Óptica Cuántica Daniel Castillo Castro

Soluciones Orszag

1. (a) Si $<n>=\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\Rightarrow e^{\beta\hbar\omega}=\frac{1}{<n>}+1\Rightarrow e^{-\beta\hbar\omega}=\frac{1}{\frac{<n>+1}{<n>}}=\frac{<n>}{<n>+1}$ Se puede escribir la probabilidad como: $P_n=\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{\sum_n e^{-\beta\hbar\omega}}=e^{-\beta(n+1)\hbar\omega}[e^{\beta\hbar\omega}+1]=\frac{1}{<n>}(\frac{<n>}{<n>+1})^{n+1}$ Con lo que se obtiene lo pedido $P_n=\frac{<n>^n}{(<n>+1)^{n+1}}$

   (b) Se comienza con la definición de fluctuación $(\Delta n)^2=\sum_n P_n(n-<n>)^2=\sum_n P_n n^2+\sum$ Recordando que $<n>$ no depende de n y está definido por $<n>=\sum_n P_n\Rightarrow(\Delta n)^2=<n$ Lo anterior es válido para cualquier distribución, ahora bien, considerando que es una distribución de Bose Einstein, vamos a tratar de demostrar: $<n>=\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\Rightarrow<n^2>=\sum_n\frac{n^2<n>^n}{(<n>+1)^{n+1}}=\sum_n\frac{n^2e^{-n\beta\hbar\omega}}{\sum_n e^{-n\beta\hbar\omega}}$ Considerando $\beta\hbar\omega=x\sum_n n^2e^{-nx}=-\frac{d}{dx}\sum_n ne^{-nx}=\frac{d^2}{dx^2}\sum_n e^{-nx}=\frac{d^2}{dx^2}(\frac{1}{1-e^x})$ $=-\frac{d}{dx}\frac{-e^x}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x(1-e^x)^2+e^{2x}}{(1-e^x)^4}=\frac{e^x}{(1-e^x)^2}+(\frac{e^x}{(1-e^x)^2})^2$ Con esto se obtiene $<n^2>=<n>+2<n>^2$ con lo que se obtiene lo pedido. $(\Delta n)^2=<n>(<n>+1)=<$

   (c) Para la ecuacion $\frac{dN_b}{dt}=-\frac{dN_a}{dt}=A_{ab}N_a+B_{ab}U(\omega)N_a-N_bB_{ba}U(\omega)$ Si U es Constante y $g_a=g_b=1$ $\frac{dN_b}{dt}=-\frac{dN_a}{dt}=AN_a+BUN_a-N_bBU=(N-N_b)(A+BU)$ $\Rightarrow\frac{dN_b}{dt}=N_b(-A-2BU)+N(A+BU)$ Se ve una ecuación diferencial ordinaria que se puede resolver así: $y'(x)=a*y(x)+b\Rightarrow y(x)=y_oe^{ax}-\frac{b}{a}\Rightarrow$ $N_b(t)=Ce^{-(A+BU)t}+\frac{N(A+BU)}{A+2BU}$ ¿Cómo se obtiene el valor de C? Calculando para $t=0$ $N_b^0=C+\frac{N(A+BU)}{A+2BU}\Rightarrow C=N_b^0-\frac{N(A+BU)}{A+2BU}$ Se termina obteniendo $N_b(t)=(N_b^0-\frac{N(A+BU)}{A+2BU})e^{-(A+2BU)t}+\frac{N(A+BU)}{A+2BU}$

2. (a) La solución para $\omega_{ba}=\omega$ y $\rho_{ba}(0)=\rho_{aa}(0)=0$ dada es $\rho_{aa}=\frac{\frac{|\nu|^2}{2}}{\frac{|\gamma|^2}{2}+|\nu|^2}[1-(cos\lambda t+\frac{3\gamma}{4\lambda}sin\lambda t)$ Si se toma la ecuación de Bloch óptica para ρ_{aa} $\frac{\rho_{aa}}{dt}=-\frac{i\nu^*}{2}e^{i(\omega_{ba}-\omega)t}+\frac{i\nu}{2}e^{-i(\omega_{ba}-\omega)t}$

