Fundamentos da Programação
LEIC/LETI

Recursão em Árvore

Aula 23

Alberto Abad, Tagus Park, IST, 2021-22

Recursão Múltipla: Recursão em Árvore

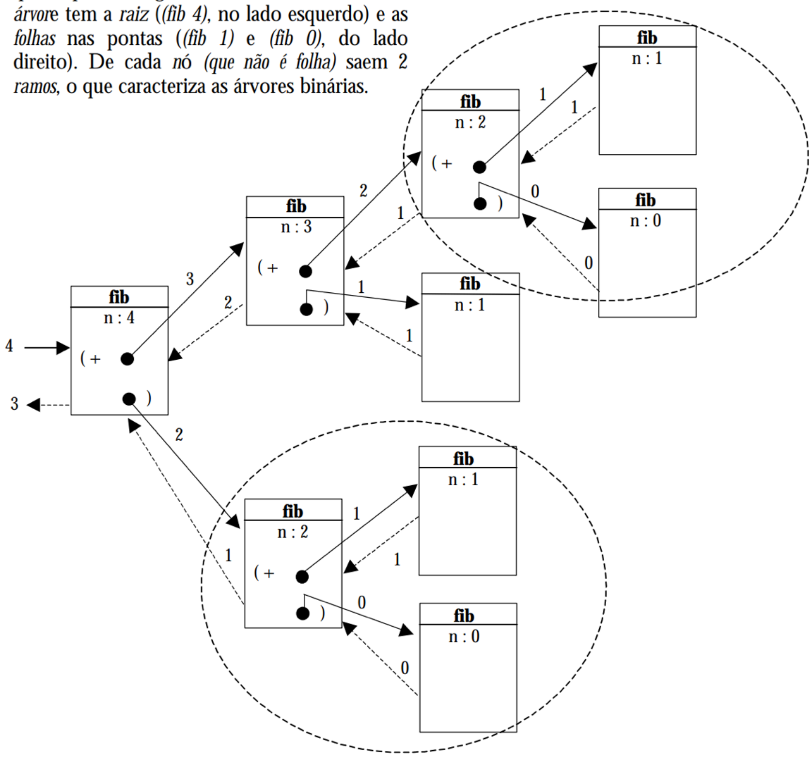
- Para além da recursão linear (1 chamada recursiva), existem outros padrões bastante comuns como é a recursão múltipla (múltiplas chamadas recursivas).
- Un exemplo de recursão múltipla é a recursão em árvore ou binária.
- Exemplo, números de Fibonacci:

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0, \\ 1 & \text{se } n = 1, \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

```python
def fib(n):
        if n == 0:
            return 0
        elif n == 1:
            return 1
        else:
            return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

Recursão em Árvore

A chamada *(fib 4)*, sob a forma gráfica, mostra que o processo gerado é *recursivo em árvore*. A *árvore* tem a *raiz* (*(fib 4)*, no lado esquerdo) e as *folhas* nas pontas (*(fib 1)* e *(fib 0)*, do lado direito). De cada *nó* *(que não é folha)* saem 2 *ramos*, o que caracteriza as árvores binárias.



Recursão em Árvore

Padrão de execução

- Se avaliarmos `fib(4)` , o processo computacional gerado pela função *fib* apresenta a seguinte evolução:

```
fib(4)
| fib(3)
| | fib(2)
| | | fib(1)
| | | return 1
| | | fib(0)
| | | return 0
| | return 1
| | fib(1)
| | return 1
| return 2
| fib(2)
| | fib(1)
| | return 1
| | fib(0)
| | return 0
| return 1
return 3
```

- Reparar nas múltiplas fases de expansão e contração.

Recursão em Árvore

In [2]:
```python
def fib(n):
        if n == 0:
            return 0
        elif n == 1:
            return 1
        else:
            return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

Optimização Fibonacci

- A implementação anterior tem dois problemas:
  - Cria muitos ambientes locais
  - Existem muitos cálculos repetidos
- Versão optimizada (recursão de cauda):

