Отчет по Лабораторной Работе №2

Задача о погоне - Вариант 27

Озьяс Стев Икнэль Дани

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.

2 Задание

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

3 Выполнение лабораторной работы

Принимаем за $t_0 = 0, X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0 (\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения:

$\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае,

$\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2, задачу будем решать для двух случаев.

$x_1 = \frac{k}{n+1}$,при $\theta = 0$

$x_2 = \frac{k}{n-1}$,при $\theta = -\pi$

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t- тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $vr = r\frac{d\theta}{dt}$

Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $v_t = r\frac{d\theta}{dt}$.

Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $v_t = \sqrt{n^2 v_r^2 - v^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна v, то тангенциальную скорость находим из уравнения $v_t = \sqrt{n^2 v^2 - v^2}$. Следовательно, $v_\tau = v\sqrt{n^2 - 1}$.

Тогда получаем $r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{k}{n+1} \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{k}{n-1} \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2-1}}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

3.1 Условие задачи

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,7 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,7 раза больше скорости браконьерской лодки.

3.2 Код программы (Julia)

Далее приведён код на языке Julia, решающий задачу Коши:

```
using Plots
using DifferentialEquations

n = 3.7
s = 11.7
fi = 3*(pi/4)


function f(r, p, t)
    dr = r/ sqrt(n^2 - 1)
    return dr
end
```

```
function f2(t)
    y = tan(fi)*t
    return y
end


r0 = s/(n + 1)
tetha = (0, 2*pi)


prob = ODEProblem(f, r0, tetha)
sol = solve(prob)

t = collect(LinRange(0, 15, 1500))

r1 = []
tetha1 = []

for i in t
    push!(r1, sqrt(i^2 + f2(i)^2))
    push!(tetha1, atan(f2(i)/i))
end

plot(sol, proj=:polar, label= "Катер")
plot!(tetha1, r1, proj=:polar, label= "Лодка")

savefig("image1.png")

r0 = s/(n - 1)
```

```
tetha = (-pi, pi)

prob = ODEProblem(f, r0, tetha)
sol = solve(prob)


plot(sol, proj=:polar, label= "Катер")
plot!(tetha1, r1, proj=:polar, label= "Лодка")

savefig("image2.png")
```

3.3 Построение траектории

Построили траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

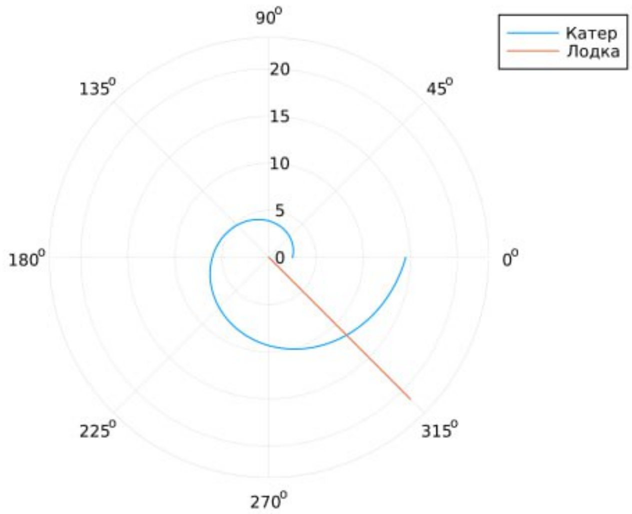

Figure 3.1: траектории для случая 1 (Julia)

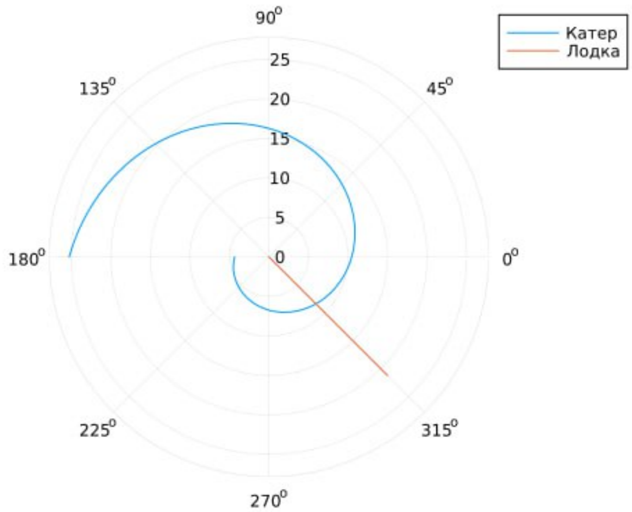

Figure 3.2: траектории для случая 2 (Julia)

Точка пересечения графиков является точкой пересечения катера и лодки.

По первому графику можно сказать, что эта точка пересечения примерно в (7π/4, 12.xx).

По второму графику можно сказать, что эта точка пересечения примерно в (7π/4, 8.xx).

Наблюдаем, что при погоне «по часовой стрелке» для достижения цели потребуется пройти меньшее расстояние.

4 Выводы

Рассмотрели задачу о погоне. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений. Смоделировали ситуацию.

5 Список литературы

1. Задача о погоне