

TPPE53 - Inlämning 2

Linus Falk - linfa084
Gustav Dackner - gusda918

October 6, 2018

Uppgift 1

Uppgift

Bootstrappa forwardvolatiliteter (spotvolatiliteterna) upp till minst 10 år utifrån marknadsdata på en valfri räntemarknad. Bestäm forwardvolatiliteter för en valfri taksränta och presentera dem i en plot.

Lösning

I uppgift 1 betraktas den norska räntemarknaden och därmed valutan NOK. Tenoren på denna marknad är 6 månader och LIBOR används som referensränta. Flatvolatiliteter för caps och floors hämtas från RIC:en NOKCAPV=ICAP och finns representerade 10 år framåt. Flatvolatiliteter motsvarande en taksränta på 0.5% erhålls genom att linjärt interpolera och konstant extrapolera de värden som hämtas från Thomson Reuters för alla tenorer år 0-10.

Den norska interbankräntekurvan estimerad av Thomson Reuters används genom RIC:en NOKZ=R. Linjär interpolering och konstant extrapolering används för att erhålla räntor och diskonteringsfaktorer motsvarande tenorerna för flatvolatiliteterna.

Kontinuerliga forwardräntor beräknas enligt

$$f_{T_i, T_j} = \left(\frac{d_{T_i}}{d_{T_j}} \right)^{\frac{1}{T_j - T_i}} - 1 \quad (1)$$

där d_{T_i} är diskonteringsfaktorn (nollkupongspriset) för tidpunkt T_i enligt interbankräntekurvan[4].

Marknadsvärdet av en cap beräknas som summan av caplets, värderade enligt Black 76 med den kvoterade flat-volatiliteten $\bar{\sigma}$ upp till cap:ens maturity [4] enligt

$$cap_k^m = \sum_{i=1}^k capl_i^B(\bar{\sigma}_k), \quad k = 1, \dots, n \quad (2)$$

I lösningen värderas caps för de hämtade och beräknade flatvolatiliteterna enligt (2). När cappriser beräknats för alla tidpunkter kan marknadspriset på caplets beräknas med enligt

$$capl_k^m = cap_k^m - cap_{k-1}^m \quad (3)$$

med konventionen $cap_0^m = 0$.

Lösningen till Black 76 med beräknat capletpris implicerar en volatilitet som motsvarar den sökta forwardvolatiliteten. Detta görs för alla tenorer och därmed erhålls forwardvolatiliteter upp till 10 år.

Resultat Uppgift 1

I figur 1 visas de resulterande forwardvolatiliteterna och de kvoterade flat-volatiliteterna.

