Отчет по Лабораторной Работе №2

Задача о Погоне

Озьяс Стев Икнэль Дани

Цель работы

Рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.

Задание

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Выполнение лабораторной работы

Принимаем за $t0 = 0, x\text{ло} = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x\text{ко} = \text{к}$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x\text{ло}$ $(\theta = x\text{ло} = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/2v$ (для второго случая $k + x/2v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $x/v \ = \ k - x/2v$ - в первом случае, $x/v \ = \ k + x/2v$ во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения $x1$ и $x2$, задачу будем решать для двух случаев.

$x1 = k/n + 1$,при $\theta = 0$

$x2 = k/n - 1$,при $\theta = -\pi$

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: vr - радиальная скорость и vt- тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $vr = dr/dt$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = \ dr/dt$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $d\theta/dt$ на радиус r, $\ vt = r\ d\theta/dt$ Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $vt = \sqrt[2]{(nvr)^2 \ - \ v^2}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $vt = \sqrt[2]{(nvr)^2 \ - \ v^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна v, то тангенциальную скорость находим из уравнения $vt = \sqrt[2]{(nvr)^2 \ - \ v^2}$. Следовательно, $vt = vr \sqrt[2]{n^2 \ - \ 1}$

Тогда получаем $r\ d\theta/dt \ = \ \ vr \sqrt[2]{n^2 \ - \ 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений $v = \ dr/dt$

$$r\ d\theta/dt \ = \ \ vr \sqrt[2]{n^2 \ - \ 1}$$

с начальными условиями

$$\theta = 0$$

$$x1 = k/n + 1$$

Или

$$\theta = -\pi$$

$$x1 = k/n - 1$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $dr/d\theta = r/\sqrt[2]{n^2 - 1}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

Условие задачи

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,7 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,7 раза больше скорости браконьерской лодки.

Код программы (Julia)

```
using Plots
using DifferentialEquations

n = 3.7
s = 11.7
fi = 3*(pi/4)


function f(r, p, t)
    dr = r/ sqrt(n^2 - 1)
    return dr
end


function f2(t)
    y = tan(fi)*t
    return y
end


r0 = s/(n + 1)
tetha = (0, 2*pi)
```

```
prob = ODEProblem(f, r0, tetha)
sol = solve(prob)

t = collect(LinRange(0, 15, 1500))

r1 = []
tetha1 = []

for i in t
    push!(r1, sqrt(i^2 + f2(i)^2))
    push!(tetha1, atan(f2(i)/i))
end

plot(sol, proj=:polar, label= "Катер")
plot!(tetha1, r1, proj=:polar, label= "Лодка")

savefig("image1.png")

r0 = s/(n - 1)
tetha = (-pi, pi)

prob = ODEProblem(f, r0, tetha)
sol = solve(prob)


plot(sol, proj=:polar, label= "Катер")
plot!(tetha1, r1, proj=:polar, label= "Лодка")

savefig("image2.png")
```

