Лабораторная работа №8

Модель конкуренции двух фирм

Демидова Екатерина Алексеевна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать простейшую математическую модель конкуренции двух фирм.

2 Задание

Вариант 22

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_1^2, \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1}M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_2}{c_1}M_2^2, \end{cases}$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2\tilde{p_1}Nq)}$, $a_2 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_2^2 * \tilde{p_2}Nq)}$, $b = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2\tau_2^2\tilde{p_1}^2\tilde{p_2}^2Nq)}$, $c_1 = \dfrac{(p_{cr} - p_1)}{(\tau_1\tilde{p_1})}$, $c_2 = \dfrac{(p_{cr} - p_2)}{(\tau_2\tilde{p_2})}$.

Также введена нормировка $t = c_1\theta$.

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед1 $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - (\dfrac{b}{c_1} + 0.0013) M_1 M_2 - \dfrac{a_1}{c_1} M_1^2, \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1} M_1 - \dfrac{b}{c_1} M_1 M_2 - \dfrac{a_2}{c_1} M_2^2, \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотри задачу со следующими начальными условиями: $M_0^1 = 7.1, M_0^2 = 8.1.$

И параметрами: $p_{cr} = 44, N = 77, q = 1, \tau_1 = 26, \tau_2 = 21, \tilde{p}_1 = 11,\tilde{p}_1 = 8.7$

- N – число потребителей производимого продукта.
- τ – длительность производственного цикла
- p – рыночная цена товара
- $\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
- q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
- $\theta = \dfrac{t}{c_1}$ – безразмерное время

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

3 Теоретическое введение

Динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко использующуюся в экологии модель «хищник-жертва» Вольтера, математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий.В качестве классических примеров дифференциальных моделей экономической динамики отметим модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара, односекторную модель экономического роста Солоу, однопродуктовые динамические макроэкономические модели Леонтьева.

Задача конкуренции двух фирм решаается в следующей постановке. На рынке однородного товара присутствуют две основные фирмы, разделяющие его между собой, т.е. имеет место классическая дуополия.

Безусловно, это является весьма сильным предположением, однако оно вполне оправдано в тех случаях, когда доля продаж остальных конкурентов на рассматриваемом сегменте рынке пренебрежимо мала. Хорошим примером может служить отечественный рынок микропроцессоров, который по существу разделили между собой две фирмы: Intel и AMD.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений[1]:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_1^2, \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1}M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_2}{c_1}M_2^2, \end{cases}$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2 \tilde{p_1} N q)}$, $a_2 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_2^2 * \tilde{p_2} N q)}$, $b = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2 \tau_2^2 \tilde{p_1}^2 \tilde{p_2}^2 N q)}$, $c_1 = \dfrac{(p_{cr} - p_1)}{(\tau_1 \tilde{p_1})}$, $c_2 = \dfrac{(p_{cr} - p_2)}{(\tau_2 \tilde{p_2})}$.

- N – число потребителей производимого продукта.
- τ – длительность производственного цикла
- p – рыночная цена товара
- $\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
- q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
- $\theta = \dfrac{t}{c_1}$ – безразмерное время

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Программная реализация модели эпидемии

Зададим функцию для решения модели эффективности рекламы. Возьмем интервал $t \in [0; 20]$. Рассмотрим сначала реализацию в Julia. Зададим начальные условия и функции для двух случаев:

```
//Начальные условия и параметры



p_cr = 44 #критическая стоимость продукта
tau1 = 26 #длительность производственного цикла фирмы 1
p1 = 11 #себестоимость продукта у фирмы 1
tau2 = 21 #длительность производственного цикла фирмы 2
p2 = 8.7 #себестоимость продукта у фирмы 2
N = 77 #число потребителей производимого продукта
q = 1 #максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)
a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)
b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)
c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1)
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2)
constant1 = 0
```

```
constant2 = 0.0013
p1 = [a1,a2,b,c1,c2,constant1]
p2 = [a1,a2,b,c1,c2,constant2]

tspan = (0,20);
u0=[7.1;8.1]; #начальное значение объема оборотных средств x1 и x2

// Модель

function syst(du,u,p,t)
    a1, a2, b, c1, c2, constant = p
    du[1] = u[1] - (a1/c1)*u[1]*u[1] - (b/c1+constant)*u[1]*u[2]
    du[2] = (c2/c1)*u[2] - (a2/c1)*u[2]*u[2] - (b/c1)*u[1]*u[2]
end
```

