Información Cuantica 1 Daniel Castillo Castro

Tareas

1. (a) Ocupando la definición de probabilidad conjunta y condicional

$$p(x,y) = p(y|x)p(x) \Rightarrow$$

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in J_x}\sum_{y\in J_y} p(x,y)logp(x,y) = -\sum_{x\in J_x}\sum_{y\in J_y} p(x,y)log[p(y|x)p(x)] =$$

$$-\sum_{x\in J_x}\sum_{y\in J_y} p(x,y)[logp(y|x)+logp(x)] = H(Y|X)-\sum_{x\in J_x}\sum_{y\in J_y} p(x)p(y)logp(x) =$$

$$H(Y|X) + H(X)$$

(b) Ocupando la definición de probabilidad conjunta y condicional

$$p(x,y) = p(x|y)p(y) \Rightarrow$$

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in J_x}\sum_{y\in J_y} p(x,y)logp(x,y) = -\sum_{x\in J_x}\sum_{y\in J_y} p(x,y)log[p(x|y)p(y)] =$$

$$-\sum_{x\in J_x}\sum_{y\in J_y} p(x,y)[logp(x|y)+logp(y)] = H(X|Y)-\sum_{x\in J_x}\sum_{y\in J_y} p(x)p(y)logp(y) =$$

$$H(X|Y) + H(Y)$$

2. (a) Empezando de forma análoga a como se hizo en la clase

$$I(X:Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_{x=0}^{1} p(x)H(Y|X=x)$$

. A difrerencia de ese ejercicio, los valores no serán simétricos.

$$H(Y|x=0) = -p(0|0)log(p(0|0)) - p(1|0)log(p(1|0)) = -1log(1) - 0log(0) = 0$$

$$H(Y|x=1) = -p(0|1)log(p(0|1)) - p(1|1)log(p(1|1)) = -plog(p) - (1-p)log(1-p) = h(p)$$

$$\Rightarrow I(X:Y) = H(Y) - (1-q)h(p)$$

¿A qué equivale H(Y)?

$$H(Y) = -p(y=0)log(p(y=0) - p(y=1)log(p(y=1))$$

$$= -(q+(1-q)p)log(q+(1-q)p) - ((1-q)(1-p))log((1-q)(1-p)) = h((1-q)(1-p))$$

$$\Rightarrow I(X:Y) = (1-q)(-plog(p) - (1-p)log(1-p)) +$$

$(q+(1-q)p)log(q+(1-q)p)+((1-q)(1-p))log((1-q)(1-p))$

Maximizando la expresión anterior

$$0=\frac{dI}{dq}=(-1)(-plog(p)-(1-p)log(1-p))+$$

$[(1-p)log(q+(1-q)p)+1-p]+[(p-1)(log(1-q)+log(1-p))+p-1]$

Ocupando propiedades de logaritmo, $-(1-p)=1-p$ y $q+(1-q)p=1-(1-q)(1-p)$

$$\Rightarrow \frac{plog(p)}{p-1}=log(\frac{1-(1-q)(1-p)}{1-q})\Rightarrow p^{\frac{p}{p-1}}=\frac{1}{1-q}-(1-p)$$

$$\frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}}-p+1}=1-q\Rightarrow q=1-\frac{1}{p^{\frac{p}{p-1}}-p+1}=\frac{p^{\frac{p}{p-1}}-p}{p^{\frac{p}{p-1}}-p+1}$$

Resultando:

$$q=\frac{p^{\frac{p}{p-1}}-p}{p^{\frac{p}{p-1}}-p+1}$$

E insertando en la definición de información mútua, la capacidad en función de p queda:

$$C=\frac{h(p)}{p^{\frac{p}{p-1}}-p+1}-h(\frac{(p-1)}{p^{\frac{p}{p-1}}-p+1})$$

(b) Si $p=\frac{1}{2}$ la información mutua vale:

$$I(X:Y)=1-q+\frac{1+q}{2}log(\frac{1+q}{2})+\frac{1-q}{2}log(\frac{1-q}{2})$$

Derivando se obtiene

$$\frac{dI(X:Y)}{dq}=-1+\frac{1}{2}log(\frac{1+q}{2})+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}log(\frac{1-q}{2})-\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}log(\frac{1+q}{1-q})=1\Rightarrow \frac{1+q}{1-q}=4\Rightarrow 1+q=4-4q\Rightarrow q=\frac{3}{5}=0.6$$

Insertándolo en la definición de información mútua quedaría

$$C=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}log(\frac{4}{5})+\frac{1}{5}log(\frac{1}{5})=0.321$$

3. Teniendo la matriz de Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow H^\dagger = H$$

Se puede ver también que

$$HH^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

Por lo que es una matriz (y por ende una operación) unitaria y se comprueba la propiedad pedida. Sus valores y vectores propios son:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)(-1-x) - 1 = x^2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow (1+\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$x = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow (1+\sqrt{2})(|0\rangle - |1\rangle)$$

4. se empieza considerando el estado

$$|\phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |\phi_0\rangle - |1\rangle |\phi_1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle (a|0\rangle + b|1\rangle) - |1\rangle (b|0\rangle + a|1\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|\Phi^-\rangle + b|\Psi^-\rangle)$$

(Dato que puede ser interesante: El ejemplo visto en clase es con $b = 1$ y $a = 0$ Escribiendo las matrices de Pauli como

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, Y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|, Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Los valores de evaluar combinaciones de las matrices de Pauli en esos kets quedan evaluados en función de las constantes a y b y los estados de Bell, considerando que X cambia de Φ a Ψ el estado (agregando un signo menos solo si la medición se hace desde Alice) y Z cambia el signo del estado (de $+$ a $-$ y viceversa).

$$X_A X_B |\phi_{AB}\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(a|\Phi^-\rangle + b|\Psi^-\rangle) = -|\phi_{AB}\rangle$$

$$X_A Z_B |\phi_{AB}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a|\Psi_+\rangle + b|\Phi_+\rangle)$$

$$Z_A X_B |\phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|\Psi_+\rangle + b|\Phi_+\rangle)$$

$$Z_A Z_B |\phi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|\Phi^-\rangle + b|\Psi^-\rangle) = |\phi_{AB}\rangle$$

(a) Si A y B miden los observables usando, como se vio en la clase

$$W_\theta = sin\theta X + cos\theta Z \Rightarrow < W_\theta W'_\theta >= sin\theta sin\theta' < X_A X_B > +$$

$$sin\theta cos\theta' < X_A Z_B > + cos\theta sin\theta' < Z_A X_B > + cos\theta cos\theta' < Z_A Z_B >$$

Se obtienen los valores esperados para los distintos operadores

$$< X_A X_B >= \frac{-a^2 - b^2}{2} = \frac{-1}{2}, < X_A Z_B >= 0$$

$$< Z_A X_B >= 0, < Z_A Z_B >= \frac{a^2 - b^2}{2} \Rightarrow$$

$$< W_\theta W'_\theta >= a^2(cos\theta cos\theta' - sin\theta sin\theta') - b^2(cos\theta cos\theta' + sin\theta sin\theta')$$

Eligiendo las siguientes direcciones de medición:

$$A_1 = W_0, B_1 = W_{\frac{\pi}{4}}, A_2 = W_{\frac{\pi}{2}}, B_2 = W_{\frac{3\pi}{4}}$$

el valor esperado de Q es

$$< A_1 B_1 >= 2a^2 cos(\frac{\pi}{4}) - 2b^2 cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^2 - b^2)$$

$$< A_1 B_2 >= 2a^2 cos(\frac{3\pi}{4}) - 2b^2 cos(-\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a^2 + b^2)$$

$$< A_2 B_1 >= 2a^2 cos(\frac{3\pi}{4}) - 2b^2 cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a^2 - b^2)$$

$$< A_2 B_2 >= 2a^2 cos(\frac{5\pi}{4}) - 2b^2 cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow < Q >=< A_1 B_1 > - < A_1 B_2 > + < A_2 B_1 > + < A_2 B_2 >= -2\sqrt{2}b^2$$

Entonces se cumplirá la desigualdad CHSH para el intervalo

$$b^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b \leq 0.8409$$

El mayor nivel de violación de la desigualdad ocurrirá cuando $b = 1$, que es el caso visto en clase.

(b) Si $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y Q se evalúa como

$$< Q >= -2\sqrt{2}\frac{1}{2} = -\sqrt{2}$$

Por lo que está en la zona de cumplimiento de la desigualdad de CHSH.

(c) Si $a = 1$, $b = 0$ y reemplazando en la definición de valores esperados de medición

$$< W_\theta W'_\theta >= cos(\theta + \theta')$$

Para que $< Q >= 2\sqrt{2}$, hay que definir los ángulos

$$cos(\alpha + \beta) - cos(\alpha + \delta) + cos(\gamma + \beta) + cos(\gamma + \delta) = 2\sqrt{2}$$

Para esto, debiese bastar

$$cos(\alpha + \beta) = -cos(\alpha + \delta) = cos(\gamma + \beta) = cos(\gamma + \delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta \Rightarrow -cos(\frac{\pi}{4} - \beta + \delta) = cos(\gamma + \beta) = cos(\gamma + \delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{4} - \beta + \delta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \delta - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos(\gamma + \beta) = cos(\gamma + \frac{\pi}{2} + \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \gamma + \beta = -\frac{\pi}{4}$$

Dejando $\delta = 0$, se reemplaza en todas las ecuaciones anteriores quedando

$$\delta = 0, \beta = -\frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{3\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{4}$$

Lo que equivale a dejar las medidas como

$$A_1 = W_{\frac{3\pi}{2}}, A_2 = W_{\frac{\pi}{4}}, B_1 = W_{-\frac{\pi}{2}}, B_2 = W_0$$

5. Para el operador

$$\rho_A = Tr_B \rho_{AB}$$

(a) Considerando que para la matriz densidad de los 2 sistemas es cierto

$$\langle \psi_A \phi_b | \rho_{ab} | \psi_A \phi_B \rangle \geq 0$$

Se intenta construir la expresión análoga para la matriz densidad parcial

$$\langle \phi_A | \rho_A | \phi_A \rangle = \langle \phi_A | Tr_B \rho_{AB} | \phi_A \rangle = \langle \psi_A \phi_b | \rho_{ab} | \psi_A \phi_B \rangle \geq 0$$

(b) Considerando que para la matriz densidad de los 2 sistemas es cierto

$$Tr(\rho_{AB}) = 1$$

Usando la definición de matriz parcial

$$Tr_A(\rho_a) = Tr_A(Tr_B\rho_{ab}) = Tr(\rho_{AB}) = 1$$

(c) Definiendo como operador sobre el que se quiere calcular valor esperado:

$$M_{AB} = M_a \otimes \mathbf{I}_B \Rightarrow < M_{AB} >= tr(M_{AB}\rho_{AB}) = tr_A(tr_B(M_a \otimes \mathbf{I}_B\rho_{AB}))$$

Trasladando la operación traza de B hacia dentro de los paréntesis queda

$$M_{AB} = tr_A(tr_B(M_a \otimes \mathbf{I}_B\rho_{AB})) = tr_A(M_a tr_B(\rho_{AB})) = tr_A(M_a\rho_A)$$

Con todo esto se demuestra que ρ_A es un operador densidad válido.

