Экзамен 2 - 2022/2023

Линейная алгебра и геометрия

Даниил Тимижев

Введение:

Заранее предупреждаю, что тут могут быть ошибки, поэтому никому не рекомендую полагаться на ответ, а лишь следить за ходом моих мыслей, которые я постарался описать максимально четко, вспоминая рандомные факты из курса линейной алгебры. Выражаю отдельную благодарность Александру Сидорову и Анне Зыковой, ассистентам по ЛАИГ, за помощь с разборами заданий <3.

Задача №1:

Определите все значения, которые может принимать размерность ядра линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (1, 2, 0, -1)$.

С тем учётом, что в пересечении ядра и образа содержится вектор, смело можем утверждать, что размерность пересечения точно больше единицы:

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi) \geqslant 1$$

Теперь оценим размерность ядра φ:

$$1 \leqslant \dim(\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi) \leqslant \dim \operatorname{Ker}\varphi \leqslant \dim(\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi) \leqslant 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

Отметим тот факт, что вектор v лежит также в образе φ, с чего делаем вывод, что и размерность $\operatorname{Im}\varphi$ ненулевая. Тогда воспользуемся *теоремой о связи размерностей ядра и образа линейного отображения*:

$$\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim V$$

В нашем же случае $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, тогда понятно, что $\dim \operatorname{Ker}\varphi \in \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим каждый случай и приведём примеры **(без примеров потеря баллов)**. Для каждого примера дополняем вектор v векторами стандартного базиса $\mathbb{R}^4$, назовём базис $\mathbb{e} = (v, e_1, e_2, e_3)$:

1. $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$: В таком случае можем построить отображение, которое переводит лишь вектор v в нулевой. Матрица оператора будет иметь следующий вид в нашем базисе:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} v \to \vec{0} \\ e_1 \to v \\ e_2 \to e_1 \\ e_3 \to e_2 \end{cases}$$

2. $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$: В таком случае можем построить отображение, которое переводит векторы v и e_1 в нулевой. Матрица оператора будет иметь следующий вид в нашем базисе:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} v, e_1 \to \vec{0} \\ e_2 \to v \\ e_3 \to e_2 \end{cases}$$

3. $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 3$: В таком случае можем построить отображение, которое переводит векторы v, e_1 и e_2 в нулевой. Матрица оператора будет иметь следующий вид в нашем базисе:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} v, e_1, e_2 \to \vec{0} \\ e_3 \to v \end{cases}$$

Ответ №1:

Размерность ядра линейного оператора φ может принимать значения от 1 до 3. Примеры приведены выше.

Задача №2:

Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей отрицательные значения на всех ненулевых векторах подпространства:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x,y,z.

Пусть $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$. Тогда S - подпространство решений ОСЛУ. Найдём базис через ФСР:

$$x - 2y + z = 0 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow S = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_2} \rangle$$

Зададим квадратичную форму Q так, чтобы $Q(S) < 0$. В таком случае векторы f_1, f_2 отобразим в отрицательные значения. Так как Q задаём на $\mathbb{R}^3$ по условию, дополним базис S до базиса всего пространства:

$$f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3) \text{ - базис в } \mathbb{R}^3$$

Q - неопределённая, если её индексы инерции i_+, i_- равны некоторым ненулевым значениям.

Пусть значение квадратичной формы Q отрицательно для f_1, f_2 (векторы базиса S), а для f_3 - положительно, тогда в базисе $\mathbb{f}$ она будет иметь нормальный вид с такой матрицей:

$$B(Q, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} i_+ = 1 \\ i_- = 2 \end{cases}$$

Мы задали неопределённую квадратичную форму в нормальном виде. Найдём её исходный вид, вспомнив *Закон инерции*:

Числа i_+ и i_- не зависят от выбора базиса, в котором Q принимает нормальный вид.

