FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CEARÁ

CAPES

GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

Ministério da Educação - MEC

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Universidade Aberta do Brasil

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Fundamentos de Álgebra

Licenciatura em Matemática

Francisco Gêvane Muniz Cunha

Fortaleza, CE
2009

CRÉDITOS

Presidente
Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Secretário da SEED
Carlos Eduardo Bielschowsky

Diretor de Educação a Distância
Celso Costa

Reitor do IFCE
Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino
Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE
Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Coordenadora UAB
Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria
José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática
Zelalber Gondim Guimarães

Elaboração do conteúdo
Francisco Gêvane Muniz Cunha

Colaboradores
Luciana de Lima
Lívia Maria de Lima Santiago
Marília Maia Moreira

Equipe Pedagógica e Design Instrucional
Ana Claúdia Uchôa Araújo
Andréa Maria Rocha Rodrigues
Cristiane Borges Braga
Eliana Moreira de Oliveira
Gina Maria Porto de Aguiar Vieira
Iraci Moraes Schmidlin
Jane Fontes Guedes
Jivago Silva Araújo
Karine Nascimento Portela
Lívia Maria de Lima Santiago
Luciana Andrade Rodrigues
Maria Irene Silva de Moura
Maria Vanda Silvino da Silva
Marília Maia Moreira
Regina Santos Young

Equipe Arte, Criação e Produção Visual
Ábner Di Cavalcanti Medeiros
Benghson da Silveira Dantas
Davi Jucimon Monteiro
Diemano Bruno Lima Nóbrega
Germano José Barros Pinheiro
Gilvandenys Leite Sales Júnior
Hommel Almeida de Barros Lima
José Albério Beserra
José Stelio Sampaio Bastos Neto
Larissa Miranda Cunha
Marco Augusto M. Oliveira Júnior
Navar de Medeiros Mendonça e Nascimento
Roland Gabriel Nogueira Molina

Equipe Web
Aline Mariana Bispo de Lima
Benghson da Silveira Dantas
Fabrice Marc Joye
Igor Flávio Simões de Sousa
Luiz Bezerra de Andrade FIlho
Lucas do Amaral Saboya
Marcos do Nascimento Portela
Ricardo Werlang
Samantha Onofre Lóssio
Tibério Bezerra Soares
Thuan Saraiva Nabuco

Revisão Textual
Aurea Suely Zavam
Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Revisão Web
Débora Liberato Arruda Hissa
Saulo Garcia

Logística
Francisco Roberto Dias de Aguiar
Virgínia Ferreira Moreira

Secretários
Breno Giovanni Silva Araújo
Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar
Bernardo Matias de Carvalho
Carla Anaíle Moreira de Oliveira
Maria Tatiana Gomes da Silva
Wagner Souto Fernandes
Zuila Sâmea Vieira de Araújo

Catalogação na Fonte: Etelvina Marques (CRB 3 – Nº 615)

C972f Cunha, Francisco Gêvane Muniz

Fundamentos de álgebra / Francisco Gêvane Muniz
Cunha; Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE,
2009.
174p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-63953-06-3

1. VETORES 2. SISTEMAS LINEARES 3.MATRIZES (MATEMÁTICA)
4. DETERMINANTES (MATEMÁTICA) 5. PROGRESSÕES (MATEMÁTICA)
6. ÁLGEBRA I. Joye, Cassandra Ribeiro. (Coord.) II. Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE III. Universidade
Aberta do Brasil IV. Título

CDD – 512

SUMÁRIO

Apresentação 8
Referências 173
Currículo 175

AULA 1 **Vetores no plano e no espaço: primeiras noções 9**
Tópico 1 Vetores: importância e ensino 10
Tópico 2 Escalares e vetores 15
Tópico 3 Operações com vetores 19

AULA 2 **Vetores em R^n 26**
Tópico 1 Vetores em sistemas de coordenadas 27
Tópico 2 Vetores em R^n 32

AULA 3 **Introdução aos sistemas de equações lineares 39**
Tópico 1 Equações lineares 40
Tópico 2 Sobre o conjunto solução de uma equação linear 44
Tópico 3 Sistemas de equações lineares: conceitos e notação 48

AULA 4 **Resolução de sistemas lineares: método de eliminação de Gauss 54**
Tópico 1 Discussão sobre o conjunto solução de um sistema linear 55
Tópico 2 Resolução de um sistema linear pelo método de eliminação de Gauss 61

AULA 5 **Matrizes: noções, notação e formatos especiais** **70**
Tópico 1 Importância e primeiras noções de matrizes 71
Tópico 2 Notação matricial 75
Tópico 3 Matrizes de formato especial 79

AULA 6 **Matrizes: Operações e Propriedades** **87**
Tópico 1 Adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por escalar 88
Tópico 2 Multiplicação de matrizes 94

AULA 7 **Sistemas Lineares e matrizes** **100**
Tópico 1 Matrizes associadas a um sistema Linear 101
Tópico 2 Matrizes escalonadas 104
Tópico 3 Escalonamento de matrizes 106

AULA 8 **Inversão de matrizes e o uso do excel para o cálculo com atrizes** **116**
Tópico 1 Inversa de uma matriz 117
Tópico 2 Métodos para o cálculo da inversa 124
Tópico 3 Cálculo com matrizes usando planilhas eletrônicas 129

AULA 9 **Determinantes** **134**

Tópico 1 Sobre a história e o ensino de determinantes 135

Tópico 2 Determinantes de matrizes 1X1, 2X2 E 3X3 139

Tópico 3 Determinantes de matrizes NXN: expansão em co-fatores 143

Tópico 4 Propriedades e resultados dos determinantes 149

AULA 10 **Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas** **152**

Tópico 1 Sequência ou sucessão 153

Tópico 2 Progressões Aritméticas 160

Tópico 3 Progressões Geométricas 165

Tópico 4 Aplicações e recursos para progressões geométricas 170

APRESENTAÇÃO

Olá turma,

Nesta disciplina, Fundamentos de Álgebra, de 100h/a, apresentamos fundamentos essenciais para o curso de Licenciatura em Matemática do IFCE. Nela, abordamos alguns conteúdos básicos de Matemática dos currículos do Ensino Médio, procurando dar um tratamento mais no nível de graduação. Os assuntos podem ser divididos em duas partes. A primeira parte, mais extensa, é composta por temas de Álgebra Linear, a saber: vetores, sistemas lineares, matrizes e determinantes. Na segunda parte, apresentamos as progressões aritméticas e as progressões geométricas.

Os temas discutidos na disciplina fornecem uma maneira de analisar e resolver problemas em muitas áreas aplicadas. Como ocorre com tantas disciplinas da Matemática, os assuntos envolvem conceitos, teoremas, provas, fórmulas e cálculos de vários tipos. Abrangem três aspectos: o geométrico, o algébrico e o numérico (ou computacional). Entretanto, o mais importante é o entendimento de como as ideias discutidas na disciplina se inter-relacionam.

As teorias apresentadas constituem a base para estudos mais aprofundados e são uma excelente oportunidade para se exercitar: argumentação teórica, construção de demonstrações e relacionamento de conceitos abstratos com suas aplicações.

A sua participação nas atividades e em cada aula será essencial para que você possa tirar o maior proveito da disciplina. Eu, como professor conteudista e formador da disciplina, e toda a equipe de tutores estaremos à disposição para maiores esclarecimentos.

Desejo um bom curso a todos!

Francisco Gêvane Muniz Cunha.

AULA 1

Vetores no plano e no espaço: primeiras noções

Olá! Esta é a nossa primeira aula. Nela, aprenderemos um pouco sobre os vetores. Introduziremos a noções básicas de vetores, realizaremos certas operações com vetores e examinaremos algumas das propriedades dessas operações geometricamente. O estudo de vetores é essencial para a Álgebra Linear. Nossa disciplina, Fundamentos de Álgebra, servirá de fundamentação para a de Álgebra Linear. Nela, além dos vetores, trataremos dos sistemas lineares, das matrizes e dos determinantes. Faremos ainda um breve estudo sobre as progressões aritméticas e geométricas.

A disciplina de Álgebra Linear, que ocupa uma posição central na matemática de hoje, é uma compilação de ideias variadas, porém inter-relacionadas, que fornecem uma maneira de analisar e resolver problemas em muitas áreas aplicadas. A Álgebra Linear abrange três aspectos: o geométrico, o algébrico e o numérico (ou computacional). Como ocorre com tantas disciplinas da matemática, o assunto envolve conceitos, teoremas, provas, fórmulas e cálculos de vários tipos. Entretanto, em Álgebra Linear, mais importante do que a parte computacional é o entendimento de como as ideias discutidas na disciplina se inter-relacionam. Muitas vezes, a chave para resolver um problema usando a Álgebra Linear é "atacar" o problema do ponto de vista correto. Nesse campo, será fundamental que você domine as ideias e suas inter-relações. Desse modo, você terá as ferramentas para se apropriar de muitos outros conhecimentos importantes.

Objetivos

- Introduzir o estudo de vetores e contextualizar o seu ensino
- Conhecer a notação vetorial e conceitos básicos relacionados a vetores
- Realizar operações com vetores
- Conhecer propriedades das operações com vetores

TÓPICO 1

Vetores: importância e ensino

Objetivos

- Compreender a importância dos vetores
- Situar o ensino de vetores no Ensino Médio

A noção de vetor, assim como as demais que veremos, é uma das ferramentas essenciais para o estudo da matemática. Dada a sua importância e as amplas aplicações que encontra, tornou-se um fundamento exigido não só de matemáticos, como também de físicos, engenheiros e outros profissionais. Escolhemos iniciar nossa disciplina com a noção de vetor. Com essa abordagem, poderemos, por exemplo, interpretar as soluções de sistemas lineares como objetos geométricos (como pontos, retas e planos), em vez de apenas como conjuntos amorfos.

SAIBA MAIS!

O vocábulo amorfo vem do termo grego ámorphos e significa sem forma definida, informe. Em matemática, um conjunto amorfo é um conjunto desprovido de qualquer tipo de estrutura. Na disciplina de Estrututaras Algébricas, ao aprofundará o estudo da natureza dos conjuntos, você verá que eles podem ser dotados de diversas estruturas e podem ser comparados mediante os morfismos adequados.

Desse modo, o uso de vetores simplifica e esclarece enormemente o estudo dos sistemas lineares. Poderemos também interpretar as linhas e colunas das matrizes como vetores. Isso nos dá uma ideia da importância dos vetores para a própria Álgebra Linear.

Outra aplicação dos vetores na própria matemática se dá na disciplina de Geometria Analítica. Segundo Rosa (s/d) *"a geometria analítica com vetores é muito mais concreta e simples do que a geometria analítica renascentista (sem vetores) que é ministrada (nas raras vezes em que há tempo para isto) no Ensino Médio"*. Há inúmeros caminhos para a resolução de problemas geométricos através da Álgebra, porém o tratamento vetorial é o mais indicado pela sua elegância e simplicidade. O estudo da Geometria Analítica com vetores torna-se muito mais simples, fácil de entender e ligado à realidade tecnológica que vivemos. Quando se discute este conteúdo na perspectiva da dinâmica dos vetores, o(a) aluno(a) intui e percebe a ideia de movimento, deslocamento, variações de um ponto a outro, ou seja, consegue visualizar a transformação geométrica causada pelo vetor. Conhecimentos sobre os conceitos relativos a vetores e a aspectos básicos da Geometria Analítica Espacial capacitam o aluno a interpretar e compreender problemas relacionados à matéria e a promover a aplicação dos conceitos abordados, em certas áreas do conhecimento. Neste sentido, as orientações curriculares para o ensino médio sugerem para o ensino de Geometria Analítica:

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física. (BRASIL, 2006, p. 77)

VOCÊ SABIA?

Vetor vem do Latim vector e significa "aquele que transporta ou leva algo". Desse modo, em Matemática, os vetores devem ser entendidos como os agentes que produzirão movimentos.

Embora a ideia de vetor tenha sido introduzida no século XIX, sua utilidade em aplicações - particularmente as aplicações em ciências físicas - não foi percebida até o século XX. Mais recentemente, vetores tiveram aplicações em Ciência da Computação, Estatística, Economia e Ciências Sociais (POOLE, 2006, p. 1).

A ideia de compreender vetor como uma operação de transporte de pontos é, de fato, bastante interessante. Os vetores agem no espaço dos pontos, transportando-os em linha reta. Esta visão contemporânea dos vetores, traduzida para linguagem mais simples, corresponde a dizer que os vetores são ações que causam deslocamentos dos pontos.

Os tópicos da Álgebra Linear que discutiremos em nossa disciplina, a saber, vetores, matrizes, determinantes e sistemas lineares, poderiam ser ordenados de diversas maneiras. Poderíamos, por exemplo, começar com sistemas lineares, com matrizes ou com vetores. No Ensino Médio, no Brasil, o importante conceito de vetor é, de modo geral, omitido pelos autores e, tradicionalmente, a ordem de apresentação dos assuntos é: inicialmente as matrizes, em seguida os determinantes e, por fim, os sistemas lineares. Essa ordem e toda a abordagem feita nos livros didáticos brasileiros para essa parte da Álgebra Linear são discutíveis. Em seu livro Exame de textos, Elon Lages Lima et al., fazem uma análise aprofundada do ensino desse tópico nos principais livros didáticos de matemática para o Ensino Médio brasileiros.

A seguir, apresentamos alguns de seus comentários:

> Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor, que deveria ser o centro das considerações desses três capítulos [matrizes, determinantes e sistemas lineares, g.n.], é personagem ausente deste [livro *Matemática, aula por aula* – volume 1 de Benigno e Cláudio, g.n.] e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física. Com isto, fica impossível olhar para tais assuntos do ponto de vista geométrico, perdendo-se assim um importante aliado do bom entendimento, que é a intuição espacial. Fica-se também impedido de falar das transformações geométricas simples que abundam em nosso dia-a-dia, como rotações, translações e dilatações ou contrações (mudanças de escala), as quais dariam um significado concreto à noção de matriz e às operações entre matrizes, principalmente a multiplicação. (LIMA *et al.*, 2001, p. 62)

Para Lima *et al*. (2001), os vetores são uma ferramenta extremamente útil, simplificando cálculos e permitindo soluções simples e elegantes de diversos problemas. Como exemplo eles citam o seguinte problema básico:

Problema: *ABCD* é um paralelogramo e os vértices A, B e C são dados em coordenadas. Determine o vértice D.

E comentam:

> Se o aluno conhece vetores dará a resposta imediatamente: $D = A + C - B$. Se não conhece terá que estudar o Capítulo 2 [A reta, g.n.], construir as equações de duas retas paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e fazer a interseção delas. (LIMA *et al.*, 2001, p. 131)

Enquadrando sob a epígrafe de Álgebra Linear, os capítulos de matrizes, determinantes e sistemas lineares, Lima *et al*. (2001), concluem:

> O tratamento deste tópico no livro genérico é provavelmente o mais anacrônico e mal concebido de todo o programa de Matemática do Ensino Médio. A noção de vetor que, como já dissemos acima, seria o elemento unificador, esclarecedor

e simplificador, não é mencionada, embora esteja presente nas linhas e colunas das matrizes e nas soluções dos sistemas. (LIMA *et al.*, 2001, p. 465)

Para compreendermos melhor o conceito e a importância dos vetores, uma boa motivação é a participação em um jogo simples que introduz algumas das ideias cruciais, conhecido como "O Jogo da Pista de Corrida", descrito no texto abaixo:

SAIBA MAIS!

Assim como as "matrizes", os "vetores" são uma espécie de quantidade de que se ocupa a Álgebra Linear. O termo vetor apresenta significado distinto na Engenharia, na Matemática e em outras ciências, e, em cada uma, tem aplicações específicas. Os vetores são usados, por exemplo, na navegação e no estudo de forças e do movimento. Vetores em dimensões maiores ocorrem em campos tão diversos como a Genética, a Economia, a Cristalografia e a Ecologia. Os vetores também são utilizados na Teoria da Relatividade para ajudar a descrever a natureza da gravidade, do espaço e da matéria (ANTON; BUSBY, 2006).

