 = \sigma_1$ и, соответственно, $B = u_1 \sigma_1 v_1^T$.
Заметим, что:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем векторы и получим:

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{10} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}}_{u_1} \underbrace{\sqrt{30}}_{\sigma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}}_{v_1^T}$$

Таким образом, мы получили первую компоненту ранга 1 для сингулярного разложения матрицы A. Далее, по условию задачи полагаем $\sigma_2 = \sqrt{20}$. Заметим, что $\sigma_1 = \sqrt{30} > \sigma_2 = \sqrt{20}$, значит разложение определено верно. Тогда имеем:

$$A = u_1 \sqrt{30}\ v_1^T + u_2 \sqrt{20}\ v_2^T$$

Придумаем, каким образом мы можем при нормировке получить $\sigma_2 = \sqrt{20}$. В первом случае из вектора u_1 мы вынесли $\sqrt{10}$, из v_1 получили $\sqrt{3}$. Тогда за u_2 возьмём и нормируем такой вектор, который является ортогональным относительно u_1 и его длина равна $\sqrt{10}$. Например:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (u_1,\, u_2) = -3 + 3 = 0$$

Теперь для v_2 подберём такой вектор, который является ортогональным к v_1 и с длиной $\sqrt{2}$ (так как $\sqrt{20} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$, а $\sqrt{10}$ из вектора u_2). Если посмотреть на v_1 до нормировки, сразу приходят на ум такие ортогональные к нему векторы:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \}$$

Возьмём первый вектор, тогда имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (v_1,\, v_2) = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} = 0$$

Итого, наборы (u_1, u_2) и (v_1, v_2) являются ортонормированными системами. Найдём матрицу A:

$$A = u_1 \sqrt{30}\ v_1^T + u_2 \sqrt{20}\ v_2^T = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \sqrt{30} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \sqrt{20} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ №6:

Да, существует: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = U \Sigma V^T$, где $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20} & 0 \end{pmatrix}$.

Задача №7:

Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 8y + 5 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

Рассмотрим данное уравнение как некоторую квадратичную форму. Далее, для получения канонического вида нам поможет *теорема о приведении квадратичной формы к главным осям*:

Для любой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ существует ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, в котором Q принимает канонический вид $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$. Более того, набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определён однозначно с точностью до перестановки.

Перепишем квадратичную форму как матрицу, последние слагаемые $(-8y+5)$ подставим после приведения:

$$Q(x, y, z) = 2y^2 - 3z^2 + 4xz \implies B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что вышеописанная теорема работает за счёт симметричности матрицы квадратичной формы, а ведь симметричные матрицы всегда диагонализуемы, требуется лишь вычислить ортонормированный базис из собственных векторов. Найдём спектр:

$$\chi_B(t) = (-1)^n \det(B - tE) = -\begin{vmatrix} -t & 0 & 2 \\ 0 & 2-t & \\ 2 & 0 & -3-t \end{vmatrix} = (t-2)(t+4)(t-1) \implies \operatorname{Spec} B = \{1, 2, -4\}$$

Теперь вычислим базис из собственных векторов:

1. $\lambda = 2:$
$$B - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = -4:$
$$B + 4E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. $\lambda = 1:$
$$B - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Полученные векторы ортонормируем $\mathbb{f} = \left(\frac{u_1}{|u_1|}, \frac{u_2}{|u_2|}, \frac{u_3}{|u_3|}\right)$:

$$f_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Собираем полученные векторы в матрицу и получаем такую замену координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}y' + \frac{2}{\sqrt{5}}z' \\ y = x' \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{\sqrt{5}}z' \end{cases}$$

Получим такое уравнение:

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 8y + 5 = 0 \implies 2x'^2 - 4y'^2 + z'^2 - 8x' + 5 = 0$$

Теперь соберём оставшиеся слагаемые, чтобы получить канонический вид полностью:

$$2x'^2 - 4y'^2 + z'^2 - 8x' + 5 \implies 2(x'^2 - 4x' + 4) - 8 - 4y'^2 + z'^2 + 5 \implies$$

$$\implies 2(x'-2)^2 - 4y'^2 + z'^2 - 3 = 0 \implies 2(x'-2)^2 - 4y'^2 + z'^2 = 3$$

