

Fachhochschule Aachen
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik

Planarität

Einführung und Satz von Kuratowski

Nassim Awabdy
nassim.awabdy@alumni.fh-aachen.de

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation	1
2 Planarität	2
2.1 Das Gas-Wasser-Strom Problem als Graphen problem	2
2.2 Planare Darstellung und planare Graphen	2
2.3 Flächen	3
2.4 Flächengrad	4
3 Satz von Kuratowski und Wagner	5
Literaturverzeichnis	7

1 Motivation

Das Gas-Wasser-Strom-Problem gehört zu den bekanntesten Klassikern der graphentheoretischen Unterhaltungsmathematik. Es wurde im Jahr 1917 von Henry Ernest Dudeney in seinem Buch *“Amusements in Mathematics”* vorgestellt. Die Aufgabenstellung ist scheinbar einfach: Drei Häuser sollen jeweils unabhängig voneinander mit den drei Versorgungseinheiten Gas, Wasser und Strom verbunden werden. Dabei dürfen sich keine der neun Verbindungsleitungen kreuzen.[1]

Das Problem illustriert die Fragestellung, ob sich bestimmte Netzwerke in der Ebene so darstellen lassen, dass ihre Kanten einander nicht schneiden.

Die Relevanz dieses Problems zeigt sich in zahlreichen technischen, wissenschaftlichen und praktischen Anwendungen, in denen die Vermeidung von Kreuzungen eine entscheidende Rolle spielt.

Bei der Visualisierung von Graphen, etwa in der Informatik oder Netzwerkanalyse, erleichtert eine Darstellung ohne sich kreuzende Kanten das Verständnis komplexer Strukturen. So lassen sich Muster, Zusammenhänge oder zentrale Elemente besser erkennen.

Auch in der Elektrotechnik etwa ist es essentiell, auf einem Mikrochip die Leiterbahnen zwischen elektronischen Komponenten wie Widerständen so zu platzieren, dass es zu keinen unerwünschten Überschneidungen und damit verbundenen Kurzschlüssen kommt.

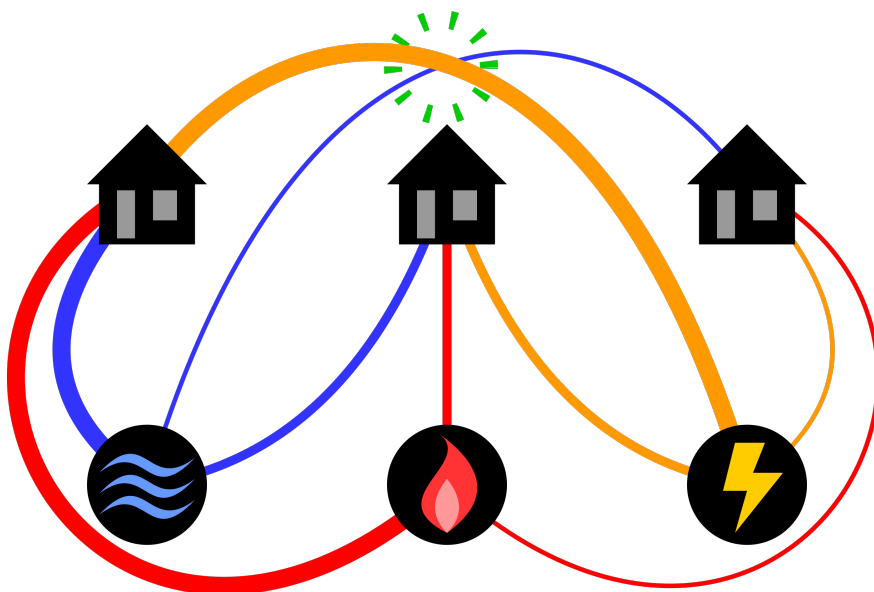


Abbildung 1: Darstellung des Gas-Wasser-Strom-Problems in der Ebene. Quelle: [2]

2 Planarität

2.1 Das Gas-Wasser-Strom Problem als Graphen problem

Um das Gas-Wasser-Strom-Problem formal analysieren zu können, stellen wir es als Graphenproblem dar. Dabei modellieren wir jede der drei Versorgungseinheiten sowie jedes der drei Häuser als Knoten in einem ungerichteten Graphen.

Ein solcher Graph weist eine bipartite Struktur auf, da die Knoten in zwei disjunkten Mengen aufteilen lassen, wobei Kanten nur zwischen den Knoten beider Gruppen verlaufen. Im konkreten Fall ergibt sich daraus der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$.