В таком неопределённость нашей квадратичной формы Q останется на месте при смене базиса. Пусть $\mathbb{e}$ - базис, в котором Q имеет стандартный вид, причём $\mathbb{f} = \mathbb{e} \cdot C$, где C - матрица перехода. Полагаем, что $\mathbb{e}$ - стандартный базис, тогда соберём C из векторов базиса $\mathbb{f}$:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее, для нахождения матрицы стандартного вида Q рассмотрим формулу смены базиса квадратичной формы в терминах базисов $\mathbb{f}$ и $\mathbb{e}$:

$$B(Q,\mathbb{f}) = C^T \cdot B(Q,\mathbb{e}) \cdot C \implies B(Q,\mathbb{e}) = (C^{-1})^T \cdot B(Q,\mathbb{f}) \cdot C^{-1}$$

Воспользуемся методом Гаусса для нахождения C^{-1}:

$$(C \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = (E \mid C^{-1})$$

Найдем матрицу квадратичной формы Q в базисе $\mathbb{e}$:

$$B(Q,\mathbb{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $X = (x\ y\ z)$. Тогда по $B(Q,\mathbb{e})$ выпишем стандартный вид квадратичной формы Q от координат x, y, z:

$$Q(X) = 2xz - y^2 - 4yz + z^2$$

Ответ №2:

Пример подходящей квадратичной формы: $Q(X) = 2xz - y^2 - 4yz + z^2$.

Задача №3:

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением даны векторы:

$$u_1 = (-1, 1, 2),\ u_2 = (1, 1, -1),\ u_3 = (1, -1, 0)$$

Обозначим через v_1, v_2, v_3 ортогональные проекции вектора $v = (3, -5, 1)$ на подпространства $u_1^\perp, u_2^\perp, u_3^\perp$ соответственно. Найдите объем параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

Для нахождения векторов v_1, v_2, v_3 в явном виде воспользуемся таким фактом:

$$\forall\ u, v \in \mathbb{E}\colon\ \mathrm{pr}_u\, v = \mathrm{ort}_{u^\perp} v,\ \mathrm{ort}_u\, v = \mathrm{pr}_{u^\perp} v$$

Выпишем векторы, заданные условием:

- $v_1 = \mathrm{pr}_{u_1^\perp} v = \mathrm{ort}_{u_1} v = v - \mathrm{pr}_{u_1} v = v - \frac{(v,u_1)}{(u_1,u_1)} u_1 = v + u_1 = (2, -4, 3)$
- $v_2 = \mathrm{pr}_{u_2^\perp} v = \mathrm{ort}_{u_2} v = v - \mathrm{pr}_{u_2} v = v - \frac{(v,u_2)}{(u_2,u_2)} u_2 = v + u_2 = (4, -4, 0)$
- $v_3 = \mathrm{pr}_{u_3^\perp} v = \mathrm{ort}_{u_3} v = v - \mathrm{pr}_{u_3} v = v - \frac{(v,u_3)}{(u_3,u_3)} u_3 = v - 4u_3 = (-1, -1, 1)$

Существует много различных способов найти объем параллелепипеда, я воспользуюсь вычислением через матрицу Грама:

$$\mathrm{vol}\, P(v_1, v_2, v_3)^2 = \det G(v_1, v_2, v_3)$$

Соберём матрицу Грама явно:

$$G := G(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & (v_1, v_3) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & (v_2, v_3) \\ (v_3, v_1) & (v_3, v_2) & (v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 24 & 5 \\ 24 & 32 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдём определитель для G:

$$\det G = 29 \cdot 32 \cdot 3 + 0 + 0 - 5 \cdot 5 \cdot 32 - 0 - 24 \cdot 24 \cdot 3 = 2784 - 800 - 1728 = 256$$

Тогда $\mathrm{vol}\, P(v_1, v_2, v_3)^2 = \det G = 256$, получаем $\mathrm{vol}\, P(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{256} = 16$.

Ответ №3:

Объем параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3, равен 16.

Задача №4:

Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 - 5\varphi$ диагонализуем.