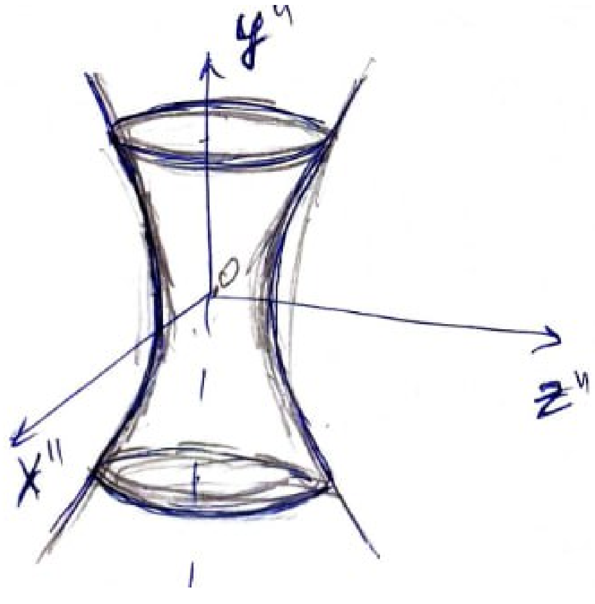
Делаем вторую замену:

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases} \implies \begin{cases} x' = x'' + 2 \\ y' = y'' \\ z' = z'' \end{cases}$$

И получаем канонический вид:

$$2x''^2 - 4y''^2 + z''^2 = 3$$

Данное уравнение задаёт однополостный гиперболоид, эскиз:



Итоговая замена координат выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}y'' + \frac{2}{\sqrt{5}}z'' \\ y = x'' + 2 \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + \frac{1}{\sqrt{5}}z'' \end{cases}$$

Ответ №7:

- Канонический вид: $2x''^2 - 4y''^2 + z''^2 = 3$;
- Поверхность: однополостный гиперболоид;
- Эскиз: выполнен сверху.

Задача №8:

Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

Найдём значения спектра линейного оператора через характеристический многочлен. Пусть исходная матрица равна A, тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^4 \det(A - tE) = \begin{vmatrix} 1-t & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2-t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t) \cdot \begin{vmatrix} 1-t & 3 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & 5 & 4-t \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)((1-t)(2-t)(4-t) + 2(2-t)) = (t-2)^3(t-3) \implies 2, 3 \in \operatorname{Spec}\varphi$$

Пусть $B_t = A - tE$, узнаем количество жордановых клеток для собственного значения 2:

$$B_2 = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 2 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rk} B_2 = 3 \implies d_1 = 4 - 3 = 1 \text{ клетка}$$

С учётом того, что алгебраическая кратность значения 2 равна 3 и для него определена только одна клетка - эта жорданова клетка размера 3 на 3. В таком случае, для собственного значения 3 у нас остаётся только один вариант - клетка 1 на 1, то есть для него существует собственный вектор.
Пусть $\mathbb{f}$ - искомый базис для линейного оператора φ, тогда его матрица примет вид:

$$A(\varphi, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ - ЖНФ}$$

Остаётся дело за малым - предъявить базис, в котором матрица примет вид, описанный выше. Начнём с простого - найдём собственный вектор, отвечающий собственному значению 3 через ФСР:

$$B_3 = A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies V_3(\varphi) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_4} \rangle = \langle f_4 \rangle$$

Далее, для значения 2 у нас 1 клетка размера 3×3, поэтому как f_3 нам требуется найти такой вектор, для которого выполняется:

$$\operatorname{ht} f_3 = 3,\ f_3 \in \operatorname{Ker} B_2^3$$

Вычислим матрицу B_2^3:

$$B_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём базис ядра матрицы B_2^3 через ФСР:

$$B_2^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{Ker} B_2^3 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Промерив ручками, приходим к тому, что высоту 3 имеет только второй вектор. Берём его как f_3:

$$f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies f_2 = B_2 f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \implies f_1 = B_2 f_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Обязательно: Проверим, что набор $\mathbb{f} := (f_1, f_2, f_3, f_4)$ является *линейно независимым*:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \mathbb{f} \text{ - базис в } \mathbb{R}^4$$

Ответ №8:

- Базис $\mathbb{f} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- Жорданова форма $A(\varphi, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.