Óptica Cuántica Daniel Castillo Castro

Clonado Cuántico

Índice

1. Motivaciones

Se pueden considerar las siguientes 2 motivaciones para estudiar el copiado cuántico:

- Se puede considerar un sistema cuántico con un estado determinado (por ejemplo, polarizaciones del modo de un campo o spines de un electrón) que se quiere amplificar. Para eso, se busca una forma eficiente de copiar varias veces el estado. El entrelazamiento será el principal impedimento que se encontrará para hacer un clonado en principio (al interactuar varios sistemas, habrán correlaciones y los estados podrían entrelazarse). Curiosamente, es ese mismo entrelazamiento posible que parece imposibilitar el copiado el que después será fundamental para implementar máquinas de copiado cuántico, como se verá en los desarrollos de este documento.
- En criptografía, se tiene comunicaciones entre Alice y Bob por un canal cuántico sin ruido (piensen, por ejemplo, en el envío de señales usando polarizaciones de fotones en un canal de fibra óptica). Esta señal puede ser intervenida por un agente externo (por lo general llamado Eva) que puede copiar la información que capta en el canal. Una ventaja de la criptografía cuántica (y que varios de los protocolos terminan usando) es que los procedimientos de copiado cuántico provocan que al copiar un estado si o si se termina alterando el estado original, por lo que si Bob recibe un estado con determinadas características, puede darse cuenta que la comunicación fue intervenida y desechar el estado por seguridad. Las máquinas de copiado cuántico pueden modelar la acción de Eva e indicar qué probabilidades son las que indicarían a Bob la intervención.

2. ¿Se puede clonar un estado?

2.1. ¿Qué es clonar?

Para efectos de Teoría de Información, clonar un estado es básicamente tomar un conjunto de números en un sistema y escribir los mismos números en otro conjunto con números arbitrarios (por simplicidad por lo general se elige para el segundo sistema solo ceros

$$(101010111011)_A \otimes (000000000000)_B \Rightarrow (101010111011)_A \otimes (101010111011)_B \tag{1}$$

A nivel clásico esto siempre se puede hacer porque se cumplen 2 condiciones

- Es posible copiar de forma "perfecta", o sea llevar la secuencia a otro estado con probabilidad 1. Esto se debe porque a nivel clásico la física es local, o sea, hacer cambios en un sistema cerrado nunca realiza cambios en otro sistema cerrado.
- El copiado no depende del tipo de secuencia que queramos copiar, no hay una secuencia favorita a priori para copiar. Para **todas** las secuencias se puede copiar con probabilidad 1.

Dicho esto, aparece la pregunta: ¿Se puede hacer un proceso de clonado a nivel cuántico? Es decir, pasar estas secuencias a determinados estados cuánticos:

$$|101010111011\rangle_A \otimes |000000000000\rangle_B \Rightarrow |101010111011\rangle_A \otimes |101010111011\rangle_B \tag{2}$$

2.2. Teorema de no-clonado

La respuesta que da la física cuántica es **NO**. Detrás de esta respuesta están fenómenos puramente cuánticos como el entrelazamiento de estados o el teorema de no signal. Esto será probado siguiendo a [**?**]. Se considera una máquina de clonado perfecto:

$$\begin{aligned} |0\rangle_A |Q\rangle_M &\rightarrow |0\rangle_A |0\rangle_B |Q_0\rangle_M \\ |1\rangle_A |Q\rangle_M &\rightarrow |1\rangle_A |1\rangle_B |Q_1\rangle_M \end{aligned} \tag{3}$$

Los estados $|Q\rangle$ en **??** son estados de la máquina de copiado, sobre la que se trazará por lo que no son del todo necesarios para los próximos análisis. Definiendo un estado cualquiera que se quiere copiar (por simplicidad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$|s\rangle_A = \alpha |0\rangle_A + \beta |1\rangle_B : \alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{4}$$