Introdução: O Jogo da Pista de Corrida

O jogo se desenvolve em um papel quadriculado. Uma pista, com uma linha de partida e uma linha de chegada, é desenhada no papel. A pista pode ser de qualquer comprimento e forma, desde que seja suficientemente larga para que cada jogador possa ser representado nesse espaço. Neste exemplo, temos dois jogadores (vamos chamá-los de Ana e Beto), que usam canetas de cores diferentes para representar seus carros ou bicicletas, ou outra coisa que eles usem para percorrer a pista (vamos pensar em Ana e Beto como ciclistas).

Ana e Beto começam desenhando uma marca sobre a linha de partida, em um dos pontos da grade do papel quadriculado. Eles se revezam para avançar para um novo ponto da grade, de acordo com as seguintes regras:

1. Cada novo ponto da grade e o segmento de reta que o liga ao ponto anterior precisam estar inteiramente dentro da pista;

2. Dois jogadores não podem ocupar o mesmo ponto da grade ao mesmo tempo (Esta é a regra que proíbe colisões);

3. Cada novo movimento está relacionado com o movimento anterior da seguinte maneira: se, em um movimento, um jogador anda a unidades horizontalmente e b unidades verticalmente, então,

em seu próximo movimento, esse jogador deve andar entre $a-1$ e $a+1$ unidades horizontalmente, e entre $b-1$ e $b+1$ unidades verticalmente. Em outras palavras, se o segundo movimento é de c unidades horizontalmente e d unidades verticalmente, então $|a-c| \leq 1$ e $|b-d| \leq 1$ (Esta é a regra da "aceleração/desaceleração"). Note que esta regra obriga o primeiro movimento a ser de uma unidade verticalmente e/ou de uma unidade horizontalmente;

4. É eliminado o jogador que colide com outro ou sai da pista.

O vencedor é o primeiro jogador que cruza a linha de chegada. Se mais de um jogador cruzar a linha de chegada na mesma vez, aquele que ultrapassa mais a linha de chegada será o vencedor.

No exemplo de jogo mostrado na figura 1 (cf. abaixo), a vencedora foi Ana. Beto acelerou demais e teve dificuldade para fazer a curva na parte superior da pista. Para entender a regra 3, considere o terceiro e o quarto movimentos de Ana. Em seu terceiro movimento, ela andou uma unidade horizontalmente e três unidades verticalmente. Em seu quarto movimento, as opções que Ana tinha eram andar de zero a duas unidades horizontalmente e de duas a quatro unidades verticalmente (Note que algumas dessas combinações a teriam levado para fora da pista). Ela escolheu andar duas unidades em cada direção.

Embora simples, esse jogo introduz várias noções que serão úteis em nosso estudo de vetores.

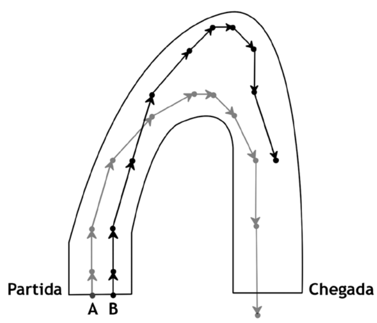


Figura 1 – Exemplo de jogo de pista de corrida

(Extraído de POOLE, 2006, p. 1-2)

Que tal jogar um pouquinho o jogo da pista de corrida com um amigo antes de continuar?

TÓPICO 2

Escalares e vetores

Objetivos

- Compreender conceitos básicos relacionados a vetores
- Conhecer e utilizar a notação vetorial

Muitas quantidades físicas mensuráveis podem ser completamente descritas pela especificação de um valor numérico (sua magnitude). Tais quantidades, como comprimento, área, volume, massa e temperatura, são denominadas escalares. Outras quantidades, como velocidade, força e aceleração, requerem não só a magnitude, mas também uma direção e sentido para sua completa descrição. Essas quantidades são os vetores.

A temperatura e o comprimento, por exemplo, são escalares porque são completamente descritos por um número que diz com "quanto" estamos tratando: digamos, uma temperatura de 35°C ou um comprimento de 12 cm.

Por outro lado, velocidade e força são vetores porque envolvem, além de um valor numérico, uma direção e um sentido. Vejamos:

A velocidade de um navio é um vetor que consiste na intensidade ou rapidez do navio (valor numérico que indica quão rápido o navio se desloca - tal como 10 nós, mas não diz em que direção o navio está indo) e na sua direção e sentido, digamos, 10 nós na direção nordeste da bússola (figura 2). A rapidez (também chamada velocidade escalar), junto com uma direção e um sentido, forma uma quantidade vetorial denominada *vetor velocidade*.

- Quando uma força é aplicada a um objeto, o efeito resultante depende da magnitude da força e da direção e sentido em que é aplicada. Por exemplo, embora tenham a mesma magnitude, as três forças de 10 kgf da figura 3 têm efeitos diferentes sobre o bloco por causa das diferenças em suas direções e sentidos. Junto com uma direção e um sentido, a força forma uma quantidade vetorial denominada *vetor força*.

VOCÊ SABIA?

Nós é o mesmo que milhas náuticas por hora. Esta é uma maneira tradicional de medir a rapidez v na água.

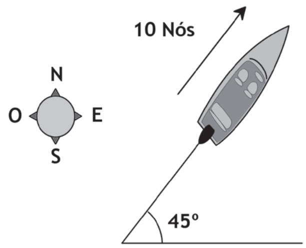


Figura 2 – Vetor Velocidade

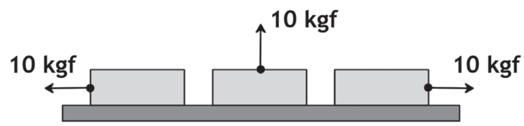


Figura 3 – Vetor Força

Geometricamente, vetores no plano (espaço bidimensional) ou no espaço (espaço tridimensional) podem ser representados por setas (segmentos de reta orientados): o comprimento da seta é proporcional à *magnitude* (ou parte numérica) do vetor, e a direção e sentido da seta indicam a direção e o sentido do vetor. A origem da seta é denominada *ponto inicial* do vetor, e a extremidade da seta é o *ponto final* do vetor.

GUARDE BEM ISSO!

A magnitude de um vetor é também chamada de *comprimento, tamanho, módulo ou norma* do vetor.

Nesta primeira lição, trataremos dos vetores no plano ou no espaço, quando é possível representá-los geometricamente. Na próxima lição, de posse da representação algébrica dos vetores, estudaremos vetores no espaço *n*-dimensional ou $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$.

ATENÇÃO!

O conceito de espaço n-dimensional com $n \geq 1$ (plano quando $n = 2$ e espaço quando $n = 3$) será introduzido formalmente na próxima aula.

Em nosso texto, denotaremos vetores com letras minúsculas em negrito, como **a**, **b**, **u**, **v**, **x** e **y**, e escalares com minúsculas em itálico, como *a, b, u, v, x* e *y*. Se um vetor v tem ponto inicial A e ponto final B então denotamos o vetor por

$$v = \overrightarrow{AB},$$

se queremos explicitar os pontos inicial e final (figura 4).

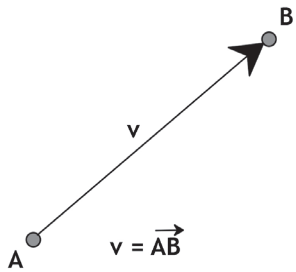


Figura 4 – Notação de Vetor

GUARDE BEM ISSO!

Uma vez que é difícil indicar negrito quando se escreve à mão, algumas pessoas preferem escrever $\vec{V}$ para representar o vetor denotado por v no texto impresso. Entretanto, em geral, é aceitável usar simplesmente a letra v minúscula. Geralmente ficará claro, pelo contexto, se essa letra denota um vetor ou não.

O comprimento da seta representa a magnitude do vetor, o corpo da seta indica a direção, e a ponta da seta indica o sentido.

O vetor cujos pontos inicial e terminal coincidem tem comprimento zero. Denominamos este vetor de *vetor zero* ou *vetor nulo* e o denotamos por **0**. Como o vetor nulo não possui direção ou sentido naturais, convencionamos que ele tem a direção e o sentido que forem convenientes para os nossos propósitos.

Um vetor $\overrightarrow{AB}$ corresponde ao *deslocamento* de um ponto *A* até outro ponto *B,* conforme mostra a Figura 4. Poole (2006, p. 3) destaca que:

> A palavra vetor vem de um radical latino que significa "carregar" [tranportar ou levar, conforme vimos no Tópico 1, g.n.]. Um vetor é formado quando um ponto é deslocado – ou "carregado" – por uma certa distância em uma certa direção. Visto de outro modo, um vetor "carrega" duas peças de informação: seu comprimento e sua direção.

Dizemos que dois vetores são *iguais* ou *equivalentes* se eles têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido (figura 5). Indicamos que **v** e **w** são equivalentes escrevendo $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Geometricamente, dois vetores são iguais se obtemos um deles deslocando o outro paralelamente a si próprio (ou seja, fazendo uma *translação),* até que os dois vetores coincidam.

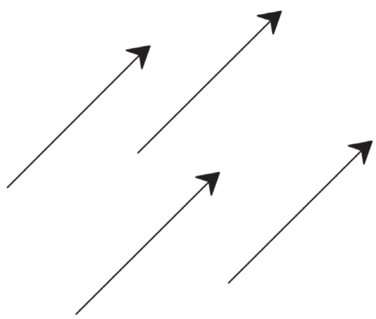


Figura 5 – Vetores Iguais

Embora tenham diferentes pontos iniciais e finais, os vetores são iguais por serem representados por setas paralelas de mesmo comprimento, direção e sentido. Eles representam o mesmo deslocamento.

SAIBA MAIS!

Saiba um pouco sobre a origem do uso de setas (segmentos de retas orientados) para representar vetores lendo o texto seguinte:

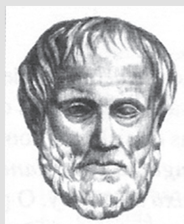
A Álgebra Linear na História

A ideia de poder utilizar um segmento de reta orientado (uma seta) para representar a magnitude, a direção e o sentido de uma velocidade, de uma força ou de um deslocamento, desenvolveu-se gradualmente no decorrer de um longo período de tempo. O lógico grego Aristóteles, por exemplo, sabia que o efeito combinado de duas forças era dado pela lei do paralelogramo e o astrônomo italiano Galileu enunciou a lei explicitamente em seu trabalho de Mecânica. Aplicações de vetores à Geometria apareceram num livro intitulado Der Barycentrische Calcul, publicado em 1827 pelo matemático alemão August Ferdinand Mõbius. Em 1837 Mõbius publicou uma obra de Estática na qual ele usava a ideia de resolver um vetor em componentes. Durante o mesmo período, o matemático italiano Giusto Bellavitis propôs uma "álgebra" de segmentos de reta orientados nos quais os segmentos de reta de mesmo comprimento, direção e sentido deveriam ser considerados iguais. Bellavitis publicou seu trabalho em 1832.

Aristóteles
(384 a.C. - 322 a.C.)

Galileu Galilei
(1564- 1642)

August Ferdinand Mõbius
(1790- 1868)



Giusto Bellavitis
(1803- 1880)

(Extraído de ANTON; BUSBY, 2006, p. 25)

Agora que já sabemos o conceito de vetor e a maneira como descrevê-los, que tal aprender um pouco mais sobre estes objetos tão importantes e úteis? Passemos, então, ao nosso próximo tópico.

TÓPICO 3

Operações com vetores

Objetivos

- Conhecer operações básicas com vetores
- Estabelecer propriedades algébricas das operações dos vetores

Existem várias operações algébricas importantes efetuadas com vetores. Estas operações são, em geral, originando das leis da Física. A partir de agora, conheceremos algumas delas. Estudaremos, especialmente, aquelas que serão úteis para o nosso trabalho com os sistemas lineares, as matrizes e os determinantes.

3.1 ADIÇÃO DE VETORES

Muitas vezes queremos colocar "um vetor depois do outro" e assim fazer um deslocamento suceder outro, como no jogo da pista de corrida. Isso nos leva à noção de *adição de vetores*, a primeira das operações básicas com vetores.

Se colocarmos **w** depois de **v**, poderemos visualizar o deslocamento total como um terceiro vetor, denotado por **v + w**, chamado *soma* de **v** com **w**. Para vetores no plano ou no espaço, esta regra pode ser visualizada geometricamente:

Definição$_1$ (Regra do Triângulo para a Adição de Vetores): *Se* **v** *e* **w** *são vetores no plano ou no espaço que estão posicionados de tal modo que o ponto inicial de* **w** *é o ponto final de* **v**, *então a* **soma v + w** *é o vetor representado pela seta desde o ponto inicial de* **v** *até o ponto final de* **w** (figura 6a).

De forma equivalente, transladando **v** e **w** paralelamente a eles mesmos, obtemos um paralelogramo, denominado de *paralelogramo determinado por* **v** *e* **w**, que nos leva a uma versão equivalente à regra do triângulo para a adição de vetores no plano ou no espaço:

Definição$_2$ (Regra do Paralelogramo para a Adição de Vetores): *Se* **v** *e* **w** *são vetores no plano ou no espaço que estão posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem, então os dois vetores formam lados adjacentes de um paralelogramo e a* **soma v + w** *é o vetor representado pela seta desde o ponto inicial comum de* **v** *e* **w** *até o vértice oposto do paralelogramo* (figura 6b).

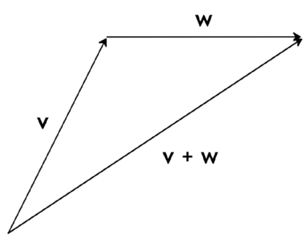


Figura 6a – Regra do Triângulo

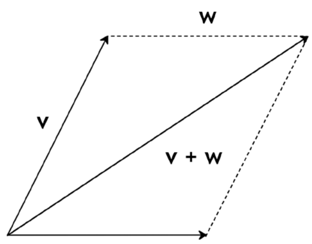


Figura 6b – Regra do Paralelogramo

De acordo com Anton e Busby (2006, p. 25):

> A regra do paralelogramo para a adição vetorial descreve corretamente o comportamento aditivo de forças, velocidades e deslocamentos na Engenharia e na Física. Por exemplo, o efeito de se aplicar as duas forças F_1 e F_2 ao bloco na figura 7 é o mesmo que aplicar a única força $F_1 + F_2$ ao bloco. Analogamente, se o motor do barco na figura 7 impõe uma velocidade v_1 e o vento impõe uma velocidade v_2 então o efeito combinado de motor e vento impõem a velocidade $v_1 + v_2$ ao barco. Finalmente, se uma partícula sofre um deslocamento $\overrightarrow{AB}$ de A até B e em seguida um deslocamento $\overrightarrow{BC}$ de B a C (figura 7), então os deslocamentos sucessivos são iguais ao único deslocamento $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ de A a C.

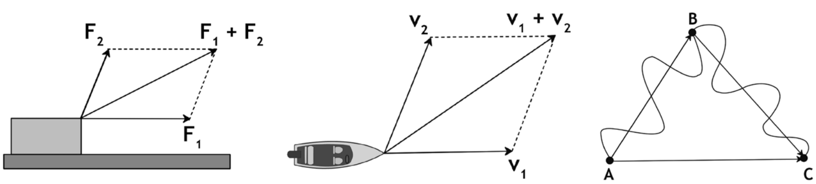


Figura 7 – Comportamento aditivo de vetores na Engenharia e na Física

MULTIPLIÇÃO DE VETOR POR ESCALAR

Às vezes ocorre a necessidade de se mudar o comprimento de um vetor ou mudar seu comprimento e trocar seu sentido. Isto é alcançado com um tipo de multiplicação na qual vetores são multiplicados por escalares. Esta é a segunda operação básica que fazemos com vetores. Formalmente,

Definição$_3$: *Se* **v** *é um vetor não-nulo e k é um escalar (número real) não-nulo, então o múltiplo escalar de* **v** *por k, denotado por k***v***, é o vetor de mesma direção do que* **v***, cujo comprimento é* $|k|$ *vezes o comprimento de* **v** *e cujo o sentido é o mesmo que o de* **v** *se* $k > 0$ *e o oposto do de* **v** *se* $k < 0$. *Se* $k = 0$ *ou* $v = 0$ *, então* $kv = 0$.