6. El estado completamente incoherente se escribe en la base lógica como

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{\mathbf{I}}{2}$$

Una base arbitraria (distinta de la lógica) para el sistema de un qubit no será más que la base lógica rotada:

$$\begin{pmatrix} |\phi_0\rangle \\ |\phi_1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\phi_0\rangle \\ |\phi_1\rangle \end{pmatrix}$$

Reescribiendo la matriz densidad pedida se obtiene:

$$\rho = \frac{1}{2}((cos\theta\,|\phi_0\rangle - sin\theta\,|\phi_1\rangle)(cos\theta\,\langle\phi_0| - sin\theta\,\langle\phi_1|) +$$

$$(sin\theta\,|\phi_0\rangle + cos\theta\,|\phi_1\rangle)(sin\theta\,\langle\phi_0| + cos\theta\,\langle\phi_1|))$$

$$= \frac{1}{2}((cos^2\theta + sin^2\theta)\,|\phi_0\rangle\langle\phi_0| + (cos\theta sin\theta - cos\theta sin\theta)(|\phi_0\rangle\langle\phi_1| + |\phi_1\rangle\langle\phi_0|) + ($$

$$cos^2\theta + sin^2\theta)\,|\phi_1\rangle\langle\phi_1|) = \frac{1}{2}(|\phi_0\rangle\langle\phi_0| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1|)$$

7. Definiendo el estado puro ψ como el vacío

$$|\phi\rangle = |0\rangle\,, |\phi\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma)$$

Se puede escribir el estado ϕ con los valores estándar como ket:

$$|\phi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \Rightarrow \langle\psi|\,|\phi\rangle = cos\frac{\theta}{2}$$

Cualquier qubit se puede escribir como un punto en la esfera de Bloch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \begin{pmatrix} cos\theta sin\phi \\ sin\theta sin\phi \\ cos\phi \end{pmatrix} \sigma)$$

Lo último considerando coordenadas esféricas. En la situación específica del ket 0 se escribe

$$|\phi\rangle = |0\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener el ángulo entre los vectores $\vec{a}$, basta hallar el producto punto.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\theta sin\phi \\ sin\theta \sin\phi \\ cos\theta \end{pmatrix} = cos\theta$$

Con lo que se comprueba que entre 2 vectores el ángulo que se forma entre sus imágenes en la esfera de Bloch es el doble del ángulo que se forma entre ellos algebraicamente vía producto punto.

8. (a) Si los sistemas B y C miden en la base solicitada ($|\pm x\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$), implica que proyectarán dicha medición en dicha base. Si les llega desde el sistema A

$$\rho_{BC} = \sum_{j,k=0}^{1} p_{jk}|j\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle k| =$$

La medición implicará al operador proyección en el sistema en el que se encuentran:

$$\rho_C = tr_B\rho_{BC} = \langle j| \sum_{j,k=0}^{1} p_{jk}|j\rangle\langle j|\otimes|k\rangle\langle k|\,|j\rangle = \sum_{j,k=0}^{1} \langle j|\,p_{jk}\,|j\rangle\langle j|\,|j\rangle\otimes|k\rangle\langle k|$$

Definiendo el elemento traza:

$$\lambda_k = \sum_{k=0}^{1} \langle j|\,p_{jk}\,|j\rangle \Rightarrow \rho_C = \sum_{k=0}^{1} \lambda_k|k\rangle\langle k|$$

$$\rho_B = tr_C\rho_{BC} = \langle k| \sum_{j,k=0}^{1} p_{jk} |j\rangle \langle j|\otimes|k\rangle \langle k| |k\rangle = \sum_{j,k=0}^{1} \langle k| p_{jk} |k\rangle \langle k| |k\rangle\otimes|j\rangle \langle j|$$

Definiendo el elemento traza:

$$\lambda_j = \sum_{j=0}^{1} \langle k| p_{jk} |k\rangle \Rightarrow \rho_B = \sum_{j=0}^{1} \lambda_j |j\rangle \langle j|$$

Ahora, usando que el sistema A envió todo en base lógica

$$\rho_{BC} = p_{00} |00\rangle \langle 00| + p_{01} |01\rangle \langle 01| + p_{10} |10\rangle \langle 10| + p_{11} |11\rangle \langle 11|$$

Se debe trazar para los sistemas B y C usando la base $|\pm X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$

$$\rho_B = tr_C\rho_{BC} = \langle +X|_C \, \rho_{BC} \, \langle +X|_C + |-X\rangle_C \, \rho_{BC} \, |-X\rangle_C$$

$$\rho_C = tr_B\rho_{BC} = \langle +X|_B \, \rho_{BC} \, \langle +X|_B + |-X\rangle_B \, \rho_{BC} \, |-X\rangle_B$$

Calculando los valores necesarios:

$$\langle +X| |0\rangle \langle 0| |+X\rangle = \frac{1}{2}((\langle 0| + \langle 1|) |0\rangle \langle 0| (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}$$

$$\langle +X| |1\rangle \langle 1| |+X\rangle = \frac{1}{2}((\langle 0| + \langle 1|) |1\rangle \langle 1| (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}$$

$$\langle -X| |0\rangle \langle 0| |-X\rangle = \frac{1}{2}((\langle 0| - \langle 1|) |0\rangle \langle 0| (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}$$

$$\langle -X| |1\rangle \langle 1| |-X\rangle = \frac{1}{2}((\langle 0| - \langle 1|) |1\rangle \langle 1| (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en lo anterior

$$\rho_{BC} = p_{00} |0\rangle_B |0\rangle_C \langle 0|_B \langle 0|_C + p_{01} |0\rangle_B |1\rangle_C \langle 0|_B \langle 1|_C$$

$$+p_{10} |1\rangle_B |0\rangle_C \langle 1|_B \langle 0|_C + p_{11} |1\rangle_B |1\rangle_C \langle 1|_B \langle 1|_C$$

$$\Rightarrow \rho_B = tr_C\rho_{BC} = \frac{1}{2}((p_{00}+p_{01}) |0\rangle \langle 0|+(p_{10}+p_{11}) |1\rangle \langle 1|) = \frac{1}{2}(p_0 |0\rangle \langle 0|+p_1 |1\rangle \langle 1|)$$

$$\Rightarrow \rho_C = tr_B\rho_{BC} = \frac{1}{2}((p_{00}+p_{10}) |0\rangle \langle 0|+(p_{01}+p_{11}) |1\rangle \langle 1|) = \frac{1}{2}(p_0 |0\rangle \langle 0|+p_1 |1\rangle \langle 1|)$$

Lo último se debe a que la se suman las probabilidades de ocurrencia en el otro sistema, dejando solo como variables las del sistema propio. Dado que las probabilidades de ocurrencia son iguales, no hay correlación.

(b) La purificación se puede encontrar considerando que la matriz densidad original es diagonal.

$$\rho_{BC} = p_{00} |00\rangle \langle 00| + p_{01} |01\rangle \langle 01| + p_{10} |10\rangle \langle 10| + p_{11} |11\rangle \langle 11|$$

Al no requerir diagonalización, se puede proponer numerar los estados (que son 4 en total)

$$|\Phi_{BC}\rangle = P_1 |\Phi_1\rangle + P_2 |\Phi_2\rangle + P_3 |\Phi_3\rangle + P_4 |\Phi_4\rangle$$

y usar un sistema de 4 estados que nos permita escribir todo en la forma

$$|\psi_{ABC}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A |\Phi_{BC}\rangle$$

De manera que

$$\rho_{BC} = tr_A(|\Phi_{BC}\rangle \langle \Phi_{BC}|)$$

Con lo que se purifica el estado.

9. (a) El estado de Werner:

$$\rho_\lambda = \lambda |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-| + \frac{1-\lambda}{3}(|\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+| + |\Phi_-\rangle \langle \Phi_-|)$$

Se puede reescribir considerando que los vectores de Bell forman una base:

$$|\Psi_-\rangle \langle \Psi_-| + |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+| + |\Phi_-\rangle \langle \Phi_-| = \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+| + |\Phi_-\rangle \langle \Phi_-| = \mathbf{I} - |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-|$$

$$\Rightarrow \rho_\lambda = \lambda |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-| + \frac{1-\lambda}{3}(\mathbf{I} - |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-|) = \frac{1-\lambda}{3}\mathbf{I} + \frac{4\lambda-1}{3} |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-|$$

(b) Representando una transformación unitaria como una rotación

$$U = \begin{pmatrix} cos\theta_U & sin\theta_U \\ -sin\theta_U & cos\theta_U \end{pmatrix}, U^\dagger = \begin{pmatrix} cos\theta_U & -sin\theta_U \\ sin\theta_U & cos\theta_U \end{pmatrix}$$

OJO: para que se cumpla lo pedido es necesario que la matriz unitaria sea la misma para los 2 sistemas. Esto será facil de observar al hacer el desarrollo, aplicando al elemento en que no es trivial la invariancia rotacional: En el estado de Bell $|\Psi_-\rangle$

$$U_{AB} |\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(U|0\rangle \otimes U|1\rangle - U|1\rangle \otimes U|0\rangle)$$

Aplicar la transformación unitaria a los vectores lógicos implica:

$$U|0\rangle = cos\theta_U|0\rangle - sin\theta_U|1\rangle, U|1\rangle = sin\theta_U|0\rangle + cos\theta_U|1\rangle$$

$$\Rightarrow U|0\rangle \otimes U|1\rangle = (cos\theta_U|0\rangle - sin\theta_U|1\rangle) \otimes (sin\theta_U|0\rangle + cos\theta_U|1\rangle)$$

$$= cos\theta_U sin\theta_U|00\rangle + cos^2\theta_U|01\rangle - sin^2\theta_U|10\rangle - sin\theta_U cos\theta_U|11\rangle$$

$$\Rightarrow U|1\rangle \otimes U|0\rangle = (sin\theta_U|0\rangle + cos\theta_U|1\rangle) \otimes (cos\theta_U|0\rangle - sin\theta_U|1\rangle)$$

$$= sin\theta_U cos\theta_U|00\rangle - sin^2\theta_U|01\rangle + cos^2\theta_U|10\rangle - cos\theta_U sin\theta_U|11\rangle$$

Al hacer la resta de ambos términos se borran los elementos diagonales y queda

$$U_{AB}|\Phi_-\rangle = (cos^2\theta_U + sin^2\theta_U)|01\rangle + (-cos^2\theta_U - sin^2\theta_U)|10\rangle = |01\rangle - |10\rangle$$

Con lo que termina dando

$$U|\Psi_-\rangle = |\Psi_-\rangle$$

(c) Se pide hacer un análisis análogo al hecho en la pregunta 4 de la Tarea 1: recordando lo hecho allí, los operadores de Bell y la identidad cambian así:

$$X_A X_B|\Psi_-\rangle = -|\Psi_-\rangle \Rightarrow < X_A X_B >= tr(X_A X_B \rho_\lambda) = -\frac{4\lambda - 1}{3}$$

$$X_A Z_B|\Psi_-\rangle = -|\Phi_+\rangle \Rightarrow < X_A Z_B >= tr(X_A X_B \rho_\lambda) = 0$$

$$Z_A X_B|\Psi_-\rangle = |\Phi_+\rangle \Rightarrow < Z_A X_B >= tr(X_A X_B \rho_\lambda) = 0$$

$$Z_A Z_B|\Psi_-\rangle = |\Psi_-\rangle \Rightarrow < Z_A Z_B >= tr(X_A X_B \rho_\lambda) = -\frac{4\lambda - 1}{3}$$

$$\Rightarrow < W_\theta W_{\theta'} >= sin\theta sin\theta' < X_A X_B > + sin\theta cos\theta' < X_A Z_B > +$$

$$cos\theta sin\theta' < Z_A X_B > + cos\theta cos\theta' < Z_A Z_B >= -\frac{4\lambda - 1}{3}(sin\theta sin\theta' + cos\theta cos\theta')$$

Con lo que la medición en A y B que se debe calcular para ángulos definidos es

$$< W_\theta W_{\theta'} >= -\frac{4\lambda - 1}{3} cos(\theta - \theta')$$

A mide en los ángulos $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. B mide en los ángulos $\theta' = \frac{\pi}{4}$ y $\theta' = \frac{3\pi}{4}$. Para las 4 posibilidades:

$$\theta = 0, \theta' = \frac{\pi}{4} \Rightarrow < W_\theta W_{\theta'} >= -\frac{4\lambda - 1}{3} cos(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{4\lambda - 1}{3\sqrt{2}}$$

$$\theta = 0, \theta' = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow < W_\theta W_{\theta'} >= -\frac{4\lambda - 1}{3} cos(-\frac{3\pi}{4}) = \frac{4\lambda - 1}{3\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \theta' = \frac{\pi}{4} \Rightarrow < W_\theta W_{\theta'} >= -\frac{4\lambda - 1}{3} cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{4\lambda - 1}{3\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \theta' = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow < W_\theta W_{\theta'} >= -\frac{4\lambda - 1}{3} cos(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{4\lambda - 1}{3\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, el valor para evaluar la desigualdad de Bell es

$$\Rightarrow < Q >=< A_1 B_1 > - < A_1 B_2 > + < A_2 B_1 > + < A_2 B_2 >= -(2\sqrt{2})\frac{4\lambda - 1}{3}$$

La desigualdad se cumplirá para

$$-(2\sqrt{2})\frac{4\lambda - 1}{3} \leq -2 \Rightarrow \sqrt{2}\frac{4\lambda - 1}{3} \geq 1 \Rightarrow \lambda \geq \frac{1}{4}(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1) \sim 0.7803$$

Para valores mayores de λ, la desigualdad CHSH se violará.