Se calcula el resultado de la máquina para el estado en **??** usando **??**

$$|s\rangle_A |Q\rangle_M \rightarrow \alpha(|0\rangle_A |0\rangle_B |Q_0\rangle_M) + \beta(|1\rangle_A |1\rangle_B |Q_1\rangle_M) \equiv |\phi\rangle_{ABX}^{out} \tag{5}$$

Se asume que los estados de la máquina son ortogonales entre sí

$$\langle Q_i| |Q_j\rangle = \delta_{ij} \forall i, j \in [0, 1] \tag{6}$$

Y con ello se puede calcular la matriz densidad producto de la traza para A y B

$$\rho_{AB} = Tr_M(|\phi\rangle^{out}_{ABX} \langle\phi|^{out}_{ABX}) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Si se toma el estado producto para $|s\rangle$ en A y B

$$\Pi_s \otimes \Pi_s = (|s\rangle_A \langle s|) \otimes (|s\rangle_B \langle s|) = \begin{pmatrix} \alpha^4 & \alpha^3\beta & \alpha^3\beta & \alpha^2\beta^2 \\ \alpha^3\beta & \alpha^2\beta^2 & \alpha^2\beta^2 & \beta^3\alpha \\ \alpha^3\beta & \alpha^2\beta^2 & \alpha^2\beta^2 & \beta^3\alpha \\ \alpha^2\beta^2 & \beta^3\alpha & \beta^3\alpha & \beta^4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Claramente son distintas. Si funcionase como el proceso clásico, estas matrices serían iguales como lo señala **??**. Existen formas de cuantificar la ”distancia.entre ambos estados, pero lo relevante es entender por qué son distintos.

- La física cuántica (hasta por donde sabemos) es **no local**. Existen estados entralazados que pueden alterar resultados de medidas a distancia. Esto contradice lo necesario para tener probabilidad 1 de copiado.
- Se puede demostrar (y se hará en la siguiente parte) que un procedimiento de copíado como el que se está implementando es mejor para algunos estados que para otros, lo que contradice la necesidad de independencia del estado que se quiere copiar.

Para evaluar la distancia entre 2 estados es necesario definir una distancia. Se define la distancia Hilbert-Schmidt:

$$D(\rho_1, \rho_2) = ||\rho_1 - \rho_2||^2 = (Tr((\rho_1 - \rho_2)^\dagger(\rho_1 - \rho_2))^{\frac{1}{2}})^2 \tag{9}$$

que nos bastará como distancia para matrices 2X2 (la doble barra representa el determinante de esas 2 matrices). También será necesario entonces calcular las matrices densidad reducida para las 2 matrices que se quieren comparar:

$$Tr_A\rho_{AB} = Tr_B\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$Tr_A(\Pi_s \otimes \Pi_s) = Tr_B(\Pi_s \otimes \Pi_s) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Entonces la distancia entre ambas matrices reducidas será

$$Tr(\begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 0 \end{pmatrix}^2) = 2\alpha^2\beta^2 = 2\alpha^2(1-\alpha^2) \tag{12}$$

Lo que demuestra inmediatamente que el segundo punto (necesidad de independencia de los estados) no se cumple. Para los estados en los que α vale 0 o 1 (es decir, para $|0\rangle$ o $|1\rangle$ la máquina copiará a la manera clásica, y para $\frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$ no solo copiará mal, sino que incluso destrozará el estado.

3. Máquinas de clonado cuántico

3.1. Máquina Universal de Clonado Cuántico

Siguiendo las derivaciones de [?], se puede construir una máquina de copiado **probabilista**. Esto relajando una de las 2 condiciones.

- Ya que la física cuántica es no local, se requiere relajar la condición de perfección, las copias no tienen por que llevar al mismo estado con probabilidad 1. Tendrán una probabilidad menor que 1 que se puede optimizar:
- Se seguirá exigiendo que la máquina sea independiente del estado a elegir, es decir, que se pueda usar para copiar cualquier estado con la probabilidad mencionada anteriormente.