3. - Empezando con la definición de Energía $\mathcal{H}=\frac{1}{2}\int(\epsilon_0E^2+\mu_0H^2)dv=$ $\frac{1}{2}\int\sum_m\epsilon_0(i)^2(\sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0v}}\{a_me^{i(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{r}-\omega_rt)}-a_m^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{r}-\omega_rt)}\})^2+\mu_0(\frac{-i}{c\mu_0})^2(\sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0v}}\mathbf{e}_m\times\hat{\mathbf{k}}_m\{a_me^{i(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{r}}$ $-\frac{1}{2}\int\sum_m\epsilon_0^2\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0v}(\{a_me^{i(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{r}-\omega_mt)}-a_m^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{r}-\omega_mt)}\})^2+(\frac{1}{c^2\mu_0})^2\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0v}(\mathbf{e}_m\times\hat{\mathbf{k}}_m\{a_me^{i(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{r}-\omega_mt)}-$ Considerando que los vectores polarización y propagación son son ortogonales entre sí. $|\mathbf{e}_m\times\hat{\mathbf{k}}_m|=|\mathbf{e}_m||\hat{\mathbf{k}}_m|=1$ Además de la ortogonalidad de las funciones $u_m(\mathbf{r})$ $\mathbf{u}_m(\mathbf{r})=\frac{\mathbf{e}_me^{i(\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{r})}}{\sqrt{v}}:\int\mathbf{u}_m^*(\mathbf{r})\mathbf{u}_n(\mathbf{r})dv=\delta_{nm}$ y que $c^{-2}=\mu_0\epsilon_0$ Se simplifica lo anterior quedando $\mathcal{H}=-\int\sum_m\frac{\hbar\omega_m}{2}(\{a_m\mathbf{u}_m(\mathbf{r})e^{i(-\omega_mt)}-a$ $=\sum_m\frac{\hbar\omega}{2}2a_ma_m^\dagger e^{(i-i)(-\omega_mt)}+\sum_m\frac{\hbar\omega}{2}2a_m^\dagger a_me^{(i-i)(-\omega_mt)}$ Por lo tanto se obtiene $\mathcal{H}=\sum_m\hbar\omega(a_ma_m^\dagger+a_m^\dagger a_m)$

- Usando las definiciones: $[A_i(\vec{r}), E_j(\vec{r}')] = -\frac{\hbar}{2v\epsilon_0} \sum_{l,\sigma} (\mathbf{e}_{l\sigma})_i (\mathbf{e}_{l\sigma})_j e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} + c.c.$ Siendo $\mathbf{e}_{l1}$, $\mathbf{e}_{l2}$ y $\hat{\mathbf{k}}_l$ vectores ortogonales entre sí, pudiéndose obtener: $|\mathbf{e}_{l1}\rangle \langle \mathbf{e}_{l1}| + |\mathbf{e}_{l2}\rangle \langle \mathbf{e}_{l2}| + |\hat{\mathbf{k}}_l\rangle \langle \hat{\mathbf{k}}_l| = 1$ Al tomar los elementos ij de la suma: $\sum_\sigma (\mathbf{e}_{l\sigma})_i (\mathbf{e}_{l\sigma})_j = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{e}_{l\sigma i}} \hat{\mathbf{e}_{l\sigma j}}$ Sustituyendo en la suma anterior $[A_i(\mathbf{r}), E_j(\mathbf{r})] = \frac{-\hbar}{2v_0\epsilon_0} \sum_l [\delta_{ij}$ Tal como se recomendó en la clase, todos estos conmutadores se pueden trabajar en la imagen de Schrodinger (independiente del tiempo) y serán también ciertos en la imagen de Heisenberg (dependiente del tiempo).