Antes de hacer cualquier problema, se realizará el cálculo de descomposición de Schmidt para un sistema de 2 qubits arbitrario, que será útil en los primeros 3 problemas:

$$|\phi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle \Rightarrow \rho_{AB} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & \alpha\gamma^* & \alpha\delta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 & \beta\gamma^* & \beta\delta^* \\ \gamma\alpha^* & \gamma\beta^* & |\gamma|^2 & \gamma\delta^* \\ \delta\alpha^* & \delta\beta^* & \delta\gamma^* & |\delta|^2 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de Schmidt se obtendrán de diagonalizar una matriz densidad reducida (por convención se usará ρ_A, aunque con ρ_B también se puede hacer):

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha\gamma^* + \beta\delta^* \\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix}$$

Para una matriz cualquiera de 2x2 sus valores propios son

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}}{2}$$

Y sus vectores propios correspondientes normalizados son

$$\vec{v}_+ = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - d)^2 + c^2}} \begin{pmatrix} \lambda_+ - d \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}_- = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_- - d)^2 + c^2}} \begin{pmatrix} \lambda_- - d \\ c \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de Schmidt serán las raíces cuadradas de los valores propios de la matriz reducida, y la base para el subsistema A será considerando los vectores propios de dicha matriz. Llamando $a = |\alpha|^2 + |\beta|^2$,$b = \alpha\gamma^* + \beta\delta^*$, $c = \gamma\alpha^* + \delta\beta^*$ y $d = |\gamma|^2 + |\delta|^2$, y además usando que $a + d = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$, se obtiene que

$$\Rightarrow \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}}{2}$$

Y sus vectores propios correspondientes normalizados son

$$\vec{v}_+ = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - d)^2 + c^2}} \begin{pmatrix} \lambda_+ - d \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}_- = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_- - a)^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \\ \lambda_- - a \end{pmatrix}$$

Estos vectores propios sugerirán la base para el sistema A en la descomposición:

$$|+\rangle = \frac{((\lambda_+ - d)\,|0\rangle + c\,|1\rangle)}{\sqrt{(\lambda_+ - d)^2 + c^2}}\,|-\rangle = \frac{(b\,|0\rangle + (\lambda_- - a)\,|1\rangle)}{\sqrt{(\lambda_- - a)^2 + b^2}}$$

Bastará insertarlos en la definición para encontrar la base de b por inspección.

10. Teniendo el estado ($\alpha = cos\theta$, $\delta = sin\theta$, $\beta = \gamma = 0$)

$$|\Psi\rangle_{AB} = cos\theta\,|00\rangle + sin\theta\,|11\rangle$$

Los coeficientes de Schmidt serán:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} cos^2\theta & 0 \\ 0 & sin^2\theta \end{pmatrix} \Rightarrow C_+ = cos\theta, C_- = sin\theta$$

$E(|\psi\rangle) = -tr\rho_A log(tr\rho_A) = -tr\rho_B \log(tr\rho_B) = -cos^2\theta log_2 cos^2\theta - sin^2\theta log_2 cos^2\theta$

Si se aplica una transformación unitaria

$$|\Psi'\rangle_{AB} = (U \otimes U)\,|\Psi\rangle_{AB} = (U \otimes U)(cos\theta\,|00\rangle + sin\theta\,|11\rangle)$$

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\phi}b^* & e^{i\phi}a^* \end{pmatrix} \Rightarrow |\Psi'\rangle_{AB} = cos\theta(a\,|0\rangle - e^{i\phi}b^*\,|1\rangle) \otimes (a\,|0\rangle - e^{i\phi}b^*\,|1\rangle)$$

$$+sin\theta(b\,|0\rangle + e^{i\phi}a^*\,|1\rangle) \otimes (b\,|0\rangle + e^{i\phi}a^*\,|1\rangle) = (cos\theta a^2 + sin\theta b^2)\,|00\rangle +$$

$$e^{i\phi}ab^*(sin\theta - cos\theta)\,|01\rangle + e^{i\phi}b^*a(sin\theta - cos\theta)\,|10\rangle + e^{2i\phi}(cos\theta b^{*2} + sin\theta a^{*2})\,|11\rangle$$

Se puede calcular la entropía de Shannon del estado resultante para ver qué tan entrelazado queda el estado. Para esto se diagonaliza la traza parcial para el sistema A, obteniéndose sus coeficientes de Schmidt.

$$Tr_A\rho_A = \langle 0|\rho_A|0\rangle + \langle 1|\rho_A|1\rangle = 2(cos\theta a^2 + sin\theta b^2)(cos\theta a^{*2} + sin\theta b^{*2}) +$$
$$2|ab|^2(sin\theta - cos\theta)^2 = cos^2\theta + sin^2\theta$$
$$\Rightarrow E(|\psi\rangle) = -cos^2\theta log_2 cos^2\theta - sin^2\theta log_2 cos^2\theta$$

Ya que la entropía es la misma antes y después de la tranformación, el entrelazamiento del estado no cambia.

11. (a) Para el estado ($\alpha = \delta = a$,$\beta = \gamma = b$)

$$|\Psi^{AB}\rangle = a|\Phi_+^{AB}\rangle + b|\Psi_+^{AB}\rangle = a(|00\rangle + |11\rangle) + b(|01\rangle + |10\rangle)$$

su descomposición de Schmidt se obtendrá de escribir su matriz densidad reducida (acá se ocupa que la traza de la matriz es 1 y por lo tanto $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2ab \\ 2ab & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{1}{4} - 4a^2b^2$$

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1 + 16a^2b^2}}{2} = \frac{1 \pm 4ab}{2} = \frac{1}{2} \pm 2ab$$

Los valores propios son los cuadrados de los coeficientes de Schmidt. Es claro que $\lambda_+ + \lambda_- = \frac{1}{2} + 2ab + \frac{1}{2} - 2ab = 1$.

$$\lambda_+ \Rightarrow \begin{pmatrix} -2ab & 2ab \\ 2ab & -2ab \end{pmatrix} \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \Rightarrow |+X\rangle$$

$$\lambda_- \Rightarrow \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix} \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > \Rightarrow |-X\rangle$$

Con lo que la descomposición quedaría como

$$\sqrt{\frac{1}{2} + 2ab}\,|+X, +X\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} - 2ab}\,|-X, -X\rangle$$

(b) Para el estado ($\alpha = a + b$, $\delta = a - b$, $\beta = \gamma = 0$) La matriz densidad queda

$$\rho_A = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix}$$

La matriz densidad reducida queda diagonal, por lo que la descomposición de Schmidt es trivial y queda como

$$(a+b)|00\rangle + (a-b)|11\rangle$$

12. Para un estado (con α,β,γ y δ complejos y cumpliendo condiciones de normalización):

$$|\Psi\rangle_{AB} = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

será separable si la entropía es 0. Para encontrar la entropía bastará encontrar los coeficientes de Schmidt y aplicarlos en la fórmula

$$E(\rho) = C_+^2 log_2 C_+^2 + C_-^2 log_2 C_-^2$$

Los coeficientes de Schmidt elevados al cuadrado no son más que los autovalores de la matriz densidad reducida.

$$\Rightarrow \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - |\rho_A|}}{2}$$

Si el determinante de dicha matriz vale 0, los autovalores se vuelven 0 y 1, con los que la entropía se termina volviendo 0. Esto equivale a la condición de que las 2 filas o columnas de la matriz densidad tengan los mismos valores.

13. (a) Para una transformación de copiado covariante de fase en el estado

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle) \Rightarrow |\phi\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + e^{i\phi}|10\rangle)$$

La máquina de copiado llevará el estado a

$$|\Sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + e^{i\phi}(cos\eta\,|10\rangle + sin\eta\,|01\rangle))$$

$$\Rightarrow \rho_{AB} = |\Sigma\rangle\langle\Sigma| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + e^{-i\phi}cos\eta\,|00\rangle\langle 10| + e^{-i\phi}sin\eta\,|00\rangle\langle 01| +$$
$$e^{i\phi}cos\eta\,|10\rangle\langle 00| + e^{i\phi}sin\eta\,|01\rangle\langle 00| + cos\eta sin\eta(|10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| +$$
$$cos^2\eta\,|10\rangle\langle 10| + sin^2\eta\,|01\rangle\langle 01|$$

Para calcular fidelidades hay que obtener las matrices parciales

$$\rho_A = Tr_B\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + e^{-i\theta}cos\eta\,|0\rangle\langle 1| + e^{i\theta}cos\theta\,|1\rangle\langle 0| + cos^2\eta\,|1\rangle\langle 1| + sin^2\eta\,|0\rangle\langle 0|)$$

$$\rho_B = Tr_A\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + e^{-i\phi}sin\eta\,|0\rangle\langle 1| + e^{i\phi}sin\eta\,|1\rangle\langle 0| + cos^2\eta\,|0\rangle\langle 0| + sin^2\eta\,|1\rangle\langle 1|)$$

La fidelidad de ambas copias resultará de aplicar la operación producto escalar ("sandwich") con el estado inicial (y no de trazar la matriz, porque siempré dará 1 y ese fue el error que tuve en la prueba. Mis disculpas.)

$$F_A = \langle\phi|\rho_A|\phi\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| + e^{-i\phi}\langle 1|)\rho_A(|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle) = \frac{1}{4}(1 + 2cos\eta + cos^2\eta + sin^2\eta)$$

$$= \frac{1}{4}(2 + 2cos\eta) = \frac{1}{2}(1 + cos\eta)$$

$$F_B = \langle\phi| \rho_B |\phi\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0|+e^{-i\phi}\langle 1|)\rho_B(|0\rangle+e^{i\phi}|1\rangle) = \frac{1}{4}(1+2sin\eta+cos^2\eta+sin^2\eta)$$

$$= \frac{1}{4}(2 + 2sin\eta) = \frac{1}{2}(1 + sin\eta)$$

Ahora, si las fidelidades son iguales

$$cos\eta = sin\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow F_A = F_B = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \sim 0.8535$$

(b) Con la máquina clonado fase covariante aplicada al estado:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\Rightarrow |\phi\rangle|0\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}|00\rangle+|10\rangle \rightarrow |\phi_F\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}|00\rangle+cos\eta|10\rangle+sin\eta|01\rangle$$

La matriz densidad del vector resultante es:

$$\rho_{AB} = |\phi_F\rangle\langle\phi_F| = \frac{3}{4}|00\rangle\langle 00|+\frac{\sqrt{3}cos\eta}{4}|00\rangle\langle 10|+\frac{\sqrt{3}sin\eta}{4}|00\rangle\langle 01|+$$

$$\frac{\sqrt{3}cos\eta}{4}|10\rangle\langle 00| + \frac{cos^2\eta}{4}|10\rangle\langle 10| + \frac{cos\eta sin\eta}{4}|10\rangle\langle 01|+$$

$$\frac{\sqrt{3}cos\eta}{4}|01\rangle\langle 00| + \frac{sin\eta cos\eta}{4}|01\rangle\langle 10| + \frac{sin^2\eta}{4}|10\rangle\langle 10|$$

