CÁLCULO E SIMULAÇÃO DE RIPPLE

Autor: Daniel Agnoletto

Objetivo: pesquisa pessoal

No circuito abaixo, uma fonte V_{in} alimenta uma malha formada por um resistor série e uma carga R_L paralela a um capacitor C. Este circuito simula, de forma muito simplificada, o funcionamento de um circuito digital, onde chaves internas (mosfets) estão constantemente ligando e desligando com um período T dado pelo clock do circuito (ou por um múltiplo deste). Quando a chave S_1 está aberta, a carga R_L possui um valor R_{Lmin}, quando fechada, a carga é R_{Lmax}. O objetivo é calcular a variação na tensão V_{out} (ripple) dados os valores de V_{in}, R_1, R_{Lmin}, R_{Lmax}, C e o período do chaveamento T. Após o perfil do ripple ser obtido, uma análise espectral da corrente em R_1 será realizado para avaliar quais frequências compõe o sinal e estabelecer como os valores dos componentes do circuito influenciam na distribuição espectral. A partir disso, os valores de C e R_1 poderão ser calculados para que os picos de frequência sejam os menores possíveis. Os resultados desta analise são importantes uma vez que podem ajudar na solução de problemas relacionados a emissões eletromagnéticas (emc).

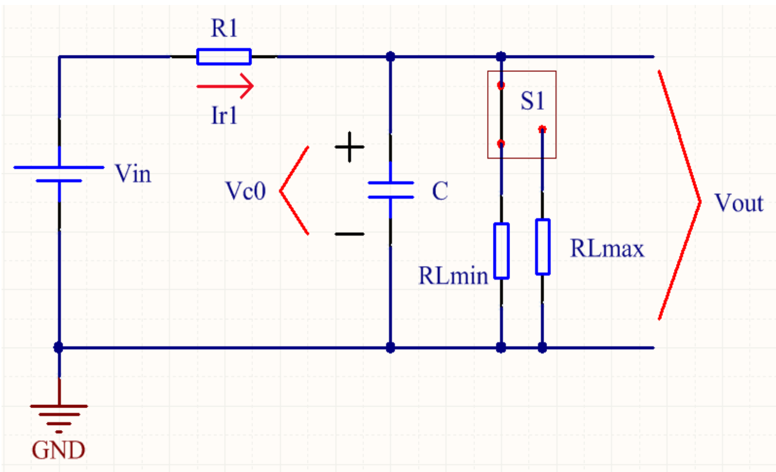

Figura 1: modelo simplificado de circuito digital

O circuito da Figura 1 foi baseado no modelo representado na Figura 2 abaixo. Podemos observar que a alimentação do uC foi realizada através de uma trilha de VCC (em vermelho) e um plano de GND (em azul). Além disso, o circuito possui um capacitor C em paralelo com os pinos de alimentação do circuito integrado. A trilha de VCC possui uma resistência ôhmica R_1 do cobre. Este modelo é incompleto, visto que a trilha também possui uma indutância associada. A título de simplicidade, as indutâncias não estão sendo consideradas nesta primeira análise. Note também que não estão sendo consideradas impedâncias no GND pois, por simplicidade, admite-se que a impedância no plano de terra é extremamente baixa para ter efeito significativo.

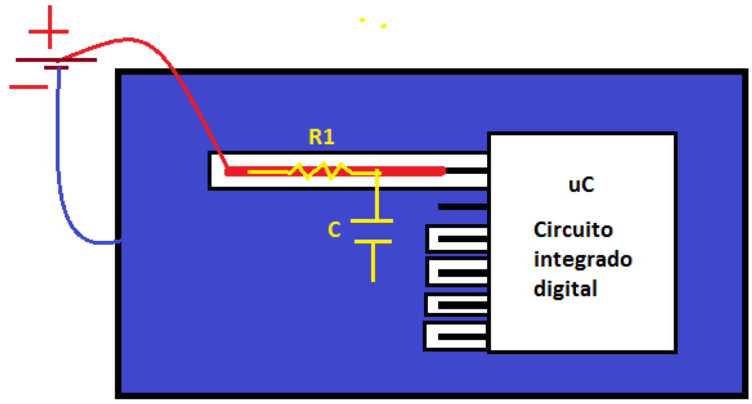

Figura 2: modelo simples de alimentação de circuito

Para encontrar a forma de onda da tensão V_{out} vamos retirar as equações para a chave S_1 aberta e fechada. Para isso, vamos derivar as equações genericamente com R_L e posteriormente substituir por R_{Lmin} e R_{Lmax}. Trabalhando no domínio da frequência e utilizando o teorema dos nós, temos a seguinte expressão para a corrente $I(s)$ do resistor R_1:

Equação 1) $\frac{V_{in}(s)-V_{out}(s)}{R_1} = I(s)$

O somatório das correntes na carga R_L e no capacitor C nos dá outra equação:

Equação 2) $\frac{V_{out}(s)-\left(\frac{V_{c0}}{s}\right)}{\frac{1}{j\varpi C}} + \frac{V_{out}(s)}{R_L} = I(s)$

Onde V_{c0} é a tensão inicial do capacitor.

$$\left(V_{out}(s) - \left(\frac{V_{c0}}{s}\right)\right)j\varpi C + \frac{V_{out}(s)}{R_L} = \frac{V_{in}(s)-V_{out}(s)}{R_1}$$
$$(V_{out}(s))j\varpi C - \left(\frac{V_{c0}}{s}\right)j\varpi C + \frac{V_{out}(s)}{R_L} + \frac{V_{out}(s)}{R_1} = \frac{V_{in}(s)}{R_1}$$
$$(V_{out}(s))j\varpi CR_1 - \left(\frac{V_{c0}}{s}\right)j\varpi CR_1 + \frac{R_1}{R_L}V_{out}(s) + V_{out}(s) = V_{in}(s)$$

Logo, a função de transferência do circuito é:

$$V_{out}(s) = \frac{(V_{in}(s)+V_{c0}CR_1)R_L}{R_1+R_L+sCR_1R_L}$$

Para uma fonte V_{in} constante:

$$V_{in}(s) = \frac{V_{in}}{s}$$

Neste caso a tensão V_{out} no domínio da frequência é:

Equação 3) $V_{out}(s) = \frac{\left(\frac{V_{in}}{s}+V_{c0}CR_1\right)R_L}{R_1+R_L+sCR_1R_L}$

A transformada inversa (função no domínio do tempo):

Equação 4) $V_{out}(t) = \frac{V_{in}R_L}{R_1+R_L}\left(1 - e^{\frac{-t(R_1+R_L)}{CR_1R_L}}\right) + V_{c0}e^{\frac{-t(R_1+R_L)}{CR_1R_L}}$

Para S_1 fechada temos que $R_L = R_{L\min}$ e tensão inicial do capacitor $V_{c0} = V_0$:

$$V_{out_{S1F}}(t) = \frac{V_{in}R_{L\min}}{R_1+R_{L\min}}\left(1 - e^{\frac{-t(R_1+R_{L\min})}{CR_1R_{L\min}}}\right) + V_0e^{\frac{-t(R_1+R_{L\min})}{CR_1R_{L\min}}}$$

Se utilizarmos as constantes $k_1 = \frac{R_{L\min}}{R_1+R_{L\min}}$ e $\tau_1 = \frac{(R_1+R_{L\min})}{CR_1R_{L\min}}$:

Equação 5) $V_{out_{S1F}}(t) = V_{in}k_1(1 - e^{-t\tau_1}) + V_0e^{-t\tau_1}$

De forma semelhante, para S_1 aberta temos:

$$k_2 = \frac{R_{L\max}}{R_1+R_{L\max}}$$
$$\tau_2 = \frac{(R_1+R_{L\max})}{CR_1R_{L\max}}$$

