Этап 4

Результаты проекта

Беличева Д. М., Демидова Е. А.,
Смирнов-Мальцев Е. Д., Сунгурова М. М.

Содержание

Список иллюстраций

1 Введение

Актуальность

Существуют разнообразные физические процессы, основная черта которых — неравновесная агрегация. Примеры: образование частиц сажи, рост осадков при электрическом осаждении и распространение воды в нефти. Один из важных примеров фракталов появляется при добыче нефти. Нефтяники через одну из скважин заливают в месторождение нефти воду. Из других скважин начинает выходить нефть. Однако вода распространяется внутри месторождения неравномерно, образуя т.н. “фьорды”. Нефть, находящаяся в этих фьордах не выходит наружу и остается не добытой. Поэтому вместо воды необходимо найти жидкость, для которой эти фьорды будут минимальны.

Во всех случаях происходит необратимое прилипание частиц к растущему кластеру из-за сильного смещения равновесия в сторону твердой фазы, и вырастают разветвленные агрегаты (рост правильных ограненных кристаллов происходит в условиях, близких к равновесным, когда возможно как прилипание частиц, так и их обратный переход в раствор)[1].

Цель работы

Исследовать модель агрегации, ограниченной диффузией(DLA).

Объект и предмет исследования

- Модель DLA
- Фрактальная размерность
- График зависимости числа частиц в кластере от радиуса гирации

Задачи

- Построить модель агрегации, ограниченной диффузией
- Найти размерность, получившихся кластеров
- Построить график зависимости числа частиц в кластере от радиуса гирации

Материалы и методы

- Язык программирования Julia
  - Plots.jl
  - Random.jl
  - ColorSchemes.jl

2 Теоретическое описание задачи

2.1 Фрактальная размерность

$$d = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\frac{ln(N(\epsilon))}{ln(\frac{1}{\epsilon})}\right)$$

Это равенство является определением размерности, которая обозначается d. Для построения зависимости между оценкой радиуса и массы кластера (линейна) на логарифмической диаграмме, функция имеет вид:

$$ln(N(\epsilon)) = Dln(R) + b,$$

где D – фрактальная размерность, $N(\epsilon)$ – число частиц на расстоянии меньшем чем R, R – радиус

2.2 Агрегация, ограниченная диффузией

Агрегация, ограниченная диффузией (diffusion-limited aggregation, DLA) — первая модель агрегации, разработанная Виттеном и Сандером в 1981 году. Она представляет шумный рост, ограниченный диффузией. Этот процесс довольно распространен в природе, и простой алгоритм дает хорошее представление о крупномасштабной структуре многих природных объектов[2].

У получающегося кластера может быть много различных форм, преимущественно зависящих от трёх факторов:

- положение центра агрегации;
- начальное положение движущейся частицы;
- алгоритм моделирования движения.

По алгоритму движения частицы существует два подхода к базовому моделированию DLA. Один работает с фиксированной сеткой, а другой — без сетки и использует частицы. Сетки обеспечивают жесткую структуру, которая упрощает модель. В этом случае частица может двигаться по сетке только к одному из четырех соседей.

3 Программная реализация

3.1 Описание алгоритма

Рассматрим сеточную модель агрегации, ограниченной диффузией (Diffusion Limited Aggregation, DLA [2]).

Возьмем регулярную квадратную сетку на плоскости. В центр поместим затравочную частицу. Затем с расстояния чуть больше желаемого максимального радиуса итогового агрегата будем выпускать по одной новые частицы. Выпущенная частица совершает случайные блуждания по сетке, делая шаги в одном из четырех доступных направлений с равной вероятностью. Если частица оказывается по соседству с затравкой, она прилипает и остается в этом узле. Затем выпускаем следующую частицу, которая может прилипнуть к одному из занятых узлов. Шаг решетки в этой модели соответствует диаметру частицы(мы рассматриваем единичный шаг)(рис. 3.1).

Рис. 3.1: Блок-схема алгоритма модели DLA

Для ускорения работы программы разумно выпускать частицы с круга радиусом немного больше Rmax текущего максимального радиуса агрегата. Функция генерирует случайное расположение точки на заданном радиусе по формуле[1]:

$$x = r * cos(\theta) y = r * sin(\theta),$$

где θ – случайный угол от 0 до 2π, заданный формулой: $2\pi random$

3.2 Случайное блуждане

Рассмотрим целочисленную решётку Z^2 на плоскости с отмеченной точкой $(0, 0) \in Z^2$ – началом координат. Каждой точке решётки соответствуют четыре точки, в которые можно из неё шагнуть по выходящим из неё ребрам: мы будем обозначать эти точки $v^u = (0, 1)$, $v^d = (0, -1)$, $v^r = (1, 0)$, $v^l = (-1, 0)$ для шагов направо, налево, вверх и вниз соответственно. Случайное блуждание – это недетерминированное передвижение по решетке Z^2: стартуя из нуля, мы делаем один шаг в секунду, переходя в одну из соседних вершин к той вершине, в которой мы находились в предыдуший момент. При этом решение, в какую вершину шагнуть, принимается случайным образом.