Die zentrale Fragestellung lautet nun: Existiert eine Darstellung von $K_{3,3}$ im \mathbb{R}^2 , in der alle Kanten kreuzungsfrei verlaufen?

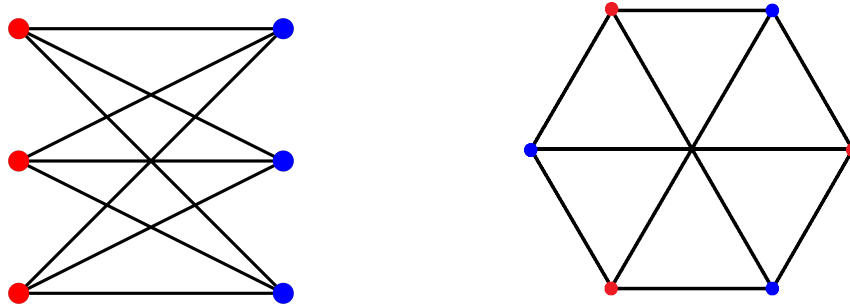


Abbildung 2: Zwei verschiedene Darstellungen des vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,3}$.
Quelle: Links [3], Rechts [4]

2.2 Planare Darstellung und planare Graphen

Um die Fragestellung aus dem vorherigen Abschnitt allgemeiner zu erfassen, müssen wir zwischen zwei wichtigen Begriffen unterscheiden: planare Darstellung und planar.

Definition: Ein Graph heißt **eben** oder **planar dargestellt**, wenn er im \mathbb{R}^2 so gezeichnet ist, dass sich keine seiner Kanten kreuzen.[1]

Definition: Ein Graph heißt **planar**, wenn es überhaupt möglich ist, ihn planar darzustellen.[1]

Das bedeutet, ein Graph muss nicht notwendigerweise ohne Kantenkreuzungen gezeichnet sein, um als planar zu gelten; entscheidend ist allein die Existenz einer solchen Darstellung. Der Unterschied zwischen einer konkreten planaren Darstellung und der Planarität eines Graphen lässt sich gut am Beispiel des vollständigen Graphen K_4 mit vier Knoten veranschaulichen. In der linken Darstellung der Abbildung 3 kreuzen sich die Kanten, sie ist daher nicht planar dargestellt. Dennoch ist K_4 planar, da die rechte Darstellung zeigt, dass eine planare Darstellung existiert.

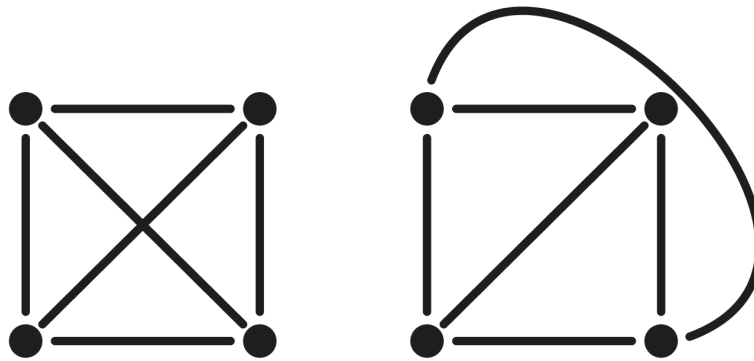


Abbildung 3: Zwei Darstellungen des vollständigen Graphen K_4 . (Links) eine nicht-planare Darstellung. (Rechts) eine planare Darstellung.

2.3 Flächen

In einer planaren Darstellung eines Graphen wird die Ebene durch die Knoten und Kanten des Graphen in mehreren Bereichen unterteilt. Diese Bereiche nennt man **Flächen**.

Wenn man den Graphen gezeichnet hat, bilden die Knoten und Kanten dabei die Begrenzung dieser Flächen.[1]

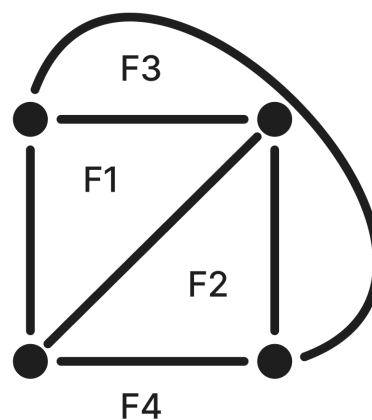


Abbildung 4: Planare Darstellung des vollständigen Graphen K_4 mit den vier entstehenden Flächen F_1 bis F_4

In Abbildung 4 ist eine planare Darstellung des Graphen K_4 zu sehen, bei der die Ebene in vier Flächen unterteilt wird.

