Лабораторная работа №6

Задача об эпидемии

Демидова Екатерина Алексеевна

Содержание

1 Цель работы **4**

2 Задание **5**

3 Теоретическое введение **6**

4 Выполнение лабораторной работы **8**
4.1 Программная реализация модели эпидемии 8
4.2 Посмтроение графиков решений и их анализ 11

5 Выводы **14**

Список литературы **15**

Список иллюстраций

4.1 График изменения числа особей для случая $I(0) < I^*$. OpenModelica 11
4.2 График изменения числа особей для случая $I(0) < I^*$. Julia 11
4.3 График изменения числа особей для случая $I(0) > I^*$. OpenModelica 12
4.4 График изменения числа особей для случая $I(0) > I^*$. Julia 12

1 Цель работы

Исследовать простейшую математическую модель эпидемии(SIR).

2 Задание

Вариант 22

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 10800$) в момент начала эпидемии (t=0) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 208$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 41$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1) если $I(0) < I^*$
2) если $I(0) > I^*$

3 Теоретическое введение

Компартментные модели — это очень общий метод моделирования. Их часто применяют для математического моделирования инфекционных заболеваний. Популяция распределяется по отсекам с метками, например S, I или R (восприимчивый, инфекционный или выздоровевший). Люди могут перемещаться между отсеками. [1].

Модель SIR — одна из самых простых секционных моделей, и многие модели являются производными от этой базовой формы. Модель состоит из трех отделений:

S: Число восприимчивых людей. Когда восприимчивый и заразный человек вступают в «инфекционный контакт», восприимчивый человек заражается болезнью и переходит в инфекционный отсек. I: Число заразных. Это лица, которые были инфицированы и способны заразить восприимчивых лиц. R: количество удаленных (и неуязвимых) или умерших особей. Это лица, которые были инфицированы и либо выздоровели от болезни и попали в удаленный отсек, либо умерли. Предполагается, что число смертей незначительно по отношению к общей численности населения. Этот отсек также можно назвать «восстановленным» или «устойчивым».

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Система SIR без динамики жизнедеятельности (рождения и смерти, иногда называемой демографией) может быть выражена следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений[2]:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases}$$

где S – численность восприимчивой популяции, I – численность инфицированных, R – численность удаленной популяции (в результате смерти или выздоровления), и N — это сумма этих трёх, а β и γ - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Программная реализация модели эпидемии

Зададим функцию для решения модели эпидемии. Возьмем интервал $t \in [0; 200]$ с начальными условиями $N = 10800$, , I(0)=208$, ,R(0)=41 , , S(0)=N-I(0)-R(0) . Зададим функции для случаев если $I(0) < I^*$ и если $I(0) > I^*$. Рассмотрим сначала реализацию в Julia. Зададим начальные условия и функции для двух случаев:

```
//Начальные условия и параметры

R = 41
I = 208
N = 10800
S = N-R-I
p = [0.1, 0.05]
u0 = [S,I,R]
tspan=(0.0,200.0)

//При I(0)>I*

function sir!(du,u,p,t)
    b,g = p
```

```
        S, I, R = u
        N = S+I+R
    du[1] = -b*u[2]*u[1]/N
    du[2] = b*u[2]*u[1]/N - g*u[2]
    du[3] = g*u[2]
end

//При I(0)<I*

function sir_0!(du,u,p,t)
    b,g = p
    du[1] = 0
    du[2] = - g*u[2]
    du[3] = g*u[2]
end
```

Для задания проблемы используется функция `ODEProblem`, а для решения – численный метод Tsit5():

```
problem = ODEProblem(sir!,u0,tspan,p)
solution = solve(problem, Tsit5())

problem = ODEProblem(sir_0!,u0,tspan,p)
solution = solve(problem, Tsit5())
```

Также зададим эту модель в OpenModelica. Модель для $I(0) > I^*$:

```
model lab6

parameter Real N = 10800;
parameter Real b = 0.1;
```

```
parameter Real g = 0.05;

Real S(start = N - 208 - 41);
Real I(start = 208);
Real R(start = 41);

equation

der(S) = -b*S*I/N;
der(I) = b*S*I/N - g*I;
der(R) = g*I;

end lab6;
```

Модель случая $I(0) < I^*$:

```
model lab6

parameter Real N = 10800;
parameter Real b = 0.1;
parameter Real g = 0.05;

Real S(start = N - 208 - 41);
Real I(start = 208);
Real R(start = 41);

equation

der(S) = -b*S*I/N;
der(I) = b*S*I/N - g*I;
```

```
der(R) = g*I;

end lab6;
```

4.2 Посмтроение графиков решений и их анализ

Посмотрим график изменения числа особей в каждой из трех групп при $I(0) < I^*$(рис. 4.1, 4.2):