Como exemplo, o produto 2**v** denota o vetor de mesma direção e sentido do que **v**, mas com o dobro do comprimento, e o produto -3**v** denota o vetor de mesma direção do que v, mas com o sentido oposto e o triplo do comprimento. Um caso especial de múltiplo escalar é (-l)**v**, denotado por -**v** e chamado *oposto* de **v** ou *negativo* de **v**, que tem o mesmo comprimento e direção do que **v**, mas sentido oposto. A figura 8 mostra a relação geométrica entre um vetor **v** com alguns de seus múltiplos escalares. Levando-se em conta a translação de vetores, a figura 8 mostra também que dois vetores são múltiplos escalares um do outro se e somente se eles são *paralelos*.

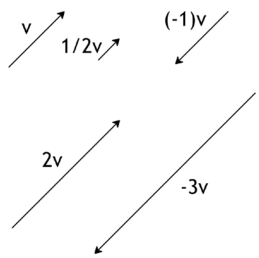


Figura 8 – Múltiplos Escalares de "v"

SUBTRAÇÃO DE VETORES

O oposto de **v** é usado para definir a subtração de vetores em termos da adição. Esta é a mesma ideia usada na aritmética comum de números quando escrevemos $a - b = a + (-b)$, que expressa a subtração em termos da adição.

Definição$_4$: *Se* **v** *e* **w** *são vetores no plano ou no espaço, então a* **diferença** *de* **v** *com* **w** *é o vetor* **w − v**, *definido por*

$$w - v = w + (-v)$$

Geometricamente, a diferença de **v** com **w** pode ser obtida pelo método do paralelogramo (figura 9a) ou, mais diretamente, posicionando **w** e **v** de tal modo que seus pontos iniciais coincidem e traçando um vetor do ponto terminal de **v** ao ponto terminal de **w** (figura 9b), ou seja, **w – v** corresponde à "outra" diagonal do paralelogramo determinado por **v** e **w**.

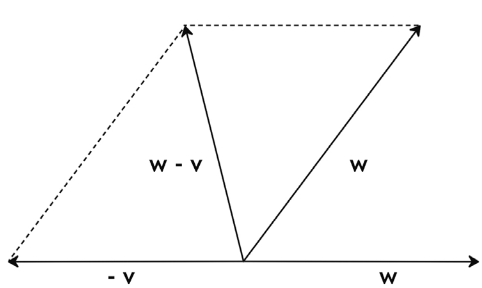


Figura 9a–
Regra do Paralelogramo para w – v

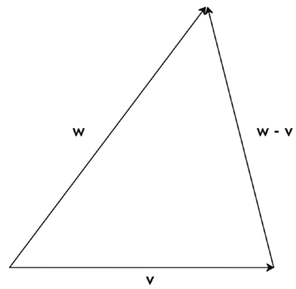


Figura 9b–
Regra do Paralelogramo para w – v

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES COM VETORES

As operações com vetores gozam de algumas propriedades importantes, que apresentaremos formalmente na próxima aula, quando introduzirmos a representação algébrica dos vetores. Neste tópico, falaremos, introdutoriamente, de algumas dessas propriedades. Uma delas é a *comutatividade* da adição:

v + w = w + v, *quaisquer que sejam os vetores* **v** *e* **w** *do plano ou do espaço.*

No plano ou no espaço, a comutatividade da adição fica evidenciada pela figura 10, abaixo. Nela, estão construídas as somas **v + w** e **w + v** pela regra do triângulo. A figura 10 indica ainda que a soma obtida pela regra do triângulo coincide com a soma obtida pela regra do paralelogramo.

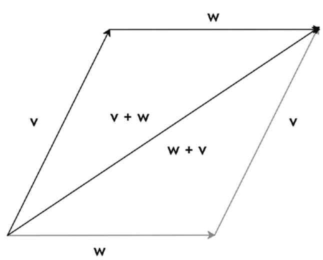


Figura 10 – Regra do Triângulo para "v + w" e "w + v"

Outra propriedade da adição de vetores que pode ser ilustrada geometricamente no plano ou no espaço (figura 11a) é a *associatividade* da adição:

(u + v) + w = u + (v + w), *quaisquer que sejam os vetores* **u**, **v** *e* **w** *do plano ou do espaço.*

Pela associatividade da adição, podemos, sem ambigüidade, escrever **u +**

$\mathbf{v} + \mathbf{w}$ omitindo os parênteses, já que resulta na mesma soma independentemente da maneira em que inserimos parênteses (isto é, podemos agrupar os somandos na ordem que quisermos). Pela comutatividade, podemos também rearranjar os somandos (por exemplo, como $\mathbf{w} + \mathbf{u} + \mathbf{v}$) se assim o desejarmos.

A figura 11a também mostra que o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ pode ser obtido colocando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ cada um com ponto inicial no ponto final do anterior e então traçando o vetor do ponto inicial de $\mathbf{u}$ até o ponto final de $\mathbf{w}$. Este resultado se generaliza ainda para somas de quatro ou mais vetores do plano ou do espaço (figura 11b) e é conhecido como *Regra da Poligonal para a Adição de Vetores* .

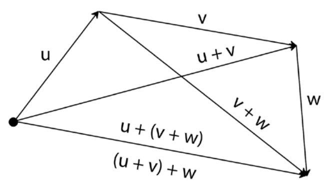


Figura 11a – Soma de Três Vetores no Plano ou no Espaço

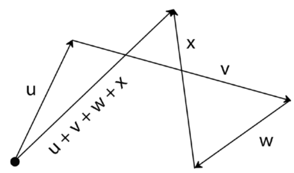


Figura 11b – Soma de Quatro Vetores no Plano ou no Espaço

De modo geral, somas de quatro ou mais vetores podem ser efetuadas sem levarmos em conta a ordem ou a maneira de agrupar. Em geral, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são vetores, escrevemos sua soma sem parênteses por:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_k$$

O método de colocar ponto inicial no final do anterior torna evidente que se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores do espaço que estão posicionados com um ponto inicial comum, então $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ é a diagonal do paralelepípedo que tem os três vetores como arestas adjacentes (figura 12).

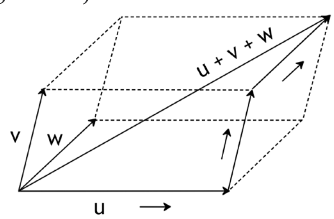


Figura 12 – Soma de Três Vetores no Espaço

As operações de adição, subtração e multiplicação por escalar são usadas, frequentemente, em combinação para formar novos vetores. Por exemplo, se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores dados, então os vetores

$$\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 \text{ e } \mathbf{w}_2 = 4\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3$$

são obtidos desta maneira. De modo geral, podemos dizer:

Definição$_5$: *Um vetor* **w** *é uma* **combinação linear** *dos vetores* $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$ *do plano ou do espaço se* **w** *pode ser expresso na forma:*

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k$$

Os escalares $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k$ *são denominados* **coeficientes** *da combinação linear.*

No caso em que $k = 1$, a expressão da definição acima se torna $w = c_1v_1$. Desse modo, dizer que **w** é uma combinação linear de v_1 é o mesmo que dizer que **w** é um múltiplo escalar de v_1.

Na próxima aula, apresentaremos uma maneira de representar os vetores algebricamente. Isto nos permitirá definir as operações com vetores e suas propriedades em termos de seus componentes e possibilitará generalizar os conceitos vistos aqui para ambientes mais amplos que o plano e o espaço.

SAIBA MAIS!

Você pode aprofundar seus conhecimentos consultando as referências que citamos e/ou visitando páginas da internet. Abaixo listamos algumas páginas interessantes que podem ajudá-lo nessa pesquisa:

https://www.stoodi.com.br/materias/fisica/vetores/

http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/vetores/

http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap91s3.html

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Faça o que se pede:

a) Que características de um vetor precisamos conhecer para que ele fique determinado?

b) O que são vetores iguais? E vetores opostos? Dê exemplos de cada um deles.

2. Em cada item, desenhe os vetores deslocamento que representam o percurso de um andarilho e o vetor que representa o seu deslocamento a partir do ponto inicial.

a) Ele anda 4km na direção norte, depois 5km na direção nordeste e, finalmente mais 4km na direção sul.

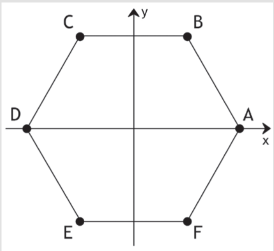
b) Ele anda 3km na direção norte, depois 4km na direção leste, em seguida 5km na direção sul e, finalmente mais 4km na direção oeste.

c) Ele anda 6km na direção sul e depois outros 6km na direção oeste.

d) Ele anda 7km na direção leste e depois 5km na direção nordeste.

3. Para os itens (a), (b) e (c) do problema 1, descreva precisamente o vetor que representa o deslocamento do andarilho a partir do ponto inicial, dando sua magnitude, direção e sentido.

4. Na figura seguinte, A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular centrado na origem O.



Hexágono Regular

Expresse cada um dos seguintes vetores em termos de $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$:

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{FE}$

c) $\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{FC}$

e) $\overrightarrow{AC}$

f) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED}$

5. Diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação dada. Justifique sua resposta.

a) Se u + v = u + w, então v = w.

b) Se x + y = 0, então ax + by = 0 para quaisquer a e b.

c) Vetores paralelos de mesmo comprimento são iguais.

d) Se ax = 0, então a = 0 ou x = 0.

e) Se ax + by = 0, então x e y são vetores paralelos.

AULA 2 | Vetores em R^n

Olá! Nesta aula continuaremos o nosso estudo de vetores. Na primeira aula, introduzimos a noção de vetores e, com vetores do plano (espaço bidimensional ou R^2) ou do espaço (espaço tridimensional ou R^3), realizamos algumas operações básicas e examinamos algumas das propriedades dessas operações geometricamente. Apresentaremos, agora, uma maneira de representar os vetores algebricamente. Isto nos permitirá definir as operações com vetores e suas propriedades considerando seus componentes e possibilitará generalizar os conceitos vistos na primeira aula para ambientes mais amplos do que o plano e o espaço. Mais precisamente, estudaremos vetores no espaço n-dimensional ou R^n, $n \geq 1$.

Objetivos

- Recordar sistemas de coordenadas no plano e no espaço
- Representar vetores algebricamente
- Generalizar as noções de vetores para o espaço R^n
- Realizar operações com vetores do R^n
- Entender propriedades algébricas das operações com vetores

TÓPICO 1

Vetores em sistemas de coordenadas

OBJETIVOS

- Recordar sistemas de coordenadas no plano e no espaço
- Representar vetores algebricamente

A utilização das setas é bem útil para a descrição geométrica de vetores. Entretanto, devemos dispor de alguma maneira de descrever os vetores algebricamente. A representação algébrica de vetores é necessária para que possamos, por exemplo, estudar vetores em ambientes mais amplos do que o plano ou o espaço, como o espaço *n*-dimensional ou $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$. Para isso consideramos os vetores em sistemas de coordenadas retangulares.

Você já deve estar familiarizado com as noções básicas de sistemas coordenados no plano e no espaço. Essas noções foram introduzidas na disciplina de *Geometria Plana e Espacial* do primeiro semestre. Faremos, então, uma breve revisão.

SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES NO PLANO ($\mathbb{R}^2$)

Um *sistema de coordenadas retangulares no plano* consiste de dois eixos coordenados perpendiculares que em geral são denominados *eixo x* e *eixo y*. O ponto de interseção dos eixos é denominado a *origem* do sistema de coordenadas. Vamos supor que a mesma escala seja utilizada em ambos os eixos e que o eixo *y* positivo está a 90° no sentido anti-horário a partir do eixo *x* positivo (figura 1a).

Uma vez introduzido um sistema de coordenadas retangulares no plano, podemos obter uma correspondência bijetora entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais (figura 1b). Por esta correspondência, cada ponto *P* está associado a um único par ordenado (*a, b*) de números reais, e cada par ordenado de números reais (*a, b*) está associado a um único ponto *P*. Os números do par ordenado são denominados as *coordenadas* de *P*, e o ponto é denotado por *P*(*a, b*) quando desejamos enfatizar suas coordenadas.

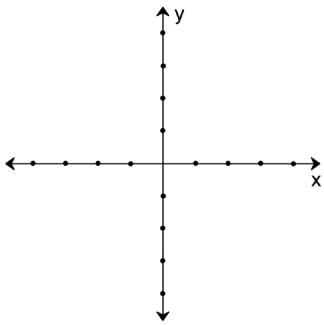


Figura 1a–
Sistema de coordenadas retangulares no plano

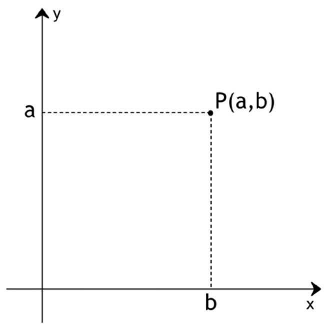


Figura 1b–
Correspondência entre pontos do plano
e pares de números reais

Feita a correspondência acima, usamos o símbolo $\mathbb{R}^2$ para denotar tanto o conjunto dos pontos de um plano com um sistema de coordenadas retangulares, quanto o conjunto dos pares ordenados de números reais. Assim,

Algebricamente:

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Geometricamente:

$\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pontos de um plano com um sistema de coordenadas retangulares xy.

SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES NO ESPAÇO ($\mathbb{R}^3$)

Um *sistema de coordenadas retangulares no espaço* consiste de três eixos coordenados mutuamente perpendiculares que em geral são denominados *eixo x*, *eixo y* e *eixo z*. O ponto de interseção dos eixos é denominado a *origem* do sistema de coordenadas. Como no caso do plano, vamos supor que a mesma escala seja utilizada nos três eixos coordenados.

Os sistemas de coordenadas no espaço podem ser *de mão esquerda* ou *de mão direita*. Vamos supor, em nosso texto, sistemas de coordenadas do espaço de mão direita. Neles, um parafuso comum apontando no sentido do eixo z positivo avança se o eixo x positivo é girado em direção ao eixo y positivo pelo ângulo de 90° entre estes eixos (figura 2a).

Uma vez introduzido um sistema de coordenadas retangulares no espaço, podemos obter uma correspondência bijetora entre os pontos do espaço e os ternos ordenados de números reais (figura 2b). Por esta correspondência, cada ponto P do espaço está associado a um único terno ordenado (a, b, c) de números reais, e cada terno ordenado de números reais (a, b, c) está associado a um único ponto P. Os números do terno ordenado são denominados as *coordenadas* de P, e o ponto é denotado por $P(a, b, c)$ quando desejamos enfatizar suas coordenadas associadas.

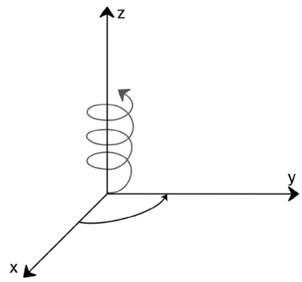


Figura 2a–
Sistema de coordenadas retangulares no espaço

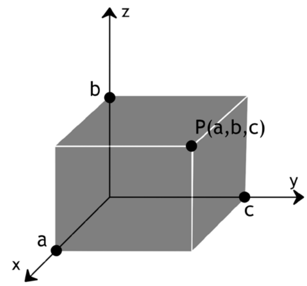


Figura 2b–
Correspondência entre pontos do espaço e ternos de números reais

Feita a correspondência acima, usamos o símbolo $\mathbb{R}^3$ para denotar tanto o conjunto dos pontos do espaço com um sistema de coordenadas retangulares, quanto o conjunto dos ternos ordenados de números reais. Assim,

Algebricamente:

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y,z)\,|\,x,\ y \text{ e } z \in \mathbb{R}\}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Geometricamente:

$\mathbb{R}^3$ é o conjunto dos pontos de um plano com um sistema de coordenadas retangulares xyz.