Обозначим $v^u = (0, 1)$, $v^d = (0, -1)$, $v^r = (1, 0)$, $v^l = (-1, 0)$ - шаг на 1 вверх, вниз, влево, вправо соответственно.

$\{S_n\}$ - ряд, описывающий случайное блуждание, $* = u, d, r, l, n$ - количество шагов

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} v_n^*,$$

$$P(v_{i+1} = v_n^*) = \frac{1}{4}$$

4 Результаты

4.1 DLA кластер

В результате получили следующие примеры DLA кластера(рис. 4.1, 4.2).

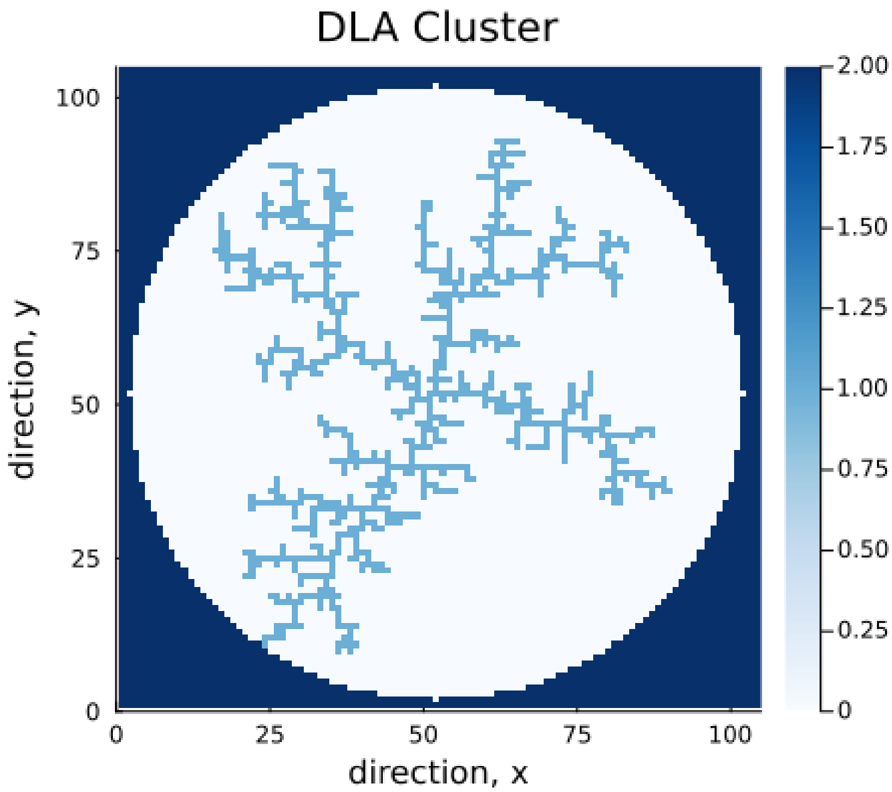

Рис. 4.1: DLA кластер

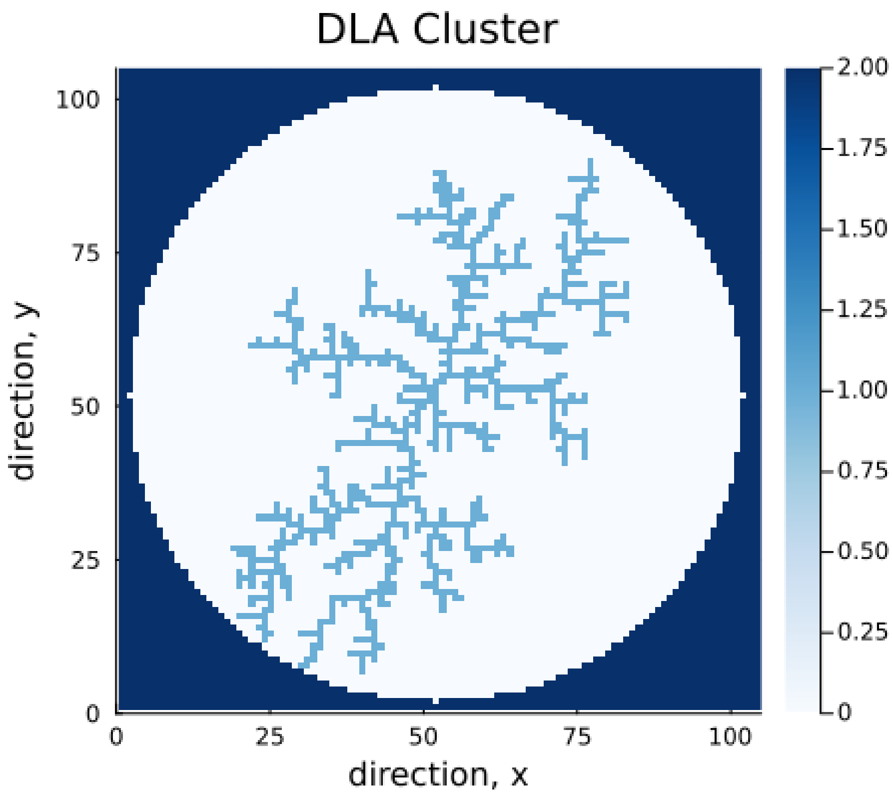

Рис. 4.2: DLA кластер

4.2 Фрактальная размерность

Для подсчёта размерности фракталов, полученного с помощью DLA мы построили 17 моделей с ограничением по радиусу от 130 до 290. На рис. 4.3 изображён график зависимости логарифма массы модели от логарифма радиуса. Полученные данные аппроксимируются прямой с угловым коэффициентом 1.717. Это число примерно равно размерности данного фрактала.