La relajación de la condición de perfección se escribe matemáticamente así.

$$\begin{aligned} |0\rangle_A |Q\rangle_M &\to |0\rangle_A |0\rangle_B |Q_0\rangle_M + (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) |Y_0\rangle_M \\ |1\rangle_A |Q\rangle_M &\to |1\rangle_A |1\rangle_B |Q_1\rangle_M + (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) |Y_1\rangle_M \end{aligned} \tag{13}$$

Para exigir unitariedad a la transformación debe cumplirse

$$\langle Q_i|_M |Q_i\rangle_M + 2 \langle Y_i|_M |Y_i\rangle_M = 1, \forall i \in [0,1] \tag{14}$$

$$\langle Y_0|_M |Y_1\rangle_M = \langle Y_1|_M |Y_0\rangle_M = 0 \tag{15}$$

Si se exige que los estados $|Q_i\rangle_M$ y $|Y_i\rangle_M$ sean ortogonales entre sí, usando **??** se obtiene la misma relación de ortogonalidad para los $|Q_i\rangle_M$

$$\langle Q_i|_M |Y_i\rangle_M = 0, \forall i \in [0,1] \Rightarrow \langle Q_0|_M |Q_1\rangle_M = \langle Q_1|_M |Q_0\rangle = 0 \tag{16}$$

Ojo: los estados entre sí son **ortogonales**, no **ortonormales**. Los productos punto valdrán elementos menores que 1 que son los que se optimizarán. Definiendo

$$\xi = \langle Y_0|_M |Y_0\rangle_M = \langle Y_1|_M |Y_1\rangle_M \tag{17}$$

$$\eta = 2 \langle Y_0|_M |Q_1\rangle_M = 2 \langle Y_1|_M |Q_0\rangle_M = 2 \langle Q_0|_M |Y_1\rangle_M = 2 \langle Q_1|_M |Y_0\rangle_M \tag{18}$$

Se representa el estado para la transformación **??** en el estado mostrado en **??**

$$\begin{aligned} |s\rangle_A |Q\rangle_M \to\ & \alpha(|0\rangle_A |0\rangle_B |Q_0\rangle_M + (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) |Y_0\rangle_M) \\ & + \beta(|1\rangle_A |1\rangle_B |Q_1\rangle_M + (|0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B) |Y_1\rangle_M) \end{aligned} \tag{19}$$

En la referencia [**?**] se dice que por desigualdad de Schwarz:

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \eta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

Aunque físicamente es más claro ver por qué pasa esto. ξ^2 es la probabilidad de que la máquina falle para todo el estado, mientras η es la de acertar para solo 1 de las componentes del estado en la base lógica. Usando de **??** a **??**, se escribe la matriz densidad reducida para A y B.

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} (1-2\xi)\alpha^2 & \frac{\eta}{2}\alpha\beta & \frac{\eta}{2}\alpha\beta & 0 \\ \frac{\eta}{2}\alpha\beta & \xi(\alpha^2+\beta^2) & \xi(\alpha^2+\beta^2) & \frac{\eta}{2}\alpha\beta \\ \frac{\eta}{2}\alpha\beta & \xi(\alpha^2+\beta^2) & \xi(\alpha^2+\beta^2) & \frac{\eta}{2}\alpha\beta \\ 0 & \frac{\eta}{2}\alpha\beta & \frac{\eta}{2}\alpha\beta & (1-2\xi)\beta^2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Y la matriz reducida tanto para A como para B será

$$\rho_A = \rho_B = \begin{pmatrix} (1-\xi)\alpha^2 + \xi\beta^2 & \eta\alpha\beta \\ \eta\alpha\beta & \xi\alpha^2 + (1-\xi)\beta^2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Calculando la distancia para las matrices recién calculadas considerando la definición de **??** se obtiene

$$D(\rho_A, \rho_{ideal}) = Tr\begin{pmatrix} \xi(\beta^2-\alpha^2) & (\eta-1)\alpha\beta \\ (\eta-1)\alpha\beta & \xi(\alpha^2-\beta^2) \end{pmatrix}^2 = 2(\xi^2(2\alpha^2-1)^2 + (\eta-1)^2\alpha^2(1-\alpha^2)) \tag{23}$$