Die Fläche F_4 unterscheidet sich von den anderen dadurch, dass sie unbeschränkt ist. Eine solche Fläche wird als **äußere Fläche** bezeichnet und kommt in jeder planaren Darstellung genau einmal vor.

Die übrigen Flächen werden als **innere Flächen** bezeichnet und sind stets durch einen Kreis im Graphen begrenzt.

Ob eine Fläche als **äußere Fläche** erscheint, hängt von der konkreten planaren Darstellung ab (siehe Abbildung 5).

Stellen Sie sich vor, der Graph ist auf einen Luftballon gezeichnet. Wenn man eine innere Fläche aufschneidet, die Ränder auseinanderzieht und den Ballon plattdrückt, wird diese Fläche zur äußeren.

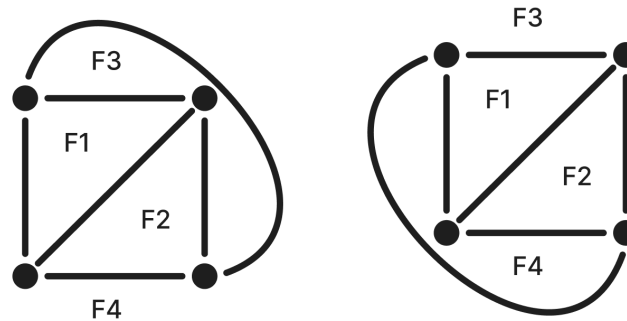


Abbildung 5: Zwei planare Darstellungen des Graphen K_4 mit unterschiedlicher Wahl der äußeren Fläche

2.4 Flächengrad

Jede Fläche F in einer planaren Darstellung besitzt eine **Länge**, auch **Grad** der Fläche genannt $d(F)$.

Definition: Der **Grad** $d(F)$ einer Fläche F ist die Anzahl der sie begrenzenden Kanten.[1]

Dabei zählt jede Kante, die die Fläche begrenzt **einmal**. Falls eine Kante jedoch die Fläche *von beiden Seiten* berührt, wird sie entsprechend **zweifach gezählt**.

Genauso wie die Unterscheidung zwischen inneren und äußeren Flächen hängt auch der Grad einer Fläche von der konkreten planaren Darstellung ab (siehe Abbildung 6).

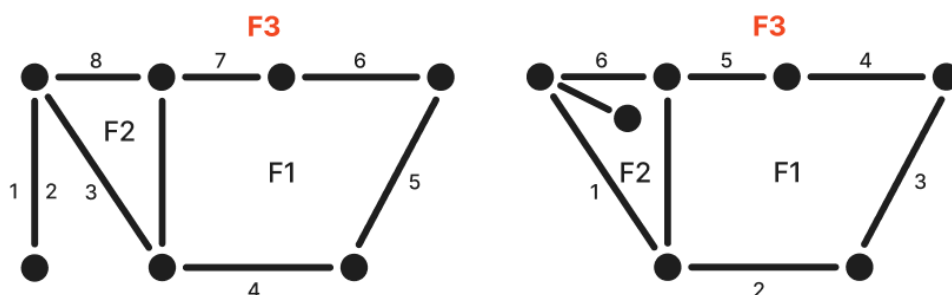


Abbildung 6: Bestimmung des Grades der Außenfläche F_3 , in zwei verschiedenen planaren Darstellungen desselben Graphen.

3 Satz von Kuratowski und Wagner

Die Planarität eines Graphen kann nicht nur durch seine Darstellung überprüft, sondern auch durch eine strukturelle Eigenschaft formal beschrieben werden. Diese zentrale Charakterisierung liefert der sogenannte **Satz von Kuratowski**.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Graph $H = (V', E')$ ist ein **Teilgraph** von G , wenn $V' \subseteq V$ ist und $E' \subseteq E$ ist, wobei jede Kante in E' nur Knoten aus V' verbindet. Ein **echter Teilgraph** H von G ist ein Teilgraph, der sich von G unterscheidet, das heißt $G \neq H$. [1, 5]

Definition: Ein Graph G heißt **minimal nicht-planar**, wenn G nicht planar ist und alle seine **echten Teilgraphen** planar sind. [5]

Die beiden Graphen K_5 und $K_{3,3}$ stellen die **minimalen nicht-planarer Graphen** dar, da sie die kleinsten Graphen sind, die in der Ebene nicht ohne Kantenkreuzung gezeichnet werden können.