(a) Si se puede escribir $a^\dagger |n-1\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n} |n\rangle$Se puede operar recursivamente $(a^\dagger)^2 |n-2\rangle = \sqrt{n(n-1} |n\rangle \Rightarrow (a^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n(n-1)...1} |n\rangle$ Y tomando que $n! = n(n-1)...1$, se obtiene finalmente $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$

(b) La primera propiedad de conmutadores se demuestra desarrollando $[a, a^{\dagger n}] = [a, a^{\dagger(n-1)}]a^\dagger + a[a^\dagger, a^{\dagger(n-1)}] = [a, a^{\dagger(n-1)}]a^\dagger$ Esto último se obtiene a p sq2licando la propiedad de conmutadores $[A, BC] = [A, C]B + A[B, C]$ y considerando que, al $[a, a^\dagger] = 1$, tanto a como $a^\dagger$ conmutan con su conmutador. Aplicando esta propiedad recursivamente $[a, a^{\dagger n}] = [a, a^{\dagger(n-1)}]a^\dagger = [a, a^{\dagger(n-2)}]a^{\dagger 2} = ... = [a, a^\dagger]a^{n-1} = na^{\dagger n-1}$ De manera análoga también se obtiene que $[a^n, a^\dagger] = na^{n-1}$

(c) Aplicando lo del punto anterior, se resuelve para un f que es una serie de potencias y puede ser una aproximación de cualquier función derivable. $f(a, a^\dagger) = \sum_{n,m} c_n a^n c_m a^{\dagger m} \Rightarrow [a, f(a, a^\dagger)] = \sum_{n,m} c_n a^n [a, c_m a^{\dagger m}] = \sum_{n,m} c_n a^n m c_m a^{\dagger(m-1)} = \frac{\partial f(a, a^\dagger)}{\partial a^\dagger}$ Aprovechando la propiedad BCH, se obtiene también $e^{-\alpha a^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{\alpha a^\dagger a} = f(ae^\alpha, a^\dagger e^- \alpha)$

(d) Usando las definiciones $A(r,t) = \sum_m \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m \epsilon_0 v}} \mathbf{e}_m (a_m e^{i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)} + cc)$ $E(r,t) = i \sum_m \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0 v}} \mathbf{e}_m (a_m e^{i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)} + cc)$ $H(r,t) = \frac{-i}{c\mu_0} \sum_m \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0 v}} \mathbf{e}_m (a_m e^{i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)} + cc$, y los conmutadores $[a_m, a_n^\dagger] = \delta_{mn}$, y $[a_m, a_n] = [a_m^\dagger, a_n^\dagger] = 0$: $[A_i(\vec{r}), E_j(\vec{r}')] = -\frac{\hbar}{2v\epsilon_0} \sum_{l,\sigma} (\mathbf{e}_{l\sigma})_i (\mathbf{e}_{l\sigma})_j e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} + c.c.$ Siendo $\mathbf{e}_{l1}$, $\mathbf{e}_{l2}$ y $\hat{\mathbf{k}}_l$ vectores ortogonales entre sí, pudiéndose obtener: $|\mathbf{e}_{l1}\rangle \langle \mathbf{e}_{l1}| + |\mathbf{e}_{l2}\rangle \langle \mathbf{e}_{l2}| + |\hat{\mathbf{k}}_l\rangle \langle \hat{\mathbf{k}}_l| = 1$ Al tomar los elementos ij de la suma: $\sum_\sigma (\mathbf{e}_{l\sigma})_i (\mathbf{e}_{l\sigma})_j = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{e}_{l\sigma i}} \hat{\mathbf{e}_{l\sigma j}}$ Sustituyendo en la suma anterior $[A_i(\mathbf{r}), E_j(\mathbf{r}')] = \frac{-\hbar}{v_0\epsilon_0} \sum_l [\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_{i i} \hat{\mathbf{k}}_{j j}] e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ Sumando sobre todos los l, tanto positivos como negativos. Si L se vuelve infinito, la suma se puede convertir en una integral: $\frac{1}{v} \sum_l [\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_{i i} \hat{\mathbf{k}}_{j j}] e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \Rightarrow (\frac{1}{2\pi})$ Reemplazando en lo anterior (nombrando a la integral $\delta_{ij}^T(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$), finalmente se obtiene $[A_i(\vec{r}), E_j(\vec{r}')] = \frac{-\hbar}{\epsilon} \delta_{ij}^T(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