La función (para que cumpla la segunda condición de independencia de los estados no debe depender de α

$$\frac{\partial D(\rho_{AB}, \rho_{ideal})}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \eta = 1 - 2\xi \tag{24}$$

Esto simplifica considerablemente **??**

$$D(\rho_A, \rho_{ideal}) = 2(\xi^2(2\alpha^2-1)^2 + (2\xi)^2\alpha^2(1-\alpha^2)) = 2\xi^2 \tag{25}$$

Así la distancia solo depende de ξ, parámetro que también se puede optimizar para obtener el valor númerico de distancia mínima entre el estado resultante y el ideal. Esto se puede hacer buscando que la distancia entre la matrices resultante conjunta ρ_{AB} y la ideal para ese espacio (usando lo obtenido en **??** tampoco dependa de α ni a segundo órden

$$\rho_{AB} - \rho_{ideal} = \begin{pmatrix} (1-2\xi)\alpha^2 - \alpha^4 & (\frac{1}{2}-\xi)\alpha\beta - \alpha^3\beta & (\frac{1}{2}-\xi)\alpha\beta - \alpha^3\beta & -\alpha^2\beta^2 \\ (\frac{1}{2}-\xi)\alpha\beta - \alpha^3\beta & \xi - \alpha^2\beta^2 & \xi - \alpha^2\beta^2 & (\frac{1}{2}-\xi)\alpha\beta - \beta^3\alpha \\ (\frac{1}{2}-\xi)\alpha\beta - \alpha^3\beta & \xi - \alpha^2\beta^2 & \xi - \alpha^2\beta^2 & (\frac{1}{2}-\xi)\alpha^2\beta^2 - \beta^3\alpha \\ -\alpha^2\beta^2 & (\frac{1}{2}-\xi)\alpha\beta - \beta^3\alpha & (\frac{1}{2}-\xi)\alpha\beta - \beta^3\alpha & (1-2\xi)\beta^2 - \beta^4 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Optimizando la distancia calculada en la matriz del **??**

$$\frac{\partial^2 D(\rho_{AB}, \rho_{ideal} \otimes \rho_{ideal})}{d\alpha^2} = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{6} \Rightarrow D(\rho_A, \rho_{ideal}) = \frac{1}{18} \tag{27}$$

Una forma más de calcular la eficiencia de la medición es la fidelidad, sugerida en [**?**]

$$F_A = \langle s|_A \rho_A |s\rangle_A , F_B = \langle s|_B \rho_B |s\rangle_B \tag{28}$$

Donde $|S\rangle_A$ (lo mismo para B) es el definido en **??** y por **??**, ambas fidelidades serán iguales. Calculando para el caso general:

$$F = \alpha^2((1-\xi)\alpha^2 + \xi\beta^2) + \beta^2(\xi\alpha^2 + (1-\xi)\beta^2) + 2\eta\alpha^2\beta^2 \tag{29}$$

Y reemplazando para lo obtenido en **??** y **??**

$$F = \alpha^2(\frac{5}{6}\alpha^2 + \frac{1}{6}\beta^2) + \beta^2(\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{5}{6}\beta^2) + \frac{4}{3}\alpha^2\beta^2 = \frac{5}{6} \tag{30}$$

Que es lo que se esboza en [**?**]. La matriz densidad resultante luego de hacer los reemplazos tanto para ρ_A como para ρ_B es

$$\rho_A = \rho_B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}\alpha^2 + \frac{1}{6}\beta^2 & \frac{2}{3}\alpha\beta \\ \frac{2}{3}\alpha\beta & \frac{5}{6}\beta^2 + \frac{1}{6}\alpha^2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}|s\rangle\langle s| + \frac{1}{6}\mathbb{I} \tag{31}$$