In [3]:
```
def fib_rc(n): # versão com recursão de cauda...
    def fib_aux(primeiro, segundo, n):
        if n == 0:
            return primeiro
        else:
            return fib_aux(segundo, primeiro+segundo, n-1)

    return fib_aux(0, 1, n)
```

In [4]:
```
def fib_il(n): ## Conversão recursão de cauda em iteração linear
    primeiro, segundo = 0, 1
    while True:
        if n == 0:
            return primeiro
        else:
            primeiro, segundo, n = segundo, primeiro+segundo, n-1
```

In [5]:
```
%timeit -n 100 fib(20)
print(fib(20))
%timeit -n 100 fib_il(20)
print(fib_il(20))
%timeit -n 100 fib_rc(20)
print(fib_rc(20))
```

```
2.29 ms ± 61.1 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100 loops
each)
6765
1.46 µs ± 4.49 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100 loops
each)
6765
2.7 µs ± 79.3 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100 loops e
ach)
6765
```

Recursão em Árvore - Optimização Fibonacci

Padrão de execução

```
 fib(4)
fib_aux(0, 1, 4)
| fib_aux(1, 1, 3)
| | fib_aux(1, 2, 2)
| | | fib_aux(2, 3, 1)
| | |   | fib_aux(3, 5, 0)
| | |   | return 3
| | | return 3
| | return 3
| return 3
return 3
return 3
```

In [10]:
```python
def fib_rc(n): # versão com recursão de cauda...
    def fib_aux(primeiro, segundo, n):
        if n == 0:
            return primeiro
        else:
            return fib_aux(segundo, primeiro+segundo, n-1)

    return fib_aux(0, 1, n)
```

Recursão em Árvore - Optimização Fibonacci

- Versão optimizada 2 (utilizar memória/dicionário):

In [11]:
```python
def fib_mem(n):
    mem = {0:0, 1:1}
    def fib_aux(n):
        if n in mem:
            return mem[n]
        else:
            mem[n] = fib_aux(n - 1) + fib_aux(n - 2)
            return mem[n]
    return fib_aux(n)

print(fib_mem(20))
```

```
6765
```

In [12]:
```python
%timeit -n 1000 fib(20)
%timeit -n 1000 fib_rc(20)
%timeit -n 1000 fib_il(20)
%timeit -n 1000 fib_mem(20)
```

```
2.26 ms ± 7.88 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1000 loops
each)
2.7 µs ± 82.3 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1000 loops
each)
1.47 µs ± 45.3 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1000 loops
each)
5.9 µs ± 241 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1000 loops e
ach)
```

Recursão e Iteração: Considerações sobre Eficiência

Sumário

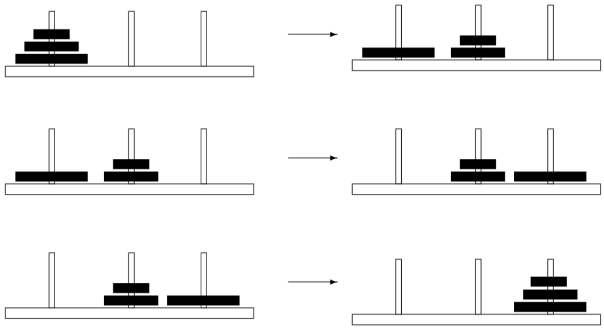
- A minimização dos recursos computacionais consumidos por um programa é um dos aspetos que nos preocupa quando escrevemos programas.
- Diferenças na evolução dos processos levam a diferenças nos recursos computacionais consumidos:
  - **Tempo** que um programa demora a executar (número de passos atómicos realizados).
  - **Espaço** de memória que um programa utiliza durante a sua execução (em geral queremos saber o máximo necessário, não a soma).