(e) De manera análoga a la pregunta anterior, se obtiene

- $[A(\vec{r}), A(\vec{r}')] = \frac{h}{2\omega_m \epsilon_0 v} \sum_{l,\sigma} (\mathbf{e}_{l\sigma})_i (\mathbf{e}_{l\sigma})_j e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} + c.c. = \frac{h}{2\omega_m \epsilon_0 v} \sum_l [\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_{i i}\hat{\mathbf{k}}_{j j}] e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ Con lo que se demuestra que $[A(\vec{r}), A(\vec{r}')] = 0$
- $[E(\vec{r}), E(\vec{r}')] = -\frac{h\omega_m}{2\epsilon_0 v} \sum_{l,\sigma} (\mathbf{e}_{l\sigma})_i (\mathbf{e}_{l\sigma})_j e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} + c.c. -\frac{h\omega_m}{2\epsilon_0 v} \sum_l [\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_{i i}\hat{\mathbf{k}}_{j j}] e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$Con lo que se demuestra que $[E(\vec{r}), E(\vec{r}')] = 0$
- $[B(\vec{r}), B(\vec{r}')] = -\frac{h\omega_m}{c^2\mu_0^2 2\epsilon_0 v} \sum_{l,\sigma} (\mathbf{e}_{l\sigma})_i (\mathbf{e}_{l\sigma})_j e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} + c.c. = -\frac{h\omega_m}{c^2\mu_0^2 2\epsilon_0 v} \sum_l [\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_{i i}\hat{\mathbf{k}}_{j j}] e^{i\mathbf{k}_l(\mathbf{r}-}$ lo que se demuestra que $[B(\vec{r}), B(\vec{r}')] = 0$

4. (a) Si, de manera análoga a cómo se construyeron los estados del operador de destrucción, se intentan construir los del operador de destrucción $a^\dagger |\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n+1} |n+1\rangle = \beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \beta c_0 |0\rangle + \beta \sum_{n=1}^{\infty} c_n |N\rangle$ De acá se obtiene que $c_0 = 0, c_n\sqrt{n+1} = \beta c_{n+1}$ Al construir los c_n todos dan cero, lo que por contradicción, demuestra que no existen autoestados del operador creación.

   (b) Descomponiendo la operación. $a^\dagger |\alpha\rangle \langle\alpha| = a^\dagger D(\alpha)|0\rangle\langle 0| D(\alpha)^\dagger = D(\alpha)D(\alpha)^\dagger a^\dagger D(\alpha)|0\rangle \langle$ $= D(\alpha)(a^\dagger + \alpha^*)|0\rangle\langle 0| D(\alpha)^\dagger$ Lo útimo se obtiene usando propiedad de $D(\alpha)^\dagger a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$ (que se demuestra a partir de expandir el operador desplazamiento). Separando los 2 sumandos (uno incluye agrega un número y el otro un operador): $D(\alpha)a^\dagger |0\rangle\langle\alpha| + \alpha^* |\alpha\rangle\langle\alpha|$ Considerando la definición de operador desplazamiento $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \Rightarrow D(\alpha)a^\dagger = (aD$ Entonces se puede decir que $\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha} = D(\alpha)a^\dagger$ Y se obtiene $a^\dagger |\alpha\rangle\langle\alpha| = (\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha})|\alpha\rangle\langle\alpha|$ Y conjugando la expresión se obtiene: $|\alpha\rangle\langle\alpha| a = (\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*})|\alpha\rangle\langle\alpha|$