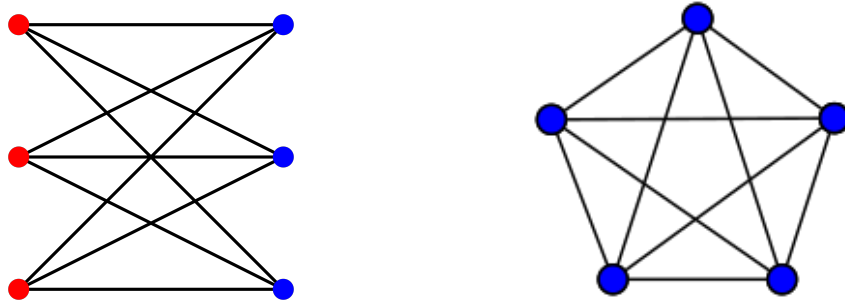


Abbildung 7: Links: Der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$, Rechts: Der vollständige Graph K_5 .
Quellen: Links [6], Rechts [4]

Definition: Ein Graph H ist ein **Minor** eines Graphen G , wenn man H aus G durch eine Folge der folgenden Operationen erhält:

- Entfernen von Kanten
- Entfernen von Knoten (samt ihrer inzidenten Kanten)
- Kontraktion von Kanten: Dabei fasst man zwei durch eine Kante verbundene Knoten zu einem einzigen Knoten zusammen, wobei alle anliegenden Kanten entsprechend angepasst werden (siehe Abbildung 8).

Ein wichtiger Zusammenhang ist, dass die **Planarität minor-geschlossen** ist. Das bedeutet: Wenn ein Graph G planar ist, dann sind alle seine Minoren ebenfalls planar.

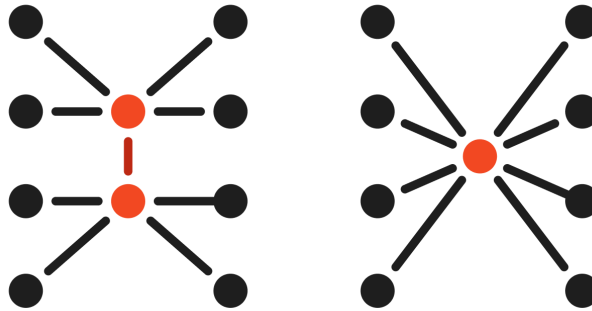


Abbildung 8: *Beispiel einer Kantenkontraktion. Links: Ausgangsgraph. Rechts: Ergebnis nach Zusammenfassung der verbundenen Knoten.*

Satz: Ein Graph ist genau dann **planar**, wenn er weder einen K_5 noch einen $K_{3,3}$ als **Minor** enthält.[1]

Die Richtung " \Rightarrow " (wenn ein Graph planar ist, enthält er keinen K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor) folgt direkt aus der Minor-Absgeschlossenheit der Planarität: Da jeder Minor eines planaren Graphen ebenfalls planar ist, können K_5 oder $K_{3,3}$ keine Minoren eines planaren Graphen sein.

Die Richtung " \Leftarrow " (wenn ein Graph weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthält, dann ist er planar) ist nicht unmittelbar offensichtlich, aber sie wurde mathematisch bewiesen. Diese Rückrichtung beruht auf der strukturellen Erkenntnis, dass K_5 und $K_{3,3}$ die einzigen minimalen nicht-planaren Graphen bezüglich der Minorität sind. Das bedeutet: Jeder nicht-planare Graph enthält entweder K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.

Literaturverzeichnis

- [1] BÜSING, Christina: *Graphen- und Netzwerkoptimierung*. Spektrum, Akademischer Verlag, 2010. – ISBN 978–3–8274–2422–8
- [2] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS: *3 utilities problem (plane version)*. https://en.wikipedia.org/wiki/File:3_utilities_problem_plane.svg. Version: 2023. – Accessed: 2025-06-09
- [3] WIKIMEDIA COMMONS CONTRIBUTORS: *Graph K3-3*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Graph_K3-3.svg, 2024. – Accessed: 2025-06-09
- [4] WIKIMEDIA COMMONS CONTRIBUTORS: *Complex polygon 2-4-3 bipartite graph*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complex_polygon_2-4-3-bipartite_graph.png, 2024. – Accessed: 2025-06-09
- [5] OLDS, TAKA: FORBIDDEN GRAPH MINORS.
- [6] BENBENNICK, David: *Complete graph K5 [SVG file]*. Wikimedia Commons, public domain. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Complete_graph_K5.svg. Version: 2006. – Created by David Benbennick, released to public domain. Accessed 2025-06-09