Padrão	Tempo	Espaço
Recursão Linear	O(n)	O(n)
Iteração Linear	O(n)	O(1)
Recursão Binária	O(k^n)	O(n)

Recursão em Árvore

Exemplo 1: Torres de Hanoi

- A movimentação de n discos pode ser definida em função da moviementação de n-1 discos



In [13]:
```python
def mover(n, ori, dest, aux):
    def mover_disco(ori, dest):
        print(ori, "->", dest)

    if n == 1:
        mover_disco(ori, dest)
    else:
        mover(n-1, ori, aux, dest)
        mover_disco(ori, dest)
        mover(n-1, aux, dest, ori)

mover(3, 'E', 'D', 'C')
```

```
E -> D
E -> C
D -> C
E -> D
C -> E
C -> D
E -> D
```

Recursão em Árvore

Exemplo 2: Potência rápida recursiva

$$x^n = \begin{cases} x & \text{se } n = 1 \\ x.(x^{n-1}) & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ (x^{n/2})^2 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

- Esta função gera um processo computacional com um padrão de crescimento em tempo e espaço `O(log(N))`
- Visualizar no Python Tutor

In [16]:
```python
def potencia(x, n):
    pot = 1
    while n > 0:
        pot = pot * x
        n = n - 1

    return pot


def potencia_rapida(x, n):
    if n == 1:
        return x
    else:
        if n % 2 != 0:
            return x * potencia_rapida(x, n-1)
        else:
            return potencia_rapida(x, n//2)**2


%timeit -n 10 potencia(2,1000)
%timeit -n 10 potencia_rapida(2,1000)
%timeit -n 10 potencia(2,4000)
%timeit -n 10 potencia_rapida(2,4000)
```

```
143 µs ± 15.7 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops ea
ch)
6.2 µs ± 193 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops eac
h)
846 µs ± 50.6 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops ea
ch)
14.1 µs ± 3.32 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops e
ach)
```

Recursão em Árvore

Exemplo 3: Soma elementos atómicos

5. Escreva a função recursiva `soma_els_atomicos` que recebe como argumento um tuplo, cujos elementos podem ser outros tuplos, e que devolve a soma dos elementos correspondentes a tipos elementares de dados que existem no tuplo original. Não é necessário verificar os dados de entrada. Por exemplo,

```
>>> soma_els_atomicos((3, ((((((6, (7, ))), ), ), ), ), 2, 1))
19
>>> soma_els_atomicos(((((),),),))
0
```

In [17]:

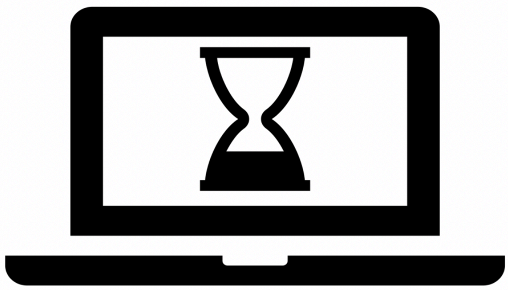
```python
# versão recursão múltipla
def soma_els_atomicos_rm(t):
    if not t:
        return 0
    else:
        if type(t[0]) == tuple:
            return soma_els_atomicos_rm(t[0]) + soma_els_atomicos_r
m(t[1:])
        else:
            return t[0] + soma_els_atomicos_rm(t[1:])
```

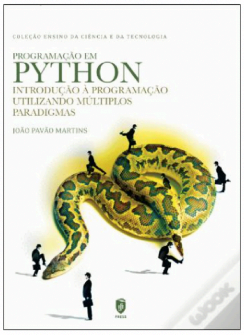
In [123]:

```python
# versão recursão linear
def soma_els_atomicos_rl(t):
    if not t:
        return 0
    else:
        if type(t[0]) == tuple:
            return soma_els_atomicos_rm(t[0]+t[1:])
        else:
            return t[0] + soma_els_atomicos_rm(t[1:])
```

Tarefas Próxima Semana

- Estudar matéria e completar exemplos
- A **Ficha 5** da próxima semana é sobre **recursão**
  - primeira aula prática da semana no **fim da aula**
- Teóricas da próxima semana: Funções de ordem superior
  - matéria para a Ficha 6, na segunda aula prática






```
In [ ]:
```