MODULUL I
SPAŢII LINIARE

UNITATEA DE ÎNVĂŢARE 1-*2 ore*

MATRICE, DETERMINANŢI, SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1.1. Matrice. Determinanți
1.2. Sisteme de ecuații liniare

Competenţele Unităţii de învăţare 1

După parcurgerea unităţii de învăţare 1 studenţii vor fi în măsură să:
-efectueze operaţii cu matrice;
-să stabilească rangul unei matrice ;
-să inverseze o matrice ;
-calculeze determinanţi ;
-să rezolve sisteme de ecuaţii liniare.

1.1. MATRICE. DETERMINANŢI

Fie ***K*** un corp comutativ. În cele ce urmează, prin corpul ***K*** vom înţelege unul dintre corpurile ***R*** (corpul numerelor reale) sau ***C*** (corpul numerelor complexe).

1.1. Definiţie. Se numeşte *matrice* cu *m* linii şi *n* coloane (sau matrice de tip $m \times n$) un tablou cu *m* linii şi *n* coloane

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ale cărui elemente a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ aparţin corpului ***K***.
Această matrice se notează $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ iar mulţimea matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din corpul ***K*** se notează $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$. Dacă $m = n$, matricea se numeşte *pătratică* de ordinul *n* şi notăm $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\boldsymbol{K})$.

Pentru $m = 1$ matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\boldsymbol{K})$ se mai numeşte *vector linie* iar pentru $n = 1$ matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\boldsymbol{K})$$

se mai numeşte *vector coloană*.
Unei matrice *A* de tip $m \times n$ putem să-i asociem sistemul ordonat de vectori linie din $M_{1,n}(\boldsymbol{K})$:

$$l_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix},\ i = \overline{1,n}$$

şi sistemul ordonat de vectori coloană din $M_{m,1}(\boldsymbol{K})$

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},\ j = \overline{1,n}\ .$$

1.2. Definiţie. Două matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ de acelaşi tip se zic *egale* dacă au elementele corespunzătoare egale, adică:

$$a_{ij} = b_{ij}\ ,\ (\forall)\, i = \overline{1,m}\ ,\ (\forall)\ j = \overline{1,n}\ .$$

1.3. Definiţie. Se numeşte *suma* matricei $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ cu matricea $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, ambele cu elemente din ***K***, matricea, notată cu $A + B$, dată de regula:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}\ .$$

1.4. Definiţie. Se numeşte *matrice nulă* de tip $m \times n$ matricea care are toate elementele egale cu zero şi notăm această matrice cu $\mathbf{0}_{M_{m,n}(\boldsymbol{K})}$.
Se verifică imediat că operaţia de adunare defineşte pe mulţimea $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ o structură de grup comutativ.

1.5. Definiţie. Se numeşte *produsul* matricei $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ cu scalarul $\lambda \in \boldsymbol{K}$ matricea, notată cu λA, dată de regula:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

1.6. Definiţie. Se numeşte *transpusa* matricei $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ matricea notată $A^t = (a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}} \in M_{n,m}(\boldsymbol{K})$, care se obţine din *A* prin transformarea liniilor în coloane.

1.7. Definiţie. Se numeşte *produsul* matricei $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ de tipul $m \times n$ cu matricea $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,p}}}$ de tipul $n \times p$ matricea notată cu *AB*, de tipul $m \times p$, dată de regula:

$$AB = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,p}}},\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Fie S_n grupul permutărilor cu *n* elemente şi permutarea $\sigma \in S_n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

1.8. Definiţie. Perechea (i, j) se numeşte *inversiune* a permutării σ dacă $i < j$ şi $\sigma(i) > \sigma(j)$. Notăm cu $\mathrm{inv}(\sigma)$ numărul inversiunilor permutării σ.

1.9. Definiţie. Se numeşte *signatura (semnul)* permutării σ şi notăm $\varepsilon(\sigma)$ expresia:

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}.$$

Se constată cu uşurinţă că avem:

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Fie $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ o matrice pătratică de ordinul *n* cu elemente din corpul ***K***.

1.10. Definiţie. Numărul

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

se numeşte *determinantul* matricei A sau *determinant de ordin n* şi se mai notează astfel:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Uneori $\det A$ se mai notează prescurtat $|A|$ sau $\left| a_{ij} \right|_{i,j=\overline{1,n}}$.

1.11. Proprietăţile determinanţilor. 1) Determinantul unei matrice coincide cu determinantul matricei transpuse, adică $\det A = \det A^t$.
2) Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.
3) Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.
4) Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul.
5) Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sunt înmulţite cu un scalar $\lambda \in \boldsymbol{K}$ se obţine o matrice al cărui determinant este egal cu λ înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.
6) Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale atunci determinantul matricei este nul.
7) Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice este o combinaţie liniară de celelalte linii (sau coloane), atunci determinantul matricei iniţiale este nul.
8) Dacă la o linie (sau coloană) a matrice A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulţite cu acelaşi scalar, atunci matricea obţinută are acelaşi determinant ca şi matricea A.