Для задания проблемы используется функция `ODEProblem`, а для решения – численный метод Tsit5():

```
prob1 = ODEProblem(syst, u0, tspan, p1)
solution1 = solve(prob1, Tsit5(), saveat = 0.001)
plot(solution1, labels = ["Фирма 1" "Фирма 2"])

prob2 = ODEProblem(syst, u0, tspan, p2)
solution2 = solve(prob2, Tsit5(), saveat = 0.001)
plot(solution2, labels = ["Фирма 1" "Фирма 2"])
```

Также зададим эту модель в OpenModelica. Модель для первого случая:

```
model lab8

Real M1(start=7.1);
```

```
Real M2(start=8.1);

parameter Real p_cr = 44; //критическая стоимость продукта
parameter Real tau1 = 26; //длительность производственного цикла фирмы 1
parameter Real p1 = 11; //себестоимость продукта у фирмы 1
parameter Real tau2 = 21; //длительность производственного цикла фирмы 2
parameter Real p2 = 8.7; //себестоимость продукта у фирмы 2
parameter Real N = 77; //число потребителей производимого продукта
parameter Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в еди

parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

equation

der(M1) = (c1/c1)*M1 - (a1/c1)*M1*M1 - (b/c1)*M1*M2;
der(M2) = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2*M2 - (b/c1)*M1*M2;

end lab8;
```

Модель для второго случая:

```
model lab8

Real M1(start=7.1);
Real M2(start=8.1);
```

```
parameter Real p_cr = 44; //критическая стоимость продукта
parameter Real tau1 = 26; //длительность производственного цикла фирмы 1
parameter Real p1 = 11; //себестоимость продукта у фирмы 1
parameter Real tau2 = 21; //длительность производственного цикла фирмы 2
parameter Real p2 = 8.7; //себестоимость продукта у фирмы 2
parameter Real N = 77; //число потребителей производимого продукта
parameter Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в еди

parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

equation

der(M1) = (c1/c1)*M1 - (a1/c1)*M1*M1 - (b/c1 + 0.0013)*M1*M2;
der(M2) = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2*M2 - (b/c1)*M1*M2;

end lab8;
```

4.2 Посмтроение графиков решений и их анализ

Посмотрим график распространения рекламы для первого случая(рис. 4.1, 4.2):

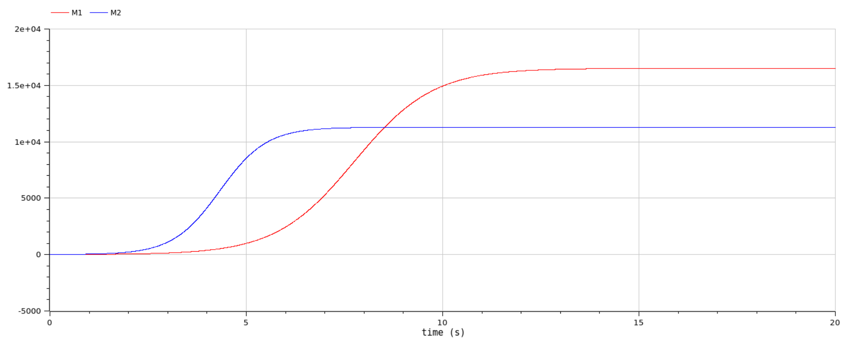

Рис. 4.1: График изменения оборотных средств для первого случая. OpenModelica

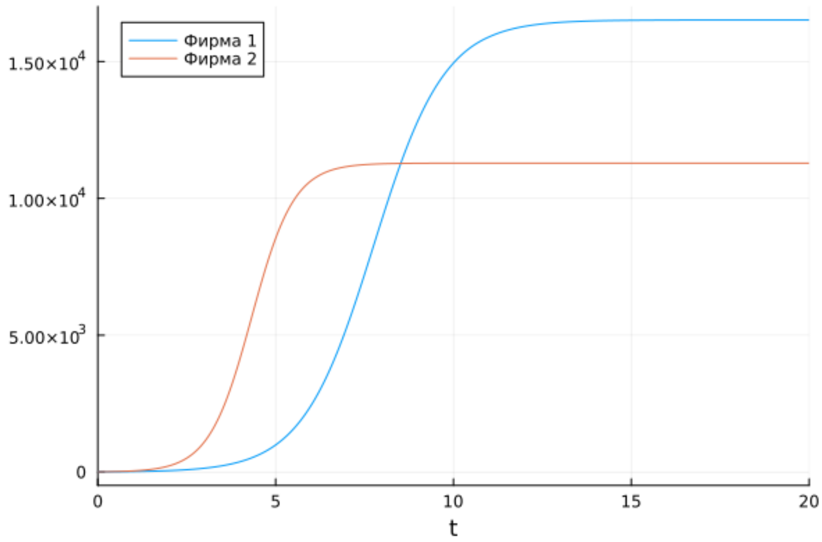

Рис. 4.2: График изменения оборотных средств для первого случая. Julia

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом $M_1 M_2$: в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях

Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

Посмотрим график изменения оборотных средств команий для второго случая(рис. 4.3, 4.4):

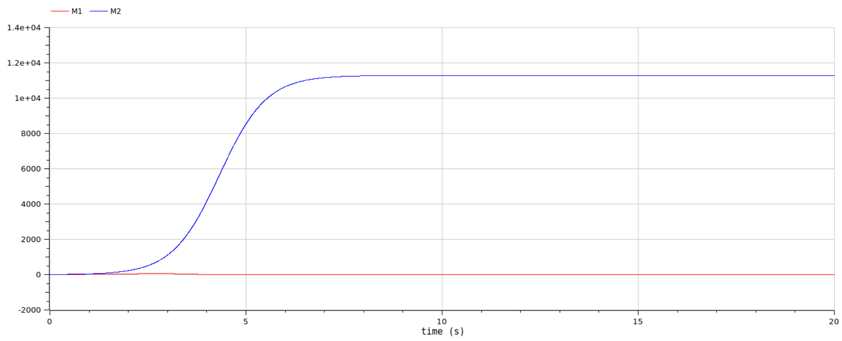

Рис. 4.3: График изменения оборотных средств для второго случая. OpenModelica

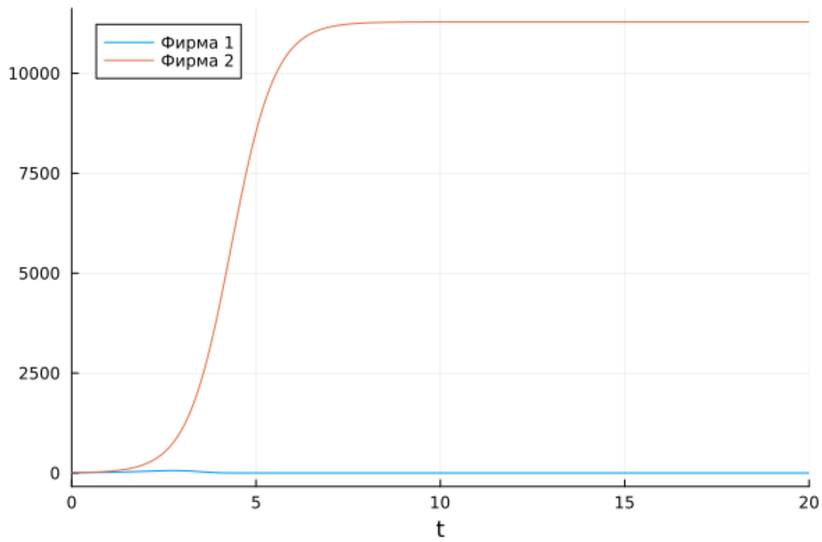

Рис. 4.4: График изменения оборотных средств для второго случая. Julia

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж(4.5), начинает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

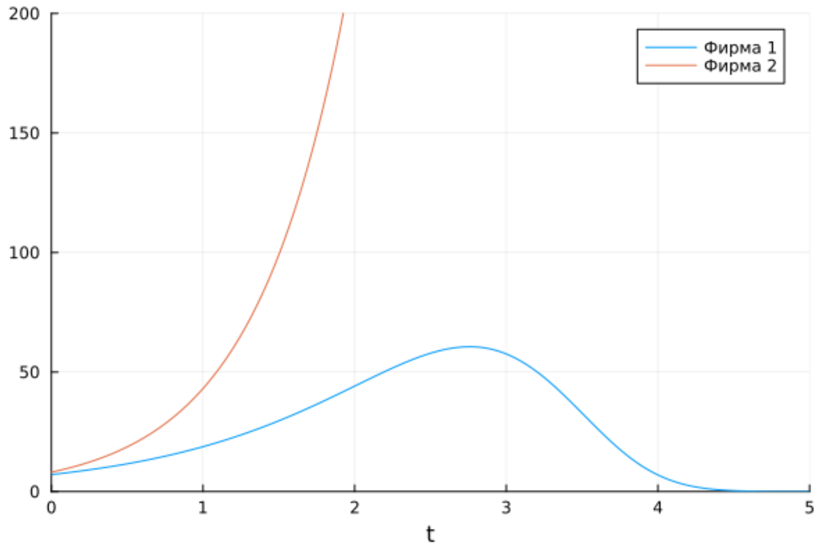

Рис. 4.5: Приближеннй график изменения оборотных средств для второго случая. Julia

5 Выводы

Построили математическую модель конкуренции двух фирм.

Список литературы

1. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. М., УРАО, 1998. 160 с.