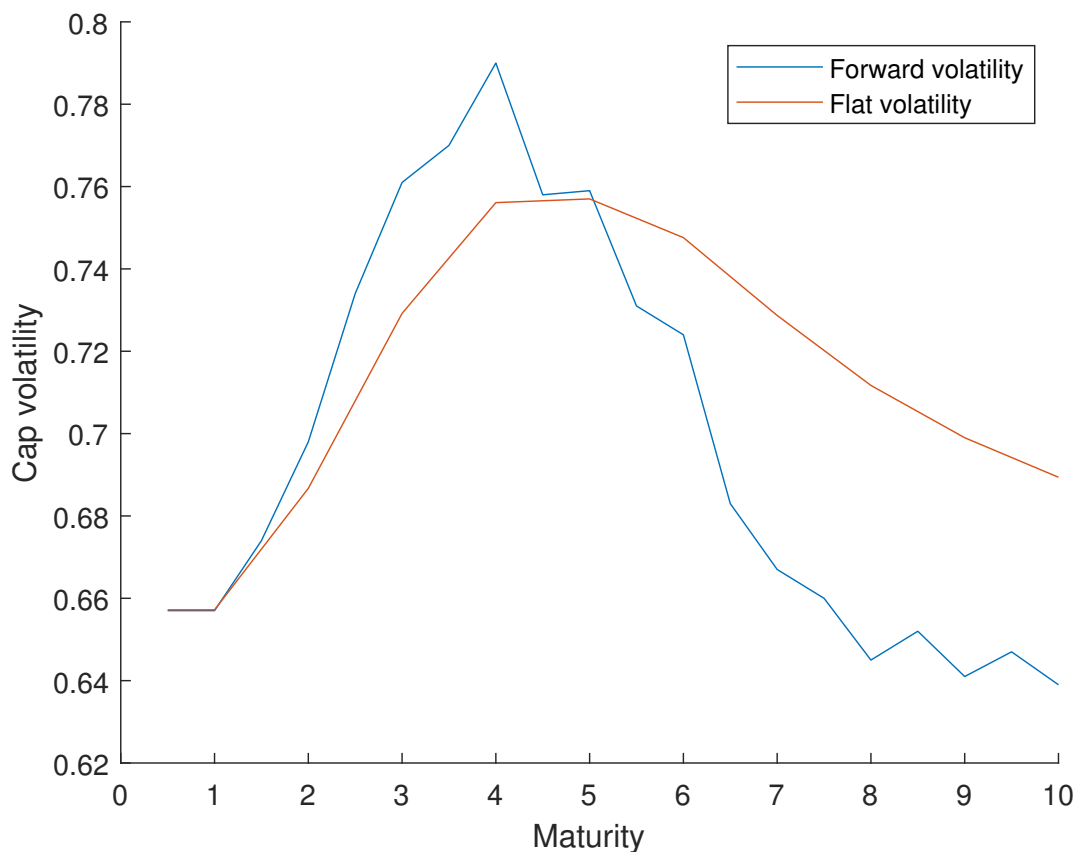


Figure 1: Forwardvolatiliteter vs flatvolatiliteter

Resultatet visar det typiska förhållandet mellan flat -och forwardvolatiliteter och även den kända ”knölen” vid 3-6 års maturity. Knölen har ingen helt tydlig förklaring, men Hull menar att det eventuellt kan bero på att räntor för korta maturities kontrolleras av centralbanker medan räntan för maturities där knölen dyker upp styrs till stor del av investerarens agerande. Investerarna kan möjligen överreagera på förändringar av räntan för korta maturities och därmed ökar volatiliteten. För tenorer efter knölen beror den avtagande volatiliteten på genomsnittlig återgång (*mean reversion*). [4].

Forwardvolatiliteterna har högre varians än flatvolatiliteterna, vilket också är tydligt i figur 1. Detta beror på att flatvolatiliteterna går att relatera till ett kumulativt medelvärde av forwardvolatiliteterna, vilket implicerar mindre varians. [4] Detta illustreras i figur 2 nedan.

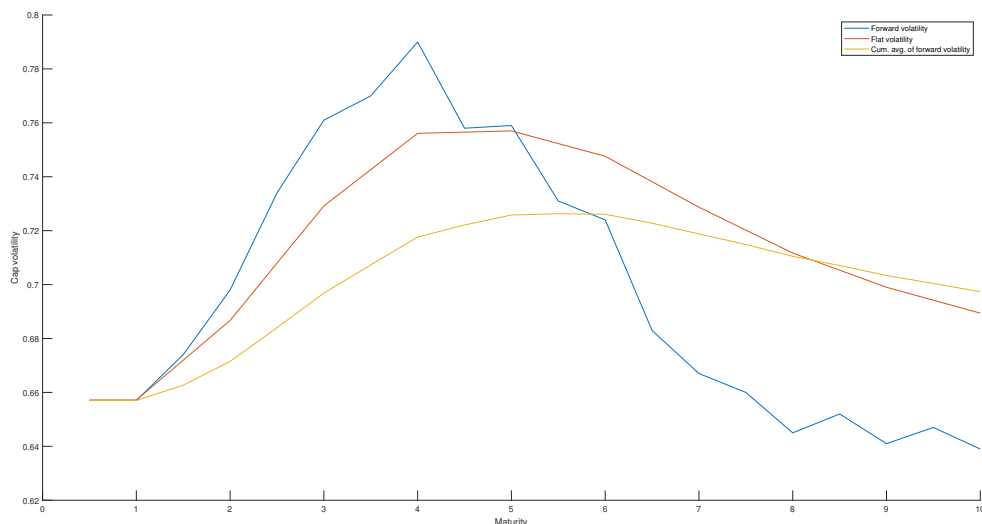


Figure 2: Forwardvolatiliteter, flatvolatiliteter och kumulativt medelvärde av forwardvolatiliteterna.

Uppgift 2

Uppgift

Värdera en down-and-out-path-corridor-option på ett bolag som ingår i OMXS30 genom Monte-Carlo simulering, givet antagandet att underliggande kan beskrivas av en GBM. Optionen ger givet nedanstående villkor innehavaren rätten att köpa aktien för lösenpris K på förfallodagen i mars 2019. Välj lösenpriset, K , så nära at-the-money som möjligt bland handlade optioner.

