Доклад

Модели случайного блуждания

Демидова Е. А.

21 марта 2024

Научный руководитель – Кулябов Д. С.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

Докладчик

- Демидова Екатерина Алексеевна
- студентка группы НКНбд-01-21
- Российский университет дружбы народов
- https://github.com/eademidova

Введение

Цель работы

Исследовать модели случайного блуждания.

Задачи

- Дать теоретическое описание моделей случайного блуждания
- Привести примеры реализации моделирования случайного блуждания

Примеры применения математических моделей случайного блуждания:

- моделирование движения цен на фондовом рынке
- исследование диффузии в жидкостях
- моделирование случайных процессов в биологии

Инструменты

- Язык программирования `Julia`
    - `Random.jl`
    - `StatsBase.jl`
    - `Distributions.jl`
    - `Plots.jl`

Одномерное дискретное случайное блуждание

Определение

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

где $S_0 = 0$, $\{\xi_n, n >= 1\}$ – случайные величины, $P(\xi_n = 1) = p$ и $P(\xi_n = -1) = 1 - p = q$

```
begin
    p_left = 0.5 # вероятность шага вниз
    p_right = 1 - p_left # вероятность шага вверх
    num_steps = 100 # количество шагов
    start_point = 0 # отправная точка
    end_point = 100 # ограничения
    count_steps = 1000
    plt = plot(legend = false)
  steps = [0]
    for i in 1:count_steps
        push!(step, step[i] + StatsBase.sample([-1, 1],
                ProbabilityWeights([p_left, p_right])))
    end
end
```

Программная реализация

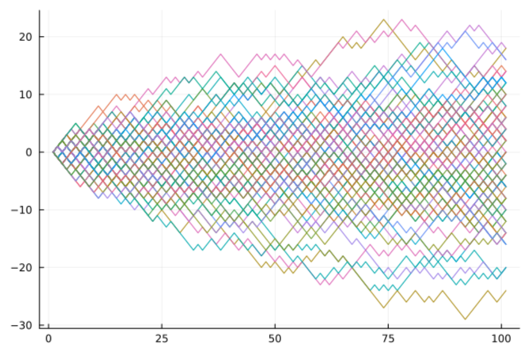

Рис. 1: Симметричное случайное блуждание

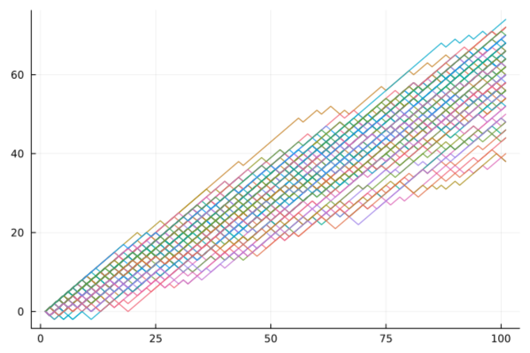

Рис. 2: Несимметричное случайное блуждание

Винеровский процесс

Определение

$$dW = \epsilon\sqrt{dt},$$

где ϵ – случайная величина со стандартным нормальным распределением $\epsilon \sim N(0, 1)$; t – дискретное время.

Определение

Случайный процесс W_t, где $t \geq 0$ называется винеровским процессом, если

- $W_0 = 0$ – почти достоверно.
- W_t – процесс с независимыми приращениями.
- $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t-s)), \forall 0 \leq s < t < \infty$

```julia
h = 0.1
T = 100

function wiener(h, T)
    return cumsum([rand(Normal(0,h)) for i in 0:h:T])
end
```