Uma vez fixado um sistema de coordenadas retangulares no plano ou no espaço, se um vetor **v** está posicionado de tal maneira que o seu ponto inicial esteja na origem do sistema (neste caso, dizemos que o vetor está na *posição padrão*), então ele fica completamente determinado pelas coordenadas de seu ponto final, e dizemos que estas coordenadas são os seus *componentes* em relação ao sistema de coordenadas.

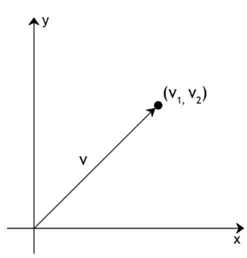


Figura 3a– Vetor no plano

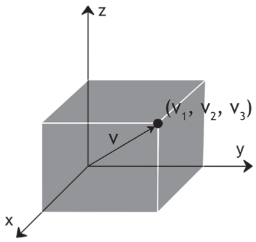


Figura 3b– Vetor no espaço

Algebricamente, os vetores no plano podem ser vistos como pares ordenados de números reais; e os vetores no espaço, como ternos ordenados de números reais. Desse modo, denotaremos o conjunto de todos os vetores do plano por $\mathbb{R}^2$ e o conjunto de todos os vetores do espaço por $\mathbb{R}^3$.

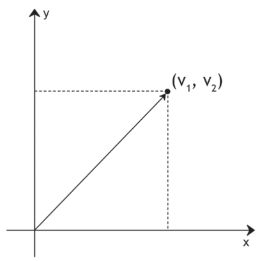


Figura 4a– Ponto x Vetor no plano

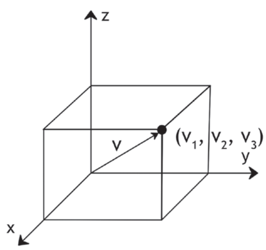


Figura 4b– Ponto x Vetor no espaço

Exemplo 1: Sejam $u=(x+1,3)$ e $v=(2,2y-5)$. Se $u=v$, devemos ter:

$$x+1=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$$
$$2y-5=3 \quad \Leftrightarrow \quad y=4$$

ATENÇÃO!

Escrevemos $\mathbf{v}=(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2})$ para o vetor v no plano com componentes $(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2})$ (figura 3a) e $\mathbf{v}=(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3})$ para o vetor v do espaço com componentes $(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3})$ (figura 3b). Para o vetor zero do plano ou do espaço, por exemplo, escrevemos $0=(0,0)$ ou $0=(0,0,0)$, respectivamente.

GUARDE BEM ISSO!

Você já deve ter percebido que pares ou ternos ordenados são usados para representar tanto pontos quanto vetores no plano ou no espaço. O par ordenado (v_1,v_2) representa o ponto de coordenadas v_1 e v_2 ou o vetor de componentes v_1 e v_2 (figura 4a). O terno ordenado (v_1,v_2,v_3) representa o ponto de coordenadas v_1, v_2 e v_3 ou o vetor de componentes v_1, v_2 e v_3 (figura 4b). A interpretação apropriada depende do ponto de vista geométrico que queremos enfatizar.

Algumas vezes necessitamos encontrar os componentes de um vetor em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ que não está na posição padrão (não tem seu ponto inicial na origem). Conforme sugere a figura 5, se **v** é um vetor em $\mathbb{R}^2$ com ponto inicial $P_1=(x_1,y_1)$ e ponto final $P_2=(x_2,y_2)$, podemos expressar v em termos dos vetores $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ como

$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, onde *O* é a origem de um sistema de coordenadas retangulares no plano.

Desse modo, os componentes de **v** são obtidos subtraindo as coordenadas do ponto inicial das coordenadas correspondentes do ponto final. O mesmo resultado vale no espaço, conforme estabelecido no teorema seguinte.

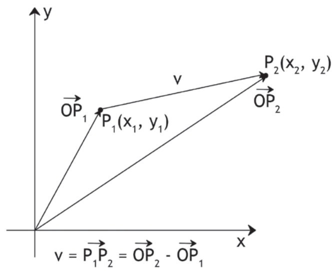


Figura 5– Componentes de um vetor que não está na posição padrão

VOCÊ SABIA?

Geometricamente, dois vetores no plano ou no espaço na posição padrão são iguais se, e somente se, eles têm o mesmo ponto final. Algebricamente isto significa que dois vetores são iguais se, e somente se, seus componentes correspondentes são iguais.

Assim:

$v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ são iguais se, e somente se, $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$;

$v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ são iguais se, e somente se, $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ e $v_3 = w_3$.

Teorema$_1$

a) O vetor no plano que tem ponto inicial $P_1 = (x_1, y_1)$ *e ponto final* $P_2 = (x_2, y_2)$ *é* $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$;

b) O vetor no espaço que tem ponto inicial $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *e ponto final* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *é* $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Exemplo 2: O vetor que tem ponto inicial $P_1 = (1, -2, 3)$ e ponto final $P_2 = (4, 3, -5)$ é $\overrightarrow{P_1P_2} = (4 - 1, 3 - (-2), -5 - 3) = (3, 5, -8)$.

Assim, se o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é transladado (transportado por translação) de modo que fique na posição padrão (com ponto inicial na origem do sistema de coordenadas), então seu ponto final cairá no ponto $(3, 5, -8)$. Os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ são, então, $(3, 5, -8)$.

Até agora estudamos os vetores no plano e no espaço. De posse do aporte algébrico poderemos generalizar os conceitos vistos para ambientes mais amplos. No próximo tópico, estudaremos vetores no espaço *n*-dimensional ou $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, que generaliza o plano ou $\mathbb{R}^2$ e o espaço ou $\mathbb{R}^3$.

TÓPICO 2

Vetores em R^n

OBJETIVOS

- Generalizar as noções de vetores para o espaço $\mathbb{R}^n$
- Realizar operações com vetores do $\mathbb{R}^n$
- Entender propriedades algébricas das operações com vetores

A representação algébrica de vetores do plano ou do espaço por meio de seus componentes motiva a generalização das noções de vetores para espaços de dimensão maiores. De acordo com Anton e Busby (2006, p.28):

> A ideia de usar pares e ternos ordenados de números reais para representar pontos e vetores no plano e no espaço era bem conhecida nos séculos dezoito e dezenove, mas ao final do século dezenove e início do século vinte os matemáticos e físicos começaram a reconhecer a importância física de espaços de dimensões maiores. Um dos exemplos mais importantes é devido a Albert Einstein, que acrescentou um componente temporal t aos três componentes espaciais (x, y, z) para obter uma quádrupla (x, y, z, t) que ele considerou como um ponto de um universo espaço-tempo de dimensão quatro. Embora não possamos ver um espaço de dimensão 4 da maneira como vemos espaços de duas e três dimensões, mesmo assim é possível estender ideias geométricas familiares a quatro dimensões trabalhando com as propriedades algébricas de quádruplas. De fato, desenvolvendo uma geometria apropriada do universo espaço-tempo de dimensão quatro, Einstein desenvolveu a sua teoria da relatividade geral, que explicou pela primeira vez como funciona a gravidade.

O conceito de espaços de dimensões superiores pode ser explorado na seguinte definição:

Definição$_1$ (Espaço n-dimensional): *Se n é um inteiro positivo, então uma* **n-upla ordenada** *é uma sequência de n números reais* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. *O conjunto de todas as n-uplas ordenadas é denominado o* **espaço n-dimensional** *e é denotado por* $\mathbb{R}^n$.

Seguindo o que fizemos para o plano e para o espaço, denotamos *n*-uplas usando a notação vetorial $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ e olhamos para os números de uma *n*-upla $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ ou como as coordenadas de um *ponto generalizado* ou como os componentes de um *vetor generalizado*.

Além da notação $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ para um ponto ou vetor generalizado do $\mathbb{R}^n$, outras notações que representem uma lista ordenada de *n* números (as coordenadas do ponto ou os componentes do vetor) na ordem correta podem ser usadas como notações alternativas para descrever o vetor **v**. São comumente usadas as notações:

> **ATENÇÃO!**
>
> A escolha da leitura de uma n-upla $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ como um ponto generalizado ou como um vetor generalizado depende da imagem geométrica que queremos utilizar e não faz diferença matemática alguma, pois são as propriedades algébricas das n-uplas que interessam.

$v=[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$, conhecida como forma *vetor-linha*, e $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, conhecida como forma *vetor-coluna*.

Dizemos que os espaços $\mathbb{R}^1$ ou, simplesmente, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a saber, os conjuntos dos números reais, dos pares de números reais e dos ternos de números reais, respectivamente, são os *espaços visíveis* (aqueles que podem ser vistos geometricamente – eles correspondem, respectivamente, à reta, ao plano e ao espaço) e que $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, etc., são os *espaços de dimensões superiores*.

Espaços de dimensões superiores encontram aplicações na Física, e também em diversos outros campos. Veja alguns exemplos extraídos de Anton e Busby (2006, p.29):

a) Circuitos Elétricos: Um certo tipo de microprocessador eletrônico é projetado para receber quatro voltagens de entrada e produzir três voltagens em resposta. As voltagens de entrada podem ser consideradas como vetores de $\mathbb{R}^4$; e as de resposta, como vetores de $\mathbb{R}^3$. Assim, o microprocessador pode ser visto como um aparelho que transforma cada vetor de entrada $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ de $\mathbb{R}^4$ num vetor de resposta $w=(w_1,w_2,w_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

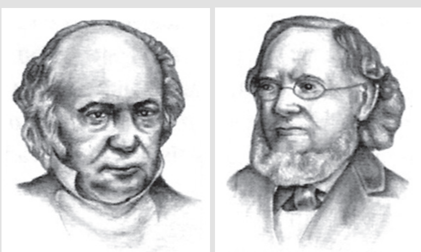
b) Imagens Digitalizadas: Uma maneira pela qual são criadas as imagens coloridas nas telas dos monitores de computadores é associar a cada *pixel* (que é um ponto endereçável da tela) três números, que descrevem o *matiz*, a *saturação* e o *brilho* do pixel. Assim, uma imagem colorida completa pode ser vista como um conjunto de

SAIBA MAIS!

Saiba um pouco sobre a história da representação de vetores como n-uplas ordenadas lendo os textos a seguir:

A Álgebra Linear na História

A ideia de representar vetores como ênuplas de vetores começou a cristalizar em torno de 1814 quando o contador suíço (e matemático amador) Jean Robert Argand (1768-1822) propôs a ideia de representar um número complexo a + bi como um par ordenado (a, b) de números reais. Em seguida, o matemático irlandês William Hamilton desenvolveu sua teoria de quatérnios, que constituem o primeiro exemplo importante de um espaço quadridimensional. Hamilton apresentou suas ideias num artigo científico apresentado à Academia Irlandesa em 1833. O conceito de um espaço n-dimensional ficou firmemente estabelecido em 1844 quando o matemático alemão Hermann Grassmann publicou um livro intitulado Ausdehnungslehre, no qual ele desenvolveu muitas das ideias fundamentais que aparecem neste livro.



Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) & Hermann Günther Grassmann (1809- 1877)

(Extraído de ANTON; BUSBY, 2006, p. 30)

5-uplas da forma $v=(x,y,h,s,b)$, na qual *x* e *y* são as coordenadas do pixel na tela, e *h,* s e *b* são o matiz (com a inicial do termo em inglês *hue)*, a saturação e o brilho.

c) Sistemas Mecânicos: Seis partículas se movem ao longo da mesma reta coordenada de tal modo que no instante *t* suas coordenadas são $x_1, x_2, \ldots, x_6$ e suas velocidades são $v_1, v_2, \ldots, v_6$, respectivamente. Esta informação pode ser representada pelo vetor $v=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,t)$ de $\mathbb{R}^{13}$. Este vetor é denominado o *estado* do sistema de partículas no instante *t*.

Os conceitos de vetores iguais, oposto de um vetor e as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar, que apresentamos na primeira aula, podem ser dados em termos das componentes dos vetores e podem ser apresentados de modo geral para vetores em $\mathbb{R}^n$ nas definições seguintes:

Definição$_2$

Dois vetores $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ *e* $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *são ditos* **equivalentes** *ou* **iguais** *se:*

$v_1=w_1, \quad v_2=w_2, \quad \ldots, \quad v_n=w_n$

Indicamos esta equivalência escrevendo $v=w$.

Essa definição estabelece que:

- Dois vetores são equivalentes se, e somente se, seus componentes correspondentes são iguais.

Exemplo 3:$(a, b, c, d) = (1, 4, -3, 7)$ se, e somente se, $a=1$, $b=4$, $c=-3$ e $d=7$.

Definição$_3$: Se $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ e $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ e se k é um escalar, então

$$v+w=(v_1+w_1,v_2+w_2,\ldots,v_n+w_n)$$
$$kv=(kv_1,kv_2,\ldots,kv_n)$$
$$-v=(-v_1,-v_2,\ldots,-v_n)$$
$$w-v=w+(-v)=(w_1-v_1,w_2-v_2,\ldots,w_n-v_n)$$

Essa definição estabelece que:

- Vetores são somados pela adição de seus componentes correspondentes.
- Um vetor é multiplicado por um escalar pela multiplicação de cada componente pelo escalar.
- O oposto de um vetor é o vetor cujos componentes são os opostos dos seus componentes.
- Vetores são subtraídos pela subtração de seus componentes correspondentes.

Exemplo:

Se $v=(2,-3,1)$ e $w=(1,2,-4)$, então:

$$v+w=(2+1,-3+2,1+(-4))=(3,-1,-3)$$
$$2v=(2\cdot 2,2\cdot(-3),2\cdot 1)=(4,-6,2)$$
$$-w=(-1,-2,-(-4))=(-1,-2,4)$$
$$v-w=v+(-w)=(2+(-1),-3+(-2),1+4)=(1,-5,5)$$

As operações de adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar gozam de propriedades que apresentamos no teorema a seguir. Estas propriedades são importantes e podem ser usadas para simplificar os cálculos com vetores.

Teorema$_2$ (Propriedades das Operações): *Se* **u**, **v** *e* **w** *são vetores em* $\mathbb{R}^n$ *e se a, b e c são escalares, então:*

a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ *b)* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

c) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ *d)* $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

e) $(a+b)u=au+bu$ *f)* $a(u+v)=au+av$

g) $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$ *h)* $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

i) $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$ e $a\mathbf{0}=\mathbf{0}$ *j)* $(-1)u=-u$

Essas propriedades podem ser deduzidas facilmente expressando os vetores em termos de componentes. Para ilustrar, vamos provar as partes b) e f). Prove as outras partes como exercício. Aproveite para descobrir também o nome das propriedades descritas no teorema acima.

Prova de b)

Sejam $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ e $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$. Então:

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= [(u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n)]+(w_1,w_2,\ldots,w_n)\\
&= (u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)+(w_1,w_2,\ldots,w_n)\\
&= ((u_1+v_1)+w_1,(u_2+v_2)+w_2,\ldots,(u_n+v_n)+w_n)\\
&= (u_1+(v_1+w_1),u_2+(v_2+w_2),\ldots,u_n+(v_n+w_n))\\
&= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+[(v_1,v_2,\ldots,v_n)+(w_1,w_2,\ldots,w_n)]\\
&= u+(v+w)
\end{aligned}$$

Na segunda, terceira e quinta igualdades, usamos a definição de adição de vetores. A quarta igualdade resulta da propriedade associativa da adição de números reais, que supomos conhecida.

Prova de f)

Sejam $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ e $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$. Então:

$$\begin{aligned}
a(u+v) &= a[(u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n)]\\
&= a(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)\\
&= (a(u_1+v_1),a(u_2+v_2),\ldots,a(u_n+v_n))\\
&= (au_1+av_1,au_2+av_2,\ldots,au_n+av_n)\\
&= (au_1,au_2,\ldots,au_n)+(av_1,av_2,\ldots,av_n)\\
&= au+av
\end{aligned}$$

Na segunda e quarta igualdades, usamos a definição de adição de vetores. Na terceira igualdade, usamos a definição de multiplicação de um vetor por um escalar. A quarta igualdade segue da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais, que supomos conhecida.