Villkor:

Låt t_1, \dots, t_n beteckna tidpunkterna för revision (fredagar) av barriären, t_0 tidpunkten då köptionen köps och $S(t_i)$, $i = 0, \dots, n$ värdet på aktien vid tidpunkt t_i . Vid t_0 initieras barriären till $B(t_0) = 0.9S(t_0)$. För $i = 1, \dots, n$ gäller

$S(t_i) < B(t_{i-1})$	optionen blir värdelös,
$S(t_i) > \frac{1}{0.9}B(t_{i-1})$	barriären justeras, $B(t_i) = 0.9S(t_i)$,
$B(t_{i-1}) < S(t_i) < \frac{1}{0.9}B(t_{i-1})$	barriären lämnas oförändrad, $B(t_i) = B(t_{i-1})$.

Försök minska osäkerheten i det simulerade optionsvärdet genom att testa minst två olika variansreducerande tekniker (se Haugh, 2017a,b; Glasserman, 2004).

Hur stor är skillnaden i värde jämfört med motsvarande plain-vanilla option?

Lösning

I uppgiften betraktas data från en amerikansk köpoption på bolaget Ericsson med förfall 2018-12-21 och lösenpris 80 SEK. Vid värdering står aktiekursen i 80.78 SEK och som praxis för riskfri ränta används en 3-månaders benchmark på SSVX genom RIC:en SE3MST=RR som uppgår till -0.81%. Den implicerade volatiliteten för optionen är 0.3152 och hämtas från dess quote i Thomson Reuters.

För att modellera den underliggande tillgångens utveckling används en Geometrisk Brownsk Rörelse (GBM) under ett riskfritt sannolikhetsmått. Låt S_{t_i} vara priset för den underliggande tillgången vid tidpunkt t_i , $\Delta t = 1/252$ tidssteget i processen på årsbasis med hänsyn till handelsdagar, σ =implicerad volatilitet från plain-vanilla optionen, r_f =riskfri ränta och $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Då erhålls följande lösning

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} e^{(r_f - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\xi} \quad (4)$$

Processen simuleras för hela optionens livslängd och payoffen beräknas som för en vanlig köpoption enligt $\Phi(T) = \max(S_T - K, 0)$ med hänsyn till villkoren givna i uppgiften. Simuleringen upprepas 10 000 gånger och medelvärdet nuvärdesberäknas för att få priset på den exotiska optionen. Parallellt med denna värdering görs även en payoff-beräkning enligt samma metodik men där villkoren bortses från vilket resulterar i en prissättning av plain-vanilla optionen.[4]

Variansreducering

Variansreducering används för att öka precisionen av uppskattningar som görs vid simulering. I detta kapitel presenteras hur två metoder används för att minska variansen hos den medelvärdesskattade payoffen.

Antitetisk sampling

Metoden förklaras i [3] och implementeras i denna uppgift genom att genomföra simuleringen för prisutvecklingen två gånger, där den andra termen i exponenten i (4) skiftar tecken. Ett medelvärde för de två payoffer som erhålls beräknas och används som metodens slutliga payoff.

Control variates

Metoden går ut på att använda något annat utfall ur simuleringen av $\Phi(T)$ som är enkelt att erhålla, kalla den Z . Sedan antas att väntevärdet av Z är känt. Sedan bytes uppskattaren av den sökta payoffen till en annan slumpvariabel, kalla den θ , enligt

$$\theta = \Phi(T) + c(Z - \mu_Z), \quad (5)$$

där c väljs till

$$c = -\frac{Cov(\Phi(T), Z)}{Var(Z)}, \quad (6)$$

vilket minimerar variansen. [3]

I lösningen valdes Z till payoffen för en plain vanilla köpoption simulerad med samma process.

Resultat Uppgift 2

Nedan presenteras resultat som erhålls från uppgift 2. Variansen för plain-vanilla payoffen utelämnas då den inte tillför något diskussionsunderlag i denna uppgift.

Payofftyp	Variansreducering	Pris	Varians	Tid
Plain vanilla	-	4.93	-	-
Exotisk enl. uppgift	-	4.18	59.82%	3.95s
Exotisk enl. uppgift	Antitetisk sampling	4.16	29.73%	7.37s
Exotisk enl. uppgift	Control variates	3.97	8.30%	3.65s

Table 1: Pris och varians för olika payofftyper och variansreducerande tekniker

Priset för den exotiska optionen är enligt detta resultat 0.75 SEK eller cirka 15% lägre än plain-vanilla värdet. Detta beror att den exotiska optionen har villkor som gör att den kan bli värdelös. Därmed är sannolikheten för att den går "out of the money" betydligt högre än för plain-vanilla optionen. Givet snällare villkor skulle den exotiska kunna få samma värde som plain vanilla, men aldrig högre värde. Detta eftersom plain vanilla optionen är en riskrelaxation av den exotiska optionen.