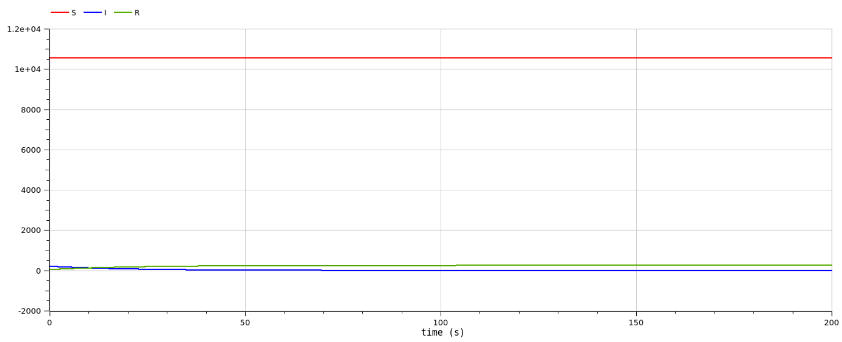

Рис. 4.1: График изменения числа особей для случая $I(0) < I^*$. OpenModelica

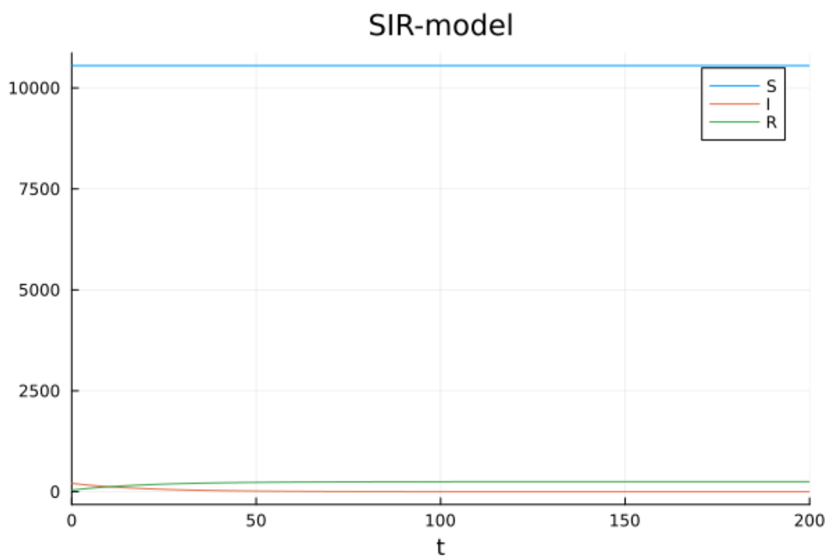

Рис. 4.2: График изменения числа особей для случая $I(0) < I^*$. Julia

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны. Можно увидеть, что число здоровых не изменяется, так как в этом случае все заражённые изолированы. При это заражённые выздоравливают и приобретают иммунитет.

Посмотрим график изменения числа особей в каждой из трех групп при $I(0) < I^*$(рис. 4.3, 4.4):

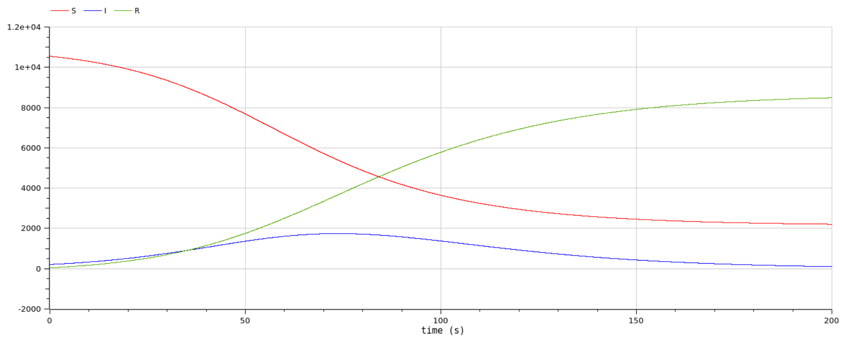

Рис. 4.3: График изменения числа особей для случая $I(0) > I^*$. OpenModelica

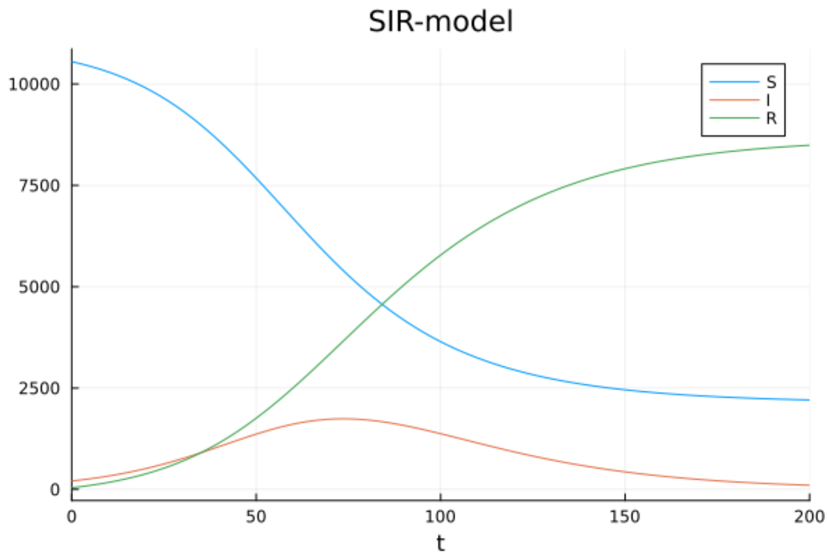

Рис. 4.4: График изменения числа особей для случая $I(0) > I^*$. Julia

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia также идентичны. Можно увидеть, что сначала количество зараженных увеличивает, как и количество приобретающих иммунитет, при этом уменьшается количество здоровых без иммунитета. Затем количество зараженных начинает уменьшаться, а другие две категории изменяются так же, как раньше, но медленнее.

5 Выводы

Построили математическую модель эпидемии.

Список литературы

1. Compartmental models in epidemiology [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology.
2. Жумартова Б.О., Ысмагул Р.С. ПРИМЕНЕНИЕ SIR МОДЕЛИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭПИДЕМИЙ. Международный журнал гуманитарных и естественных наук, 2021. 258 с.