Решение

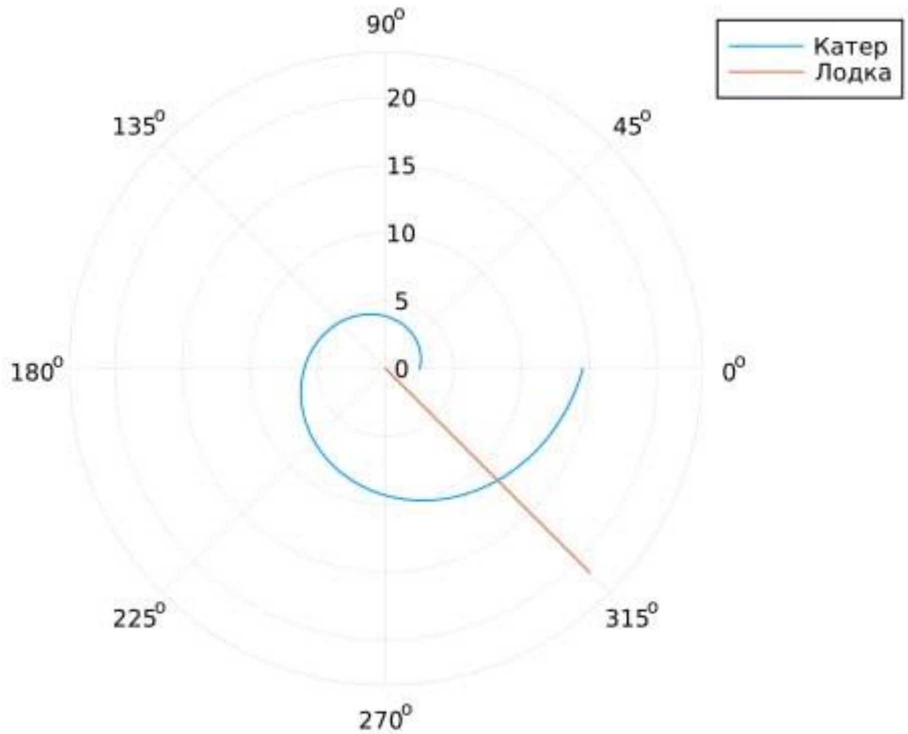

Fig.1 Решение первого случая

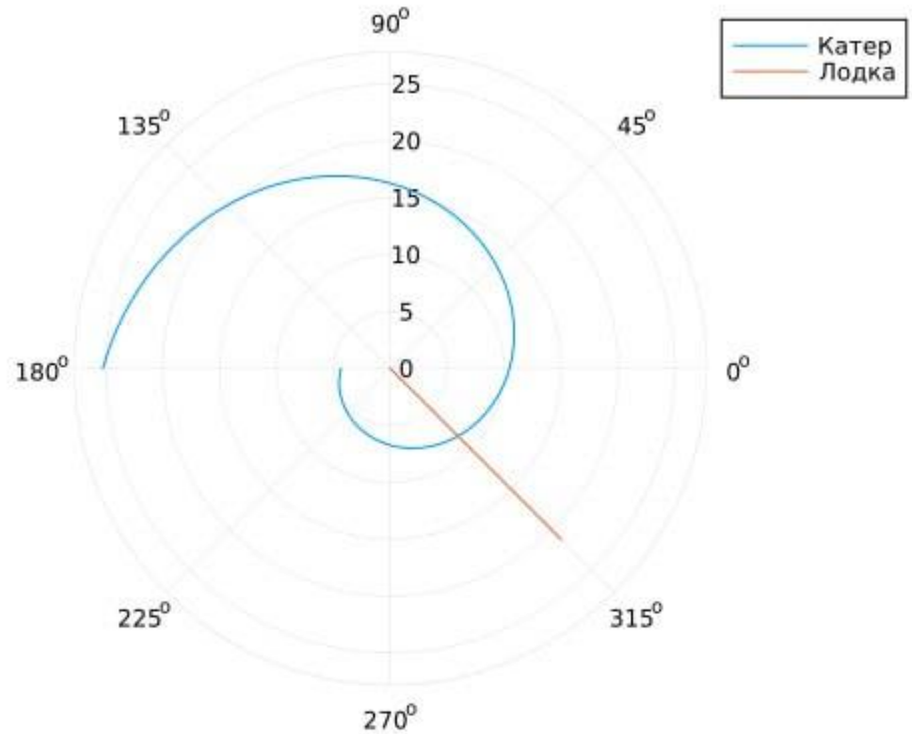

Fig.1 Решение второго случая

Точка пересечения графиков является точкой пересечения катера и лодки.

Наблюдаем, что при погоне «по часовой стрелке» для достижения цели потребуется пройти меньшее расстояние.

Выводы

Рассмотрели задачу о погоне. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений. Смоделировали ситуацию.

Список литературы

1. Задача о погоне