Den implementerade metoden för antitetisk sampling reducerade variansen med dryga 30 procentenheter vilket får ses som betydande. Metoden tog dock 87% längre tid när lika många simuleringar användes, men i och med att metoden gav en avsevärt högre precision väcktes tanken om att sänka antalet simuleringar, vilket metoden tillåter. Det är ju syftet med variansreducering.

Om antalet simuleringar för antitetisk sampling sänks från 10 000 till 1000 erhålls ett snarlikt resultat med ett pris på 4.12 SEK och varians 30.77 % med en körtid om 0.80s, en dryg tiondel av det tidigare, alltså endast dryga 20% av körtiden för metoden utan variansreducering.

Control Variates minskade variansen ännu mer, till blyga 8.30%. Körtiden med 1000 simuleringar tog endast 0.42s och gav en varians på ungefär samma nivå om 8.3%.

Från detta dras slutsatsen om att antitetisk sampling kan användas för att öka precisionen hos estimaten och därmed krävs avsevärt färre simuleringar för att erhålla ett jämförbart resultat.

Uppgift 3

Uppgift

Beräkna Value-at-Risk (VaR) för en aritmetisk Asiatisk option med Least Square Monte-Carlo Simulering (LSMC).

Lösning

LSMC är en metod som appliceras på Nested Monte Carlo Simulering (NMC). Vid simulering enligt NMC simuleras scenarios genom yttre -och inre scenarios. Först simuleras underliggande enligt ett antal myttre scenarios under det naturliga riskmättet fram till en lämplig tidpunkt. Därefter simuleras ett antal inre scenarios för varje yttre scenario under det riskneutrala måttet. Detta beräkningsmässigt tidskrävande och därför använda ofta LSMC för att effektivare värdera derivaten.[1]

Precis som i Uppgift 2 låter vi underliggande tillgång följa en GBM men med varierande drift för yttre och inre scenarios. Först genererades set med scenarios för LSMC och en full NMC, med tidshorisont 1 år och 3år för yttre respektive inre scenarios. Detta eftersom vi är intresserade av VaR för ett år. Parametrar och tidsåtgång presenteras i tabell 2 nedan

Full NMC	LSMC
NouterFN = 3000	NouterLSMC = 3000
NInnerPerOuterFN = 3000	NInnerPerOuterLSMC = 16
Exec.t = 12.95s	Exec.t = 0.15s

Table 2: Scenarios input.

Det tar uppenbarligen signifikant mycket mindre beräkningskraft för att göra simuleringen för LSMC än vad det gör för en full NMC. Med färdiga scenarios värderas optionen vid slutdatum T (fyra år) av de inre scenarierna, enligt dess payoff funktion

$$\Phi(T) = \max\left(\frac{1}{T - t_{obs}} \sum_{t=t_{obs}}^T S(t) - K, 0\right), \quad (7)$$

där $t_{obj} = 1$ väljs, vilket betyder att priset på optionen baseras på de sista två åren av simuleringarna. Medelvärde av payoffen beräknas sedan för varje inre scenario och diskonteras tillbaka till slutpunkten för respektive yttre scenario. Då har vi åstadkommit en uppsättning värden på optionen (Nouter stycken) för LSMC setet och FN setet.

Sedan görs en linjär regression

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{N_{outer}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_{outer}}^0 & x_{N_{outer}}^1 & x_{N_{outer}}^2 & x_{N_{outer}}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \xi = X\beta + \xi, \quad (8)$$

där Y_i är optionens värde enligt LSMC setet och x_i är värdet på underliggande vid slutpunkten av yttre scenario $i = 1, \dots, N_{outer}$. Minstakvadrat-lösningen får genom $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ [2]

När vi har koefficienterna $\hat{\beta}$ kan vi beräkna ett uppskattade värden på optionen \hat{Y} via LSMC enligt

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}, \quad (9)$$

genom att endast generera yttre scenarios X för underliggande.[1]

För att undersöka om vår LSMC metod faktiskt fungerar jämfördes resultatet med värdering enligt en full NMC och det statistiska måttet R^2 beräknades. Dessutom gjordes en "goodness fit" plot.