3.2. Copiado covariante (dependientes del estado)

Las distancias entre estado real e ideal y fidelidad para la máquina de copiado universal servirán como una cota para la eficiencia de una máquina de copiado a nivel cuántico. Ninguna máquina de copiado cuántico que funcione para un qubit arbitrario podrá copiar estados con una distancia del caso ideal menos a $\frac{1}{18}$ ni con una fidelidad mayor a $\frac{5}{6}$ (ambos formalismos son equivalentes. Esto no significa que no se puedan copiar estados mejores cifras de eficiencia. Lo que implica es que si se quiere construir una máquina de copiado de mejor calidad, será necesario relajar la otra condición señalada al inicio: La de que sea independiente del estado. Acá dos ejemplos de ello siguiendo los desarrollos tanto de [**?**] como [**?**] Si se considera estados de la forma

$$|\phi\rangle_{cov} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) \Rightarrow \rho_{ideal} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Y la siguiente transformación de copiado para estos estados:

$$\begin{aligned} |0\rangle_A |0\rangle_B \rightarrow |0\rangle_A |0\rangle_B \\ |1\rangle_A |0\rangle_B \rightarrow cos\eta |1\rangle_A |0\rangle_B + sin\eta |0\rangle_A |1\rangle_B \end{aligned} \tag{33}$$

Se puede escribir ρ_{AB} para estos estados (Nótese que no aparece necesario el estado máquina).

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\varphi}sin\eta & e^{-i\varphi}cos\eta & 0 \\ e^{i\varphi}sin\eta & sin^2\eta & cos\eta sin\eta & 0 \\ e^{i\varphi}cos\eta & cos\eta sin\eta & cos^2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Trazando para A y B **??**

$$\rho_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+sin^2\eta & e^{-i\varphi}cos\eta \\ e^{i\varphi}cos\eta & cos^2\eta \end{pmatrix}, \rho_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+cos^2\eta & e^{-i\varphi}sin\eta \\ e^{i\varphi}sin\eta & sin^2\eta \end{pmatrix} \tag{35}$$

Es fundamental para poder hablar de ***copiado*** que $\rho_A = \rho_B$. Esto se logra si $\eta = \frac{\pi}{4}$, con lo que la matriz en los 2 subespacios queda

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{36}$$

Y entonces se calcula la fidelidad de la máquina al estado orginal:

$$F = \langle s|_A \rho_A |s\rangle_A = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \simeq 08535 > 0{,}8333... = \frac{5}{6} \tag{37}$$

3.3. Máquina Probabilista de copiado

Otro enfoque para observar copiado cuántico es el enfoque de Dan y Guo, propuesto en 2000 y reseñado en [**?**] y [**?**]. Los textos (se consultó los 2 mencionados anteriormente además de [**?**] y todos lo decían de manera similar) hablan por lo general que estos son copiados çon fidelidad perfecta pero con probabilidad de éxito y falla". Esto parece contradecir el teorema de no cloning, pero haciendo el desarrollo quedará más claro.

Se tiene 2 estados $|\phi_0\rangle_A$ y $|\phi_1\rangle_A$ no necesariamente ortogonales

$$\langle\phi_0|\,|\phi_1\rangle = \alpha \tag{38}$$

Y se hace una máquina de copiado cuántico que copia ambos estados con cierta probabilidad y que el resto de posibilidades las condensa a un solo estado que reúne todas las posibilidades de error.

$$|\phi_0\rangle_A |\Sigma\rangle_B |m_i\rangle_M \rightarrow \sqrt{\eta_0}\,|\phi_0\rangle_A |\phi_0\rangle_B |m_0\rangle_M + \sqrt{1-\eta_0}\,|\Phi_0\rangle_{ABM} \tag{39}$$

$$|\phi_1\rangle_A |\Sigma\rangle_B |m_i\rangle_M \rightarrow \sqrt{\eta_1}\,|\phi_1\rangle_A |\phi_1\rangle_B |m_1\rangle_M + \sqrt{1-\eta_1}\,|\Phi_1\rangle_{ABM} \tag{40}$$