Зададим $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - линейный оператор с матрицей $A := A(\varphi, \mathbb{e})$ в некотором базисе $\mathbb{e}$. φ недиагонализуем, тогда пусть матрица A имеет жорданову нормальную форму:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in \operatorname{Spec} \varphi$$

Пусть V - векторное пространство над полем F. Тогда $\forall\ \varphi, \psi \in L(V),\ \lambda \in F$ в некотором базисе $\mathbb{e}$ имеем:

$$A(\varphi \circ \psi, \mathbb{e}) = A(\varphi, \mathbb{e}) \cdot A(\psi, \mathbb{e}), \quad A(\lambda\varphi, \mathbb{e}) = \lambda \cdot A(\varphi, \mathbb{e})$$

Вычислим явно, чему будет равна матрица оператора $\varphi^2 - 5\varphi$:

$$A(\varphi^2 - 5\varphi, \mathbb{e}) = A^2 - 5A = \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5x & 5 \\ 0 & 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x-5) & 2x-5 \\ 0 & x(x-5) \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\varphi^2 - 5\varphi$ диагонализуем, если $2x - 5 = 0$ (так как матрица уже будет иметь диагональный вид). Тогда нам подойдёт значение $x = \frac{5}{2}$:

$$A(\varphi^2 - 5\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} x(x-5) & 2x-5 \\ 0 & x(x-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{25}{4} \end{pmatrix}$$

Подставим значение в матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ - ЖНФ}$$

Ответ №4:

Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемый матрицей:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Задача №5:

Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & * & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ \diamond & 2/3 & \circ \end{pmatrix},$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

Для начала разберёмся с неизвестными значениями. Знаем, что матрица ортогонального оператора является *ортогональной* (столбцы/строки матрицы образуют ортонормированную систему).

$$A := A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 2/3 & * & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ \diamond & 2/3 & \circ \end{pmatrix}$$

Найдём значения, при которых длины столбцов матрицы A равны 1:

- $(A^{(1)}, A^{(1)}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \diamond^2 = 1 \implies \diamond = \pm\frac{2}{3}$
- $(A^{(2)}, A^{(2)}) = *^2 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1 \implies * = \pm\frac{1}{3}$
- $(A^{(3)}, A^{(3)}) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \circ^2 = 1 \implies \circ = \pm\frac{1}{3}$

Система векторов называется ортогональной, если попарное скалярное произведение векторов из системы равно нулю. Методом перебора понимаем, что нам подходят такие значения:

$$\diamond = -\frac{2}{3}, \quad * = \frac{1}{3}, \quad \circ = \frac{1}{3}$$

Тогда, перед нами матрица ортогонального оператора φ:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Классификация ортогональных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве:

$$\exists\ \mathbb{e}\ \text{- ОНБ}\ : A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Примечательный факт: $\operatorname{Spec}\varphi$, где φ - ортогональный линейный оператор, всегда хранит в себе значение 1 или -1 в случае $\mathbb{R}^3$.

Посчитаем характеристический многочлен, дабы удостовериться в этом. Можно сразу же искать вектор, за выбрав собственное значение 1 или -1 (и надеяться, что оно подойдёт):

$$\chi_t(\varphi) = (-1)^3 \det(A - tE) = \frac{3t^3 - t^2 - t + 3}{3} = \frac{1}{3}(t+1)(3t^2 - 4t + 3) \implies -1 \in \operatorname{Spec}\varphi$$

Найдём базис для собственного подпространства $V_{-1}(\varphi)$ через ФСР:

$$(A - (-1) \cdot E) = (A + E) = \begin{pmatrix} 5/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектор e_3 находится в искомом базисе. Оставшиеся векторы e_1, e_2 найдём как $\langle e_3 \rangle^\perp = \langle e_1, e_2 \rangle$ через ФСР:

$$(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что e_1, e_2 - ортогональны друг другу (в ином случае потребовалось бы ортогонализовать), тогда система (e_1, e_2, e_3) является ортогональной. Нормируем:

- $f_1 = \frac{1}{|e_1|} e_1 = e_1 = (1, 0, 0)$
- $f_2 = \frac{1}{|e_2|} e_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} e_2 = \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
- $f_3 = \frac{1}{|e_3|} e_3 = \frac{\sqrt{5}}{5} e_3 = \left(0, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Получаем систему $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3)$ - ортонормированный базис, в котором матрица ортогонального оператора имеет канонический вид.

$$\cos\alpha = (\varphi(f_1), f_1), \quad \sin\alpha = (\varphi(f_1), f_2)$$

Найдём $\varphi(f_1)$:

$$\varphi(f_1) = Af_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

- $\cos\alpha = (\varphi(f_1), f_1) = \frac{2}{3}$.
- $\sin\alpha = (\varphi(f_1), f_2) = -\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{4\sqrt{5}}{15} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Итого, в базисе $\mathbb{f}$ матрица оператора φ имеет такой канонический вид:

$$A(\varphi, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 2/3 & \sqrt{5}/3 & 0 \\ -\sqrt{5}/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Данная матрица является матрицей поворота вокруг вектора f_3 на угол $\arccos \frac{2}{3}$ с зеркальным отражением.

Ответ №5:

- Базис $\mathbb{f} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \right)$.
- Канонический вид: $A(\varphi, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 2/3 & \sqrt{5}/3 & 0 \\ -\sqrt{5}/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Поворот вокруг вектора $\left(0,\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ на угол $\arccos \frac{2}{3}$ и зеркальное отражение.

Задача №6:

Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:

1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{20}$;

2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

Рассмотрим теоретическое сингулярное разложение матрицы A. Пусть:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

где $U = (u_1 \ \ u_2)$, $V^T = (v_1 \ \ v_2 \ \ v_3)$ и $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$, причём $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ и $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$.

Вспомним предложение с лекции:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T$$

Рассмотрим теорему о низкоранговом приближении:

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rk} A = r$. Пусть $A = U\Sigma V^T$ - SVD для A. $\forall\ k = 1, \ \ldots, \ r-1$ положим:

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ - первые } k \text{ сингулярных значений}$$

Тогда минимум величины $\|A - B\|$ (норма Фробениуса) среди всех матриц B ранга $\leqslant k$ достигается при $B = U\Sigma_k V^T$.

По теореме понимаем, что матрица B ранга 1 максимально приближает неизвестную матрицу A, если $B = U\Sigma_1 V^T$. Тогда $\Sigma_1 = \sigma_1$ и, соответственно, $B = u_1 \sigma_1 v_1^T$.
Заметим, что:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем векторы и получим:

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{10} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}}_{u_1} \underbrace{\sqrt{30}}_{\sigma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}}_{v_1^T}$$

Таким образом, мы получили первую компоненту ранга 1 для сингулярного разложения матрицы A. Далее, по условию задачи полагаем $\sigma_2 = \sqrt{20}$. Заметим, что $\sigma_1 = \sqrt{30} > \sigma_2 = \sqrt{20}$, значит разложение определено верно. Тогда имеем:

$$A = u_1 \sqrt{30}\ v_1^T + u_2 \sqrt{20}\ v_2^T$$

Придумаем, каким образом мы можем при нормировке получить $\sigma_2 = \sqrt{20}$. В первом случае из вектора u_1 мы вынесли $\sqrt{10}$, из v_1 получили $\sqrt{3}$. Тогда за u_2 возьмём и нормируем такой вектор, который является ортогональным относительно u_1 и его длина равна $\sqrt{10}$. Например:

$$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \implies u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \quad (u_1,\, u_2) = -3+3 = 0$$

Теперь для v_2 подберём такой вектор, который является ортогональным к v_1 и с длиной $\sqrt{2}$ (так как $\sqrt{20} = \sqrt{10}\cdot\sqrt{2}$, а $\sqrt{10}$ из вектора u_2). Если посмотреть на v_1 до нормировки, сразу приходят на ум такие ортогональные к нему векторы:

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\pm1\\0\\\mp1\end{pmatrix}\}$$

Возьмём первый вектор, тогда имеем:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \implies v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad (v_1,\, v_2) = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} = 0$$

Итого, наборы (u_1, u_2) и (v_1, v_2) являются ортонормированными системами. Найдём матрицу A:

$$A = u_1\sqrt{30}\ v_1^T + u_2\sqrt{20}\ v_2^T = \begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{10}}{10}\\\frac{\sqrt{10}}{10}\end{pmatrix}\sqrt{30}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{10}}{10}\\\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{pmatrix}\sqrt{20}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\3 & 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Ответ №6:

Да, существует: $A = \begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\4 & 2 & 1\end{pmatrix} = U\Sigma V^T$, где $\Sigma = \begin{pmatrix}\sqrt{30} & 0 & 0\\0 & \sqrt{20} & 0\end{pmatrix}$.

Задача №7:

Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 8y + 5 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

Рассмотрим данное уравнение как некоторую квадратичную форму. Далее, для получения канонического вида нам поможет *теорема о приведении квадратичной формы к главным осям*:

Для любой квадратичной формы $Q\colon \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ существует ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, в котором Q принимает канонический вид $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$. Более того, набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определён однозначно с точностью до перестановки.

Перепишем квадратичную форму как матрицу, последние слагаемые $(-8y+5)$ подставим после приведения:

$$Q(x, y, z) = 2y^2 - 3z^2 + 4xz \implies B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Далее попробуем интерпретировать полученную матрицу как матрицу некоторого линейного оператора. Имеем дело с симметричным случаем, потому матрица диагонализуема. Попробуем найти спектр:

$$\chi_B(t) = (-1)^n \det(B - tE) = -\begin{vmatrix} -t & 0 & 2 \\ 0 & 2-t & \\ 2 & 0 & -3-t \end{vmatrix} = (t-2)(t+4)(t-1) \implies \operatorname{Spec} B = \{1, 2, -4\}$$

Теперь вычислим базис из собственных векторов:

1. $\lambda = 2:$
$$B - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda = -4:$
$$B + 4E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. $\lambda = 1:$
$$B - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Полученные векторы ортонормируем $\mathbb{f} = \left(\frac{u_1}{|u_1|}, \frac{u_2}{|u_2|}, \frac{u_3}{|u_3|}\right)$:

$$f_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Собираем полученные векторы в матрицу и получаем такую замену координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}y' + \frac{2}{\sqrt{5}}z' \\ y = x' \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{\sqrt{5}}z' \end{cases}$$

Получим такое уравнение:

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 8y + 5 = 0 \implies 2x'^2 - 4y'^2 + z'^2 - 8x' + 5 = 0$$

Теперь соберём оставшиеся слагаемые, чтобы получить канонический вид полностью:

$$2x'^2 - 4y'^2 + z'^2 - 8x' + 5 \implies 2(x'^2 - 4x' + 4) - 8 - 4y'^2 + z'^2 + 5 \implies$$

$$\implies 2(x'-2)^2 - 4y'^2 + z'^2 - 3 = 0 \implies 2(x'-2)^2 - 4y'^2 + z'^2 = 3$$