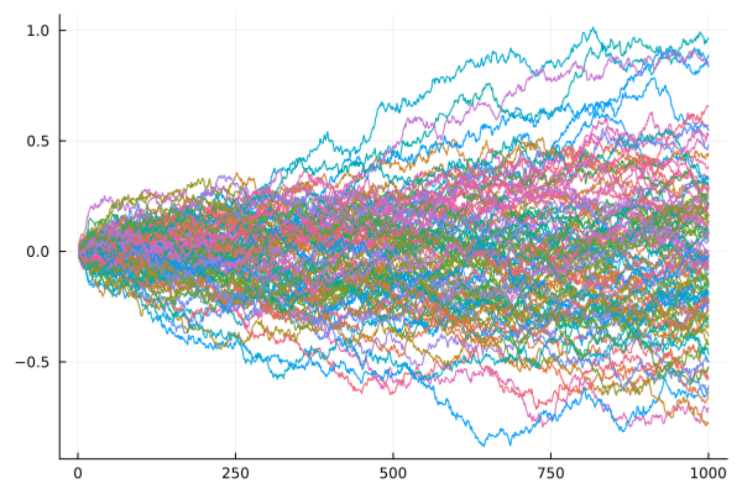

Рис. 3: Винеровский процесс

Броуновское движение

Определение

1) движение броуновской частицы вызывается крайне частыми ударами со стороны непрестанно движущихся молекул окружающей жидкости;
2) движение этих молекул столь нерегулярно, что их воздействие на взвешенные частицы можно описать только вероятностным образом в предположении очень частых, статистически независимых ударов.

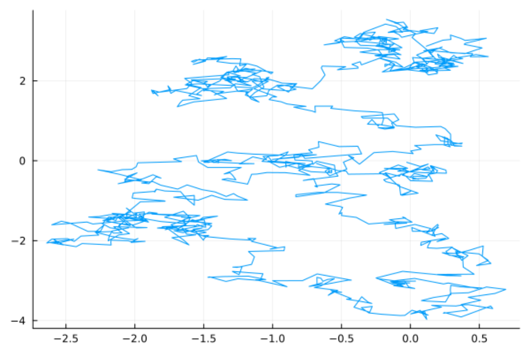

Рис. 4: Движение броуновской частицы. 100 шагов

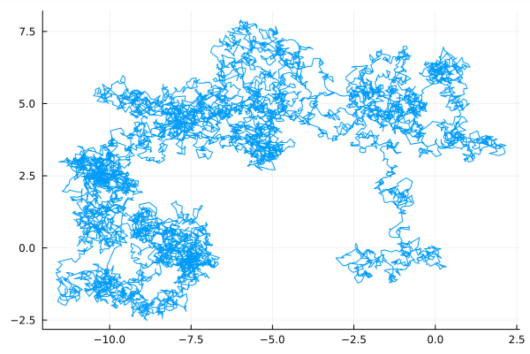

Рис. 5: Движение броуновской частицы. 1000 шагов

Геометрическое броуновское движение

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

где W_t - винеровский процесс, а μ – параметр сноса, σ параметр волатильности.

Решение:

$$X_t = X_0 e^{(a - fracx^2 2)t + sW_t}$$

Программная реализация

```
h = 0.1
T = 100
s = 0.4
a = 0.1
x_0 = 10

function GBM(h, T, a, s)
    return x_0.*exp.((a - s^2/2). [0:h:T;] .+ s.*wiener(h,T))
end
```

Программная реализация

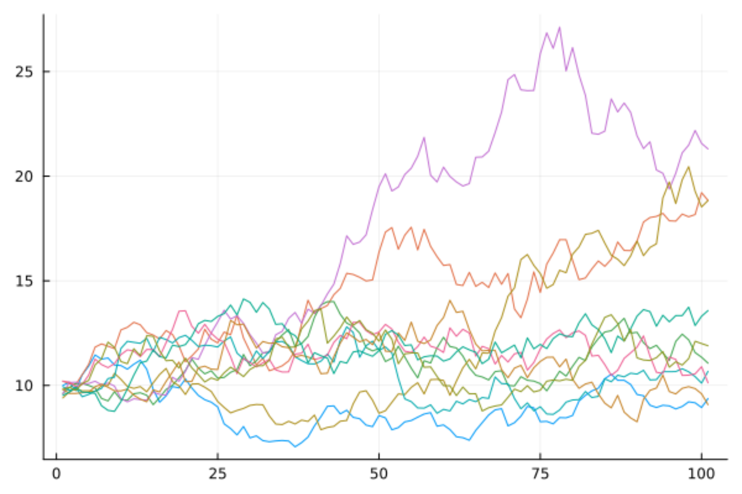

Рис. 6: Геометрическое броуновское движение

Выводы

Выводы

Дано описание и выполнена программная реализация простейшей модели случайного блуждания, винеровского процесса и геометрического броуновского движения.

Список литературы

1. Жуковский М.Е., Родионов И.В. Основы теории вероятностей: учебное пособие. М.: МФТИ, 2015. 82 с.
2. Степанов С.С. Стохастический мир [Электронный ресурс]. 2012. 376 с. URL: http://synset.com/pdf/ito.pdf.
3. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. Москва: Мир, 1986. 528 с.
4. Osborne M.F.M. Brownian motion in the stock market. Operations Research, 1959. 305 с.