Equação 6) $V_{out_{S1A}}(t) = V_{in}k_2(1 - e^{-t\tau_2}) + V_1e^{-t\tau_2}$

Onde V_1 é a tensão inicial do capacitor quando o ciclo com a chave S_1 aberta é iniciado. Estamos admitindo que o tempo de chave aberta é igual ao tempo de chave fechada $\frac{T}{2}$, ou seja, uma onda quadrada. Como a chave está sendo aberta e fechada com um período T, a tensão inicial do capacitor no ciclo seguinte é a última tensão do capacitor no ciclo anterior. No regime transitório, as tensões iniciais de cada ciclo mudam a cada período. No regime estacionário, no entanto, as tensões V_0 e V_1 são constantes pois o sistema já atingiu o equilíbrio.
Assim, no regime estacionário, as tensões iniciais V_0 e V_1 são dadas por:
$V_{out_{S1F}}\left(\frac{T}{2}\right) = V_1$ para o intervalo de tempo $t = \frac{T}{2}$
$V_{out_{S1A}}\left(\frac{T}{2}\right) = V_0$ para o intervalo de tempo $t = \frac{T}{2}$
Substituindo esta relação nas equações 5 e 6 temos:

$$V_{in}k_1\left(1 - e^{-\frac{T}{2}\tau_1}\right) + V_0e^{-\frac{T}{2}\tau_1} = V_1$$
$$V_{in}k_2\left(1 - e^{-\frac{T}{2}\tau_2}\right) + V_1e^{-\frac{T}{2}\tau_2} = V_0$$

Lembrando que as relação são válidas quando o sistema estiver estacionário.
Reescrevendo as equações acima temos:

Equação 7) $V_{in}k_1 + (V_0 - V_{in}k_1)e^{-\frac{T}{2}\tau_1} = V_1$

Equação 8) $V_{in}k_2 + (V_1 - V_{in}k_2)e^{-\frac{T}{2}\tau_2} = V_0$

Substituindo as Equações 8 em 7, temos as seguintes expressões para V_1 e V_0:

Equação 9) $$V_1 = \frac{V_{in}\left(k_1+(k_2-k_1)e^{-\frac{T}{2}\tau_1}-k_2e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)}$$

Equação 10) $$V_0 = \frac{V_{in}\left(k_2+(k_1-k_2)e^{-\frac{T}{2}\tau_2}-k_1e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)}$$

O ripple de tensão é dado por:

$$V_{ripple} = V_1 - V_0$$

Equação 11) $$V_{ripple} = \frac{V_{in}(k_1-k_2)\left(1-e^{-\frac{T}{2}\tau_1}-e^{-\frac{T}{2}\tau_2}+e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)}$$

Observe que se o decaimento for acentuado, podemos desconsiderar a componente exponencial e o valor do ripple dependerá tão somente dos valores finais de carga dos capacitores, como era de se esperar. Se o valor de T for grande o suficiente, ou os valores de capacitância e resistência forem demasiado pequenos, o capacitor vai carregar completamente dentro do intervalo $\frac{T}{2}$ e o valor de ripple poderá ser calculado diretamente dos valores finais de carga do capacitor para as situações de $R_{L\min}$ e $R_{L\max}$.
Exemplo:
Para $R_1 = 15\Omega$, $R_{L\min} = 10\Omega$, $R_{L\max} = 100\Omega$, $V_{in} = 5V$, $C = 100\mu F$, $T = 1s$ temos:

$$k_1 = \frac{R_{L\min}}{R_1+R_{L\min}} = \frac{10}{15+10} = \frac{2}{5}$$

$$\tau_1 = \frac{(R_1+R_{L\min})}{CR_1R_{L\min}} = \frac{(15+10)}{100\times10^{-6}(15)(10)} = \frac{5000}{3}$$

$$k_2 = \frac{R_{L\max}}{R_1+R_{L\max}} = \frac{100}{15+100} = \frac{20}{23}$$

$$\tau_2 = \frac{(R_1+R_{L\max})}{CR_1R_{L\max}} = \frac{(15+100)}{100\times10^{-6}(15)(100)} = \frac{2300}{3}$$

$$V_0 = \frac{V_{in}\left(k_2+(k_1-k_2)e^{-\frac{T}{2}\tau_2}-k_1e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)} = \frac{5\left(\frac{20}{23}+\left(\frac{2}{5}-\frac{20}{23}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2300}{3}\right)}-\frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2300}{3}+\frac{5000}{3}\right)}\right)}{\left(1-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2300}{3}+\frac{5000}{3}\right)}\right)} = 4.3478$$