Los estados máquina son elegidos de manera que sean ortogonales entre sí. De esta forma, midiendo en M se sabrá si la máquina funciona o falla. Considerando $\eta_0 = \eta_1$ (lo que también iguala los estados máquina y los reduce a 1 estado de éxito y 1 de falla) multiplicar escalarmente **??** y **??** genera

$$\alpha = \eta\alpha^2 + (1-\eta) \tag{41}$$

Al ser el copiado propuesto una transformación unitaria, la norma en el lado izquierdo (antes de la transformación) y derecho (después de la transformación) deben ser iguales. Esto se optimiza cuando, al resolver la ecuación cuadrática para α que aparece en **??**

$$\begin{aligned} \eta\alpha^2 - \alpha + (1-\eta) \Rightarrow \alpha &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1-\eta)\eta}}{2\eta} \\ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\eta} \pm \frac{2\eta - 1}{2\eta} &= \{1, \frac{1}{\eta} - 1\} \end{aligned} \tag{42}$$

Considerando que $|\alpha|$ siempre es positivo

$$\frac{1}{\eta} - 1 \geq |\alpha| \Rightarrow \eta \leq \frac{1}{1+|\alpha|} \tag{43}$$

con lo que se recupera el resultado de no-cloning: η (o sea, la probabilidad de acertar en el clonado) es 1 solo cuando $\alpha = 0$, es decir, cuando los estados son ortogonales entre sí.

4. Implementación en sistemas físicos de máquinas de clonado

4.1. Implementación de máquinas de copiado universal en circuitos

Para poder ver cómo funciona una máquina de copiado cuántico más allá de lo meramente teórico, es interesante observar lo realizado en [**?**]. Formalmente, lo que realiza el circuito mostrado en figura 1 es:

$$|\alpha\rangle_A |\beta\rangle_B |\xi\rangle_M \to |\alpha \oplus \beta \oplus \xi\rangle_A |\alpha \oplus \beta\rangle_B |\alpha \oplus \xi\rangle_M \tag{44}$$

Se aplica **??** en los siguientes 2 casos particulares: Uno donde se coloca el estado de **??** en A (el estado que se quiere copiar) y un estado maximalmente entrelazado para B y M

$$\begin{aligned} |s\rangle_A |\Phi^+\rangle_{BM} &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |111\rangle) \\ &\to \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|111\rangle + |100\rangle) \end{aligned} \tag{45}$$

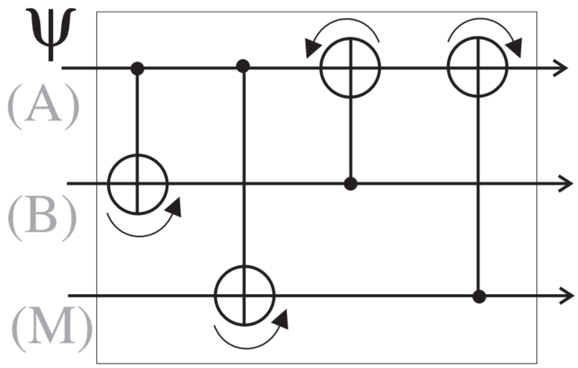

Figura 1: Representación gráfica de lo que sería una máquina de copiado en formalismo de circuitos. Está compuesta de 4 compuertas C-NOT que entrelazan los espacios A, B y S. A es el espacio donde se encuentra el estado a copiar, B es la "hoja en blancoz M el estado máquina. tomada de [?]

y otro estado en el que el sistema es con el estado de **??** en A, $|0\rangle$ en B y el estado $|+X\rangle$ en M

$$\begin{aligned} |s\rangle_A |0\rangle_B |+\rangle_M = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |101\rangle \\ \to \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |101\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|111\rangle + |010\rangle) = |s\rangle_B |\Phi^+\rangle_{AM} \end{aligned} \tag{46}$$