Slutligen beräknas $VaR(0.995)$ som den 0.5:e percentilen av de möjliga scenarierna för vinst på optionen, dvs skillnaden på dagens värde och det värde optionen har om ett år. Med antagandet att riskfria räntan är 0 motsvarar det den 0.5:e percentilen av $-(\hat{Y} - mean(\hat{Y}))$.

Resultat Uppgift 3

Resultat samt exekveringstid för LSMC och en full NMC visas i tabell 3 nedan.

	Full NMC	LSMC
Option value	0.0045	0.0046
VaR(0.995)	0.0045	0.0186
Exec_t	42.90s	0.46s

Table 3: Resultat uppgift 3

Skillnaden i pris på optionen enligt full NMC och LSMC är inte stor, dock är det en betydande skillnad på VaR. R^2 blev 0.8613 för denna simuleringen, vilket tyder på att regressionslinjen beskriver ungefär 86% av optionsvärdena korrekt. I figur 3 nedan visas "goodness fit" ploten.

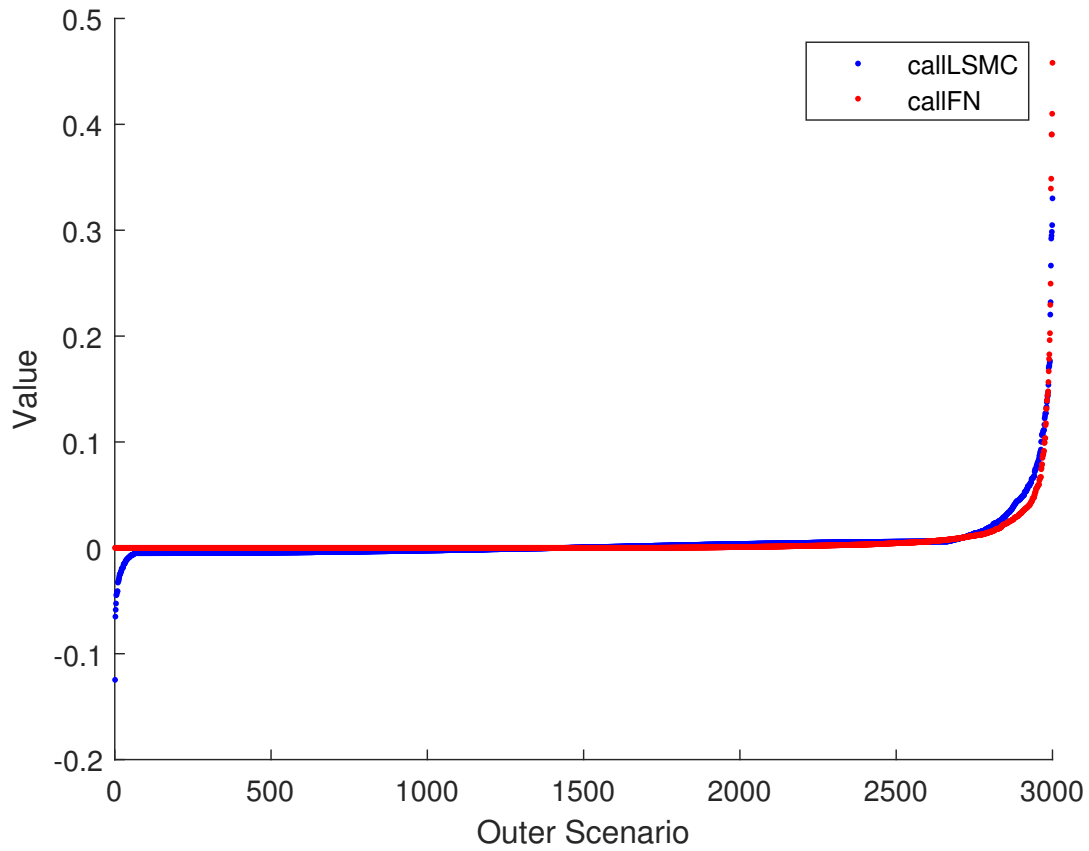


Figure 3: "Goodness fit" plot.

Enligt figuren ser vi att LSMC verkar beskriva utfallen av full NMC bra bortsett från i ändpunkterna, men att svansarna är lite tjockare, speciellt till vänster där VaR bestäms. Baserat på resultatet dras slutsatsen att uppsättningen av optionsvärdet är bra men inte för VaR. Dock är denna optionen långt utanför pengarna med strike price $K = 140$ och underliggande $S_0 = 100$.