A exemplo do que apresentamos para vetores do plano ou do espaço, as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar são usadas, frequentemente, em combinação para formar novos vetores, e a definição de combinação linear feita na primeira aula se aplica também para vetores do $\mathbb{R}^n$.

Outra operação interessante com vetores e que nos será útil ao estudo das matrizes é o *produto escalar* de vetores que apresentamos na definição seguinte.

Definição$_4$: *Se* $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ *e* $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ *são vetores de* $\mathbb{R}^n$*, então o* **produto escalar** *de* **v** *e* **w**, *também chamado* **produto interno euclidiano** *de* **v** *e* **w**, *é denotado por* $v\cdot w$ *e dado pela fórmula:*

$$v\cdot w = v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n$$

Essa definição estabelece que:

- O produto escalar é calculado multiplicando-se componentes correspondentes dos vetores e somando-se os produtos resultantes.

Exemplo 4: O produto escalar dos vetores $v=(2,-3,1,7)$ e $w=(1,2,-4,0)$ do $\mathbb{R}^4$ é $v\cdot w=(2)(1)+(-3)(2)+(1)(-4)+(7)(0)=2-6-4+0=-8$.

Existem muitos outros conceitos e resultados associados a vetores do $\mathbb{R}^n$, como *comprimento* (*norma* ou *magnitude*) de um vetor, *ângulo* entre vetores, *distância* e *perpendicularidade*, *teorema de Pitágoras*, *desigualdade de Cauchy-Schawarz* em $\mathbb{R}^n$, para citar alguns que são importantes e encontram aplicações em diversas situações. Esses conceitos serão abordados na disciplina de Álgebra Linear no quarto semestre. Lá, você terá a oportunidade de estudar vetores em espaços ainda mais amplos do que o $\mathbb{R}^n$.

ATENÇÃO!

Aproveite para aprofundar seus conhecimentos consultando as referências que citamos ou visitando páginas da internet. Abaixo listamos algumas páginas interessantes:

http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/vetores/

http://www.iceb.ufop.br/demat/perfil/arquivos/0.567581001321919385.pdf

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Em cada item, encontre os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ e desenhe-o em posição padrão.

a) $P_1 = (1,-1),\ \ P_2 = (4,2)$

b) $P_1 = (0,-2),\ \ P_2 = (2,-1)$

c) $P_1 = (0,0,0),\ \ P_2 = (-1,5,1)$

d) $P_1 = (3,-2,2),\ \ P_2 = (2,2,4)$

2. Considere os vetores do $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{u}_1 = (4,2,6,-8)$, $\mathbf{u}_2 = (-2,3,-1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-1,-3,4)$, $\mathbf{u}_4 = (1,0,0,2)$, $\mathbf{u}_5 = (1,2,3,-4)$ e $\mathbf{u}_6 = (0,-3,1,0)$. Quais destes vetores:

a) Têm a mesma direção e o mesmo sentido?

b) São paralelos?

c) Têm o mesmo comprimento?

d) São ortogonais?

3. Considerando os vetores dados no problema 1, em cada item a seguir, determine o vetor **x** (por seus componentes) que satisfaça a equação vetorial:

a) $2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{x} = 5\mathbf{x} + \mathbf{u}_3$

b) $3\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_5 - 2\mathbf{u}_6 = 5\mathbf{x} + 2\mathbf{u}_6$

4. Faça o que se pede:

a) O vetor $(-4,1)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1,2)$, $(-1,1)$ e $(0,-3)$? Quais seriam os coeficientes da combinação linear?

b) O vetor $(1,-4,0)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1,2,-3)$ e $(-1,1,1)$? Justifique.

5. Reveja, em nosso texto, as provas das partes (b) e (f) do Teorema "Propriedades das Operações". Agora, prove as outras partes. Descubra também os nomes das propriedades descritas nesse teorema.

AULA 3 Introdução aos Sistemas de Equações Lineares

Olá! Esta é a nossa terceira aula. Nela, aprenderemos um pouco sobre os sistemas de equações lineares. Este tema é um dos principais objetos de estudo da Álgebra Linear e desempenha um importante papel na Matemática, pois existem inúmeras aplicações desses sistemas a situações concretas. Como bem lembram Anton e Busby (2006, p.59), sistemas de equações lineares "ocorrem nas engenharias, na análise econômica, nas imagens de ressonância magnética, na análise de fluxo de tráfego, na previsão do tempo e na formulação de decisões ou de estratégias comerciais" e podem ter milhares ou até milhões de incógnitas. Além disso, sistemas de equações lineares é um dos elementos da Álgebra Linear que constitui a base para estudos mais aprofundados. Por outro lado, a teoria das equações lineares representa também, pela sua simplicidade, uma excelente oportunidade para os alunos desenvolverem entre outras competências:

- a sua argumentação teórica;
- a construção de demonstrações;
- o relacionamento entre conceitos abstratos e suas aplicações em diversas áreas.

Nesta aula faremos, então, uma introdução ao estudo de sistemas de equações lineares, abordando as possibilidades para as soluções de uma equação linear, apresentando a notação utilizada e discutindo algumas das maneiras pelas quais surgem os sistemas lineares e o que significa resolvê-los.

Objetivos

- Compreender a importância dos sistemas de equações lineares
- Reconhecer equações e sistemas de equações lineares
- Identificar soluções de equações e de sistemas de equações lineares
- Resolver equações lineares
- Discutir situações nas quais surgem sistemas de equações lineares
- Formular modelos de sistemas de equações lineares de certos problemas

TÓPICO 1 | Equações Lineares

OBJETIVOS
- Reconhecer equações lineares
- Identificar soluções de equações lineares

Desde que um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares, iniciaremos dizendo o que é uma equação linear.

> **Definição$_1$**: *Uma* **equação linear** *nas incógnitas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *é uma equação que pode ser expressa na forma padrão* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ (1), *onde* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *e b são constantes reais. A constante* a_i *é chamada* **coeficiente** *da incógnita* x_i *e a constante b é chamada* **constante** *ou* **termo independente** *da equação. No caso especial em que* $b = 0$*, a equação (1) toma a forma* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$*, que é denominada* **equação linear homogênea**.

Nos casos de equações lineares com poucas incógnitas (quando o inteiro positivo *n* é igual a 2, 3 ou 4, por exemplo), costumamos usar as incógnitas sem índices. As incógnitas de uma equação linear costumam ser chamadas também de *variáveis*. Entretanto, esta terminologia é mais indicada para funções.

Exemplo 1: As seguintes equações são lineares:

1) $2x - 3y = 1$
2) $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 - x_4 + 2x_5$
3) $5x = 0$

4) $\frac{1}{2}x_1 - (\ln 2)x_2 + \sqrt{7}x_3$

5) $3{,}2x - 0{,}001y = 4{,}5$

6) $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = -1$

Observe que a segunda equação é linear porque pode ser escrita na forma $x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 5$. Observe ainda que a terceira e a quarta equações nesse exemplo são equações lineares homogêneas.

Exemplo 2: As seguintes equações não são lineares:

1) $x - 3yz = 4$

2) $x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 = 5$

3) $\frac{x}{y} - 4z = 1$

4) $\frac{1}{2}x_1 - \ln(2x_2) + \sqrt{7x_3} = 0$

5) $\text{sen } x + y = 0$

6) $senx_1 - 4x_2 + 3x_3 = -2$

ATENÇÃO!

É importante ressaltar ainda que, embora nos exemplos de nosso texto (e na maioria das aplicações) sejam números reais, os coeficientes das incógnitas e os termos independentes das equações lineares, em alguns exemplos e aplicações, serão números complexos ou elementos de algum outro corpo.

Observe a quarta equação de cada série de equações dos exemplos dados. Elas são bem parecidas. Por que a quarta equação no Exemplo 1 é linear, mas a quarta equação no Exemplo 2 não é?

SAIBA MAIS!

Um corpo é um conjunto não vazio com duas operações que satisfazem algumas propriedades. O estudo dos corpos deverá ser feito na disciplina de Estruturas Algébricas. São exemplos de corpos os conjuntos R^n dos números racionais, reais e complexos com as operações de adição e multiplicação usuais.

Uma solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ é uma n-upla de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tais que, sendo substituídos nos lugares de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, tornam a equação uma identi dade. Neste caso, dizemos que a solução satisfaz a equação. Dito de outra maneira, uma solução para a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ é um vetor $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, cujos componentes satisfazem a equação quando substituímos $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots,\ x_n = s_n$.

O conjunto de todas as soluções de uma equação linear é denominado conjunto solução ou solução geral da equação linear. Ao processo de encontrar o conjunto solução de uma equação linear nos referimos como resolver a equação.

ATENÇÃO!

Observe que uma equação linear não envolve produtos, recíprocos ou raízes de variáveis. As variáveis também não ocorrem como argumentos de funções como trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e multiplicadas apenas por constantes.

Exemplo 3:

A quádrupla $s = (3,2,1,0)$ é uma solução de $x + 2y - 4z + t = 3$, porque, quando substituímos $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ e $w = 0$, a equação é satisfeita: $3 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 0 = 3$ ou $3 = 3$ é uma identidade. Outra solução é o vetor $u = (1,2,1,2)$. Verifique isso! Entretanto, o vetor $v = (1,-2,3,-4)$ não é uma solução da equação, pois $1 + 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 + (-4) = 3$ ou $-19 = 3$ não é uma verdade.

Exemplo 4:

Cada solução da equação $2x + y = 4$ é um par de números reais $s = (s_1, s_2)$ que podem ser determinados atribuindo um valor arbitrário a *x* e obtendo o valor correspondente de *y*, ou vice-versa. Por exemplo, fazendo $x = -2$ na equação, obtemos:

$$2 \cdot (-2) + y = 4$$
$$-4 + y = 4$$
$$y = 8$$

Assim, o par ordenado $(-2,8)$ em $\mathbb{R}^2$ é solução. Na verdade, cada solução da equação $2x + y = 4$ determina um ponto no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Relembre (da disciplina *Fundamentos da Matemática I*) que essa equação representa uma reta (de onde vem o nome "equação linear") no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Essa reta é o *gráfico* da equação, e o conjunto de todas as soluções da equação corresponde precisamente aos pontos da reta.

Além do ponto $(-2,8)$, outras soluções da equação $2x + y = 4$ são:

O *intercepto-y*, isto é, o ponto obtido fazendo $x = 0$ na equação. Neste caso, obtemos $y = 4$. Logo, o ponto $(0,4)$ do eixo-*y* é solução.

O *intercepto-x*, isto é, o ponto obtido fazendo $y = 0$ na equação. Neste caso, obtemos $y = 2$. Logo, o ponto $(2,0)$ do eixo-*x* é solução.

De modo mais geral, fazendo $x = t$ (*t* um número real qualquer) e resolvendo para *y*, vemos que o conjunto completo das soluções pode ser escrito na forma $(t, 4-2t)$, chamada *forma paramétrica* (*t* é o *parâmetro*). Poderíamos também colocar *y* igual a algum parâmetro – digamos *s* – e resolver a equação para *x*. As duas soluções paramétricas pareceriam diferentes, mas seriam *equivalentes* (isto é, forneceriam as mesmas soluções da equação). Tente isso!

Considerando que o gráfico da equação $2x+y=4$ é uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ e uma reta fica completamente determinada por dois de seus pontos, para esboçá-lo, marcamos primeiro duas das três soluções obtidas $(-2,8)$, $(0,4)$ e $(2,0)$ no plano $\mathbb{R}^2$ (figura 1). Traçamos em seguida uma reta *L* pelas duas soluções marcadas. Observe que a terceira solução também está em *L*. *L* é o gráfico da equação. Na verdade, *L* é o conjunto de todas as soluções da equação.

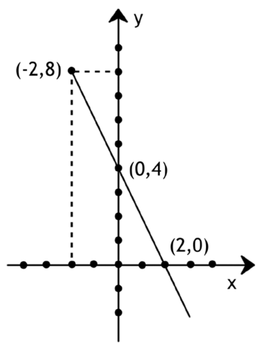


Figura 1– Gráfico de $2x+y=4$

Neste tópico, identificamos soluções particulares de equações lineares e, com o auxílio da representação geométrica (ferramenta possível para equações com até três incógnitas), obtivemos a solução geral de uma equação particular a duas incógnitas. No tópico seguinte, apresentaremos um procedimento geral para a obtenção do conjunto solução de uma equação linear qualquer.

TÓPICO 2

Sobre o conjunto solução de uma equação linear

OBJETIVO

- Resolver equações lineares

Neste tópico, introduzimos os conceitos de equação linear degenerada e não-degenerada, discutiremos quais as possibilidades para o conjunto solução de uma equação linear qualquer e apresentaremos um processo para a obtenção da solução geral de uma equação linear.

O seguinte teorema é um resultado básico que estabelece o conjunto solução de uma equação linear com uma incógnita. Deixamos sua prova como exercício (Questão 4 de Aprofundamento).

Teorema$_1$: Seja a equação linear $ax = b$. Temos:

i) Se $a \neq 0$, então (v_1, v_2, v_3) é solução única de $ax = b$.

ii) Se $a = 0$, mas $b \neq 0$, então $ax = b$ não tem solução.

iii) Se $a = 0$ e $b = 0$, então qualquer escalar (número) s é solução $ax = b$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1: Escreva cada equação na forma padrão $ax = b$ e determine o seu conjunto solução.

a) $5x - 1 = x + 6$ b) $2x + 3 - x = x + 5$ c) $4 + x - 3 = 2x + 1 - x$

Solução:

No item a, transpondo termos de um para o outro membro, obtemos a equação $5x - x = 6 + 1$ ou, equivalentemente, $4x = 7$ na forma padrão. Multiplicando por $\frac{1}{4}$, obtemos a solução única $x = \frac{7}{4}$ (Teorema 1 (i)).

A equação do item b é equivalente a $x+3=x+5$. Transpondo termos, obtemos a equação $x-x=5-3$ ou, equivalentemente, $0x=2$ na forma padrão. A equação não tem solução, pois qualquer que seja o valor de *x*, $0x=2$ não será uma identidade (Teorema 1 (ii)).

A equação do item c é equivalente a :

$x+1=x+1$.

Transpondo termos, obtemos a equação $x-x=1-1$ ou, equivalentemente, $0x=0$ na forma padrão. Qualquer que seja o número *x* será solução, pois $0x=0$ é uma identidade independente do valor de *x* (Teorema 1 (iii)).

Para uma equação linear geral com *n* incógnitas, resultados similares ao Teorema 1 estabelecem o conjunto solução da equação. Para apresentá-los, precisamos antes conhecer o conceito de equações lineares degeneradas e não-degeneradas.

GUARDE BEM ISSO!

A transposição de termos de um para outro membro de uma equação corresponde a adicionar a cada membro da equação o oposto do termo que se quer transpor. Por exemplo, se na equação x+a=0 queremos transpor o termo a do primeiro para o segundo membro (para termos o valor da incógnita x isolado), adicionamos -a a ambos os membros da equação. Desse modo, teremos x+a+(-a)=0+(-a) ou x=-a. Fazendo isso, o termo é eliminado do membro que estava e aparece no outro membro com sinal contrário. Este é um tipo de ação que você já deve estar acostumado a realizar. Certo?

Definição$_2$: *Uma equação linear nas incógnitas* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ *é* **degenerada** *se tem a forma* $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=b$ (2), *isto é, se todos os coeficientes são iguais a zero. Caso contrário, a equação é não-degenerada. Neste caso, a primeira incógnita com coeficiente diferente de zero é chamada* **incógnita principal**.

O conjunto solução de uma equação linear degenerada é fornecido no seguinte teorema.