Trazando para A

$$\rho_A = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0|+\frac{\sqrt{3}cos\eta}{4}(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)+\frac{cos^2\eta}{4}|1\rangle\langle 1|+\frac{sin^2\eta}{4}|1\rangle\langle 1|$$

Con esto se calcula la fidelidad

$$F_A = \langle\phi| \rho_A |\phi\rangle = \frac{1}{16}(9+6cos\eta+cos^2\eta+3sin^2\eta) = \frac{(3 + cos\eta)^2}{16}+\frac{3sin^2\eta}{16}$$

Paralelamente, se puede trazar para B

$$\rho_B = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0|+\frac{\sqrt{3}sin\eta}{4}(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)+\frac{sin^2\eta}{4}|0\rangle\langle 0|+\frac{cos^2\eta}{4}|0\rangle\langle 0|$$

y se obtiene como fidelidad

$$F_B = \langle\phi| \rho_A |\phi\rangle = \frac{1}{16}(9+6sin\eta+sin^2\eta+3cos^2\eta) = \frac{(3 + sin\eta)^2}{16}+\frac{3cos^2\eta}{16}$$

Si ambas fidelidades son iguales

$$F_A = F_B = \frac{1}{16}((3+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 3(\frac{1}{\sqrt{2}})^2) \sim 0.9526650... > \frac{5}{6}$$

Con lo que se obtiene finalmente que para este estado la máquina de clonado fase covariante copia con mayor fidelidad que la máquina de clonado universal. Esto es curioso, porque en principio este estado no pertenece a la zona dónde, de acuerdo a lo visto en clase, la máquina de fase covariante es mejor clonadora que la universal. Aunque esto tiene sentido si se observa que el estado está bastante inclinado hacia $|0\rangle$, que en esta máquina se clona sin error.

14. Para $\beta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, se puede obtener un discriminador de los siguientes 2 estados usando POVM:

$$|\phi_0\rangle = cos\beta\,|0\rangle + sin\beta\,|1\rangle\,, |\phi_1\rangle = sin\beta\,|0\rangle + cos\beta\,|1\rangle$$

Para describir la medida generalizada corresponde hallar los operadores Π correspondientes. Lo que se sabe de ellos son las probabilidades de éxito (denotadas p_{s0} y p_{s1}) y sus proababilidades de error (denotadas p_{e0} y p_{e1}).

$$p_{e0} = \langle\phi_0|\,\Pi_1\,|\phi_0\rangle\,, p_{e1} = \langle\phi_1|\,\Pi_0\,|\phi_1\rangle$$

Considerando que los operadores se pueden escribir como proyectores en el espacio de 1 qubit en una base desconocida

$$\Pi_0 = |0'\rangle\langle 0'|\,, \Pi_1 = |1'\rangle\langle 1'|$$

$$|0'\rangle = x\,|0\rangle + y\,|1\rangle\,, |1'\rangle = -y\,|0\rangle + x\,|1\rangle$$

Con $x^2 + y^2 = 1$, siendo x e y números reales. Se calcula la probabilidad de falla considerando la redefinición de los operadores Π

$$p_{e0} = \langle\phi_0|\,\Pi_1\,|\phi_0\rangle = \langle\phi_0|\,|1'\rangle\langle 1'|\,|\phi_0\rangle = |\langle 1'|\,|\phi_0\rangle|^2$$

$$= |(-y\,\langle 0| + x\,\langle 1|)(cos\beta\,|0\rangle + sin\beta\,|1\rangle)|^2 = (xsin\beta - ycos\beta)^2$$

$$p_{e1} = \langle\phi_1|\,\Pi_0\,|\phi_1\rangle = \langle\phi_1|\,|0'\rangle\langle 0'|\,|\phi_1\rangle = |\langle 0'|\,|\phi_1\rangle|^2$$

$$= |(x\,\langle 0| + |1\rangle)(sin\beta\,|0\rangle + cos\beta\,|1\rangle)|^2 = (xsin\beta + ycos\beta)^2$$

La probabilidad de error total será (considerando que ambos estados son igualmente preparados)

$$p_e = \frac{p_{e0} + p_{e1}}{2} = x^2 sin^2\beta + y^2 cos^2\beta = sin^2\beta + y^2(cos^2\beta - sin^2\beta)$$

Esto último considerando que $x^2 + y^2 = 1$. Se elige convenientemente y en vez de x dado que para comparar buscamos un intervalo en que el término $cos^2\beta - sin^2\beta$ sea siempre positivo, y para $\beta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ así lo será. Se deriva lo anterior para obtener el valor mínimo de error.

$$\frac{dp_e}{dy} = 2y(cos^2\beta - sin^2\beta) = 0 \Rightarrow x = 1, y = 0 \rightarrow p_e^{min} = sin^2\beta$$

Lo que tiene sentido porque si $y = 0$ y $\beta = 0$ la base de los operadores del POVM se convierte en la base lógica y copia sin error (algo que se puede hacer si los estados son ortogonales entre si).Además, si $|\langle\phi_0|\,|\phi_1\rangle|^2 = \alpha$

$$\langle\phi_0|\,|\phi_1\rangle = 2cos\beta sin\beta \Rightarrow \alpha = 4cos^2\beta sin^2\beta = 4sin^2\beta(1 - sin^2\beta)$$

De acá se obtiene una ecuación cuadrátrica que permitiría tener la probabilidad de error como función de α

$$sin^4\beta + sin^2\beta + \frac{\alpha}{4} = 0 \Rightarrow sin^2\beta = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

Se obtienen 2 valores para el $sin^2\beta$ dependientes de α, que corresponderán tanto a la probabilidad de error mínima como a la probabilidad de éxito.

$$p_s = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{2}, p_e^{min} = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

15. - para bit-flip la matriz resultante es:

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1-p)|\alpha|^2 + p|\beta|^2 & (1-p)\alpha\beta^* + p\alpha^*\beta \\ (1-p)\alpha^*\beta + p\alpha\beta^* & (1-p)|\beta|^2 + p|\alpha|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1^* & 1-x_1 \end{pmatrix}$$

Y la fidelidad entonces es:

$$F = \langle\phi|\,\rho'\,|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1^* & 1-x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = x_1|\alpha|^2 + y_1\alpha^*\beta + \beta^* y_1^*\alpha + (1-x_1)|\beta|^2$$

Reemplazando x e y finalmente resulta

$$F = ((1-p)|\alpha|^2 + p|\beta|^2)|\alpha|^2 + ((1-p)\alpha\beta^* + p\alpha^*\beta)\alpha^*\beta + ((1-p)\alpha^*\beta + p\alpha\beta^*)\beta^*\alpha +$$

$$((1-p)|\beta|^2 + p|\alpha|^2)|\beta|^2 = 1 - p + 2p|\alpha|^2|\beta|^2(1 + \frac{(\alpha\beta^*)^2 + (\beta\alpha^*)^2}{2|\alpha|^2|\beta|^2})$$

Luego de simplificar (usando que $|\alpha|^2 + |\beta|^2$) y considerando $\frac{\alpha}{|\alpha|} = e^{i\phi_\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha^*}{|\alpha|} = e^{-i\phi_\alpha}$ y $\frac{\beta}{|\beta|} = e^{i\phi_\beta} \Rightarrow \frac{\beta^*}{|\beta|} = e^{-i\phi_\beta}$, se puede reescribir la última expresión como función trigonométrica, quedando

$$F_A = 1 - p + 2p|\alpha|^2|\beta|^2(1 + cos(2(\phi_\beta - \phi_\alpha))$$

- para depolarizing channel la matriz resultante es:

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1-p)|\alpha|^2 + \frac{p}{2} & (1-p)\alpha\beta^* \\ (1-p)\alpha^*\beta & (1-p)|\beta|^2 + \frac{p}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2^* & 1-x_2 \end{pmatrix}$$

Y la fidelidad entonces es:

$$F = \langle\phi|\,\rho'\,|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2^* & 1-x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = x_2|\alpha|^2 + y_2\alpha^*\beta + \beta^* y_2^*\alpha + (1-x_2)|\beta|^2$$

Reemplazando en y finalmente resulta

$$F = ((1-p)|\alpha|^2 + \frac{p}{2})|\alpha|^2 + ((1-p)\alpha\beta^*)\alpha^*\beta + ((1-p)\alpha^*\beta)\beta^*\alpha + ((1-p)|\beta|^2 + \frac{p}{2})|\beta|^2$$

$$= \frac{p}{2} + (1-p)(|\alpha|^4 + |\beta|^4 + 2|\alpha|^2|\beta|^2) = \frac{p}{2} + (1-p)(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 = \frac{p}{2} + (1-p) = 1 - \frac{p}{2}$$

Acá se simplificó usando $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

16. Para el canal Amplitude Damping el estado evoluciona a

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + p|\beta|^2 & \sqrt{1-p}\alpha\beta^* \\ \sqrt{1-p}\alpha^*\beta & (1-p)|\beta|^2 \end{pmatrix} =$$

Esto se obtiene de calcular los operadores de Kraus

$$E_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}\,|1\rangle\langle 1|\,, E_1 = \sqrt{p}\,|0\rangle\langle 1|$$

$$\rho' = E_0\rho E_0^\dagger + E_1^\dagger\rho E_1^\dagger$$

Entonces, hacer un amplitude damping seguido de otro es

$$\rho\prime\prime = E_0(p_2)\rho' E_0^\dagger(p_2) + E_1(p_2)\rho' E_1^\dagger(p_2) = E_0(p_2)(E_0(p_1)\rho E_0^\dagger(p_1) + E_1(p_1)\rho E_1^\dagger(p_1))E_0^\dagger(p_2)$$

$$+E_1(p_2)(E_0(p_1)\rho E_0^\dagger(p_1) + E_1(p_1)\rho E_1^\dagger(p_1))E_1^\dagger(p_2)$$

Haciendo el producto de los operadores de Kraus

$$E_0(p_2)E_0(p_1) = (|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p_2}\,|1\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p_1}\,|1\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0|$$

$$+\sqrt{1-p_2}\sqrt{1-p_1}\,|1\rangle\langle 1|$$

$$E_0(p_2)E_1(p_1) = (|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p_2}\,|1\rangle\langle 1|)(\sqrt{p_1}\,|0\rangle\langle 1|) = \sqrt{p_1}\,|0\rangle\langle 1|$$

$$E_1(p_2)E_0(p_1) = (\sqrt{p_2}\,|0\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p_1}\,|1\rangle\langle 1|) = \sqrt{p_2}\sqrt{1-p_1}\,|0\rangle\langle 1|$$

$$E_1(p_2)E_1(p_1) = (\sqrt{p_2}\,|0\rangle\langle 1|)(\sqrt{p_1}\,|0\rangle\langle 1|) = 0$$

Ingresando los cálculos en la matriz resultado de las 2 operaciones

$\rho'' = |0\rangle\langle 0|\rho|0\rangle\langle 0| + (1-p_2)(1-p_1)|1\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 1| + (p_1+p_2-p_2p_1)|0\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 0|$

Definiendo

$$E_0(p_1,p_2) = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{(1-p_2)(1-p_1)}\,|1\rangle\langle 1|$$

$$E_1(p_1,p_2) = \sqrt{p_1+p_2-p_2p_1}\,|0\rangle\langle 1| = \sqrt{1-(1-p_1)(1-p_2)}\,|0\rangle\langle 1|$$

Se demuestra que la doble operación equivale a hacer un solo amplitude damping con parámetro $(1-p_1)(1-p_2)$.

$$\rho'' = E_0(p_1,p_2)\rho E_0^\dagger(p_1,p_2) + E_1(p_1,p_2)\dagger\rho E_1^\dagger(p_1,p_2)$$