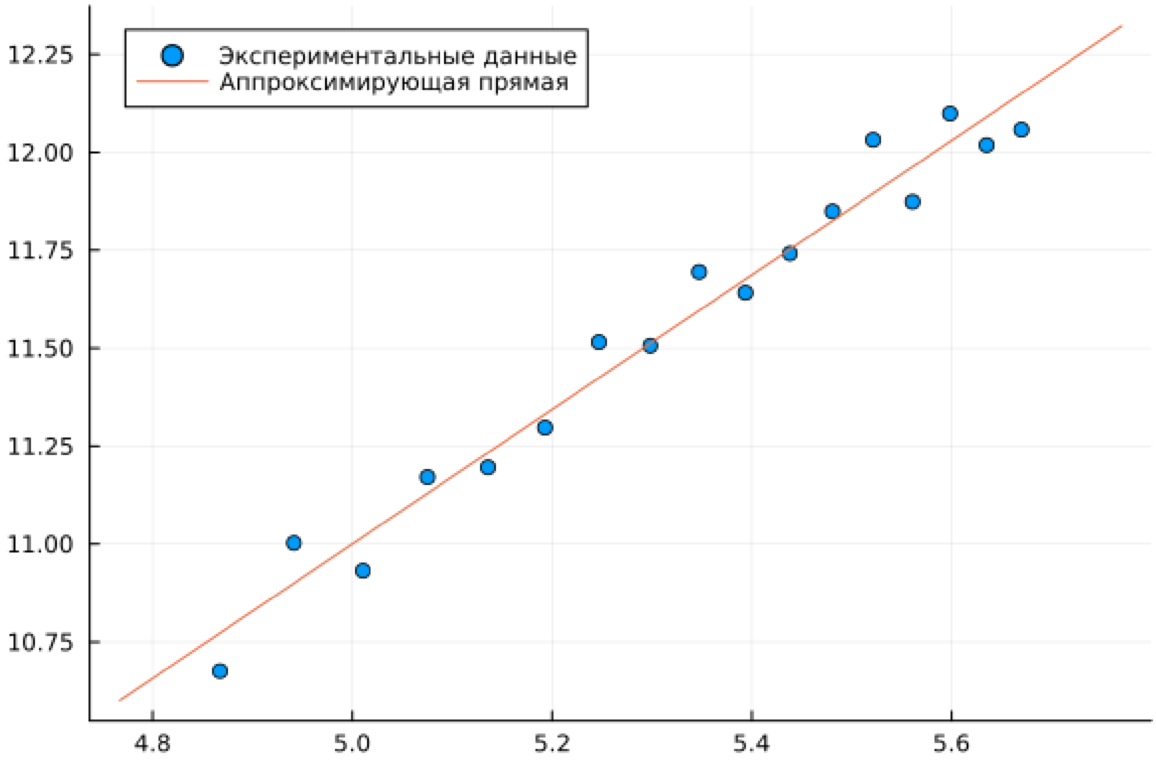

Рис. 4.3: График зависимости числа частиц в кластере от радиуса гирации

Это соответствует утверждению, что DLA кластер – фрактал, так как у фракталов дробная размерность. Как известно, у кластера DLA на плоскости размерность $D \approx 1,71 \pm 0,02$, поэтому можно сделать вывод, что наша программа достаточно точно иммитирует агрегацию, ограниченную диффузией.

5 Выводы

- Построена модель агрегации, ограниченной диффузией
- Найдена фрактальная размерность, получившихся кластеров
- Построен график зависимости числа частиц в кластере от радиуса гирации

Список литературы

1. Медведев Д.А. и др. Моделирование физических процессов и явлений на ПК: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. 101 с.
2. Sander L.M. Diffusion-limited aggregation: A kinetic critical phenomenon? Contemporary Physics, 2000.