Teorema$_2$: *Seja a equação linear degenerada* $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=b$. *Temos:*

i) Se $b\neq 0$, *então a equação não tem solução.*

ii) Se $b=0$, *então qualquer vetor* $s=(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)\in\mathbb{R}^n$ *é solução.*

Prova:

(i) Seja $s=(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)$ um vetor arbitrário. Suponha que $b\neq 0$. Substituindo **s** na equação, obtemos:

$0s_1+0s_2+\ldots+0s_n=b$ ou $0+0+\ldots+0=b$ ou $0=b$

Mas esta igualdade não é verdadeira, já que $b\neq 0$. Logo, nenhum vetor **s** é solução.

(ii) Seja $s=(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n)$ um vetor arbitrário. Suponha que $b=0$. Substituindo **s** na equação, obtemos:

$$0s_1+0s_2+\ldots+0s_n=0$$
$$0+0+\ldots+0=0$$
$$0=0$$

Considerando que esta igualdade é uma identidade, qualquer vetor **s** de $\mathbb{R}^n$ é solução.

Exercício resolvido 2: Escreva a equação $3y-x-2y+2z+3=2+3x-4x+y+2z+1$ na forma padrão e determine o seu conjunto solução.

Solução:

Agrupando e transpondo termos, obtemos a equação em sua forma padrão:

$$-x+y+2z+3=-x+y+2z+3$$
$$-x+y+2z+x-y-2z=3-3$$
$$0x+0y+0z=0$$

Esta equação é degenerada com constante zero. Logo, pela parte (ii) do Teorema 2, qualquer vetor $s=(a,b,c)$ de $\mathbb{R}^3$ é solução.

O caso de uma equação linear não-degenerada é tratado no teorema seguinte, cuja prova pode ser vista em Lipschutz (1994, p. 30-31).

Teorema$_3$: *Seja uma equação linear não-degenerada* $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$ *com incógnita principal* x_p. *Temos:*

i) Qualquer conjunto de valores para as incógnitas x_j, com $j\neq p$, *dará uma solução particular da equação. (As incógnitas* x_j *são chamadas* **variáveis livres***, e podemos atribuir-lhes valores arbitrários)*

ii) Toda solução da equação é obtida em (*i*).

Exercício resolvido 3: Encontre três soluções particulares da equação $2x-3y+z=12$.

Solução:

Esta é uma equação não-degenerada em que a incógnita principal é *x*. Pelo Teorema 3, atribuindo valores arbitrários às variáveis livres *y* e *z* e resolvendo a equação obtida na incógnita *x*, obtemos uma solução particular da equação dada. Assim,

1) Fazendo $y=1$ e $z=1$, obtemos:

$2x-3\cdot 1+1=12$ ou $2x-3+1=12$ ou $2x=14$ ou $x=7$.

Portanto, o vetor $s_1=(7,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ é uma solução particular.

2) Fazendo $y=-5$ e $z=0$, obtemos:

$2x-3\cdot(-5)+0=12$ ou $2x+15+0=12$ ou $2x=-3$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$.

Portanto, o vetor $s_2=(-\dfrac{3}{2},-5,0)$ de $\mathbb{R}^3$ é uma solução particular.

3) Fazendo $y=0$ e $z=1$, obtemos:

$2x-3\cdot 0+1=12$ ou $2x-0+1=12$ ou $2x=11$ ou $x=\dfrac{11}{2}$.

Portanto, o vetor $s_3=(\dfrac{11}{2},0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ é uma solução particular.

Exercício resolvido 4: Determine a solução geral da equação $2x-3y+z=12$.

Solução:

Para determinar a solução geral da equação, atribuímos valores arbitrários (chamados *parâmetros*) às variáveis livres *y* e *z* e resolvemos a equação obtida na incógnita *x*. Fazendo $y=a$ e $z=b$, obtemos:

$2x-3\cdot a+b=12$ ou $2x=12+3a-b$ ou $x=6+\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}b$.

Portanto, o vetor $s=(6+\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}b,a,b)$ de $\mathbb{R}^3$ representa a solução geral da equação. Em outros termos, o conjunto solução da equação é:

$$s=\left\{\left(6+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b,a,b\right),a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

Para cada atribuição de valores a *a* e *b*, obteríamos uma solução particular.

Neste tópico, aprendemos o que é uma equação linear a como resolvê-la. Desse modo, já estamos em condições de estudar os sistemas de equações lineares, situação em que temos uma coleção de equações lineares nas mesmas incógnitas que devem ser consideradas simultaneamente. É o que faremos a partir do próximo tópico.

TÓPICO 3

Sistemas de equações lineares: conceitos e notação

Objetivos

- Reconhecer sistemas de equações lineares
- Identificar soluções de sistemas de equações lineares
- Discutir situações nas quais surgem sistemas de equações lineares
- Formular modelos de sistemas de equações lineares de certos problemas

Neste tópico, introduzimos o conceito de sistemas de equações lineares, apresentamos a notação usada para descrever um sistema de equações lineares e discutimos algumas situações nas quais surgem os sistemas de equações lineares e o que significa resolvê-los. Nosso enfoque aqui será nas ideias gerais.

Sistemas de equações lineares é um dos conteúdos básicos de Álgebra Linear dos currículos do Ensino Médio. Sobre este tema e seu tratamento nos livros didáticos brasileiros, Lima (2001, p. 91) afirma que:

> Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares. Entretanto, sua abordagem nos compêndios adotados em nossas escolas é, na maioria das vezes, obsoleta, árida e desmotivada. Em certos casos, até mesmo contém erros matemáticos de fato.

É importante discutirmos situações nas quais surgem os sistemas de equações lineares e formular os modelos de sistemas de equações lineares de certos problemas. Consideremos o seguinte problema:

Problema

Uma fábrica produz três tipos de biscoito: cream cracker, maisena e recheado. Para isto, utiliza, além de outros, três tipos de insumo básicos: farinha de trigo, fermento e gordura vegetal. Para a manufatura de cada kg de biscoito cream cracker, são utilizados 400 g de farinha de trigo, 20 g de fermento e 160 g de gordura vegetal; para cada kg de biscoito maisena, são utilizados 500 g de farinha de trigo, 20 g de fermento e 120 g de gordura vegetal; e para cada kg de biscoito recheado, são utilizados 300 g de farinha de trigo, 10 g de fermento e 300 g de gordura vegetal. Pela venda do kg de cada um dos biscoitos cream cracker, maisena e recheado, o lucro da fábrica é de R$ 1,50, R$ 2,70 e R$ 3,60, respectivamente. Quanto essa indústria lucra com a venda de toda a produção manufaturada com 23 kg de farinha de trigo, 1 kg de fermento e 12 kg de gordura vegetal?

Formulando o modelo

Chamando de *x, y* e *z*, respectivamente, as quantidades de kg de cada um dos biscoitos produzidas, as quantidades de insumos básicos utilizadas nos fornecem as equações:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 400x & + & 500y & + & 300z & = & 23000 \\ 20x & + & 20y & + & 10z & = & 1000 \\ 160x & + & 120y & + & 300z & = & 12000 \end{array}$$

Com isso, determinamos x, y e z e, a partir daí, o lucro da fábrica.

Este modelo, constituído por três equações lineares nas mesmas incógnitas x, y e z, é um sistema linear, que definimos abaixo.

Diversas outras situações que conduzem a sistemas de equações lineares como o acima ocorrem com frequência na indústria, no comércio, nas ciências e nos mais variados ramos de atividade humana. Isto mostra a utilidade dos sistemas lineares. Você poderia fornecer alguns exemplos?

Definição$_3$: *Uma coleção finita de equações lineares é denominada um* **sistema de equações lineares** *ou, simplesmente, um* **sistema linear**. *Um sistema linear de m equações a n incógnitas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pode ser descrito na seguinte forma:*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (2)$$

onde a_{ij} *e* b_i *são constantes reais. A constante* a_{ij} *é chamada* **coeficiente** *da incógnita* x_j *na equação i e a constante* b_i *é chamada* **constante** *ou* **termo independente** *da equação i.*

Exemplo 5:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & = & 8 \end{array} \quad (3)$$

É um sistema linear de duas equações a quatro incógnitas.

Na próxima definição, introduzimos o conceito de sistema linear homogêneo, um tipo particular de sistema linear.

Definição$_4$: *Um sistema linear é* **homogêneo** *se cada uma de suas equações é homogênea, ou seja, se o termo independente em cada equação é igual a zero.*

GUARDE BEM ISSO!

O índice duplo nos coeficientes aij das incógnitas especifica sua posição: o primeiro dos dois índices indica a equação na qual ocorre o coeficiente, e o segundo indica qual incógnita ele multiplica. O índice no termo independente bi indica a equação na qual ocorre. Num sistema linear de m equações a n incógnitas, temos $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Assim, um sistema linear homogêneo de *m* equações a *n* incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem o seguinte formato:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \quad (4)$$

Uma *solução* do sistema linear (2) é uma *n*-upla de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tais que, sendo substituídos nos lugares de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, tornam cada equação uma identidade. Ou seja, uma solução para o sistema linear (2) é um vetor $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, cujos componentes satisfazem simultaneamente a todas as equações do sistema.

Exemplo 6: A quádrupla $s = (2, 3, -1, 1)$ é uma solução do sistema linear (3), porque, quando substituímos $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$ e $x_4 = 1$, as duas equações são satisfeitas. Verifique isso! Já o vetor $v = (1, 2, -1, 2)$ não é uma solução deste sistema linear, pois, apesar de satisfazer a primeira equação, não satisfaz a segunda, uma vez que $1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 7 \cdot 2 = 8$ ou $-5 = 8$ não é uma verdade.

O conjunto de todas as soluções de um sistema linear é denominado *conjunto solução* ou *solução geral* do sistema linear. Ao processo de encontrar o conjunto solução de um sistema linear nos referimos como *resolver o sistema*. Sistemas lineares homogêneos têm uma particularidade interessante sobre seus conjuntos solução que discutiremos posteriormente.

Dois sistemas de equações são ditos *equivalentes* se, e somente se, têm o mesmo conjunto solução (isto é, toda solução de qualquer um dos sistemas for também solução do outro).

Na próxima aula, discutiremos como as soluções de sistemas lineares a duas ou três incógnitas podem ser interpretadas geometricamente, quais as possibilidades para o conjunto solução de um sistema linear geral e estudaremos técnicas para resolver sistemas lineares.

VOCÊ SABIA?

A determinação do conjunto solução dos sistemas lineares é um tema de estudo relevante dentro da Matemática Aplicada e, particularmente, em muitos tópicos de Engenharia. A complexidade de muitos sistemas, com elevado número de equações e de incógnitas, apenas permite resolvê-los com o auxílio de um computador. Existem diversos algoritmos que permitem encontrar, caso existam, soluções de um sistema, recorrendo eventualmente a métodos numéricos de aproximação.

SAIBA MAIS!

Um método numérico de aproximação consiste em um conjunto de regras escritas sob a forma de uma sequência de operações elementares que levam a uma solução "aproximada" do problema. Em geral, pode-se exigir que a solução aproximada esteja tão próxima da solução real quanto se desejar. Métodos numéricos para obter soluções aproximadas de sistemas lineares e de outros modelos matemáticos serão estudados na disciplina de Cálculo Numérico.

Para alunos do Ensino Médio, a exploração de situações-problema envolvendo o estudo sistemas de equações lineares por meio da metodologia da Modelagem Matemática é bem interessante. A modelagem matemática conecta o ensino de conteúdos matemáticos com outras formas de conhecimento.

De acordo com Pancieira e Ferreira (2006, p.2), "A Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino, vem ao encontro da nova visão de Educação Matemática, que valoriza não apenas adquirir conhecimentos, mas o desenvolvimento de capacidades, atitudes e valores, relacionando a Matemática com o mundo real".

SAIBA MAIS!

Você pode se adiantar um pouco e ampliar seus conhecimentos sobre equações e sistemas de equações lineares consultando as referências que citamos ou visitando páginas da internet. Abaixo listamos algumas páginas interessantes:

1. http://mtm.grad.ufsc.br/files/2014/04/Álgebra-Linear-I.pdf
2. https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/index.html
3. https://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA327/ld4.pdf

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. (Anton e Busby, 2006, p. 66) Certa dieta requer 7 unidades de gordura, 9 unidades de proteína e 16 unidades de carboidratos para a refeição principal e uma certa pessoa dispõe de três alimentos com os quais pode montar sua dieta:

Alimento 1: Cada medida contém 2 unidades de gordura, 2 unidades de proteína e 4 unidades de carboidratos.

Alimento 2: Cada medida contém 3 unidades de gordura, 1 unidade de proteína e 2 unidades de carboidratos.

Alimento 3: Cada medida contém 1 unidade de gordura, 3 unidades de proteína e 5 unidades de carboidratos.

Sejam x, y e z o número de medidas que a pessoa consome dos alimentos 1, 2 e 3, respectivamente, em sua refeição principal. Encontre (mas não resolva) um sistema linear em x, y e z cuja solução diz quantas medidas de cada alimento deve ser consumida pela pessoa para atender à dieta.

2. Faça o que se pede:

a) Encontre um sistema de duas equações lineares nas incógnitas x, y e z cuja solução geral seja dada pelo vetor $s=(t,1+t,2-t)$.

b) Encontre uma solução particular para o sistema linear do item (a).

3. (Kolman, 1998, p. 8)

a) Existe um valor de r tal que $x=1$, $y=2$, $z=r$ é uma solução do sistema linear a seguir? Em caso afirmativo, determine esse valor.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 11 \\ x & - & y & + & 2z & = & -7 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 12 \end{array}$$

b) Existe um valor de *r* tal que $x = r$, $y = 2$, $z = 1$ é uma solução do sistema linear a seguir? Em caso afirmativo, determine esse valor.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & - & 2z & = & 4 \\ x & - & 4y & + & z & = & -5 \\ -2x & + & 3y & + & 2z & = & 9 \end{array}$$

4. Determine a solução geral da equação $x - 3y + 4z = 5$.

5. Prove o teorema 1 da aula 3.

AULA 4

Resolução de Sistemas Lineares: Método de Eliminação de Gauss

Nesta aula, continuaremos estudando os sistemas lineares. Discutiremos como as soluções de sistemas lineares a duas ou três incógnitas podem ser interpretadas geometricamente, quais as possibilidades para o conjunto solução de um sistema linear geral e apresentaremos um processo de resolução de sistemas lineares baseado num algoritmo conhecido por método de eliminação de Gauss.

Objetivos

- Interpretar geometricamente soluções de sistemas lineares a duas ou três incógnitas
- Analisar as possibilidades para o conjunto solução de sistemas lineares
- Aplicar o método de eliminação de Gauss para a resolução de sistemas lineares

TÓPICO 1

Discussão sobre o conjunto solução de um sistema linear

Objetivos

- Interpretar geometricamente sistemas de equações lineares a duas ou três incógnitas
- Classificar sistemas de equações lineares de acordo com a sua solução

Em nossa terceira aula, vimos em alguns teoremas as possibilidades para o conjunto solução de uma equação linear geral. Neste tópico, veremos como interpretar geometricamente as soluções de sistemas lineares a duas ou três incógnitas e discutir quais as possibilidades para o conjunto solução de um sistema linear geral. Posteriormente, discutiremos métodos computacionais para encontrar soluções de sistemas lineares.

A respeito do ensino de sistemas lineares, as orientações curriculares para o Ensino Médio apresentam a seguinte sugestão:

> No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2×2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. (BRASIL, 2006, p. 77-78).

A interpretação geométrica de sistemas lineares a duas ou três incógnitas é um auxílio importante, pois facilita muito o entendimento da situação apresentada pelo sistema. Infelizmente, esta técnica é, em geral, dispensada pelos livros didáticos.

1. SISTEMAS LINEARES DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCÓGNITAS

VOCÊ SABIA?

Dizer que a e b não são ambos nulos é o mesmo que dizer que $a^2 + b^2 \neq 0$.

Iniciaremos fazendo a interpretação geométrica de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas.