17. Para el estado

$$\rho_{AB} = p|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1-p)|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p+1-p & 0 & 0 & p-1+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p-1+p & 0 & 0 & p+1-p \end{pmatrix}$$

El operador Y aplicado a los estados de la base lógica y la base de Bell es:

$$Y|0\rangle = -i|1\rangle, Y|1\rangle = i|0\rangle$$

$$\Rightarrow (Y\otimes Y)|00\rangle = -|11\rangle, (Y\otimes Y)|01\rangle = |10\rangle$$

$$\Rightarrow (Y\otimes Y)|10\rangle = |01\rangle, (Y\otimes Y)|11\rangle = -|00\rangle$$

$$\Rightarrow (Y\otimes Y)|\Phi_+\rangle = -|\Phi_+\rangle, (Y\otimes Y)|\Phi_-\rangle = |\Phi_-\rangle$$

$$\Rightarrow (Y\otimes Y)|\Psi_+\rangle = |\Psi_+\rangle, (Y\otimes Y)|\Psi_-\rangle = -|\Psi_-\rangle$$

Por lo tanto $\tilde{\rho}_{AB} = \rho_{AB}$ y hay que encontrar los valores propios de ρ_{AB}^2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2p-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2p-1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2p-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2p-1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p^2-4p+2 & 0 & 0 & 4p-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4p-2 & 0 & 0 & 4p^2-4p+2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios normalizados entonces son 0,0,p^2 y$(1-p)^2$. Entonces la concurrencia valdrá:

$$C(\rho) = max(0, 1-p-p) = 1-2p$$

Lo que implica que la concurrencia valdrá 1 cuando p vale 0 y valdrá 0 cuando $p = \frac{1}{2}$ El entrelazamiento de formación vale entonces:

$$E_f(\rho_{AB}) = h(\frac{1+\sqrt{1-(1-2p)^2}}{2})$$

Que, al igual que la concurrencia valdrá 0 cuando $p = 0$ y 1 cuando $p = \frac{1}{2}$.

$$\rho_{AB}^{T_B} = \frac{p}{2}(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|)$$
$$+\frac{1-p}{2}(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|)$$

Escribiéndolo matricialmente se puede obtener los valores y vectores propios:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & p-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = p - \frac{1}{2}, \lambda_4 = \frac{1}{2} - p$$

El valor de λ será negativo para $[0, \frac{\pi}{2})$, por lo que el estado será entrelazado para ese intervalo. Entonces, construyendo la norma de la matriz (considerando que λ_4 será siempre positivo en el intervalo y por lo tanto se puede considerar como norma de λ_3 y λ_4) se obtiene la negatividad y su respectiva medición de entrelazamiento:

$$\|\rho_{AB}^{T_B}\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - p + \frac{1}{2} - p = 2 - 2p$$
$$\Rightarrow N(\rho_{AB}) = \frac{\|\rho_{AB}^{T_B}\| - 1}{2} = \frac{2-2p-1}{2} = \frac{1}{2} - p$$
$$\Rightarrow E_N(\rho_{AB} = log_2\|\rho_{AB}^{T_B}\| = log_2(2-2p)$$

El entrelazamiento, siendo distinto al anterior, también valdrá distinto de 0 para $[0, \frac{1}{2})$. (Todo lo anterior tiene sentido considerando que cuando p vale 0 se tiene un estado maximalmente entrelazado y cuando vale $\frac{1}{2}$ se vuelve separable).

18. Para el estado

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \frac{z}{2}(|00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A partir de los cálculos para el operador Y hechos en el ejercicio anterior se obtiene también que $\tilde{\rho}_{AB} = \rho_{AB}$ Entonces se necesita calcular los autovalores de ρ_{AB}^2

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+z^2}{4} & 0 & 0 & \frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & 0 & \frac{1+z^2}{4} \end{pmatrix}$$

Los valores propios entonces son 0,0,$\frac{(z+1)^2}{4}$ y $\frac{(1-z)^2}{4}$. Entonces la concurrencia valdrá:

$$C(\rho) = max(0, \frac{z+1}{2} - \frac{1-z}{2}) = z$$

Entonces 0 avanzará de igual forma que la constante z, por lo tanto el entrelazamiento de formación será:

$$E_f(\rho_{AB}) = h(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{2})$$

. Cuando $z = 0$ el entrelazamiento de formación vale 0 (lo que tiene sentido al ser un estado separable en esa situación y vale 1 cuando $z = 1$ (que es un estado maximalmente entrelazado). En cuanto a la negatividad, usando la matriz parcialmente traspuesta en el segundo qubit:

$$\rho_{AB}^{T_B} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + \frac{z}{2}(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{2} & 0 \\ 0 & \frac{z}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Obteniendo los valores propios se obtiene la norma de matriz, y por lo tanto la negatividad y su respectivo entrelazamiento. Se observa que λ_4 es negativo para $(0, 1]$, entonces el estado estará entrelazado en el mismo intervalo. Considerando entonces, que la norma para λ_3 y λ_4 es λ_3, la negatividad finalmente vale:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{z}{2}, \lambda_4 = -\frac{z}{2} \Rightarrow \|\rho_{AB}^{T_B}\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z+1$$

$$\Rightarrow N(\rho_{AB}) = \frac{\|\rho_{AB}^{T_B}\| - 1}{2} = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow E_N(\rho_{AB}) = log_2\|\rho_{AB}^{T_B}\| = log_2(z+1)$$

19. Nombrando $\omega = e^{i\frac{2\pi}{d}}$, se escribe el cambio de base generalizado de una base lógica a una base maximalmente entrelazada (que en dimensión 2 será la base de Bell y en base 3 incluirá al vector GHZ) como:

$$|\psi_{jk}\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_n \omega^{jn} |n\rangle_1 |n-k\rangle_2$$

Entonces, escribiendo un producto entre un estado arbitrario en base lógica y los estados maximalmente entrelazados en función de la base lógica:

$$|\chi\rangle_1 = \sum_m \alpha_m |m\rangle \Rightarrow |\chi\rangle_1 |\psi_{jk}\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{nm} \omega^{jn} \alpha_m |m\rangle_1 |n\rangle_2 |n-k\rangle_3$$

Ingresando una transformada inversa para escribir el estado en los sistemas 1 y 2 en la base maximalmente entrelazada:

$$|\chi\rangle_1 |\psi_{jk}\rangle_{23} = \frac{1}{d}\sum_{nm} \omega^{jn}\alpha_m (\sum_l \omega^{-lm} |\psi_{l,m-n}\rangle_{12}) |n-k\rangle_3$$

Se puede reescribir esto considerando el cambio de variable $\nu = m-n \rightarrow n = m-\nu$

$$= \frac{1}{d}\sum_{m\nu l} \omega^{j(m-\nu)}\omega^{-lm}\alpha_m |\phi_{l\nu}\rangle_{12} |m-\nu-k\rangle_3$$

Usando los operadores definidos se reescribe:

$$X = \sum_{n=0}^{d-1} |n+1\rangle\langle n| \Rightarrow X^{-1} = \sum_{n=0}^{d-1} |n-1\rangle\langle n|\,, Z = \sum_{n=0}^{d-1} e^{\frac{i2\pi n}{d}} |n\rangle\langle n|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d}\sum_{l\nu} |\phi_{l\nu}\rangle_{12} \omega^{-j\nu} X^{-(\nu+k)} Z^{j-l} \sum_m \alpha_m |m\rangle_3$$

Y llamando a la combinación de operadores unitarios U, finalmente se prueba que

$$U(l,m) = X^{-(k+m)}Z^{j-l}, \Rightarrow |\chi\rangle_1 |\psi_{jk}\rangle_{23} = \frac{1}{d}\sum_{l,m=0}^{d-1} e^{\frac{-i2\pi jm}{d}} |\psi_{lm}\rangle_{12} U(l,m) |\chi\rangle_3$$

20. Reescribiendo los estados en la base de Bell como estados en la base lógica, usando el procedimiento de la parte anterior.

$$|\psi_{\alpha\beta}\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n}^{d-1} \omega^{\alpha n} |n\rangle_1 |n-\beta\rangle_2$$

$$|\psi_{\mu\nu}\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{k}^{d-1} \omega^{\mu k} |n\rangle_3 |k-\nu\rangle_4$$

$$\Rightarrow |\psi_{\alpha\beta}\rangle_{12} |\psi_{\mu\nu}\rangle_{34} = \frac{1}{d}\sum_{n,k}^{d-1} \omega^{\alpha n} |n\rangle_1 |n-\beta\rangle_2 \omega^{\mu k} |k\rangle_3 |k-\nu\rangle_4$$

Reescribiendo en la sumatoria, escribiendo 2 y 3 y 1 y 4 como pares en la base maximalmente entrelazada:

$$= \frac{1}{d^2}\sum_{nk}^{d-1} \omega^{\alpha n}\omega^{\mu k} (\sum_l \omega^{-l(n-\beta)} |\psi_{l,n-\beta-k}\rangle_{23})(\sum_r \omega^{-rn} |\psi_{r,n-k+\nu}\rangle_{14})$$

Haciendo el cambio de letras en la sumatoria $m = n - \beta - k \Rightarrow n = m + \beta + k \Rightarrow n - k = m + \beta$

$$= \frac{1}{d^2} \sum_{mlkr} \omega^{\alpha(m+\beta+k)} \omega^{\mu k} \omega^{-l(m+k)} \omega^{-r(m+\beta+k)} \left|\psi_{l,m}\right\rangle_{23} \left|\psi_{\alpha+\mu-l,m+\beta+\nu}\right\rangle_{14}$$

Reordenando los elementos en los exponentes de ω

$$\alpha(m+\beta+k)+\mu k-l(m+k)-r(m+\beta+k) = k(\alpha+\mu-l-r)+\alpha(\beta+m)-lm-rm-r\beta$$

Se puede simplificar lo anterior usando la propiedad de los números complejos que convierte la sumatoria de las raíces de la unidad en un delta de Kroenecker:

$$\sum_{k=0}^{d-1} \omega^{k(\alpha+\mu-l-r)} = d\delta_{r,\alpha+\mu-l} \Rightarrow = \sum_{ml}^{d-1} \omega^{\alpha(\beta+m)-lm} \omega^{-(\alpha+\mu-l)(m+\beta)} \left|\psi_{l,m}\right\rangle_{23} \left|\psi_{\alpha+\mu-l,m+\beta+\nu}\right\rangle_{14}$$

Simplificando los elementos en los exponentes de ω

$$\alpha(\beta+m) - lm - (\alpha+\mu-l)(m+\beta) = -\mu(m+\beta) + l\beta$$

$$\Rightarrow \left|\psi_{\alpha,\beta}\right\rangle_{12} \otimes \left|\psi_{\mu,\nu}\right\rangle_{34} = \sum_{ml}^{d-1} \omega^{-\mu(m+\beta)} \omega^{l\beta} \left|\psi_{l,m}\right\rangle_{23} \left|\psi_{\alpha+\mu-l,m+\beta+\nu}\right\rangle_{14}$$

Considerando la operación unitaria:

$$U(l,\beta) = e^{\frac{i2\pi}{d} l\beta} (Z_1)^{-l}, Z_1 = \sum_{n=0}^{d-1} \omega^n \left|n\right\rangle_1 \left\langle n\right|$$

$$\Rightarrow U(l,\beta) \left|\psi_{jk}\right\rangle_{14} = \omega^{l\beta} \left|\psi_{j-l,k}\right\rangle_{14}$$

Se obtiene que

$$\left|\psi_{\alpha,\beta}\right\rangle_{12} \otimes \left|\psi_{\mu,\nu}\right\rangle_{34} = \frac{1}{d} \sum_{l,m=0}^{d-1} e^{\frac{-i2\pi}{d}\mu(m+\beta)} \left|\psi_{l,m}\right\rangle_{23} \otimes U(l,\beta) \left|\psi_{\alpha+\mu,\beta+m+\nu}\right\rangle_{14}$$

21. Para el sistema AB

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(\left|00\right\rangle \left\langle 00\right| + \left|11\right\rangle \left\langle 11\right|) + \frac{z}{2}(\left|00\right\rangle \left\langle 11\right| + \left|11\right\rangle \left\langle 00\right|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) A y B están inicialmente en

$$\rho_A = Tr_B \rho_{AB} = \frac{1}{2}\mathbb{I}, \rho_B = Tr_A \rho_{AB} = \frac{1}{2}\mathbb{I}$$

Ambas matrices densidad tienen entropía de Von Neumann 1.

