

Презентация по Лабораторной Работе №2

Задача о Погоне

Озьяс Стив Икнэль Дани

Цель работы

Рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.

Задание

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Теоретический материал

Принимаем за $t_0 = 0$, $x_{л0} = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{к0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_{л0}$ ($\theta = x_{л0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через

время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/2v$ (для второго случая $k + x/2v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $x/v = k - x/2v$ - в первом случае, $x/v = k + x/2v$ во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2 , задачу будем решать для двух случаев.

$$x_1 = k/n + 1, \text{ при } \theta = 0$$

$$x_2 = k/n - 1, \text{ при } \theta = -\pi$$

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: vr - радиальная скорость и vt - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $vr = dr/dt$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = dr/dt$. Тангенциальная скорость - это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $d\theta/dt$ на радиус r , $vt = r d\theta/dt$. Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $vt = \sqrt{(nvr)^2 - v^2}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $vt = \sqrt{(nvr)^2 - v^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна v , то тангенциальную скорость находим из уравнения $vt = \sqrt{(nvr)^2 - v^2}$. Следовательно, $vt = vr \sqrt{n^2 - 1}$

$$\text{Тогда получаем } r d\theta/dt = vr \sqrt{n^2 - 1}$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$v = dr/dt$$

$$r d\theta/dt = vr \sqrt{n^2 - 1}$$

с начальными условиями

$$\theta = 0$$

$$x_1 = k/n + 1$$

Или

$$\theta = -\pi$$

$$x_1 = k/n - 1$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению: $dr/d\theta = r/\sqrt{n^2 - 1}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

Решение

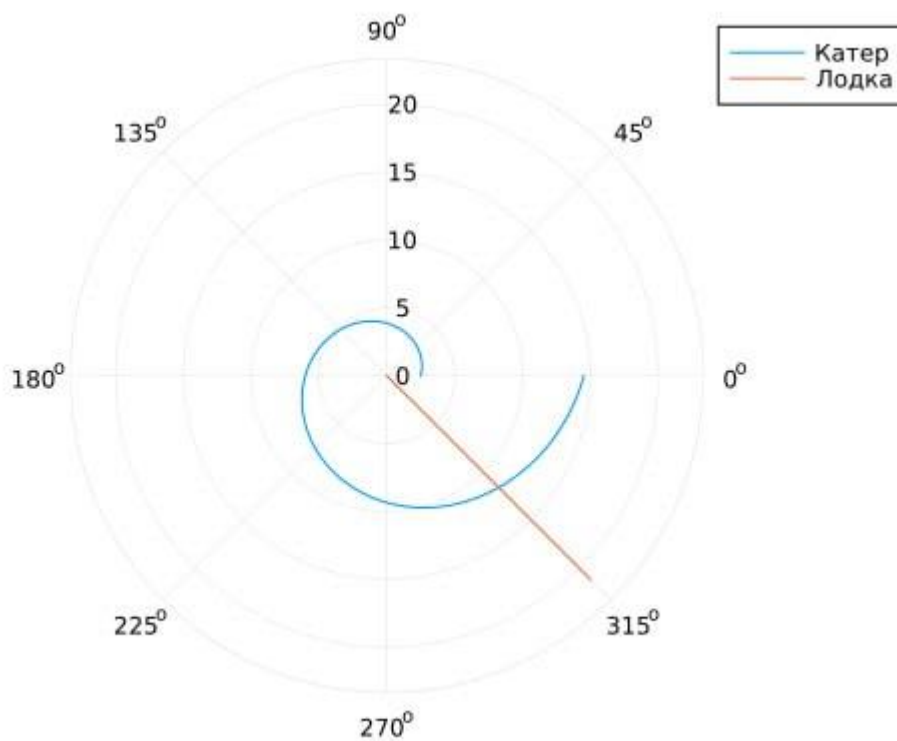


Fig.1 Решение первого случая

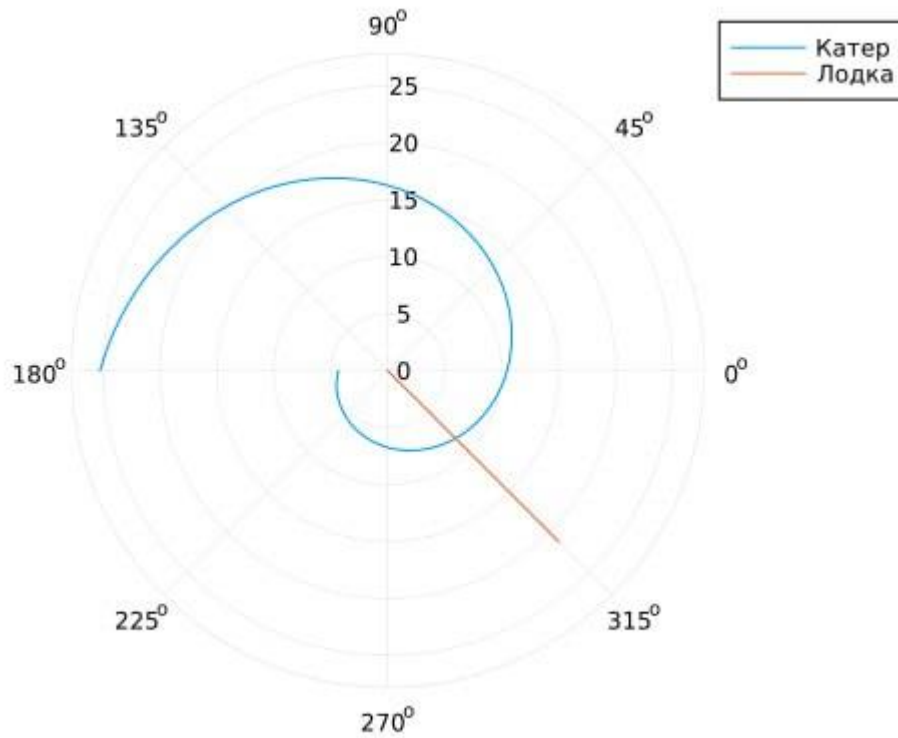


Fig.1 Решение второго случая

Точка пересечения графиков является точкой пересечения катера и лодки.

Наблюдаем, что при погоне «по часовой стрелке» для достижения цели потребуется пройти меньшее расстояние.

Выводы по проделанной работе

Рассмотрели задачу о погоне. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений. Смоделировали ситуацию.