Você já sabe que uma equação linear a duas variáveis (incógnitas) $ax + by = c$ não-degenerada (a e b não são ambos nulos) representa, no plano cartesiano *xy*, uma reta. Esse conhecimento você adquiriu na *Educação Básica* e deve ter sido complementado na disciplina de *Fundamentos de Matemática I*. Você pode também rever o Exemplo 4 de nossa terceira aula, onde construímos o gráfico de $2x + y = 4$.

ATENÇÃO!

No caso de pelo menos uma das equações ser degenerada, a análise do conjunto solução do sistema linear é bem simples. Suponhamos, por exemplo, que a primeira equação seja degenerada. Se $c_1 = 0$, todo vetor do $\mathbb{R}^2$ é solução da equação. Neste caso, a equação não representa restrição alguma, e, portanto, o conjunto solução do sistema corresponde ao conjunto solução da outra equação. Se $c_1 \neq 0$, a equação não tem solução. Neste caso, a equação não é satisfeita por vetor algum do $\mathbb{R}^2$, e, portanto, o sistema não tem solução. A mesma análise valeria para o caso de a segunda equação ser degenerada.

Consideremos o sistema linear geral de duas equações a duas incógnitas *x* e *y*.

$$\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array} \quad (1)$$

Vamos supor que as duas equações lineares em (1) são não-degeneradas, ou seja, a_1 e b_1 não são ambos nulos e a_2 e b_2 não são ambos nulos.

Vamos voltar agora ao caso em que ambas as equações do sistema (1) são não-degeneradas. Neste caso, cada uma das duas equações representa, no plano cartesiano *xy*, uma reta. Portanto, cada solução (x, y) desse sistema corresponde a um ponto da interseção dessas retas. Desse modo, o número de soluções e as soluções do sistema dependem da posição relativa das duas retas. Existem, então, três possibilidades: As retas podem ser paralelas e distintas, caso em que não existe interseção e, consequentemente, o sistema não tem solução (figura 1a);

1. As retas podem intersectar exatamente num ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução (figura 1b);
2. As retas podem ser coincidentes, caso em que há uma infinidade de pontos de interseção (todos pontos da reta comum), e, consequentemente, o sistema tem uma infinidade de soluções (figura 1c).

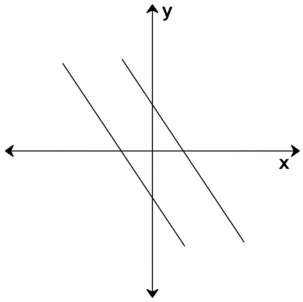


Figura 1a– Nenhuma solução (retas paralelas)

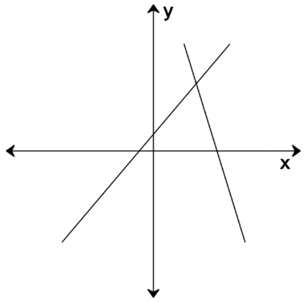


Figura 1b– Uma única solução (retas concorrentes)

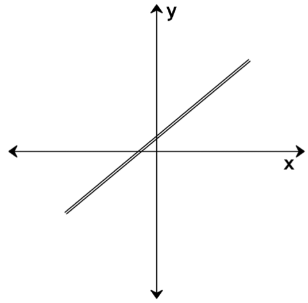


Figura 1c– Uma infinidade de soluções (retas cincidentes)

Essas possibilidades para o conjunto solução de um sistema linear com duas equações a duas incógnitas são as mesmas para um sistema linear geral de *m* equações a *n* incógnitas. Temos, assim, o teorema a seguir, cuja prova ficará evidente posteriormente. A interpretação geométrica de um sistema linear de três equações a três incógnitas que faremos logo abaixo é também uma evidência desse resultado.

Teorema$_1$: *Cada sistema de equações lineares tem nenhuma, uma ou uma infinidade de soluções, não havendo outras possibilidades*.

Um sistema linear é chamado *possível* quando tem pelo menos uma solução e *impossível* quando não tem solução. Assim, um sistema linear *possível* tem ou uma solução ou uma infinidade de soluções, não havendo outras possibilidades. Quando tem uma única solução, dizemos ainda que o sistema é *possível determinado*. Quando tem uma infinidade de soluções, dizemos também que o sistema é *possível indeterminado*. A figura 2 ilustra todas as possibilidades para o número de soluções de um sistema linear.

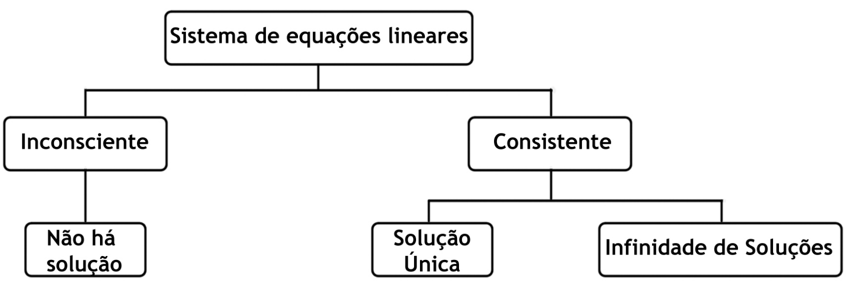


Figura 2– Classificação de um sistema linear quanto ao número de soluções

2. SISTEMAS LINEARES DE TRÊS EQUAÇÕES A TRÊS INCÓGNITAS

SAIBA MAIS!

Os termos consistente e compatível também são usados para nos referirmos a um sistema linear possível. Um sistema linear impossível é também chamado de inconsistente ou incompatível.

A interpretação geométrica de um sistema linear de três equações a três incógnitas é também possível e contribui para a compreensão geral das possibilidades de solução de um sistema linear geral.

Para isso, você deve saber que uma equação linear a três variáveis (incógnitas) $ax+by+cz=d$ não-degenerada (a, b e c não são ambos nulos ou $a^2+b^2+c^2 \neq 0$) representa, no sistema cartesiano *xyz* no espaço, um plano.

SAIBA MAIS!

Você terá a oportunidade de estudar melhor os planos e a sua representação geométrica na disciplina Geometria Analítica Vetorial. Uma boa referência para este tema são os livros de Lima (1992) e Lima *et al*. (1998).

Consideremos o sistema linear geral de três equações a três incógnitas *x*, *y* e *z*.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array} \quad (2)$$

Vamos supor que as três equações lineares em (2) são não-degeneradas, ou seja, $a_1^2+b_1^2+c_1^2 \neq 0$, $a_2^2+b_2^2+c_2^2 \neq 0$ e $a_3^2+b_3^2+c_3^2 \neq 0$.

Neste caso, cada uma das três equações representa, no sistema cartesiano *xyz* no espaço, um plano. Portanto, cada solução (x,y,z) do sistema (2) corresponde a um ponto da interseção desses planos. Assim, o número de soluções e as soluções do sistema (2) dependem da posição relativa dos três planos, como pode ser confirmado em Lima (2002, p. 94):

> Cada solução (x,y,z) do sistema (S) pode ser olhada como um ponto P do espaço tridimensional, dado por suas coordenadas cartesianas: $P=(x,y,z)$. Sob este ponto de vista, cada uma das equações do sistema é a equação de um plano nesse espaço e as soluções do sistema são os pontos comuns a esses planos. Mais precisamente, se π_1, π_2 e π_3 são os planos definidos pelas três equações de (S), então as soluções de (S) são os pontos P = (x,y,z) que pertencem à interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ desses planos.

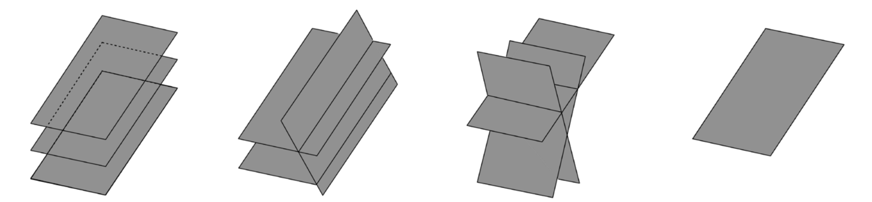
Vejamos, como exemplo, algumas das possibilidades:

- Se pelo menos dois desses planos são paralelos, ou se dois deles intersectam o terceiro segundo retas paralelas, a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ é vazia e o sistema é impossível;

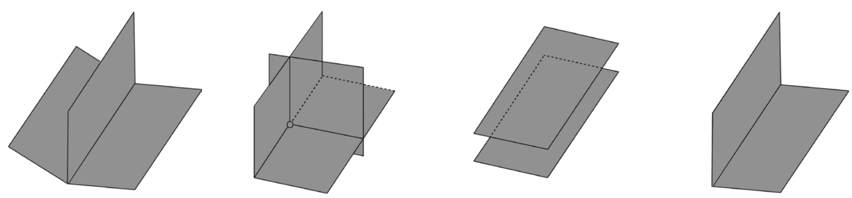
- Podemos ter uma reta *r* formando uma espécie de eixo, contido simultaneamente nos três planos. Neste caso, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$ e o sistema é indeterminado: suas soluções são os pontos de *r*;
- O sistema é determinado quando os três planos se encontram num só ponto, como duas paredes adjacentes e o teto.

Ainda segundo Lima (2002, p. 94), há ao todo oito posições relativas possíveis para os planos determinados pelas três equações do sistema (2) (figura 3):

> Há ao todo 8 posições relativas possíveis para os planos π_1, π_2 e π_3. Quatro dessas posições correspondem aos sistemas impossíveis; nas outras quatro, o sistema tem solução. É importante observar que se pode concluir em qual das 8 posições se encontram os planos de (S) examinando os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i que nele comparecem.



Nenhuma solução (três planos paralelos, sem interseção comum)	Nenhuma solução (dois planos paralelos, sem interseção comum)	Nenhuma solução (sem interseção comum)	Uma infinidade de soluções (os três planos coincidem, a interseção comum é um plano)



Uma infinidade de soluções (a interseção comum é uma reta)	Uma solução (a interseção comum é um ponto)	Nenhuma solução (dois planos coincidentes, paralelos ao terceiro, sem interseção comum)	Uma infinidade de soluções (dois planos coincidem, a interseção comum é uma reta)

Figura 3– Possibilidades para as posições relativas de três planos

Fonte: Anton e Busby (2006, p. 61)

Para um estudo detalhado de cada uma das oito posições relativas possíveis pa-

ATENÇÃO!

O índice duplo nos coeficientes (v_1,v_2) das incógnitas especifica sua posição: o primeiro dos dois índices indica a equação na qual ocorre o coeficiente, e o segundo indica qual incógnita ele multiplica. O índice no termo independente $v = (v_1,v_2,v_3)$ indica a equação na qual ocorre. Num sistema linear de m equações a n incógnitas, temos (v_1,v_2,v_3) e $0 = (0,0)$.

ra os planos determinados pelas três equações do sistema (2), veja os livros de Lima (1992) e Lima *et al*. (1998).

Pela figura 3, das possibilidades para as posições relativas de três planos, temos:

- Quatro delas correspondem a sistemas impossíveis (nenhuma solução);
- Três, a sistemas indeterminados (infinitas soluções);
- Uma, a sistemas que têm uma única solução.

Portanto, vemos que há somente três possibilidades para as soluções de um sistema linear de três equações a três incógnitas: nenhuma solução, uma solução ou uma infinidade de soluções.

Essas observações sobre o número de soluções de um sistema linear de três equações a três incógnitas são as mesmas que obtivemos para um sistema linear de duas equações a duas incógnitas e, pelo Teorema 1, são válidas para todos os sistemas lineares.

A associação dos sistemas lineares a duas ou três incógnitas com a Geometria Espacial é uma boa ilustração de como se pode enriquecer o trabalho com a Matemática, evitando-se uma visão compartimentada. Ressaltamos que o enfoque geométrico é um instrumento poderoso que merece ser usado sempre que possível.

ATENÇÃO!

(1) No caso dos sistemas indeterminados, as infinitas soluções podem ser os pontos de um plano ou de uma reta.

(2) No caso dos sistemas impossíveis, a inexistência de soluções pode ocorrer de maneiras distintas: dois ou três planos podem ser paralelos entre si ou os três planos podem se interceptar dois a dois segundo retas paralelas.

TÓPICO 2

Resolução de um sistema linear pelo método de eliminação de Gauss

OBJETIVO

- Resolver sistemas lineares pelo método de eliminação de Gauss

Um dos principais objetivos quando se estuda sistemas lineares é conhecer técnicas eficazes para a resolução de problemas que, quando equacionados, resultam em sistemas lineares.

Na Educação Básica, é importante que o interesse em aprender a resolver um sistema linear decorra da necessidade de solucionar alguma situação problema. Neste caso, em geral, os problemas reduzem-se a sistemas lineares com no máximo 3 equações e 3 incógnitas e podem ser resolvidos sem a utilização de uma técnica específica (se bem que, mesmo sem uma justificativa formal, alguma técnica seja utilizada).

Mesmo quando se trata de sistemas lineares pequenos e, especialmente, quando o número de equações e/ou incógnitas cresce, o excesso de trabalho (cálculos) que se apresenta justifica a utilização de alguma técnica que sistematize e simplifique seu processo de resolução. Uma técnica muito utilizada e bastante eficiente e conveniente é o *método de eliminação de Gauss* ou *método de eliminação gaussiana*, também conhecido como *método do escalonamento*, que apresentaremos neste tópico. Esta técnica baseia-se em combinações lineares das equações do sistema.

Vamos relembrar uma técnica muito

GUARDE BEM ISSO!

O professor deve procurar sempre que possível fazer a contextualização dos conteúdos por meio de situações-problema. Elas são importantes e costumam despertar o interesse dos alunos.

empregada no Ensino Fundamental para resolver um sistema linear de duas equações a duas incógnitas, conhecida como *método da adição*. Consideremos, por exemplo, o problema a seguir.

Problema: Duas crianças, Sara e Gabriel, têm, cada uma, certa quantia em dinheiro. Sabe-se que a quantia da Sara somada com o triplo da quantia do Gabriel totaliza R$ 220,00 e que a quantia do Gabriel somada com R$ 20,00 é igual ao dobro da quantia da Sara. Quanto vale a soma das quantias das duas crianças?

Modelando o problema

Vamos representar por *x* a quantia da Sara e por *y* a quantia do Gabriel. As duas informações dão origem ao sistema linear de duas equações nas incógnitas *x* e *y*:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 220 \\ y & + & 20 & = & 2x \end{array}$$

Ou, na forma padrão:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 220 \\ 2x & - & y & = & 20 \end{array}$$

Pelo método da adição, somamos, membro a membro, as duas equações previamente multiplicadas por números convenientes de modo a obter (se for possível) uma equação com uma única incógnita. Por exemplo, se multiplicarmos a primeira equação por -2 e somarmos as duas equações, obtemos:

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & - & 6y & = & -440 \\ 2x & - & y & = & 20 \\ \hline 0x & - & 7y & = & -420 \end{array}$$

Isto é, obtemos a equação na incógnita *y*: $-7y=-420$. Pelo Teorema 1 da Aula 3, esta equação tem uma única solução, a saber $y=\dfrac{-420}{-7}$ ou $y=60$. Levando o valor de *y* em uma das equações originais do sistema, por exemplo, na primeira equação, obtemos $x+3\cdot 60=220$ ou $x+180=220$ ou $x=220-180$ ou $x=40$.

O que fizemos, resolvendo a equação $-7y=-420$ e substituindo o valor de *y* na primeira equação, corresponde a resolver o sistema que é equivalente ao sistema original.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 220 \\ & - & 7y & = & -420 \end{array}$$

Na verdade, o método da adição, visto dessa forma, nada mais é do que uma aplicação do método de eliminação de Gauss a sistemas lineares de duas equações a duas incógnitas. Para se ter uma ideia da importância do método de eliminação de Gauss, inclusive para a Educação Básica, destacamos o que dizem a esse respeito as orientações curriculares para o Ensino Médio:

> A resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3×3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes.(BRASIL, 2006, p. 78).