(b) La información mutua cuántica se obtiene de manera similar a lo que se hizo en la tarea anterior, calculando la entropía de Von Neumann a las matrices reducidas y luego a la matriz densidad completa. Para las reducidaas es trivial dada su forma:(diagonales con 2 términos que valen $\frac{1}{2}$, por lo que la entropía valdrá 1). Para la matriz completa:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{1+z}{2}, \lambda_4 = \frac{1-z}{2}$$

$$\Rightarrow S(AB) = -(\frac{1+z}{2})log(\frac{1+z}{2}) - (\frac{1-z}{2})log(\frac{1-z}{2})$$

$$I(\rho_{AB}) = S(A) + S(B) - S(AB) = 2 - S(AB)$$

$$= 2 + (\frac{1+z}{2})log(\frac{1+z}{2}) + (\frac{1-z}{2})log(\frac{1-z}{2})$$

Cuando z vale 0 la información mutua es 1 (estado separable, solo correlaciones clásicas) y cuando z vale 1 es 2 (estado maximalmente entrelazado, 1 de correlación clásica y otro de quantum discord).

(c) Las correlaciones clásicas se obtienen de hacer una medida proyectiva a la base del sistema:

$$|0'\rangle = cos\theta\,|0\rangle + e^{i\epsilon}sin\theta\,|1\rangle\,, |1'\rangle = -e^{-i\epsilon}sin\theta\,|0\rangle + cos\theta\,|1\rangle$$

Se obtiene la matriz resultante de la medición proyectiva en B para obtener sus autovalores

$$\tilde{\rho}_{A,0'} = \frac{1}{2}(|0\rangle_A \langle 0|\,|\langle 0'|\,|0\rangle|^2 + |1\rangle_A \langle 1|\,|\langle 0'|\,|1\rangle|^2)$$

$$+\frac{z}{2}(|0\rangle_A \langle 1|\,\langle 0'|\,|0\rangle\,\langle 1|\,|0'\rangle + |1\rangle_A \langle 0|\,\langle 0'|\,|1\rangle\,\langle 0'|\,|0\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle_A \langle 0|\,cos^2\beta + |1\rangle_A \langle 1|\,sin^2\beta)$$

$$+\frac{z}{2}(|0\rangle_A \langle 1|\,e^{i\epsilon}cos\beta sin\beta + |1\rangle_A \langle 0|\,e^{-i\epsilon}sin\beta cos\beta)$$

$$\tilde{\rho}_{A,1'} = \frac{1}{2}(|0\rangle_A \langle 0|\,|\langle 1'|\,|0\rangle|^2 + |1\rangle_A \langle 1|\,|\langle 1'|\,|1\rangle|^2)$$

$$+\frac{z}{2}(|0\rangle_A \langle 1| \langle 1'| |0\rangle \langle 1| |1'\rangle + |1\rangle_A \langle 0| \langle 1'| |1\rangle \langle 1'| |0\rangle)$$
$$= \frac{1}{2}(|0\rangle_A \langle 0| sin^2\beta + |1\rangle_A \langle 1| cos^2\beta)$$
$$-\frac{z}{2}(|0\rangle_A \langle 1| e^{i\epsilon}cos\beta sin\beta + |1\rangle_A \langle 0| e^{i\epsilon}cos\beta sin\beta)$$

Entonces, tanto al medir 0, como al medir 1, obtendremos los mismos autovalores, que se obtienen de la matriz normalizada:

$$\rho_{A,0'} = \begin{pmatrix} cos^2\beta & zsin\beta cos\beta e^{i\epsilon} \\ zsin\beta cos\beta e^{-i\epsilon} & sin^2\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-4|\rho'_A|}}{2}$$

Siendo el determinante de la matriz densidad:

$$|\rho'_A| = cos^2\beta sin^2\beta - z^2 sin^2\beta cos^2\beta = (1-z^2)cos^2\beta sin^2\beta$$

Simplificando los valores propios:

$$\sqrt{1-4(1-z)cos^2\beta sin^2\beta} = \sqrt{(z^2-1)sin^2 2\beta + 1}$$

Si z vale 0, los valores propios son $cos\theta$ y $sin\theta$, si vale 1, valdrá 1 y 0. Las entropías valen:

$$S(\rho_{A,0'}) = -\frac{1+\sqrt{(z^2-1)sin^2 2\beta+1}}{2} log(\frac{1+\sqrt{(z^2-1)sin^2 2\beta+1}}{2})$$
$$-\frac{1-\sqrt{(z^2-1)sin^2 2\beta+1}}{2} log(\frac{1-\sqrt{(z^2-1)sin^2 2\beta+1}}{2})$$

Entonces, considerando que ambos estados tienen probabilidad $\frac{1}{2}$, la entropía condicional vale.

$$S(S|\Pi_B) = \frac{S(\rho_{A,0'}) + S(\rho_{A,1'})}{2}$$

Usando lo anterior, las correlaciones clásicas (base dependiente) valen:

$$J(A|\Pi_B) = S(A) - S(A|\Pi_B) = 1 - S(A|\Pi_B)$$

La base de la medida proyectiva tendrá mínima entropía cuando $sin^2 2\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = \beta = 0$, la que valdrá

$$S(\rho_{A,0'}^{max}) = -\frac{1+1}{2} log(\frac{1+1}{2}) - \frac{1-1}{2} log(\frac{1-1}{2}) = 0$$

por lo que las correlaciones clásicas valdrán:

$$J(A|B) = 1$$

(d) Restando la información mutua y la correlación clásica, el quantum discord vale

$$D(A|B) = I(A|B) - J(A|B) = 1 + (\frac{1+z}{2})log(\frac{1+z}{2}) + (\frac{1-z}{2})log(\frac{1-z}{2})$$

(e) El estado final conjunto es luego de una medida proyectiva en B

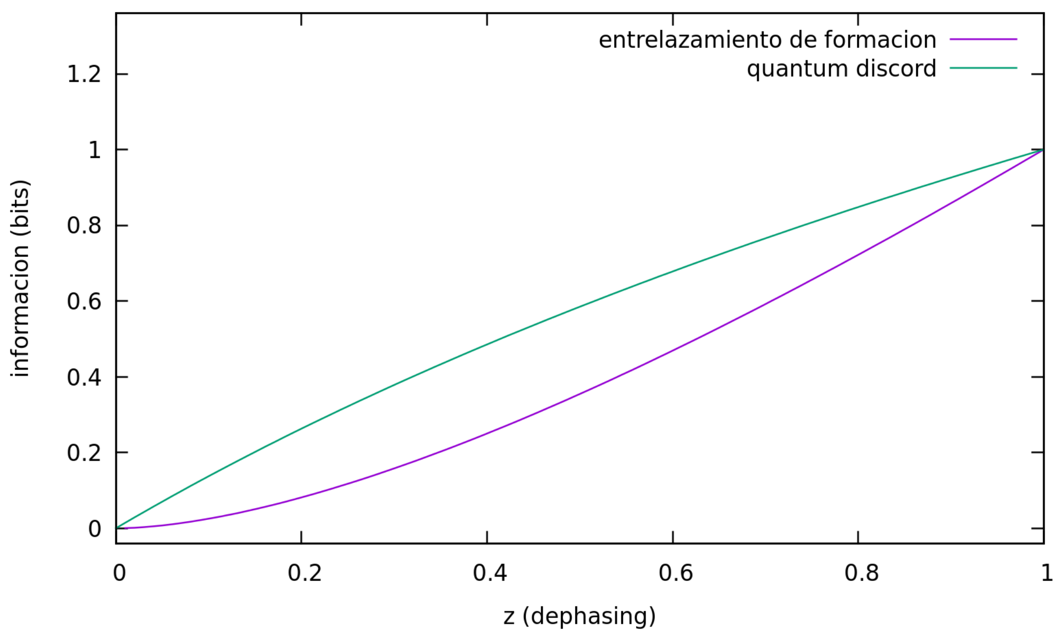
$$\rho'_{AB} = \sum_b p_b \left|b\right\rangle \left\langle b\right| \rho_a^b = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} cos^2\beta & zsin\beta cos\beta e^{i\epsilon} \\ zsin\beta cos\beta e - i\epsilon & sin^2\beta \end{pmatrix}_A \otimes \left|0'\right\rangle_B \left\langle 0'\right|$$

$$+ \begin{pmatrix} sin^2\beta & -zsin\beta cos\beta e^{i\epsilon} \\ -zsin\beta cos\beta e^{-i\epsilon} & cos^2\beta \end{pmatrix}_A \otimes \left|1'\right\rangle_B \left\langle 1'\right|)$$

(f) A y B terminan en

$$\rho'_A = Tr_B \rho'_{AB} = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} sin^2\beta + cos^2\beta & (z-z)sin\beta cos\beta e^{i\epsilon} \\ (z-z)sin\beta cos\beta e^{-i\epsilon} & cos^2\beta + sin^2\beta \end{pmatrix}) = \frac{\mathbb{I}_A}{2} = \rho_A$$

$$\rho'_B = Tr_A \rho'_{AB} = \frac{1}{2}(\left|0'\right\rangle \left\langle 0'\right| (cos^2\beta + sin^2\beta) + \left|1'\right\rangle \left\langle 1'\right| (sin^2\beta + cos^2\beta)) = \frac{\mathbb{I}'_B}{2}$$



(g) Se grafica el quantum discord y el entrelazamiento del estado ρ_{AB} respecto a z usando gnuplot. Se observa que tanto el quantum discord (las correlaciones cuánticas en la información mutua del sistema) como el entrelazamiento de formación valen 0 cuando z vale z y 1 cuando 1 vale 1, aunque el quantum discord en el intervalo termina siendo menor que el entrelazamiento de formación.

1 Propiedades de la Entropía Cuántica

1.1 Aaaa

De acuerdo a la definición

$$S(\rho) = -tr(\rho log\rho) = -\sum_{x=0}^{d-1} \lambda_x log\lambda_x \tag{1}$$

Donde los logaritmos son en base 2 y se considera la descomposición espectral de la matriz densidad (es decir su descomposición en los autovalores y los proyectores de sus respectivos autoestados.

$$\rho = \sum_{x=0}^{d-1} \lambda_x \left|x\right\rangle \left\langle x\right| \tag{2}$$

Si un estado es puro, la matriz densidad será solo el proyector del ket

$$\rho = \left|i\right\rangle \left\langle i\right| \Rightarrow \lambda_i = 1, \lambda_j = 0[\forall j \neq i, i, j \in x] \tag{3}$$

Y usando la definición de **??** la entropía entonces será

$$S(\rho) = (Dim(x) - 1) * (-0log0) - 1 * log1 = 0 - 0 = 0 \tag{4}$$

Para cualquier estado mixto (mezcla) se tiene que, usando **??**

$$S(\rho) = -\sum_{x=0}^{d-1} \lambda_x log\lambda_x \tag{5}$$

Los λ_x son los autoestados de una matriz densidad, por lo que són números reales entre 0 y 1 (lo mínimo que se le pide a una matriz densidad). Dicho esto, los logaritmos base 2 de dichos números serán negativos:

$$\lambda_x \geq 0 \wedge log(\lambda_x) \leq 0 \Rightarrow \lambda_x log(\lambda_x) \leq 0 \Rightarrow S(\rho) \geq 0 \tag{6}$$

Esto último usando la definición dada en **??**. Sumar negativos da negativo, y multiplicados por un signo menos da positivo.