$$V_1 = \frac{V_{in}\left(k_1+(k_2-k_1)e^{-\frac{T}{2}\tau_1}-k_2e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)}{\left(1-e^{-\frac{T}{2}(\tau_1+\tau_2)}\right)} = \frac{5\left(\frac{2}{5}+\left(\frac{20}{23}-\frac{2}{5}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{5000}{3}\right)}-\frac{20}{23}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2300}{3}+\frac{5000}{3}\right)}\right)}{\left(1-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2300}{3}+\frac{5000}{3}\right)}\right)} = 2.0$$

$$V_{out_{S1F}}(t) = V_{in}k_1 + (V_0 - V_{in}k_1)e^{-t\tau_1} = 5(\tfrac{2}{5}) + (4.3478 - 5(\tfrac{2}{5}))e^{-\frac{5000}{3}t} =$$
$$2.3478e^{-\frac{5000}{3}t} + 2$$

$$V_{out_{S1A}}(t) = V_{in}k_2 + (V_1 - V_{in}k_2)e^{-\frac{T}{2}\tau_2} = 5\left(\frac{20}{23}\right) + \left(2.0 - 5\left(\frac{20}{23}\right)\right)e^{-\frac{2300}{3}t} =$$
$$\frac{100}{23} - 2.3478e^{-\frac{2300}{3}t}$$

$R_1 = 15$
$R_L = 10$
$C = 2$
$V_i = 5$
$V_0 = 3.8085$
$R_R = 100$

$$v_o(t) = \frac{V_i R_L}{R_1+R_L}\left(1 - e^{\frac{-t(R_1+R_L)}{CR_1R_L}}\right) + \left(V_0 e^{-\frac{t(R_1+R_L)}{CR_1R_L}}\right)$$

$$v_f(t) = \frac{V_i R_R}{R_1+R_R}\left(1 - e^{\frac{-t(R_1+R_R)}{CR_1R_R}}\right) + \left(V_0 e^{-\frac{t(R_1+R_R)}{CR_1R_R}}\right)$$

$$v_o(5) = 1.8085e^{-\frac{5}{12}} + 2$$

$$v_f(50) = \frac{100}{23} - 3.6663e^{-\frac{23}{12}} = 3.8085$$

$$v_o(50) = 1.8085e^{-\frac{25}{6}} + 2 = 2.028$$

$$k_1 = \frac{R_L}{R_1+R_L} = \frac{(10)}{15+10} = \frac{2}{5}$$

$$k_2 = \frac{R_R}{R_1+R_R} = \frac{100}{15+100} = \frac{20}{23}$$

$$T_1 = \frac{(R_1+R_L)}{CR_1R_L} = \frac{(15+10)}{2(15)10} = \frac{1}{12}$$

$$T_2 = \frac{(R_1+R_R)}{CR_1R_R} = \frac{(15+100)}{2(15)100} = \frac{23}{600}$$

$$c(T) = \frac{5\left(\frac{2}{5}+\left(\frac{20}{23}-\frac{2}{5}\right)e^{-T\left(\frac{1}{12}\right)}-\frac{20}{23}e^{-T\left(\frac{1}{12}+\frac{23}{600}\right)}\right)}{\left(1-e^{-T\left(\frac{1}{12}+\frac{23}{600}\right)}\right)}$$

$$c(2) = -\frac{1}{e^{-\frac{73}{300}}-1}\left(\frac{54}{23}e^{-\frac{1}{6}} - \frac{100}{23}e^{-\frac{73}{300}} + 2\right) = V_{c1} = 2.6791$$

$$V_{c0} = 5\left(\frac{20}{23}\right) + \left(2.6791 - 5\left(\frac{20}{23}\right)\right)e^{-2\left(\frac{23}{600}\right)} = 2.8023$$

$$v_o(2) = 2\left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right) + \left(2.8023e^{\frac{-1}{6}}\right) = 2.6791$$

$$v_f(t) = \frac{(5)(100)}{15+100}\left(1 - e^{\frac{-2(15+100)}{2(15)(100)}}\right) + \left(2.6791e^{\frac{-2(15+100)}{2(15)(100)}}\right) = 2.8023$$