Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Демидова Екатерина Алексеевна

Содержание

# 1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска.

# 2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 9,6 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,6 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

# 3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки [1].

Рассмотрим задачу о погоне на примере катера береговой полициии и лодки браконьеров. Часто также эту задачу рассматривают как погоню волка за зайцем. Лодка плывет по прямой линии со скоростью . Катер начинает преследовать лодку со скоростью , известно во сколько раз катер быстрее лодки. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтобы нагнать лодку[2].

# 4 Выполнение лабораторной работы

## 4.1 Вывод уравнения

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за , – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров (), а полярная ось проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время катер и лодка окажутся на одном расстоянииx от полюса. За это время лодка пройдет , а катер (или , в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как или (во втором случае ). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниеx можно найти из следующего уравнения:

Отсюда мы найдем два значения и , задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: - радиальная скорость и - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, . Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем .

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус , .

Получаем:

Из чего можно вывести:

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

С начальными условиями для первого случая:

Или для второго:

Исключая из полученной системы производную по , можно перейти к следующему уравнению:

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

## 4.2 Построение траектории

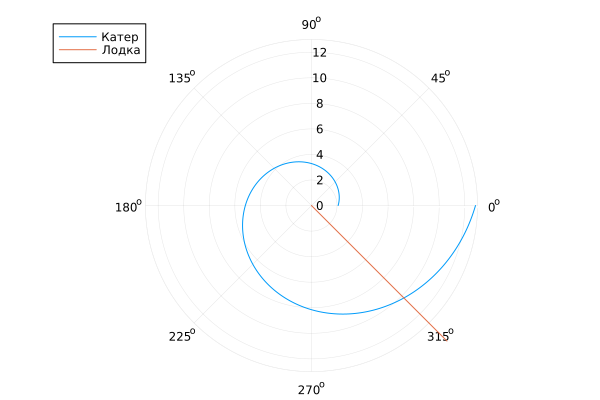
Построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев. Далее приведён код на языке Julia, решающий задачу Коши, приведённую в предыдущей части:

using OrdinaryDiffEq  
s = 9.6 // начальное расстояние от лодки до катера  
fi = 3\*pi/4  
  
//функция, описывающая движение катера береговой охраны  
f(u,p,t) = u/sqrt(11.96)  
  
//начальные условия в случае 1 и 2 соответственно  
  
r0\_1 = s/4.6  
r0\_2 = s/2.6  
  
tetha1 = (0.0,2\*pi)  
tetha2 = (-pi,pi)  
  
//определение и решение задачи Коши в обоих случаях  
  
r1=ODEProblem(f, r0\_1, tetha1)  
r2=ODEProblem(f, r0\_2, tetha2)  
  
sol1 = solve(r1, Tsit5(), saveat=0.01)  
sol2 = solve(r2, Tsit5(), saveat=0.01)  
  
//функция, описывающая движение лодки браконьеров  
f2(t) = tan(fi)\*t  
t = 0:0.01:15

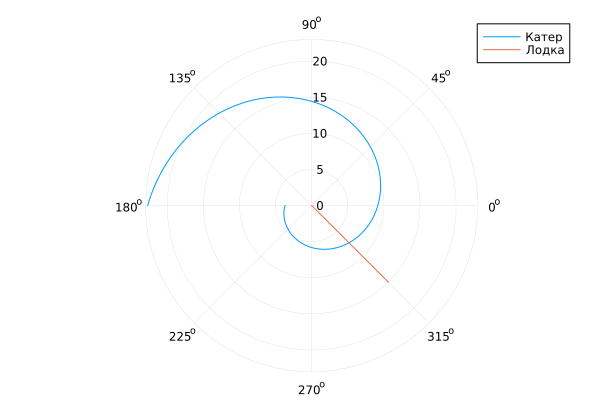
Затем с помощью найденного численного решения построили траектории движения ктера и лодки:

//движение катера  
  
plot(sol1.t, sol1.u,  
proj=:polar,  
lims=(0,13)  
)  
  
//движение лодки  
  
plot!(fill(fi,length(t)), f2.(t))

В результате получим следующие графики (рис. ??, ??).



Траектории движения для случая 1



Траектории движения для случая 2

## 4.3 Поиск точки пересечения

Найдем точку пересечения траектории катера и лодки. Для этого найдем аналитическое решение дифференциального уравнения, задающего траекторию движения катера. Решив задачу Коши получим:

Мы положили угол, под которым двигается лодка, равным . Так как уравнение прямой задано через тангенс, а тангенс этого угла отрицательный, то для первого случая подставим в точное решение угол , а для второго - :

solution1(t) = (r0\_1)\*exp(1/sqrt(11.44)\*t)   
  
solution2(t) = (48/13)\*exp(5\*pi\*sqrt(299)/299)\*exp(1/sqrt(11.44)\*t)   
  
intersection\_r1 = solution1(7\*pi/4)  
intersection\_r2 = solution2(-pi/4)

В результате получим, что точки пересечения равны - при условии (1) и при условии (2).

# 5 Выводы

Построили математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска.

# Список литературы

1. Кривая погони [Электронный ресурс]. Wikimedia Foundation, Inc., 2024. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Git>.

2. Самоячева М.В., Федоров Л.И. Задача о погоне. Вестник Московского государственного областного университета, 2011. 163 с.