Fie determinantul de ordinul n

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.12. Definiţie. Determinantul de ordinul $n-1$ care se obţine suprimând linia *i* şi coloana *j* din determinantul *d* se numeşte *minorul* elementului a_{ij} şi se notează d_{ij}. Elementul $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$ se numeşte *complementul algebric* al elementului a_{ij} în determinantul *d*.

1.13. Teoremă. Fie determinantul de ordinul *n*: $d = \left| a_{ij} \right|_{i,j=\overline{1,n}}$. Atunci pentru orice $1 \le i \le n$ are loc egalitatea:

$$d = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \cdots + a_{in}\delta_{in}. \tag{1}$$

Egalitatea (1) poartă denumirea de dezvoltarea determinantului *d* după linia *i*.

1.14. Corolar. Fie $d = \left| a_{ij} \right|_{i,j=\overline{1,n}}$ un determinant de ordinul *n*. Pentru orice $i \ne j$ are loc egalitatea:

$$a_{i1}\delta_{j1} + a_{i2}\delta_{j2} + \cdots + a_{in}\delta_{jn} = 0. \tag{2}$$

1.15. Teoremă. Fie determinantul de ordinul *n*: $d = \left| a_{ij} \right|_{i,j=\overline{1,n}}$. Atunci pentru orice $1 \le j \le n$ are loc egalitatea:

$$d = a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\delta_{nj}. \tag{3}$$

Egalitatea (3) poartă denumirea de dezvoltarea determinantului *d* după coloana *j*.

1.16. Propoziţie. Fie *n* un număr natural nenul. Atunci pentru orice două matrice $A, B \in M_n(\boldsymbol{K})$ are loc egalitatea:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

1.17. Definiţie. Matricea pătrată $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ se numeşte *inversabilă* dacă există o matrice $B \in M_n(\boldsymbol{K})$ astfel încât

$$AB = BA = I_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul *n*. Matricea *B*, dacă există, se notează cu A^{-1} şi se numeşte *inversa* matricei *A*.

1.18. Teoremă. Matricea $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$. În acest caz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(a_{ij}^{+}\right)_{i,j} = \overline{1,n}$$

şi a_{ij}^{+} este complementul algebric al elementului a_{ji}, adică $a_{ij}^{+} = (-1)^{i+j} d_{ji} = \delta_{ji}$.

1.19. Definiţie. Fie $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\boldsymbol{K})$**.** Matricea $A^{+} = \left(a_{ij}^{+}\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \left(\delta_{ji}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ se numeşte *reciproca* matricei *A*.

Dacă matricea $A \in M_{nj}(\boldsymbol{K})$ este inversabilă, din teorema 1.18 şi definiţia 1.19 rezultă:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{+}.$$

1.20. Teoremă (regula lui Cramer): Fie un sistem de *n* ecuaţii liniare cu *n* necunoscute, cu coeficienţi din corpul ***K***:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n\ .
\end{aligned} \tag{4}$$

Notăm cu $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea coeficienţilor. Dacă $d = \det A \neq 0$ atunci sistemul (4) are o unică soluţie dată de egalităţile:

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d},\ \cdots,\ x_n = \frac{d_n}{d},$$

unde

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad d_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i-1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i-1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$.

1.21. Definiţie. Se numeşte *matrice extrasă* din matricea A (sau *submatrice* a matricei A) orice matrice B obţinută din A eliminând anumite linii şi coloane şi păstrând ordinea liniilor şi coloanelor rămase. Numim *minor de ordin* p, $p \geq 1$ al matricei A determinantul unei submatrice de ordinul p a lui A.

1.22. Definiţie. Fie $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ o matrice nenulă. Se numeşte *rangul* matricei A numărul r egal cu ordinul maxim al minorilor nenuli ai matricei A.

Vom nota $r = \text{rang}A$. Dacă $A = \mathbf{0}_{M_{m,n}(\boldsymbol{K})}$ atunci luăm prin definiţie $\text{rang}A = 0$.

Cu alte cuvinte, rangul unei matrice are următoarele proprietăţi:
1) există un minor de ordinul r nenul;
2) orice minor de ordin mai mare ca r este egal cu zero.

Din definiţia rangului şi din proprietăţile determinanţilor rezultă următoarele proprietăţi ale rangului unei matrice:
1) $0 \leq \text{rang}A \leq \min(m,n)$;
2) $\text{rang}A = \text{rang}A^t$;
3) rangul unei matrice nu se modifică prin permutarea liniilor sau coloanelor matricei;
4) rangul unei matrice nu se schimbă dacă înmulţim o linie (sau coloană) cu un scalar nenul din $\boldsymbol{K}$;
5) $\text{rang}A = r$ dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r nenul al lui A şi orice minor de ordinul $r+1$ al lui A este nul.