Se observa que mientras para el estado de **??** no produce cambios, el de **??** copia la información del estado de A a B. Se superponer ambos estados posibles para preparar el estado:

$$\begin{aligned} |s\rangle_A |\phi^i\rangle_{BM} = a(|s\rangle_A |\Phi^+\rangle_{BM}) + b(|s\rangle_A |0\rangle_B |+\rangle_M) \\ = a(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |111\rangle)) + \\ b(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |101\rangle)) \\ = \frac{\alpha(a+b)}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{b\alpha}{\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{a\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \\ \frac{\beta(a+b)}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\beta b}{\sqrt{2}}|101\rangle + \frac{\beta a}{\sqrt{2}}|111\rangle \end{aligned} \tag{47}$$

A los coeficientes a y b se les impone, por normalización:

$$\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta^2((a+b)^2 + a^2 + b^2) = \frac{2(a^2+b^2+ab)}{2} = a^2 + b^2 + ab = 1 \tag{48}$$

El estado de **??** se pasa por el circuito, quedando:

$$\begin{aligned}|s\rangle_A |\phi^f\rangle_{BM} = \frac{\alpha(a+b)}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{b\alpha}{\sqrt{2}}|101\rangle + \frac{a\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \\ \frac{\beta(a+b)}{\sqrt{2}}|111\rangle + \frac{\beta b}{\sqrt{2}}|010\rangle + \frac{\beta a}{\sqrt{2}}|100\rangle\end{aligned} \tag{49}$$

Y las matrices densidad reducida, tanto para A como para B tendrán la forma:

$$\rho_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha^2((a+b)^2+a^2)+\beta^2 b^2 & \alpha\beta(1-b^2) \\ \alpha\beta(1-b^2) & \beta^2((a+b)^2+a^2)+\alpha^2 b^2\end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\rho_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha^2((a+b)^2+b^2)+\beta^2 a^2 & \alpha\beta(1-a^2) \\ \alpha\beta(1-a^2) & \beta^2((a+b)^2+b^2)+\alpha^2 a^2\end{pmatrix} \tag{51}$$

Considerando **??** se tiene que

$$|s\rangle\langle s| = \begin{pmatrix}a^2 & ab \\ ab & b^2\end{pmatrix} \Rightarrow |s^\perp\rangle = \begin{pmatrix}b \\ -a\end{pmatrix} |s^\perp\rangle\langle s^\perp| = \begin{pmatrix}b^2 & -ab \\ -ab & a^2\end{pmatrix} \tag{52}$$

Con esto las matrices de **??** y **??** se simplifican

$$\rho_A = (1-\frac{b^2}{2})|s\rangle\langle s| + \frac{b^2}{2}|s^\perp\rangle\langle s^\perp| = (1-b^2)|s\rangle s + \frac{b^2}{2}\mathbb{I} \tag{53}$$

$$\rho_B = (1-\frac{a^2}{2})|s\rangle\langle s| + \frac{b^2}{2}|s^\perp\rangle\langle s^\perp| = (1-a^2)|s\rangle\langle s| + \frac{a^2}{2}\mathbb{I} \tag{54}$$

De **??** y **??** se declara que, como en ambos espacios se obtiene el estado $|s\rangle$ de manera probabilista, se puede considerar el resultado como una máquina de copiado con las fidelidades

$$F_A = 1 - \frac{b^2}{2}, F_B = 1 - \frac{a^2}{2} \tag{55}$$

Si se exige que a y b sean iguales, combinando con la condición de normalización

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow F = F_A = F_B = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{5}{6} \tag{56}$$

Se recupera la máquina de clonado universal. Lo que también se observa al reemplazar en **??** y **??**

4.2. Copiado universal para N dimensiones

Para hallar el clonado universal para estados de mayor dimensión a un qubit, Para $d > 2$ el procedimiento es análogo. Solo que los siguientes estados cambian:

$$|\Phi^{+}\rangle_{BM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle_B |k\rangle_M \tag{57}$$

$$|+\rangle_M = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle_M \tag{58}$$