   (c) Un estado inicialmente coherente es un autoestado del operador destrucción en $t = 0$ $|\phi, 0\rangle = |\alpha\rangle \Rightarrow a(t=0)|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ A los operadores creación y destrucción se les puede agregar evolución temporal $a_m(t) = a_m(t=0)e^{-i\omega_m t}, a_m^\dagger(t) = a_m^\dagger(t=0)e^{i\omega_m t}$ Tomando el operador Desplazamiento de α para tiempo cero, se le puede agregar evolución temporal como se acostumbre en los operadores cuánticos (esta vez considerando los operadores de subida y bajada para un sistema de n osciladores armónicos acoplados). $D(\alpha(t)) = \sum_n e^{in\omega t} D(\alpha) \sum_n e^{-in\omega t} = ($ $\sum_n \frac{(e^{i\omega t}(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)e^{-i\omega t})^n}{n!} = \sum_n \frac{((\alpha e^{-i\omega t})(a^\dagger e^{i\omega t}) - (\alpha^* e^{i\omega t})(a e^{-i\omega t}))^n}{n!}$ Desplazando convenientemente las exponenciales temporales, ya que conmutarían con el resto de operadores al ser independientes del tiempo, se obtiene que el mismo desplazamiento para $t = 0$ con un valor α sirve para desplazar, ya ingresada la evolución temporal en los operadores escalera de manera estándar con un valor $\alpha e^{-i\omega t}$, quedando : $|\phi, t\rangle = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$

   (d)

   (e)

   (f)

(g)

(h)

5.
   -
     - Empezando con $\beta = \alpha coshr + \alpha^* sinhr$ $S(re^{-i\theta})D(\alpha)S(re^{i\theta}) = e^{\frac{re^{i\theta}a^2 - re^{-i\theta}a^{\dagger 2}}{2}} e^{\alpha a^\dagger - \alpha * a} e^{re}$
       $e^{-(re^{-i\theta}a^\dagger - \alpha + re^{i\theta}a^\dagger)a^\dagger + (re^{i\theta}a - \alpha^* + re^{-i\theta}a)a} = D(\alpha coshr - e^{i\theta}a^\dagger sinhr) = D(\beta)$
       Con lo que termina dando $\Rightarrow S(\xi)D(\beta) = D(\alpha)S(\xi)$
     - se empieza calculando $S_2^\dagger(\xi)aS_2(\xi) = e^{\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2}} a e^{\xi^* ab - \xi a^\dagger b^\dagger}$ Al final tiene que dar $= acoshr - e^{i\theta}b^\dagger sinhR$
   - Hay que calcular el valor esperado para el $D(\alpha)$ de Glauber, y para eso puede ser útil calcular los valores de expectación para los operadores escalera $< a >= \alpha, < a^\dagger >= \alpha^* \Rightarrow < D(\alpha) >=< e^{aa^\dagger - \alpha^* a} >=< \sum_n \frac{(aa^\dagger - \alpha^* a)^n}{n!} >= \sum$
     Un campo termal tiene como funciones de correlación: $< a >=< a^\dagger >=< a^2 >=< a^{2\dagger} >=$
     Lo que facilita el cálculo sumando por sumando: $< \alpha a^\dagger - \alpha^* a >= \alpha < a^\dagger > - \alpha^* < a >= 0$
     $\langle\alpha| (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^2 |\alpha\rangle = \alpha^2 < a^{\dagger 2} > + \alpha^{*2} < a^2 > - |\alpha|^2 (< aa^\dagger + a^\dagger a >)$
     $= -|\alpha|^2 (2 < n > +1)$ En los elementos de la suma, al aumentar los n, por lo tanto, solo quedarán los exponentes pares, de todas formas, se puede hacer el cambio de variable en la sumatoria de $n = 2n$ (o lo mismo dicho de forma más rigurosa, primero hacer $m = 2n$ y luego $n = m$) y resulta $< D(\alpha) >= \sum_n \frac{(-|\alpha|^2(<n> + \frac{1}{2}))^n}{n!} = e^{-|\alpha|^2(<n>+\frac{1}{2})}$
   -

(a) Análogamente a lo hecho en el libro para calcular $< n > < n^2 >= \langle\alpha, \xi| a^\dagger a a^\dagger a |\alpha, \xi\rangle$

(b)

(c)

(d)