Om vi däremot testat för en option som är ATM, dvs $S = K$ får vi helt annorlunda resultat, enligt tabell 4 och figur 4 nedan.

	Full NMC	LSMC
Option value	5.9455	5.9103
VaR(0.995)	5.5626	5.3577

Table 4: Resultat med ATM strike.

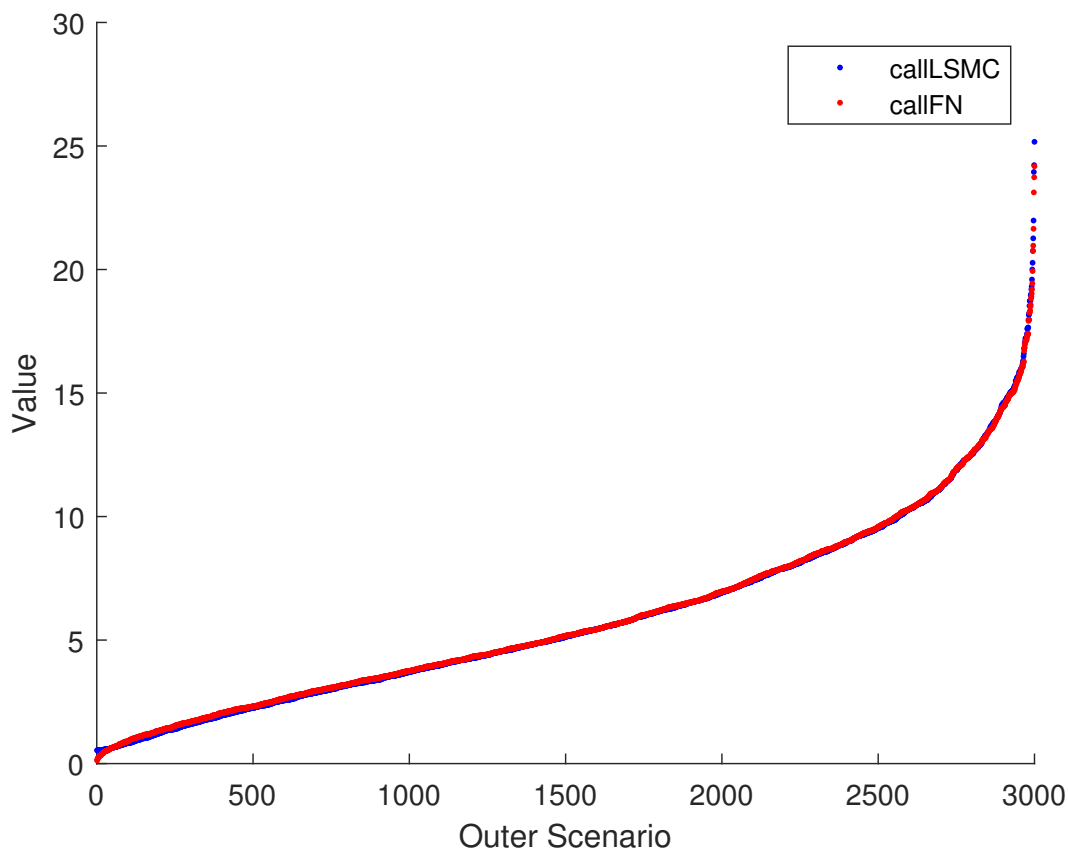


Figure 4: "Goodness fit" plot.

VaR och optionsvärdet uppskattas bra och R^2 fås vid denna körningen 0.9986 att jämföra med 0.8613 med $K = 140$. Det är uppenbart att exaktheten för LSMC varierar beroende på K .

Om man istället varierade NouterLSMC till 50 000 (NouterPerInner = 16 fortfarande) fås R^2 till 0.8573, vilket indikerar att det knappt förbättrar exaktheten för LSMC. Dock gick den fortfarande betydligt snabbare än full NMC trots att NouterFN förblev 3000.

References

- [1] Kidbrooke Advisory. Part i: An introduction to least-squares monte carlo simulation. 2015a.
- [2] Kidbrooke Advisory. Part ii: Regression functions in least-square monte carlo simulations. 2015b.
- [3] Martin Haugh. Simulation efficiency and an introduction to variance reduction methods. 2017.
- [4] J. C. Hull. *Options Futures and Other Derivatives*. 2012.