Además de considerar el $|0\rangle_B$ como el vector 0 de la dimensión de B. El circuito se aplica a estos estados de similar forma

$$|k_1\rangle_A |k_2\rangle_B |k_3\rangle_M \rightarrow |k_1 \oplus k_2 \oplus k_3\rangle_A |k_2 \oplus k_1\rangle_B |k_3 \oplus k_1\rangle_M \tag{59}$$

Donde las sumas ahora son en binario para todo el espacio de tamaño N. Dicho esto, los casos particulares a superponer (de manera análoga al cálculo anterior) son:

$$|s\rangle_A |\Phi^{+}\rangle \rightarrow |s\rangle_A |\Phi^{+}\rangle_{BM} \tag{60}$$

$$|s\rangle_A |0\rangle_B |+\rangle_M \rightarrow |s\rangle_B |\Phi^{+}\rangle_{AM} \tag{61}$$

Con lo que el estado completo superpuesto (a la manera del cálculo anterior) quedará:

$$\begin{aligned} a(|s\rangle_A |\Phi^{+}\rangle_{BM} + b(|s\rangle_A |0\rangle_B |+\rangle_M) \rightarrow \\ a(|s\rangle_A |\Phi^{+}\rangle_{BM}) + b(|s\rangle_B |\Phi^{+}\rangle_{AM}) \end{aligned} \tag{62}$$

El estado completo sigue la siguiente normalización

$$\frac{d(a+b)^2 + (d-1)(a^2+b^2)}{d} = a^2 + b^2 + \frac{2ab}{d} = 1 \tag{63}$$

La matriz densidad reducida tanto para A como para B es

$$\rho_A = (1-b^2)\,|s\rangle \langle s|_A + \frac{b^2}{d}, \rho_B = (1-a^2)\,|s\rangle \langle s|_A + \frac{a^2}{d}\mathbb{I} \tag{64}$$

Por lo tanto, de manera análoga a lo anterior, se puede considerar esto una clonación con las fidelidades

$$F_A = 1 - b^2 + \frac{b^2}{d}, F_B = 1 - a^2 + \frac{a^2}{d} \tag{65}$$

Y si se exige que $a = b$, combinado con la ecuación de normalización de **??**, resulta la obtención de la fidelidad para las copias de un estado de dimensión N:

$$a = b \Rightarrow a^2 = b^2 = \frac{d}{2(d+1)} \Rightarrow F_A = F_B = 1 - \frac{d-1}{d}\frac{d}{2(d+1)} = \frac{d+3}{2(d+1)} \tag{66}$$

Para $d = 2$ se obtiene inmediatamente el resultado anterior de $\frac{5}{6}$.

4.3. Esquema para realizar una máquina de copiado

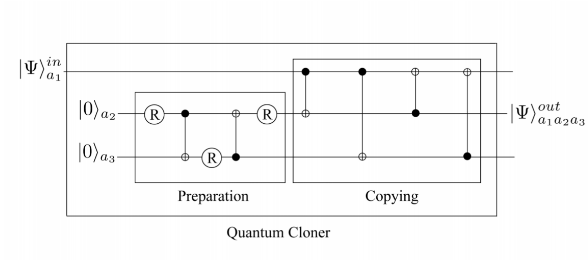

Figura 2: Representación gráfica de lo que sería la máquina de copiado para un sistema. Incluye, además del circuito ya visto, un espacio de preparación del estado en B y M. Consta de 3 operadores de rotación que pueden variar su ángulo, preparando el estado para una máquina de copiado universal o de copiado covariante. Tomado de [**?**].

Referencias

[1] Buzek, Hillery. PRA 54,1844(1996)

[2] Jimenez. Apuntes Información Cuántica 1. (2019)

[3] Scarani, Iblisdir et al Rev.Mod.Phys 77,1225(2005)

[4] Fang, Wang, et. al. Physics Reports 544, 3, 20 (2014)