

CÁLCULO E SIMULAÇÃO DE RIPPLE

Autor: Daniel Agnoletto

Objetivo: pesquisa pessoal

No circuito abaixo, uma fonte V_{in} alimenta uma malha formada por

um resistor série e uma carga R_L paralela a um capacitor C . Este circuito simula, de forma muito simplificada, o funcionamento de um circuito digital, onde chaves internas (mosfets) estão constantemente ligando e desligando com um período T dado pelo clock do circuito (ou por um múltiplo deste). Quando a chave S_1 está aberta, a carga R_L possui um valor R_{Lmin} , quando fechada, a carga é R_{Lmax} . O objetivo é calcular a variação na tensão V_{out} (ripple) dados os valores de V_{in} , R_1 , R_{Lmin} , R_{Lmax} , C e o período do chaveamento T . Após o perfil do ripple ser obtido, uma análise espectral da corrente em R_1 será realizado para avaliar quais frequências compõe o sinal e estabelecer como os valores dos componentes do circuito influenciam na distribuição espectral. A partir disso, os valores de C e R_1 poderão ser calculados para que os picos de frequência sejam os menores possíveis. Os resultados desta análise são importantes uma vez que podem ajudar na solução de problemas relacionados a emissões eletromagnéticas (emc).

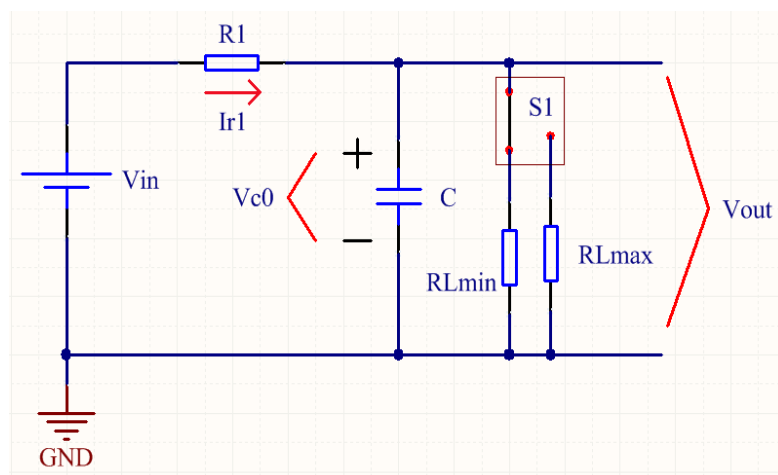


Figura 1: modelo simplificado de circuito digital

O circuito da Figura 1 foi baseado no modelo representado na Figura 2 abaixo. Podemos observar que a alimentação do uC foi realizada através de uma trilha de VCC (em vermelho) e um plano de GND (em azul). Além disso, o circuito possui um capacitor C em paralelo com os pinos de alimentação do circuito integrado. A trilha de VCC possui uma resistência ôhmica R_1 do cobre. Este modelo é incompleto, visto que a trilha também possui uma indutância associada. A título de simplicidade, as indutâncias não estão sendo consideradas nesta primeira análise. Note também que não estão sendo consideradas impedâncias no GND pois, por simplicidade, admite-se que a impedância no plano de terra é extremamente baixa para ter efeito significativo.

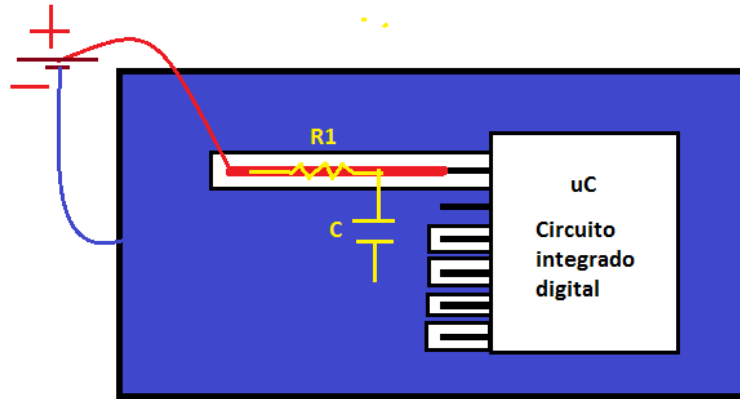


Figura 2: modelo simples de alimentação de circuito

Para encontrar a forma de onda da tensão V_{out} vamos retirar as equações para a chave S_1 aberta e fechada. Para isso, vamos derivar as equações genericamente com R_L e posteriormente substituir por R_{Lmin} e R_{Lmax} . Trabalhando no domínio da frequência e utilizando o teorema dos nós, temos a seguinte expressão para a corrente $I(s)$ do resistor R_1 :