(e) (Tarea) El factor de Mandel es: $Q_\alpha = \frac{<(\Delta n)^2> - <n>}{<n>} = \frac{<(\Delta n)^2>}{<n>} - 1$ Para calcularlo para un estado squeezed se necesita calcular los valores de expectación de n y n^2 $< n >= \langle\alpha, \xi| a^\dagger a |\alpha, \xi\rangle = \langle 0| S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger a D(\alpha)S(\xi) |0\rangle$
$= \langle 0| S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)S(\xi) |0\rangle = \langle 0| S^\dagger(\xi)(a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha)S(\xi) |0\rangle$
En el producto que se encuentra adentro, los factores $\alpha^* a$ y $\alpha a^\dagger$ darán 0 por ser combinaciones lineales de los operadores destrucción y creación promediados en el vacío respectivamente. Por lo que queda:
$= \langle 0| S^\dagger(\xi)a^\dagger a S(\xi) |0\rangle + |\alpha|^2 \langle 0| S^\dagger(\xi)S(\xi) |0\rangle = \langle 0| S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi)S^\dagger(\xi)aS(\xi) |0\rangle + |\alpha|^2$
$= \langle 0| [a^\dagger cosh(r) - ae^{-i\theta}sinh(r)][acosh(r) - a^\dagger e^{i\theta}sinh(r)] |0\rangle + |\alpha|^2$ Obteniéndose $< n >= sinh^2 r + |\alpha|^2 \sim |\alpha|^2$ Luego, para calcular el valor de expectación de n^2 $< n^2 >= \langle\alpha, \xi| a^\dagger a a^\dagger a |\alpha, \xi\rangle = \langle 0| S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger a a^\dagger a D(\alpha)S(\xi) |0\rangle$
$= \langle 0| S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)S(\xi) |0\rangle$
$= \langle 0| S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)(a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha)(a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha)D(\alpha)S(\xi) |0\rangle$ En el producto que se encuentra adentro, $(a^\dagger a + \alpha^* a + a^\dagger \alpha + |\alpha|^2)^2 = a^\dagger a a^\dagger a + \alpha^{*2} aa + \alpha^2 a^\dagger a^\dagger$ -

$+|\alpha|^2(a^\dagger a + \alpha^* a + a^\dagger \alpha) + \alpha * a^\dagger a a + \alpha a^\dagger a a^\dagger + \alpha^* a a^\dagger a + \alpha a^\dagger a^\dagger a$ No se escribieron los factores $|\alpha|^2\alpha^* a$ y $|\alpha|^2 \alpha a^\dagger$ porque darán 0 por ser combinaciones lineales de los operadores destrucción y creación promediados en el vacío respectivamente. Por lo que queda: $= \langle 0| S^\dagger(\xi) D^\dagger(\alpha)(a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha$
Por lo tanto dará $< n^2 >=$ Y el cálculo de las fluctuaciones finalmente es $Rightarrow (\Delta n)^2 =< n^2 > - < n >^2 = |\alpha|^2[e^{-2r} cos^2(\phi - \frac{\theta}{2}) + e^{2r} sin^2(\phi - \frac{\theta}{2})]$ $+ sinh^2 r cosh^2 r \sim |\alpha|^2[e^{-2r} cos^2(\phi - \frac{\theta}{2}) + e^{2r} sin^2(\phi - \frac{\theta}{2})] \Rightarrow (\Delta n)^2 =< n^2 > - < n >^2 = |\alpha|^2[e^{-2r} cos^2(\phi - \frac{\theta}{2}) + e^{2r} sin^2(\phi - \frac{\theta}{2})] + sinh^2 r cosh^2 r \sim |\alpha|^2[e^{-2r} cos^2(\phi - \frac{\theta}{2}$ $+ sinh^2 r cosh^2 r \sim |\alpha|^2[e^{-2r} cos^2(\phi - \frac{\theta}{2}) + e^{2r} sin^2(\phi - \frac{\theta}{2})]$ Las simplificaciones fueron hechas considerando que $|\alpha|^2 >> e^{2r}$. Entonces, el factor de Mandel se escribe $Q = \frac{|\alpha|^2[e^{-2r} cos^2(\phi - \frac{\theta}{2}) + e^{2r} sin^2(\phi - \frac{\theta}{2})]}{|\alpha|^2} = e^{-2r} cos^2(\phi - \frac{\theta}{2}) + e^{2r} sin^2(\phi$
Lo que es mínimo cuando $\phi = \frac{\theta}{2} \Rightarrow cos(\phi - \frac{\theta}{2}) = 1, sin(\phi - \frac{\theta}{2}) = 0 \Rightarrow e^{-2r} - 1$
y es máximo cuando $\phi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos(\phi - \frac{\theta}{2}) = 0, sin(\phi - \frac{\theta}{2}) = 1 \Rightarrow e^{2r} - 1$

6.