1.2 Aaaa

Sabiendo cómo está acotada por abajo la entropía, hay que ver cómo acota por arriba. Haciendo algo de álgebra dentro de la definición de **??**

$$S(\rho) = -\sum_{x=0}^{d-1} \lambda_x (log(1 - (1 - \lambda_x)) \leq \sum_{x=0}^{d-1} \frac{\lambda_x}{ln2}(1 - \lambda_x) \tag{7}$$

En la última igualdad se ocupó la expansión de Taylor del logaritmo en general

$$log_2(1-x) = \frac{ln(1-x)}{ln2} = \frac{1}{ln2}(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ...) \tag{8}$$

Manipulando la sumatoria resultante de **??**

$$\sum_{x=0}^{d-1} \frac{\lambda_x - \lambda_x^2}{ln2} \leq \sum_{x=0}^{d-1} \frac{\lambda_x}{ln2} \leq \sum_{x=0}^{d-1} \frac{1}{ln2} = \frac{d-1}{ln(2)} \tag{9}$$

Si se vuelve a ocupar la expansión de **??**

$$logd = log(1-(1-d)) \leq -(1-d) \Rightarrow d-1 \leq logd \tag{10}$$

Finalmente se acota como:

$$S(\rho) \leq \frac{d-1}{ln2} \leq \frac{lnd}{ln2} = log_2 d \tag{11}$$

1.3 Aaaa

En un sistema compuesto puro, usando **??**, la entropía total será cero

$$|\phi\rangle_{AB} \Rightarrow S(|\phi\rangle_{AB} \langle\phi|_{AB}) = 0 \tag{12}$$

Escribiendo el estado en bases arbitrarias de A y B

$$|\phi\rangle_{AB} = \sum_{x,y} c_{xy} |x\rangle_A |y\rangle_B = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_A |i\rangle_B \tag{13}$$

Para lo último se usa que un estado conjunto puro se puede escribir como una descomposición de Schmidt. Entonces se escriben las matrices densidad reducida.

$$\rho_A = \sum_{i,j,k} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \langle k|_B |i\rangle_A |i\rangle_B \langle j|_A \langle j|_B |k\rangle_B \tag{14}$$

$$\rho_B = \sum_{i,j,k} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \langle k|_A |i\rangle_A |i\rangle_B \langle j|_A \langle j|_B |k\rangle_A \tag{15}$$

Usando la ortogonalidad de las bases se simplifican **??** y **??**, obtieniéndose lo mismo en ambas para cada sistema.

$$\forall(i,j) \langle i| |j\rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \rho_A = \sum_k \lambda_k |k\rangle_A \langle k|_A, \rho_B = \sum_k \lambda_k |k\rangle_B \langle k|_B \tag{16}$$

Al tener la misma forma, las matrices densidad reducida tienen los mismos autovalores. Con lo que usando la definición de **??**:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) \tag{17}$$

1.4 Aaaa

Partiendo de una matriz densidad de la forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i = \sum_i p_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} \lambda_{x_i} |x_i\rangle \langle x_i| \tag{18}$$

En la que las matrices densidad ρ_i tienen soportes en espacios ortogonales, por lo que se comportan como proyectores ortogonales

$$Tr(\rho_i \rho_j) = \delta_{ij} \tag{19}$$

Usando la definición en **??**, se calcula la entropía (considerando λ_{x_i} el autoestado x_i de ρ_i

$$S(\rho) = -\sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} (p_i \lambda_{x_i}) log(p_i \lambda_{x_i}) = -\sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} (p_i \lambda_{x_i})(log(p_i) + log(\lambda_{x_i}) \tag{20}$$

En lo último se ocupó la propiedad de logaritmos de productos.Para el primer sumando

$$-\sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} p_i \lambda_{x_i} log(p_i) = -\sum_i p_i log p_i \sum_{x_i=0}^{j_1-1} \lambda_{x_i} = -\sum_i p_i log p_i = H(p_i) \tag{21}$$

En la última parte se ocupa que los λ_{x_i} son autovalores de matrices densidad ρ_i, por lo que sumarlas siempre dará uno. Se termina obteniendo la entropía clásica para la distribución de probabilidad p_i Mientras que para el segundo sumando

$$-\sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} p_i \lambda_{x_i} log(\lambda_{x_i}) = -\sum_i p_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} \lambda_{x_i} log(\lambda_{x_i}) = \sum_i p_i S(\rho_i) \tag{22}$$

Reordenando se obtienen las entropías para cada ρ_i Con lo que finalmente se obtiene

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i \Rightarrow S(\rho) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i) \tag{23}$$

1.5 Aaaa

Si ahora se tiene una matriz densidad de la forma

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \otimes \rho_i = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \sum_{x_i=0}^{j_i-1} \lambda_{x_i} |x_i\rangle \langle x_i| \tag{24}$$

Si se calcula la entropía usando la definición de **??**

$$S(\rho) = -\sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} (p_i\lambda_{x_i})log(p_i\lambda_{x_i})) \tag{25}$$

se obtiene la misma fórmula que para la situación anterior, por lo que el resultado final también será el mismo.

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \otimes \rho_i \Rightarrow S(\rho) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i) \tag{26}$$

2 Entropía de un Estado Producto

Para un sistema producto de 2 matrices densidad:

$$\rho = \sum_x p_x |x\rangle \langle x| \,, \sigma = \sum_y q_y |y\rangle \langle y| \tag{27}$$

La entropía para el sistema producto, de acuerdo a la definición en **??** es

$$S(\rho \otimes \sigma) = -\sum_{x,y}(p_x q_y)log(p_x q_y) = -\sum_{x,y}(p_x q_y)log(p_x) - \sum_{x,y}(p_x q_y)log(q_y) \tag{28}$$

En lo último se ocupó la propiedad de logaritmos de productos. Para el primer sumando

$$-\sum_{x,y}(p_x q_y)log(p_x) = \sum_x p_x log(p_x) \sum_y q_y = S(\rho) \tag{29}$$

Mientras que para el segundo sumando

$$-\sum_{x,y}(p_x q_y)log(q_y) = \sum_x p_x \sum_y q_y log(q_y) = S(\sigma) \tag{30}$$

Con lo que sumando **??** y **??** resulta

$$S(\rho \otimes \sigma) = S(\rho) + S(\sigma) \tag{31}$$

3 Entrelazamiento de Sistemas Compuestos Puros

Si el estado conjunto es puro, su entropía total es 0. Usando la definición de Información Mútua cuántica

$$S(A, B) = 0 \Rightarrow I(A : B) = S(B) - S(B|A) \tag{32}$$

Y usando también la definición de Entropía condicional:

$$S(B|A) = S(AB) - S(B) = -S(B) \Rightarrow I(A:B) = S(A) + S(B) = 2S(B) \tag{33}$$

En lo último se ocuparon las 2 propiedades de entropías de estado puro: Que la entropía conjunta es 0 (**??**) y que las entropías en los subsistemas (si es bipartito), serán iguales (**??**). Para que la información mutua sea mayor que 0 (es 0 si es estado separable y en cualquier otra situación estará entrelazado) $S(B)$ tiene que ser positivo, lo que de acuerdo a lo evaluado en **??**, implica que $S(B|A)$ tiene que ser negativa.

4 Información Mútua como Entropía Relativa

Sean 2 matrices densidad descompuestas espectralmente con valores propios α_i y β_j

$$\rho_A = \sum_i^N \alpha_i |i\rangle_A \langle i|_A, \rho_B = \sum_j^M \beta_j |j\rangle \langle j| \tag{34}$$

El logaritmo para la matriz producto será una matriz escrita en las bases de los autovalores para ambos espacios cuyos argumentos en la diagonal serán los logaritmos de los elementos de las matriz producto, que son todos los posibles productos entre los autovalores de las 2 matrices:

$$log(\rho_A \otimes \rho_B) = diag(log(\alpha_1\beta_1), ..., log(\alpha_N\beta_1), ..., log(\alpha_1\beta_M), ..., log(\alpha_N\beta_M)) \tag{35}$$

Usando la propiedad de que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores se puede separar la matriz en 2, una solo con logaritmos de elementos de ρ_A y otra solo con logaritmos de elementos de ρ_B

$$log(\rho_A \otimes \rho_B) = \begin{pmatrix} log(A) & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & log(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} log(\beta_1)\mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & log(\beta_M)\mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{36}$$

Ambas matrices pueden escribirse como productos tensoriales entre las densidades reducidad y la identidad del otro espacio. Por lo que finalmente se puede escribir:

$$log(\rho_A) \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes log(\rho_B) \tag{37}$$

5 Entropia condicional como Entropía

De acuerdo a la definición de entropía relativa:

$$S(\rho||\sigma) = tr(\rho log\rho) - tr(\rho log\sigma) \tag{38}$$

Se puede escribir lo pedido como

$$S(\rho^{AB}||\rho^{A}\otimes\rho^{B}) = tr(\rho^{AB}log\rho^{AB}) - tr(\rho^{AB}log(\rho^{A}\otimes\rho^{B})) \tag{39}$$

Por la definición en **??**, el primer sumando es $-S(\rho^{AB})$. Para el segundo sumando se tiene que, usando lo probado en **??**

$$-tr(\rho^{AB}log(\rho^{A}\otimes\rho^{B})) = -tr(\rho^{AB}log(\rho_{A})\otimes\mathbb{I}_{B}) - tr(\rho^{AB}\mathbb{I}_{A}\otimes log(\rho_{B})) \tag{40}$$

Aplicando para el primer sumando resultante la traza primero en B y luego en A, se obtiene la entropía para A

$$-tr_{A}(tr_{B}(\rho^{AB}log(\rho_{A})\otimes\mathbb{I}_{B})) = -tr_{A}(\rho^{A}log(\rho^{A})) = S(\rho^{A}) \tag{41}$$

Y de manera análoga para el segundo sumando, se traza primero en A y luego en B, obtieniéndose la entropía para B

$$-tr_{B}(tr_{A}(\rho^{AB}\mathbb{I}_{A}\otimes log(\rho_{B}))) = -tr_{B}(\rho^{B}log(\rho^{B})) = S(\rho^{B}) \tag{42}$$

Por lo que, sumando los 3 términos y usando la definición de información mú-tua se obtiene:

$$S(\rho^{AB}||\rho^{A}\otimes\rho^{B}) = -S(\rho^{AB}) + S(\rho^{A}) + S(\rho^{B}) = I(A:B) \tag{43}$$

6 Entropía de ensemble Clásico Cuántico

Partiendo de **??**, se puede escribir lo pedido como:

$$S(\rho^{AB}||\mathbb{I}^{A}\otimes\rho^{B}) = tr(\rho^{AB}log\rho^{AB}) - tr(\rho^{AB}log(\mathbb{I}^{A}\otimes\rho^{B}))\rho \tag{44}$$

Al igual que en el ejercicio anterior, el primer sumando es $-S(\rho^{AB})$. Usando lo calculado en **??**, el segundo sumando es $S(\rho^{B})$. Por lo que, sumando los 2 términos y usan la definición de entropía condicional:

$$S(\rho^{AB}||\mathbb{I}^{A}\otimes\rho^{B}) = -S(\rho^{AB}) + S(\rho^{B}) = -S(A|B) \tag{45}$$

7 La entropía es invariante bajo transformaciones unitarias.

Escribiendo las matrices ρ y σ en su forma espectral

$$\rho = \sum_{i}\alpha_{i}\left|i\right\rangle\left\langle i\right|, \sigma = \sum_{j}\beta_{j}\left|j\right\rangle\left\langle j\right| \tag{46}$$

