# Лабораторная работа №2

**Задача о погоне**

Демидова Екатерина Алексеевна

# Содержание

# Список иллюстраций

# 1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска.

# 2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 9,6 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,6 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

# 3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка $A$ равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки $P$такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки $A$[1].

Рассмотрим задачу о погоне на примере катера береговой полициии и лодки браконьеров. Часто также эту задачу рассматривают как погоню волка за зайцем. Лодка плывет по прямой линии со скоростью $u$. Катер начинает преследовать лодку со скоростью $V > u$, известно во сколько раз катер быстрее лодки. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии $k$ км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтобы нагнать лодку[2].

# 4 Выполнение лабораторной работы

## 4.1 Вывод уравнения

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_{k0}$ ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось $r$ проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса $\theta$ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние $x$ (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время $t$ катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет $x$ , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\dfrac{x}{v}$ или $\dfrac{k-x}{3.6v}$ (во втором случае $\dfrac{k+x}{3.6v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{3.6v} \text{ – в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{3.6v} \text{ – во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \dfrac{9,6}{4.6}$ и $x_2 = \dfrac{9,6}{2.6}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки $v$. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: $v_r$ - радиальная скорость и - $v_\tau$ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \dfrac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\dfrac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\dfrac{d\theta}{dt}$ на радиус $r$, $r\dfrac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{12.96v^2 - v^2} = \sqrt{11.96}v$$

Из чего можно вывести:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{11.96}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\frac{dr}{dt} = v \\
r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{11.96}v
\end{cases}
$$

С начальными условиями для первого случая:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = 0 \\
r_0 = x_1
\end{cases}
\tag{1}
$$

Или для второго:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = -\pi \\
r_0 = x_2
\end{cases}
\tag{2}
$$

Исключая из полученной системы производную по $t$, можно перейти к следующему уравнению:

$$
\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{11.96}}
$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

## 4.2 Построение траектории

Построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев. Далее приведён код на языке Julia, решающий задачу Коши, приведённую в предыдущей части:

```
using OrdinaryDiffEq
s = 9.6 // начальное расстояние от лодки до катера
fi = 3*pi/4
```

```
//функция, описывающая движение катера береговой охраны
f(u,p,t) = u/sqrt(11.96)

//начальные условия в случае 1 и 2 соответственно

r0_1 = s/4.6
r0_2 = s/2.6

tetha1 = (0.0,2*pi)
tetha2 = (-pi,pi)

//определение и решение задачи Коши в обоих случаях

r1=ODEProblem(f, r0_1, tetha1)
r2=ODEProblem(f, r0_2, tetha2)

sol1 = solve(r1, Tsit5(), saveat=0.01)
sol2 = solve(r2, Tsit5(), saveat=0.01)

//функция, описывающая движение лодки браконьеров
f2(t) = tan(fi)*t
t = 0:0.01:15
```

Затем с помощью найденного численного решения построили траектории движения ктера и лодки:

```
//движение катера

plot(sol1.t, sol1.u,
proj=:polar,
lims=(0,13)
```

```
)

//движение лодки

plot!(fill(fi,length(t)), f2.(t))
```

В результате получим следующие графики (рис. 4.1, 4.2).

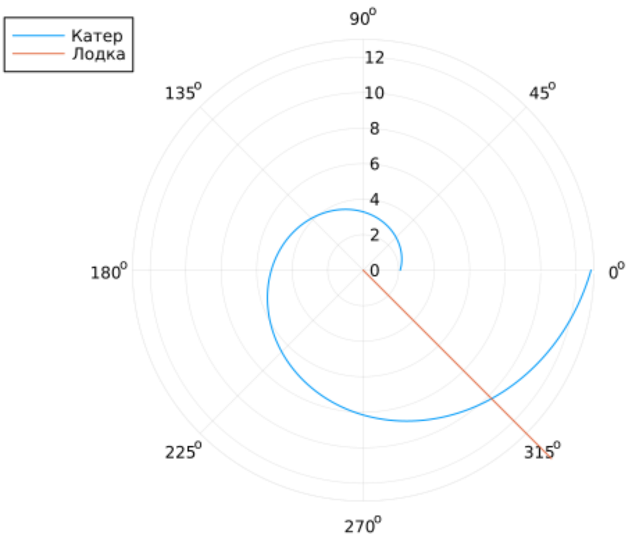


Рис. 4.1: Траектории движения для случая 1

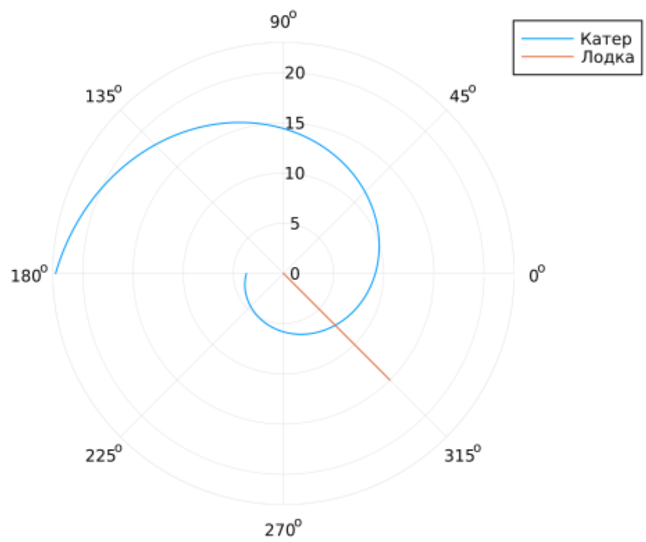


Рис. 4.2: Траектории движения для случая 2

## 4.3 Поиск точки пересечения

Найдем точку пересечения траектории катера и лодки. Для этого найдем аналитическое решение дифференциального уравнения, задающего траекторию движения катера. Решив задачу Коши получим:

$$r = \frac{9,6}{4.6} e^{\frac{1}{\sqrt{11.44}}\theta} \text{ – для случая (1)}$$

$$r = \frac{48}{13} e^{(5\pi\frac{\sqrt{299}}{299} + \frac{1}{\sqrt{11.44}})\theta} \text{ – для случая (2)}$$

Мы положили угол, под которым двигается лодка, равным $\frac{3\pi}{4}$. Так как уравнение прямой задано через тангенс, а тангенс этого угла отрицательный, то для первого случая подставим в точное решение угол $\frac{7\pi}{4}$, а для второго - $-\frac{\pi}{4}$:

```
solution1(t) = (r0_1)*exp(1/sqrt(11.44)*t)
```

```
solution2(t) = (48/13)*exp(5*pi*sqrt(299)/299)*exp(1/sqrt(11.44)*t)
```

```
intersection_r1 = solution1(7*pi/4)
intersection_r2 = solution2(-pi/4)
```

В результате получим, что точки пересечения равны $(\frac{7\pi}{4}, 10.60326)$ - при условии (1) и $(-\frac{\pi}{4}, 7.26057)$ при условии (2).

# 5 Выводы

Построили математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска.

# Список литературы


1. Кривая погони [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Git.
2. Самоячева М.В., Федоров Л.И. Задача о погоне. Вестник Московского государственного областного университета, 2011. 163 с.