Equação 1)
$$\frac{V_{in}(s) - V_{out}(s)}{R_1} = I(s)$$

O somatório das correntes na carga R_L e no capacitor C nos dá outra equação:

Equação 2)
$$\frac{V_{out}(s) - \left(\frac{V_{c0}}{s}\right)}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{V_{out}(s)}{R_L} = I(s)$$

Onde V_{c0} é a tensão inicial do capacitor.

$$\begin{aligned} \left(V_{out}(s) - \left(\frac{V_{c0}}{s}\right)\right)j\omega C + \frac{V_{out}(s)}{R_L} &= \frac{V_{in}(s) - V_{out}(s)}{R_1} \\ (V_{out}(s))j\omega C - \left(\frac{V_{c0}}{s}\right)j\omega C + \frac{V_{out}(s)}{R_L} + \frac{V_{out}(s)}{R_1} &= \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ (V_{out}(s))j\omega CR_1 - \left(\frac{V_{c0}}{s}\right)j\omega CR_1 + \frac{R_1}{R_L} V_{out}(s) + V_{out}(s) &= V_{in}(s) \end{aligned}$$

Logo, a função de transferência do circuito é:

$$V_{out}(s) = \frac{(V_{in}(s) + V_{c0}CR_1)R_L}{R_1 + R_L + sCR_1R_L}$$

Para uma fonte V_{in} constante:

$$V_{in}(s) = \frac{V_{in}}{s}$$

Neste caso a tensão V_{out} no domínio da frequência é:

Equação 3)
$$V_{out}(s) = \frac{\left(\frac{V_{in}}{s} + V_{c0}CR_1\right)R_L}{R_1 + R_L + sCR_1R_L}$$

A transformada inversa (função no domínio do tempo):

$$\text{Equação 4)} \quad V_{out}(t) = \frac{V_{in}R_L}{R_1+R_L} \left(1 - e^{-\frac{t(R_1+R_L)}{CR_1R_L}} \right) + V_{c0} e^{-\frac{t(R_1+R_L)}{CR_1R_L}}$$

Para S_1 fechada temos que $R_L = R_{L\min}$ e tensão inicial do capacitor $V_{c0} = V_0$:

$$V_{out_{S1F}}(t) = \frac{V_{in}R_{L\min}}{R_1+R_{L\min}} \left(1 - e^{-\frac{t(R_1+R_{L\min})}{CR_1R_{L\min}}} \right) + V_0 e^{-\frac{t(R_1+R_{L\min})}{CR_1R_{L\min}}}$$

Se utilizarmos as constantes $k_1 = \frac{R_{L\min}}{R_1+R_{L\min}}$ e $\tau_1 = \frac{(R_1+R_{L\min})}{CR_1R_{L\min}}$:

$$\text{Equação 5)} \quad V_{out_{S1F}}(t) = V_{in}k_1(1 - e^{-t\tau_1}) + V_0 e^{-t\tau_1}$$

De forma semelhante, para S_1 aberta temos:

$$k_2 = \frac{R_{L\max}}{R_1+R_{L\max}}$$

$$\tau_2 = \frac{(R_1+R_{L\max})}{CR_1R_{L\max}}$$

$$\text{Equação 6)} \quad V_{out_{S1A}}(t) = V_{in}k_2(1 - e^{-t\tau_2}) + V_1 e^{-t\tau_2}$$

Onde V_1 é a tensão inicial do capacitor quando o ciclo com a chave S_1 aberta é iniciado. Como a chave está sendo aberta e fechada com um período T , a tensão inicial do capacitor no ciclo seguinte é a última tensão do capacitor no ciclo anterior. No regime transitório, as tensões iniciais de cada ciclo mudam a cada período. No regime estacionário, no entanto, as tensões V_0 e V_1 são constantes pois o sistema já atingiu o equilíbrio.

Assim, no regime estacionário, as tensões iniciais V_0 e V_1 são dadas por:

$$V_{out_{S1F}}(T) = V_1 \text{ para o intervalo de tempo } t = T$$

$$V_{out_{S1A}}(T) = V_0 \text{ para o intervalo de tempo } t = T$$

Substituindo esta relação nas equações 5 e 6 temos:

$$V_{in}k_1(1 - e^{-T\tau_1}) + V_0 e^{-T\tau_1} = V_1$$

$$V_{in}k_2(1 - e^{-T\tau_2}) + V_1 e^{-T\tau_2} = V_0$$

Lembrando que as relação são válidas quando o sistema estiver estacionário. Reescrevendo as equações acima temos:

$$\text{Equação 7)} \quad V_{in}k_1 + (V_0 - V_{in}k_1)e^{-T\tau_1} = V_1$$

$$\text{Equação 8)} \quad V_{in}k_2 + (V_1 - V_{in}k_2)e^{-T\tau_2} = V_0$$

Substituindo as Equações 8 em 7, temos as seguintes expressões para V_1 e V_0 :

$$\text{Equação 9)} \quad V_1 = \frac{V_{in}(k_1 + (k_2 - k_1)e^{-T\tau_1} - k_2e^{-T(\tau_1 + \tau_2)})}{(1 - e^{-T(\tau_1 + \tau_2)})}$$

$$\text{Equação 10)} \quad V_0 = \frac{V_{in}(k_2 + (k_1 - k_2)e^{-T\tau_2} - k_1e^{-T(\tau_1 + \tau_2)})}{(1 - e^{-T(\tau_1 + \tau_2)})}$$

O ripple de tensão é dado por:

$$V_{ripple} = V_1 - V_0$$

$$\text{Equação 11)} \quad V_{ripple} = \frac{V_{in}(k_1 - k_2)(1 - e^{-T\tau_1} - e^{-T\tau_2} + e^{-T(\tau_1 + \tau_2)})}{(1 - e^{-T(\tau_1 + \tau_2)})}$$

Observe que se o decaimento for acentuado, podemos desconsiderar a componente exponencial e o valor do ripple dependerá tão somente dos valores finais de carga dos capacitores, como era de se esperar. Se o valor de T for grande o suficiente, ou os valores de capacitância e resistência forem demasiado pequenos, o capacitor vai carregar completamente dentro do período T e o valor de ripple poderá ser calculado diretamente dos valores finais de carga do capacitor para as situações de $R_{L\min}$ e $R_{L\max}$.

$$R_1 = 15$$

$$R_L = 10$$

$$C = 2$$

$$V_i = 5$$

$$V_0 = 3.8085$$

$$R_R = 100$$

$$v_o(t) = \frac{V_i R_L}{R_1 + R_L} \left(1 - e^{-\frac{t(R_1 + R_L)}{C R_1 R_L}} \right) + \left(V_0 e^{-\frac{t(R_1 + R_L)}{C R_1 R_L}} \right)$$

$$v_f(t) = \frac{V_i R_R}{R_1 + R_R} \left(1 - e^{-\frac{t(R_1 + R_R)}{C R_1 R_R}} \right) + \left(V_0 e^{-\frac{t(R_1 + R_R)}{C R_1 R_R}} \right)$$

$$v_o(5) = 1.8085 e^{-\frac{5}{12}} + 2$$

$$v_f(50) = \frac{100}{23} - 3.6663 e^{-\frac{23}{12}} = 3.8085$$

$$v_o(50) = 1.8085 e^{-\frac{25}{6}} + 2 = 2.028$$

$$k_1 = \frac{R_L}{R_1 + R_L} = \frac{(10)}{15+10} = \frac{2}{5}$$

$$k_2 = \frac{R_R}{R_1 + R_R} = \frac{100}{15+100} = \frac{20}{23}$$

$$T_1 = \frac{(R_1 + R_L)}{C R_1 R_L} = \frac{(15+10)}{2(15)10} = \frac{1}{12}$$

$$T_2 = \frac{(R_1 + R_R)}{C R_1 R_R} = \frac{(15+100)}{2(15)100} = \frac{23}{600}$$

$$c(T) = \frac{5 \left(\frac{2}{5} + \left(\frac{20}{23} - \frac{2}{5} \right) e^{-T \left(\frac{1}{12} \right)} - \frac{20}{23} e^{-T \left(\frac{1}{12} + \frac{23}{600} \right)} \right)}{\left(1 - e^{-T \left(\frac{1}{12} + \frac{23}{600} \right)} \right)}$$

$$c(2) = - \frac{1}{e^{-\frac{73}{300}} - 1} \left(\frac{54}{23} e^{-\frac{1}{6}} - \frac{100}{23} e^{-\frac{73}{300}} + 2 \right) = V_{c1} = 2.6791$$

$$V_{c0} = 5 \left(\frac{20}{23} \right) + \left(2.6791 - 5 \left(\frac{20}{23} \right) \right) e^{-2 \left(\frac{23}{600} \right)} = 2.8023$$

$$v_o(2) = 2 \left(1 - e^{-\frac{1}{6}} \right) + \left(2.8023 e^{-\frac{1}{6}} \right) = 2.6791$$

$$v_f(t) = \frac{(5)(100)}{15+100} \left(1 - e^{-\frac{2(15+100)}{2(15)(100)}} \right) + \left(2.6791 e^{-\frac{2(15+100)}{2(15)(100)}} \right) = 2.8023$$