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$. Vom nota cu $l_1, l_2, \cdots, l_m \in M_{1,n}(\boldsymbol{K})$ vectorii linie şi cu $c_1, c_2, \cdots, c_n \in M_{m,1}(\boldsymbol{K})$ vectorii coloană asociaţi matricei A. Considerăm acoperirile liniare $L(l_1, l_2, \cdots, l_m)$ şi $L(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ ale acestor vectori, mulţimi care sunt subspaţii liniare în $M_{1,n}(\boldsymbol{K})$ şi respectiv $M_{m,1}(\boldsymbol{K})$.

1.2. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

Fie sistemul de *m* ecuaţii cu *n* necunoscute

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\ , \end{aligned} \tag{1}$$

unde $a_{ij}, b_i \in \boldsymbol{K}$, $(\forall) i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

2.1. Definiţie. Sistemul (1) se numeşte *compatibil* dacă are cel puţin o soluţie. Dacă $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ sistemul (1) capătă forma

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0\ . \end{aligned} \tag{2}$$

şi se mai numeşte sistem omogen *ataşat* sistemului (1).

Se constată cu uşurinţă că orice sistem omogen este compatibil deoarece admite soluţia banală $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ matricea coeficienţilor sistemului (1) şi A^e matricea

$$A^e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

2.2. Definiţie. Matricea A^e se numeşte *matricea extinsă* a sistemului (1).

Dacă notăm cu $c_1, c_2, \cdots, c_n$ coloanele matricei *A* şi cu $b = (b_1 \ \ b_2 \cdots b_m)^t$ coloana termenilor liberi atunci sistemul (1) se scrie sub forma:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = b . \tag{3}$$

2.3. Teoremă (Kronecker-Capelli). Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^e$.

2.4. Corolar. Un sistem liniar omogen are numai soluţia banală dacă şi numai dacă $n = \operatorname{rang} A$.

Fie sistemul (1), cu $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^e = r$. Printr-o eventuală renumerotare a ecuaţiilor şi necunoscutelor sistemului, putem presupune că matricea

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

are rangul *r*. În acest caz $\det M$ se numeşte *minor principal* al sistemului (1).
Asociem sistemului (1) sistemul:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \, . \end{aligned} \tag{5}$$

Necunoscutele $x_1, x_2, \cdots, x_r$ se numesc *necunoscute principale* , iar $x_{r+1}, \cdots, x_n$ *necunoscute secundare*.

2.5. Observaţie. i) Se poate arăta că mulţimea soluţiilor sistemului (5) coincide cu mulţimea soluţiilor sistemului (1) ;
ii) Pentru rezolvarea sistemului (5) se procedează în felulul următor :
-se trec necunoscutele secundare în membrul drept şi se notează cu α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_{n-r} ;
-sistemul astfel obţinut este un sistem de tip Cramer ; rezolvăm acest sistem cu regula lui Cramer şi obţimem astfel mulţimea soluţiilor sistemului (1). Orice soluţie a sistemului depinde de necunoscutele secundare α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_{n-r}.

2.6. Exerciţii rezolvate.

1) Fie $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}, a \neq b \neq c$. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ a x_1 + b x_2 + c x_3 = d \\ a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 = d^2 \end{cases}$$

este compatibil determinat şi să se determine soluţia acestuia.

Rezolvare. Determinantul matricei sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$ care este diferit de zero deoarece $a \neq b \neq c.$ Deoarece

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-d)(c-d)(c-b),\ d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & d & c \\ a^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix} = (d-a)(c-a)(c-d),$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} = (d-a)(d-b)(b-a),$$

cu regula lui Cramer obţinem :

$$x_1 = \frac{d_1}{\Delta} = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},\ x_2 = \frac{d_2}{\Delta} = \frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)},\ x_3 = \frac{d_3}{\Delta} = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

2) Să se determine mulţimea soluţiilor sistemului :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvare. Matricea sistemului este

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ 1 & 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

şi are rangul 2. Un minor principal este $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$, astfel încât necunoscutele principale sunt x_1, x_2 iar cele secundare sunt $x_3=\alpha, x_4=\beta$. Rezolvând sistemul format din primele două ecuaţii (ecuaţiile principale) obţinem soluţia sistemului :

$$S=\{(-2\alpha+\beta, \alpha-2\beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta\in \boldsymbol{R}\}.$$

2.7. Test de autoevaluare

1) Să se rezolve cu regula lui Cramer sistemul :

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\ x_1-x_2+2x_3=2\\ x_1+x_2+4x_3=6\end{cases}.$$

2) Fie matricea

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Să se determine rangul lui A ;
b) Dacă A este inversabilă să se calculeze A^{-1} ;
c) Să se rezolve ecuaţia

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Rezumatul Unităţii de învăţare 1

În această unitate de învăţare am prezentat principalele proprietăţi ale matricelor şi determinanţilor, am definit sistemele liniare de *m* ecuaţii cu *n* necunoscute, am precizat condiţiile necesare şi suficiente ca aceste sisteme să fie compatibile şi am stabilit algoritmul pentru determinarea soluţiilor unor astfel de sisteme.

Bibliografie recomandată pentru Unitatea de învăţare 1

Boaca, T., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Universităţii Petrol-Gaze din Ploieşti, Ploieşti, 2010.