7.
- (Tarea: 3.1 Scully) Los momentos de la distribución de Wigner, por integración parcial, corresponden a: $\int d^2\alpha \alpha^r \alpha^{*s} W(\alpha, \alpha^*) = (\frac{\partial}{\partial \eta})^s (-\frac{\partial}{\partial \eta^*})^r X_W(\eta, \eta^*)|_{\eta=0}$
  Considerando $r = s = 1$ $\int d^2\alpha |\alpha|^2 W(\alpha, \alpha^*) = -\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \eta^*} X_W(\eta, \eta^*)|_{\eta=0}$
  La función X_W (que es la transformada de la distribución de Wigner vale $X_W(\eta, \eta^*) = tr[\rho e^{\eta a^\dagger - \eta^* a}] = \sum_{r,s} \frac{\eta^s(-\eta^*)^r}{r!s!}[a^r a^{\dagger s}]_{sym} = \eta\eta^* tr(\frac{a a^\dagger + a^\dagger a}{2})$
  Su derivada vale: $\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \eta^*} X_W(\eta, \eta^*) = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \eta^*} tr[\rho e^{\eta a^\dagger - \eta^* a}] = tr(\frac{a a^\dagger + a^\dagger a}{2})$
  lo que finalmente se obtiene: $\int d^2\alpha |\alpha|^2 W(\alpha, \alpha^*) = \frac{< a a^\dagger + a^\dagger a >}{2}$
- (Tarea: 4.1 Scully) Se puede ver lo cuántico que es el estado $|\phi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$ si evalúa la segunda correlación para ese estado $g^{(2)}(0) = \frac{< a^\dagger a^\dagger a a >}{< a^\dagger a >^2}$
  $a_0 \langle 0| a^\dagger a^\dagger a a |0\rangle + a_1 \langle 1| a^\dagger a^\dagger a a |1\rangle = a_0 * 0 + a_1 * 0 = 0$ $a_0 \langle 0| a^\dagger a |0\rangle + a_1 \langle 1| a^\dagger a |1\rangle = a_0 * 0$
  Por lo tanto $g^{(2)}(0) = \frac{0}{|a_1|^2} = 0$ Y el estado se encuentra en los márgenes no clásicos, por lo que es un estado no clásico.

8.

9.
- (Tarea) La Ecuación Maestra del Oscilador Armónico Amortiguado en el cuadro de interacción (los operadores llevan tilde para indicar que se encuentran ahí) se obtiene a partir de la ecuación de Liouville interpretada en el sistema y trazada en el reservorio: $\frac{d\tilde{\rho}_A}{dt} = \frac{-1}{h^2}\int_0^t dt' Tr[\tilde{H}_1(t), [\tilde{H}_1(t'), \tilde{\rho}_{AB}(t')]$
  Considerando la condición markoviana ($\tilde{\rho}_{AB}(t) = \tilde{\rho}_A(t) \otimes \tilde{\rho}_B(0)$) y el elemento de interacción para el sistema de oscilador armónico amortiguado con una colección infinita de osciladores acoplados (para representar un campo) $H_1 = \sum_j g_j a^\dagger b_j + a b_j^\dagger$ se termina obteniendo:
  $\frac{d\tilde{\rho_a}}{dt} = -i\Delta\omega[a^\dagger a, \tilde{\rho}_A] + A([a, \tilde{\rho}_A a^\dagger] + [a\tilde{\rho}_A, a^\dagger]) + B([a^\dagger, \tilde{\rho}_A a] + [a^\dagger \tilde{\rho}_A, a])$

