

TD 5: Résolution propositionnelle + Davis-Putnam



Exercice 1. Les ensembles suivants sont insatisfaisables.

- $\{a, a \Rightarrow b, \bar{b}\}$
- $\{a + b, \bar{a} + c, \bar{a} + \bar{d}, d + \bar{c}, \bar{b} + a\}$
- $\{a + b + c, \bar{a} + b, \bar{b} + c, \bar{c} + a, \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\}$.

En donner une preuve par résolution.



Exercice 2. Montrer, à l'aide d'une preuve par résolution, la correction du raisonnement suivant :

$$r + q \Rightarrow t, t \cdot q \Rightarrow r, q \models t \Leftrightarrow r.$$



Exercice 3. Appliquer les stratégies positive, négative et linéaire sur ces ensembles de clauses.

1. $\{\bar{a} + \bar{b} + c, a, \bar{c}, b\}$
2. $\{\bar{a} + \bar{b} + c, \bar{a} + b, a, \bar{c}\}$
3. $\{\bar{a} + \bar{b}, \bar{c} + a, c, \bar{d} + b, d + b\}$
4. $\{\bar{a} + \bar{b} + c + d, \bar{c} + \bar{e} + \bar{f}, \bar{a} + \bar{d}, b + c, a + c, \bar{c} + e, \bar{c} + f\}$



Exercice 4. (Réduction) Soit l'ensemble de clauses

$$\{p + q, \bar{p} + r + \bar{q} + p, p + \bar{r}, q + \bar{p} + \bar{q}, q + \bar{r} + p, r + q + \bar{p} + \bar{r}, \bar{r} + q\}$$

1. Réduire cet ensemble.

2. Indiquez si l'ensemble réduit est ou non satisfaisable



Exercice 5.

Utilisez l'algorithme DP pour déterminer si l'ensemble suivant de clauses est satisfaisable ou insatisfaisable:

$$\{a + b + c + d + e + f, \bar{a} + b, \bar{b} + a, \bar{c} + d, \bar{d} + c, \bar{b} + \bar{c}, \bar{b} + c, b + \bar{c}, \bar{e}, \bar{f}\}$$

On donnera une trace de l'algorithme.



Exercice 6. Utilisez l'algorithme DP pour déterminer si l'ensemble suivant de clauses est satisfaisable ou insatisfaisable:

$$\{a + b + c + d + f, \bar{a} + b, \bar{b} + a, \bar{c} + d, \bar{d} + c\}$$

Donner une trace de l'algorithme. Indiquer la réponse de l'algorithme (E satisfaisable ou insatisfaisable). Si E est satisfaisable, déduire un modèle de E à partir de la trace de l'exécution de l'algorithme .

**Exercice 7.**

1. Montrez que si A est une fonction en CNF alors la fonction DP termine.
2. Montrez que $DP(A)$ retourne true (false) si et seulement si A est satisfaisable (ne l'est pas).
3. Rappelons que toute formule peut être transformée en CNF. Expliquez comment utiliser la méthode de Davis-Putnam pour décider la validité d'une formule.
4. Modifiez $DP(A)$ pour que, si A est satisfaisable, elle retourne une assignation v qui satisfait A .
5. Réfléchissez aux structures de données et aux opérations nécessaires à la mise en oeuvre de l'algorithme dans votre langage préféré et adéquat.

**Exercice 8.** (***)

Montrez que la règle de résolution est complète pour la réfutation, autrement dit que pour tout ensemble contradictoire de clauses Γ , il existe une preuve de l'absurde (la clause vide) à partir des clauses de Γ n'utilisant que la règle de résolution.

**Exercice 9.**

Montrez que la règle de résolution n'est pas complète pour la déduction, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble Γ d'hypothèses et une conclusion C telles que $\Gamma \models C$, mais C ne s'obtient pas en conclusion de résolution.

**Exercice 10.**

Proposez un algorithme simple qui, étant donné un ensemble fini Γ d'hypothèses et une conclusion C , décide si $\Gamma \vdash C$, en utilisant la règle de résolution.

**Exercice 11.** Utiliser la méthode de résolution pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1. $\models (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ | 5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$ |
| 2. $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$ | 6. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$ |
| 3. $\models ((p \wedge q) \vee (r \wedge q)) \Rightarrow (p \vee r)$ | 7. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$ |
| 4. $\{p \Rightarrow q, r \Rightarrow s\} \models p \vee r \Rightarrow q \vee s$ | 8. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ |

**Exercice 12.** Refaire les exercices 17, 18, 19 et 20 de la fiche 3 en utilisant la résolution comme méthode de preuve.