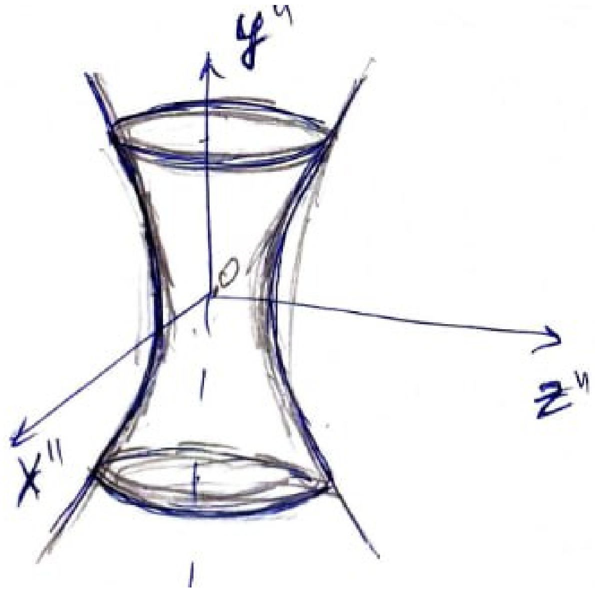
Делаем вторую замену:

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases} \implies \begin{cases} x' = x'' + 2 \\ y' = y'' \\ z' = z'' \end{cases}$$

И получаем канонический вид:

$$2x''^2 - 4y''^2 + z''^2 = 3$$

Данное уравнение задаёт однополостный гиперболоид, эскиз:



Итоговая замена координат выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}y'' + \frac{2}{\sqrt{5}}z'' \\ y = x'' + 2 \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + \frac{1}{\sqrt{5}}z'' \end{cases}$$

Ответ №7:

- Канонический вид: $2x''^2 - 4y''^2 + z''^2 = 3$;
- Поверхность: однополостный гиперболоид;
- Эскиз: выполнен сверху.

Задача №8:

Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

Найдём значения спектра линейного оператора через характеристический многочлен. Да, может показаться страшным тот факт, что матрица порядка 4, потому предлагаю жестко успокоиться за счёт того факта, что в матрице много нулей и её определитель легко разбивается на определители поменьше. Пусть исходная матрица равна A, тогда:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^4 \det(A - tE) = \begin{vmatrix} 1-t & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2-t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t) \cdot \begin{vmatrix} 1-t & 3 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & 5 & 4-t \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)((1-t)(2-t)(4-t) + 2(2-t)) = (t-2)^3(t-3) \implies 2, 3 \in \operatorname{Spec}\varphi$$

Пусть $B_t = A - tE$, узнаем количество жордановых клеток для собственного значения 2:

$$B_2 = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 2 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rk} B_2 = 3 \implies d_1 = 4 - 3 = 1 \text{ клетка}$$

С учётом того, что алгебраическая кратность значения 2 равна 3 и для него определена только одна клетка - эта жорданова клетка размера 3 на 3. В таком случае, для собственного значения 3 у нас остаётся только один вариант - клетка 1 на 1, то есть для него существует собственный вектор.
Пусть $\mathbb{f}$ - искомый базис для линейного оператора φ, тогда его матрица примет вид:

$$A(\varphi, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ - ЖНФ}$$

Остаётся дело за малым - предъявить базис, в котором матрица примет вид, описанный выше. Начнём с простого - найдём собственный вектор, отвечающий собственному значению 3 через ФСР:

$$B_3 = A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies V_3(\varphi) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_4} \rangle = \langle f_4 \rangle$$

Далее, для значения 2 у нас 1 клетка размера 3×3, поэтому как f_3 нам требуется найти такой вектор, для которого выполняется:

$$\operatorname{ht} f_3 = 3,\ f_3 \in \operatorname{Ker} B_2^3$$

Вычислим матрицу B_2^3:

$$B_2^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём базис ядра матрицы B_2^3 через ФСР:

$$B_2^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{Ker} B_2^3 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Промерив ручками, приходим к тому, что высоту 3 имеет только второй вектор. Берём его как f_3:

$$f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies f_2 = B_2 f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \implies f_1 = B_2 f_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Обязательно: Проверим, что набор $\mathbb{f} := (f_1, f_2, f_3, f_4)$ является *линейно независимым*:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \mathbb{f} \text{ - базис в } \mathbb{R}^4$$

Ответ №8:

- Базис $\mathbb{f} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- Жорданова форма $A(\varphi, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.