- (Tarea) Para un oscilador armónico amortiguado $\frac{\partial Q}{\partial t} = -2BxQ - (2(A-B)x + 2Bx^2)\frac{\partial Q}{\partial x}$
  Usando funciones generatrices
- (Tarea) Usando método de las características se obtiene como solución $Q(x,t) = \frac{e^{-x\frac{\bar{n}e^{-2(A-B(T}}{1+\frac{B}{A-B}x(1-e^{-2(A-B)t})}}}{[1+\frac{B}{A-B}x(1-e^{-2(A-B)t})]}$

10. - (Tarea) La dinámica del modelo Jaynes-Cummings, cuyo hamiltoniano es $H = \frac{\hbar\omega_{ab}}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)$ se puede encontrar considerando que $C_n = a^\dagger a + \frac{\sigma_z}{2}$ es una constante de movimiento: $\dot{C}_n = (a^\dagger a \dot{+} \frac{\sigma_z}{2}) = \ddot{C}_n = (a^\dagger$
  y que $c = \frac{\delta}{2}\sigma_z + g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)$ y $\delta = \omega_{ab} - \omega \Rightarrow \omega_{ab} = \delta + \omega$ con lo que el hamiltoniano del sistema se puede reescribir: $H = \hbar c + \hbar\omega C_n$
  Escrito el Hamiltoniano, se pueden calcular las derivadas de cada expresión pedida, aprovechando las propiedades de conmutadores siguientes $[\sigma_z, \sigma_+] = \sigma_+, [\sigma_z, \sigma_-] = -\sigma_-, [\sigma_+, \sigma_-] = 2\sigma_z\, [a,a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, [a, a^\dagger] = 1$
  $[A+B, C] = [A,C] + [B,C], [A, B+C] = [A,B] + [A,C]\, [AB, C] = A[B,C] + [A,C]B, [A$
  $[A,B] = -[B,A]$ Para obtener la ecuación diferencial de $\sigma_- \Rightarrow \dot{\sigma_-} = \frac{1}{\hbar}[\sigma_-, H] = \frac{1}{\hbar}(\frac{\hbar(\omega+\delta)}{2}[\sigma_-$
  $= \frac{1}{\hbar}(\frac{\hbar(\omega+\delta)}{2}[\sigma_-, \sigma_z] + \hbar g[\sigma_-, \sigma_+]a) = \frac{1}{i}(\frac{\omega+\delta}{2}\sigma_- - 2g\sigma_z a)$ Para seguir con los cálculos, se puede ver que reemplazando σ_- por σ_z se obtiene:
  $[\sigma_z, H] = \hbar g([\sigma_z, \sigma_+]a + [\sigma_z, \sigma_-]a^\dagger) = \hbar g(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger)$ Y la segunda derivada por lo tanto vale: $\ddot{\sigma}_- = \frac{1}{\hbar}[\dot{\sigma}_-, H] = \frac{1}{\hbar}[-i(\frac{\omega+\delta}{2}\sigma_- - 2g\sigma_z a^\dagger), H]\, \frac{1}{h}(\frac{\omega+\delta}{2}[\sigma_-, H] - 2g[\sigma_z a^\dagger, H])$
  Para obtener la ecuación diferencial de $a \Rightarrow \dot{a} = \frac{1}{\hbar}[a, H] = \frac{1}{\hbar}(\hbar\omega[a, a^\dagger a] + \hbar g(\sigma_+[a,a] + \sigma_-[a$
  $= \frac{1}{\hbar}[a, H] = \frac{1}{\hbar}(\hbar\omega[a, a^\dagger]a + \hbar g\sigma_-[a, a^\dagger]) = \frac{1}{i}(\omega a + g\sigma_-)$ Y la segunda derivada por lo tanto vale: $\ddot{a} = \frac{1}{\hbar}[\dot{a}, H] = \frac{1}{\hbar}[-i(\omega a + g\sigma_-), H] = \frac{1}{h}(\omega[a, H] + g[\sigma_-, H])$
  Con lo que se obtiene finalmente $\ddot{\sigma}_- + 2i(\omega - c)\dot{\sigma}_- + (2\omega c - \omega^2 + g^2)\sigma_- = 0$
  $\ddot{a} + 2i(\omega - c)\dot{a} + (2\omega c - \omega^2 + g^2)a = 0$