Usando la definición de entropía relativa expresada en **??**

$$
\begin{aligned}
S(\rho||\sigma) &= \sum_i \alpha_i log\alpha_i - \sum_i \langle i|\, \rho log\sigma \,|i\rangle \\
&= \sum_i \alpha_i log\alpha_i - \sum_{ij} \alpha_i log\beta_j |\langle i|\,|j\rangle|^2
\end{aligned} \tag{47}
$$

Se define una constante cuyo valor serán los productos escalares entre los autoestados, la que permite simplificar la notación:

$$
P_{ij} = |\langle i|\,|j\rangle|^2 \Rightarrow S(\rho||\sigma) = \sum_i \alpha_i log\alpha_i - \sum_i j\alpha_i log\beta_j P_{ij} \tag{48}
$$

Si se multiplica ambas matrices densidad por la misma operación unitaria, sus descomposiciones espectrales quedan:

$$
u\rho u^\dagger = \sum_i \alpha_i u\,|i\rangle\,\langle i|\,u^\dagger, u\sigma u^\dagger = \sum_j \beta_j u\,|j\rangle\,\langle j|\,u^\dagger \tag{49}
$$

Resultan los mismos autovalores y un cambio de base para los autoestados. Escribiendo su respectiva entropía relativa:

$$
S(u\rho u^\dagger||u\sigma u^\dagger) = \sum_i \alpha_i log\alpha_i - \sum_i \langle i|\,U^\dagger(u\rho u^\dagger)log(u\sigma u^\dagger)U\,|i\rangle \tag{50}
$$

El primer sumando es más simple dado que aparecen los mismos autovalores y por enede la definición de entropía es la misma. El segundo sumando de **??** requerirá más revisión. Llamando a los autoestados resultantes de aplicar la transformación unitaria:

$$
|u_i\rangle = u\,|i\rangle \Rightarrow \langle u_i| = |i\rangle\,U^\dagger \tag{51}
$$

$$
|v_j\rangle = u\,|j\rangle \Rightarrow \langle v_j| = |j\rangle\,U^\dagger \tag{52}
$$

Se pueden reescribir las definiciones de **??** como

$$
u\rho u^\dagger = \sum_i \alpha_i\,|u_i\rangle\,\langle u_i|\,, u\sigma u^\dagger = \sum_j \beta_j\,|v_j\rangle\,\langle v_j| \tag{53}
$$

con lo que la definición de **??** se simplifica

$$
S(u\rho u^\dagger||u\sigma u^\dagger) = \sum_i \alpha_i log\alpha_i - \sum_i \langle u_i|\,(u\rho u^\dagger)log(u\sigma u^\dagger)\,|u_i\rangle \tag{54}
$$

Y reescribiendo los elementos del segundo sumando de **??**, agregando la descomposición espectral de las matrices densidad:

$$
\sum_i \langle u_i|\,(u\rho u^\dagger)log(u\sigma u^\dagger) = \sum_i \langle u_i|\,(\sum_k \alpha_k\,|u_k\rangle\,\langle u_k|)log(\sum_j \beta_j\,|v_j\rangle\,\langle v_j|)\,|u_i\rangle \tag{55}
$$

Al ser descomposición espectral, se pueden juntar las sumas y el logaritmo de manera conveniente para lo anterior:

$$= \sum_{ijk} \alpha_k \langle u_i| |u_k\rangle \langle u_k| |v_j\rangle log(\beta_j) \langle v_j| |u_i\rangle \tag{56}$$

Por la ortogonalidad de los autoestados y por la definición en **??**

$$\langle u_i| |u_k\rangle = \delta_{ik}, \langle u_k| |v_j\rangle = \langle k| U^\dagger U |j\rangle = \langle k| |j\rangle \Rightarrow \langle u_i| |v_j\rangle \langle v_j| |u_i\rangle = P_ij \tag{57}$$

Se insertan ambos en la suma de **??**, la que se simplifica

$$= \sum_{ij} \alpha_i log\beta_j P_{ij} \tag{58}$$

con lo que se recupera el resultado de **??**, lo que prueba que

$$S(U\rho U^\dagger||U\sigma U^\dagger) = S(\rho||\sigma) \tag{59}$$

8 Entropía de estados producto 1

Partiendo de la definición en **??**, lo pedido se escribe como

$$S(\rho_1 \otimes \rho_2||\sigma_1 \otimes \sigma_2) = -S(\rho_1 \otimes \rho_2) - tr((\rho_1 \otimes \rho_2)log(\sigma_1 \otimes \sigma_2)) \tag{60}$$

Usando la propiedad del logaritmo demostrada en **??**

$$= -S(\rho_1 \otimes \rho_2) - tr(\rho_1 \otimes \rho_2(log(\sigma_1) \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes log(\sigma_2)) \tag{61}$$

Calculando análogamente a **??** y **??**, es decir, trazando parcialmente en 1 y 2, además de usar lo demostrado en **??** se obtiene:

$$= -S(\rho_1) - S(\rho_2) - tr(\rho_1 log\sigma_1) - tr(\rho_2 log\sigma_2) \tag{62}$$

Que, usando la definición de **??**, no es más que:

$$S(\rho_1 \otimes \rho_2||\sigma_1 \otimes \sigma_2) = S(\rho_1||\sigma_1) + S(\rho_2||\sigma_2) \tag{63}$$

9 Entropía de estados producto 2

Usando la propiedad demostrada en **??**, se encuentra rápidamente que:

$$S(\rho^{\otimes n}||\sigma^{\otimes n}) = \sum_n S(\rho||\sigma) = nS(\rho||\sigma) \tag{64}$$

10 Entropía de 2 ensembles Clásico-Cuántico

Se comienza usando la definición de **??** para 2 estados clásico-cuántico

$$\begin{aligned} S(\rho^{XB}||\sigma^{XB}) &= S(\sum_i p_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right| \otimes \rho_i|| \sum_i p_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right| \otimes \sigma_i) \\ &= -S(\rho^{XB}) - tr(\rho^{XB} log(\sigma^{XB})) \end{aligned} \tag{65}$$

Esto se puede descomponer en las componentes de las matrices ρ_x y σ_x usando definiciones parecidas a las que se encuentran en **??**

$$\rho_i = \sum_{x_i=0}^{j_1-1} \lambda^{\rho}_{x_i} \left|x^{\rho}_i\right\rangle \left\langle x^{\rho}_i\right|, \sigma_i = \sum_{x_i=0}^{j_1-1} \lambda^{\sigma}_{x_i} \left|x^{\sigma}_i\right\rangle \left\langle x^{\sigma}_i\right| \tag{66}$$

Con lo que lo obtenido en **??** se puede escribir, usando **??** para el primer sumando

$$-S(\rho^{XB}) = -H(p_i) - \sum_i p_i S(\rho_i) \tag{67}$$

Y usando la propiedad de producto de los logaritmos en el segundo sumando:

$$-tr(\rho^{XB} log(\sigma^{XB})) = -\sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} p_i \lambda^{\rho}_{x_i} log(p_i) - \sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} p_i \lambda^{\rho}_{x_i} log(\lambda^{\sigma}_{x_i}) \tag{68}$$

Para el primer sumando de **??** se puede usar que solo existe la dependencia de los x_i en los autovalores $\lambda_{x^{\rho}_i}$ (que además suman 1) para decir que

$$\begin{aligned} -\sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} p_i \lambda^{\rho}_{x_i} log(p_i) &= -\sum_{x_i=0}^{j_i-1} \lambda^{\rho}_{x_i} \sum_i p_i log(p_i) \\ &= -\sum_i p_i log(p_i) = H(p_i) \end{aligned} \tag{69}$$

Mientras que para el segundo sumando de **??**, aprovechando que tanto ρ_i como σ_i fueron preparados para el ensemble clásico cuántico con la misma probabilidad p_i para cualquier i

$$-\sum_i \sum_{x_i=0}^{j_i-1} p_i \lambda^{\rho}_{x_i} log(\lambda^{\sigma}_{x_i}) = -\sum_i p_i Tr(\rho_i log(\sigma_i)) \tag{70}$$

Entonces, sumando los resultados de **??** y **??** se reescribe **??** como

$$-tr(\rho^{XB} log(\sigma^{XB}) = H(p_i) - \sum_i p_i Tr(\rho_i log(\sigma_i)) \tag{71}$$

Y sumando **??** con **??** se puede reescribir lo obtenido en **??**

$$S(\rho^{XB}||\sigma^{XB}) = -H(p_i) - \sum_i p_i S(\rho_i) + H(p_i) - \sum_i p_i Tr(\rho_i log \sigma_i) \quad (72)$$

Se observa que las entropías de Shannon se cancelan y finalmente se llega a:

$$S(\rho^{XB}||\sigma^{XB}) = \sum_i p_i(-S(\rho_i) - Tr(\rho_i log \sigma_i) = \sum_i p_i S(\rho_i||\sigma_i) \quad (73)$$

11 Las medidas proyectivas suben la entropía

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_i P_i \rho P_i \quad (74)$$

De acuerdo a la desigualdad de Klein:

$$S(\rho||\rho') = Tr(\rho log \rho) - Tr(\rho log \rho') \geq 0 \quad (75)$$

Separando los elementos de la resta se tiene

$$-S(\rho) \geq Tr(\rho log \rho') \quad (76)$$

Y multiplicando todo por -1

$$\Rightarrow S(\rho) \leq -Tr(\rho log \rho') \quad (77)$$

Para el segundo término en la desigualdad de **??**, se puede usar un ***1 conveniente*** hecho de operadores de la medida al cuadrado

$$-Tr(\rho log \rho') = -Tr(\sum_i P_i^2 \rho log \rho') = -Tr(\sum_i P_i \rho log \rho' P_i) \quad (78)$$

Esto último debido a que la traza es cíclica. Si se combina los operadores de proyección con la matriz densidad luego de medir

$$P_i \rho' - \rho' P_i = P_i(P_i \rho P_i) - (P_i \rho P_i) P_i = (P_i \rho P_i) - (P_i \rho P_i) = 0 \quad (79)$$

se observa que estos conmutan (se ocupa que en matrices proyección $P_i^2 = P_i$). Lo que implica que en lo último de **??** se puede cambiar de lugar a P_i de después del logaritmo a antes de él.

$$-Tr(\sum_i P_i \rho log \rho' P_i) = -Tr(\sum_i P_i \rho P_i log \rho') = S(\rho') \quad (80)$$

Lo que implica, usando **??** en **??**

$$-Tr(\rho log \rho') = S(\rho') \quad (81)$$

Y, por lo tanto, la desigualdad **??** se convierte en

$$S(\rho) \leq S(\rho') \tag{82}$$

Esto confirma lo pedido. Pareciera paradójico que una medida proyectiva disminuya la entropía, pero si se considera un reservorio para el sistema que se está analizando es posible considerar aumentos de la entropía en el ambiente que la mantienen en su tendencia hacia el crecimiento.

12 Los POVM pueden bajar la entropía.

De acuerdo al enunciado, los operadores de POVM para un estado de dimensión 2:

$$M_1 = |0\rangle \langle 0| \,, M_2 = |0\rangle \langle 1| \tag{83}$$

Se observa que pueden ser un POVM porque la suma de los operadores ponderados es la identidad:

$$M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M_2 = |0\rangle \langle 0| |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 0| |0\rangle \langle 1| = \mathbb{I} \tag{84}$$

Entonces, el resultado de la medida será

$$\rho' = M_1 \rho M_1^\dagger + M_2 \rho M_2^\dagger = |0\rangle \langle 0| \rho |0\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1| \rho |1\rangle \langle 0| \tag{85}$$

Lo que se puede escribir como elementos solo presentes en el primer elemento de la matriz densidad

$$\rho' = (\langle 0| \rho |0\rangle + \langle 1| \rho |1\rangle) |0\rangle \langle 0| = |0\rangle \langle 0| \tag{86}$$

En lo último se ocupó que ambos elementos correponden a la diagonal de ρ, y por lo tanto suman 1. Este estado tiene entropía 0. Entonces, hacer la medida generalizada disminuyó la entropía hacia 0, el menor valor posible.