De um modo simplificado, uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro equivalente (que tenha o mesmo conjunto solução) do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. Dito de forma mais precisa, de acordo com Anton e Busby (2006, p. 63):

> O método básico de resolver um sistema linear consiste em efetuar operações algébricas apropriadas nas equações do sistema para produzir uma sucessão de sistemas cada vez mais simplificados, mas com o mesmo conjunto-solução do sistema original, até chegar num ponto em que fica visível se o sistema é consistente e, se for, quais são as soluções.

Uma forma de obter um sistema equivalente a um sistema dado é aplicar sucessivamente uma série de operações (que não alterem a solução do sistema) sobre as suas equações. Desse modo, a sucessão de sistemas cada vez mais simples de que falam Anton e Busby pode ser obtida eliminando incógnitas de maneira sistemática usando três tipos de operações:

1. Trocar duas equações de posição;
2. Multiplicar uma equação por uma constante não-nula;
3. Somar a uma equação outra equação multiplicada por uma constante.

Tais operações são chamadas *operações elementares* com as equações de um sistema linear e, formalmente, temos o seguinte teorema:

Teorema$_2$: *Seja um sistema S′ de equações lineares, obtido de outro sistema S de equações lineares por uma sequência finita de operações elementares. Então S′ e S têm o mesmo conjunto solução.*

A prova deste teorema pode ser vista em Lipschutz (1994, p. 49) ou nos outros livros de Álgebra Linear citados em nossas referências. As ideias centrais por trás da prova são:

→ Se um vetor **x** é solução de um sistema, então **x** também é solução do sistema obtido aplicando-se uma operação elementar sobre suas equações.

→ Se o sistema S', é obtido de S aplicando-se *uma* operação elementar às suas equações, então o sistema S também pode ser obtido de S' aplicando-se uma operação elementar às suas equações, pois cada operação elementar possui uma operação elementar inversa do mesmo tipo, que desfaz o que a anterior fez.

Usaremos a seguinte notação para as três operações elementares com as equações de um sistema linear com equações $E_1, E_2, \ldots, E_m$:

1. $E_i \leftrightarrow E_j$ significa trocar as equações *i* e *j*;
2. $E_i \leftarrow kE_i$ significa multiplicar a equação *i* pela constante *k*;
3. $E_i \leftarrow E_i + kE_j$ significa somar *k* vezes a equação *i* à equação.

O método de eliminação de Gauss ou método do escalonamento consiste em substituir o sistema S por outro S' que lhe seja equivalente e que seja escalonado e, então, resolver o sistema S'.

Definição$_1$: *Um sistema linear diz-se* **escalonado** *quando:*
i) *a primeira incógnita com coeficiente não nulo de cada equação situa-se à direita da primeira incógnita com coeficiente não nulo da equação anterior;*
ii) *toda equação degenerada, se houver, está abaixo de toda equação não-degenerada.*

Lembre-se que, na aula anterior, vimos que a primeira incógnita com coeficiente não nulo de uma equação é chamada de incógnita principal. Assim, na definição acima, a parte i) corresponde a: a incógnita principal de cada equação situa-se à direita da incógnita principal da equação anterior.

Exemplo 1: O sistema linear seguinte é escalonado:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & - & z & = & 11 \\ & & 5y & + & z & = & 2 \\ & & & & 3z & = & -9 \end{array}$$

Um sistema linear S de *m* equações a *n* incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ escalonado resolve-se facilmente, pelo seguinte procedimento:

1. Se o sistema apresentar equação degenerada do tipo $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, esta não representa restrição alguma e, portanto, o conjunto solução do sistema corresponde ao conjunto solução do sistema sem esta equação. Desse modo, podemos eliminar tais equações e analisar o sistema restante;

2. Se o sistema apresentar equação degenerada do tipo $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = c$, com $c \neq 0$, tal equação não tem solução e, portanto, o sistema não tem solução;

3. Se o sistema não apresentar equações degeneradas, temos dois casos:

i. $m = n$: o sistema tem solução única que pode ser obtida por *retrossubstituição* (substituição de trás para frente) dos valores das incógnitas encontrados a partir da última equação na equação anterior;

ii. $m < n$: o sistema tem infinitas soluções que podem ser obtidas da seguinte forma: atribuem-se valores arbitrários às $n - m$ variáveis livres (incógnitas que não são incógnita principal de nenhuma equção) e obtêm-se os valores das incógnitas principais por retrossubstituição, como no caso $m = n$.

O sistema linear do Exemplo 1 é escalonado, não apresenta equações degeneradas e o número de equações é igual ao número de incógnitas, isto é, é um sistema linear triangular. Podemos resolvê-lo por retrossubstituição:

i. A última equação dá $z = -3$;

ii. Levando o valor de *z* na segunda equação, obtemos $5y + (-3) = 2$, ou $5y = 5$, ou $y = 1$;

iii. Levando os valores de *z* e de *y* na primeira equação, obtemos $2x + 4 \cdot (1) - (-3) = 11$, ou $2x + 4 + 3 = 11$, ou $2x = 4$, ou $x = 2$.

ATENÇÃO!

Um sistema linear escalonado sem equações degeneradas em que o número de equações é igual ao número de incógnitas $(m = n)$ é chamado também de sistema linear triangular.

Portanto, o vetor $s = (2,1,-3)$ é a solução única do sistema.

Já vimos como é fácil resolver um sistema linear escalonado. Para completar o processo todo do método do escalonamento, resta-nos apresentar o algoritmo

GUARDE BEM ISSO!

Para se ter a solução geral de um sistema linear escalonado sem equações degeneradas em que o número de equções é menor que o número de incógnitas $(m < n)$, atribuem-se valores arbitrários (parâmetros, digamos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-m}$) às variáveis livres e obtêm-se os valores das incógnitas principais em função desses parâmetros por retrossubstituição.

VOCÊ SABIA?

Segundo o dicionário Aurélio (1986, p. 84), o termo algoritmo é oriundo das palavras algorismos ou algorithmos do idioma Latim, que significam algarismo, por influência da palavra arithmós do idioma Grego, que significa número. O termo algoritmo tem significados na área de Matemática e na área de Processamento de Dados:

1. Matemática: processo de cálculo, ou de resolução de um grupo de problemas semelhantes, em que se estipulam, com generalidade e sem restrições, regras formais para a obtenção do resultado, ou da solução do problema. 2. Processamento de Dados: conjunto predeterminado e bem definido de regras e processos destinados à solução de um problema, com um número finito de etapas.

O algoritmo da redução, descrito nos passos seguintes, "reduz" ou "transforma" um sistema qualquer à forma escalonada

para passar de um sistema *S* para um sistema escalonado equivalente. Chamaremos esse algoritmo de *algoritmo da redução*.

ALGORITMO DA REDUÇÃO

Passo 1

Encontre a primeira incógnita que tenha coeficiente diferente de zero em alguma equação. Seja x_j essa incógnita.

Passo 2

Permute a primeira equação com outra, se necessário, de modo que a incógnita x_j apareça como a primeira incógnita com coeficiente diferente de zero na primeira equação (ou seja, de modo que x_j seja a incógnita principal da primeira equação).

Passo 3

Some múltiplos convenientes da primeira equação a cada uma das equações seguintes de modo a ter todos os coeficientes da incógnita x_j abaixo da primeira equação iguais a zero.

Passo 4

Se o sistema já estiver escalonado, pare. Se não, oculte a primeira equação e repita todos os passos, a partir do Passo 1, ao sistema linear que restou.

Exemplo 2: Vamos aplicar o algoritmo da redução ao sistema linear:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ -4x & + & 2y & + & z & = & -3 \\ 5x & + & \frac{11}{2}y & - & 3z & = & 25 \end{array}$$

Aqui, x é a primeira incógnita com coeficiente diferente de zero em alguma equação e x já é incógnita principal da primeira equação. Vamos agora eliminar a incógnita x da segunda e terceira equações. Para isso, vamos somar $-\frac{-4}{2}=2$ vezes a primeira equação à segunda equação para obter:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ & & 4y & - & 3z & = & 17 \\ 5x & + & \frac{11}{2}y & - & 3z & = & 25 \end{array}$$

ATENÇÃO!

O Passo 3 consiste em eliminar a incógnita x_j de todas as equações ainda envolvidas no processo, exceto da primeira. Para isso, devem-se somar múltiplos convenientes da primeira equação a cada uma das equações seguintes. Se, no Passo 3, a é o coeficiente de x_j na primeira equação envolvido no processo e b é o coeficiente de x_j em uma seguinte, então o múltiplo conveniente é $-\frac{b}{a}$.

E somar $-\frac{5}{2}$ vezes a primeira equação à terceira equação para obter:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ & & 4y & - & 3z & = & 17 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

Uma vez que esse sistema ainda não é escalonado, ocultaremos a primeira equação e repetiremos o procedimento considerando apenas as duas últimas equações.

Agora, y é a primeira incógnita com coeficiente diferente de zero em alguma das duas equações que restou e y já é incógnita principal da primeira dessas equações. Vamos agora eliminar a incógnita y da terceira equação. Para isso, vamos somar $-\frac{3}{4}$ vezes a segunda equação à terceira equação para obter:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ & & 4y & - & 3z & = & 17 \\ & & & & \frac{17}{4}z & = & -\frac{51}{4} \end{array}$$

Este último sistema linear é escalonado. Mais precisamente, é um sistema triangular que, resolvido por retrossubstituição, dá $z=-3$, $y=2$ e $x=1$. Portanto, a única solução do sistema linear original é o vetor $s=(1,2,-3)$.

SAIBA MAIS!

Aprofunde seus conhecimentos sobre resolução de sistemas de equações lineares consultando as referências que citamos ou visitando páginas da internet. Abaixo listamos algumas páginas interessantes:

1. https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/
2. http://www.mat.ufmg.br/~elaine/GAAL/matriz.pdf
3. http://www.mat.uc.pt/~meresa/ALGA(Civil)05-06/cap1.pdf

Alternativamente, temos ainda um método de eliminação que evita a etapa de retrossubstituição. Esse método, denominado *método de eliminação de Gauss-Jordan*, consiste numa modificação do método de eliminação de Gauss e exige que o sistema seja transformado para um sistema linear na forma escalonada reduzida. Você terá a oportunidade de conhecer mais sobre o método de eliminação de Gauss-Jordan quando estudarmos as matrizes associadas a um sistema linear. Para isso, daremos início, em nossa próxima aula, ao estudo das matrizes.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Retorne à aula 3 e, usando o método de eliminação de Gauss, resolva o problema apresentado no início do Tópico 3.

2. Determine os valores de t para os quais o sistema linear dado não possui solução, possui exatamente uma solução ou possui uma infinidade de soluções.

a) $$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -2 \\ 4x & + & (t^2-1)y & = & t-5 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & tz & = & 1 \\ x & + & ty & + & z & = & 1 \\ tx & + & y & + & z & = & -2 \end{array}$$

3. No final de nossa aula 3, dissemos que os sistemas lineares homogêneos tinham uma particularidade interessante sobre seus conjuntos solução que discutiríamos posteriormente. Essa particularidade diz respeito ao fato de que todo sistema linear homogêneo é possível. Seja S um sistema linear homogêneo com m equações a n incógnitas.

a) Comprove o fato acima mostrando que o vetor $\mathbf{0} = (0,\ 0,\ ...,\ 0) \in \mathbb{R}^n$ é solução de S.

b) Que afirmação você pode fazer sobre o conjunto solução de S se $m < n$? Justifique a sua conclusão.

4. Considerando o sistema linear

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x & + & 2y & - & 5z & - & 6s & + & 2t & = & 4 \\ & & & & z & + & 8s & - & 3t & = & 6 \\ & & & & & & s & - & 5t & = & 5 \end{array},$$

faça o que se pede:

a) Determine, caso existam, as variáveis livres do sistema.

b) Classifique-o em impossível, possível determinado ou possível indeterminado.

5. Considerando o sistema linear do problema 4, faça o que se pede:

a) Determine três soluções particulares do sistema.

b) Determine a solução geral do sistema.

AULA 5

Matrizes: noções, notação e formatos especiais

Olá! Esta é a nossa quinta aula. Nela, aprenderemos um pouco sobre as matrizes. Apresentaremos algumas noções básicas e conceitos sobre este instrumento da matemática que encontra aplicações em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, Computação, entre outras.

"É muito importante que se domine um instrumento matemático para poder utilizá-lo como ferramenta nas diversas aplicações possíveis." (DANTE, 2008, p. 240)

Objetivos

- Conhecer o significado e a importância das matrizes
- Reconhecer e empregar a notação matricial
- Identificar tipos específicos de matrizes

TÓPICO 1

Importância e primeiras noções de matrizes

Objetivos

- Conhecer alguns conceitos e noções de matrizes
- Compreender a importância das matrizes

Neste tópico teremos as primeiras noções sobre as matrizes. Apresentaremos a importância das matrizes e do seu ensino e veremos que esta é uma ferramenta fundamental com aplicações em diversas áreas das ciências e engenharias. As matrizes são úteis também em várias situações de nosso dia-a-dia.

Frequentemente, para designar com clareza certas situações, formamos grupos ordenados de números que se apresentam dispostos em linhas e colunas, representados em tabelas, denominadas na Matemática de *matrizes*. Desse modo, a ideia geral de matriz é a de um quadro retangular com elementos, na maioria das vezes números, dispostos em linhas e colunas.

As matrizes são frequentemente utilizadas para organizar dados. Com o advento da computação e a necessidade crescente de se guardar muita informação, as matrizes adquiriram uma grande importância, facilitando o armazenamento e a manipulação da informação tabulada. O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada. Para se ter uma ideia mais real da utilidade das matrizes, podemos citar, como exemplos de aplicações, o seu uso como ferramenta na transmissão de imagens e sons digitalizados pela internet e, mais especificamente na matemática, a sua importância para a resolução de sistemas lineares. Esta última, uma aplicação comumente apresentada no Ensino Médio.

A tabela seguinte descreve o número de horas que certo aluno passa estudando quatro disciplinas ao longo de uma determinada semana:

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
Matemática	2	0	2	1	1	3	0
Física	2	3	0	1	2	1	0
Química	1	2	1	2	0	1	0
Biologia	1	1	4	0	0	1	0

Tabela 1 – Horas de estudo semanal de certo aluno por disciplina

Suprimindo as legendas, os dados numéricos que restam da tabela formam uma matriz de quatro linhas e sete colunas, cujas colunas correspondem aos dias da semana e cujas linhas representam as disciplinas. Na interseção de uma linha com uma coluna aparece um número, que é o número de horas que o aluno passa estudando aquela disciplina naquele dia da semana:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

VOCÊ SABIA?

A palavra matriz deriva da palavra latina mater, que significa "mãe". Quando o sufixo -iz é acrescentado, o significado torna-se "útero". Assim como um útero envolve um feto, os colchetes de uma matriz envolvem seus elementos, e assim como o útero dá origem a um bebê, uma matriz gera certos tipos de funções, chamadas transformações lineares (POOLE, 2006, p. 60).

De um modo mais formal, definimos uma *matriz* como um arranjo retangular de números, denominados os *elementos* ou as *entradas* da matriz. Se uma matriz tem *m* linhas e *n* colunas, dizemos que a matriz é de tamanho $m \times n$ (*m* por *n*) ou de dimensão $m \times n$ ou do tipo $m \times n$ ou, ainda, de ordem $m \times n$, e sempre escrevemos o número de linhas antes do de colunas. Observe que, neste caso, a matriz tem *mn* elementos.

GUARDE BEM ISSO!

Todas as matrizes têm uma dimensão! Esta será definida da seguinte forma:

Dimensão da matriz = Número de linhas x Número de colunas

O estudo formal de matrizes teve início em 1855 com Arthur Cayley (1821-1895), embora o termo matriz já tivesse sido usado por Joseph Sylvester (1814-1897), em uma revista alemã, em 1850. Cayley tinha em mente apenas os aspectos algébricos, e não os efeitos práticos, de matrizes quando formulou sua teoria. Em textos chineses, de alguns anos antes de Cristo, já se resolviam sistemas lineares, por um processo em que a notação matricial já estava subentendida.

Mais detalhes da história do início da teoria das matrizes e um pouco da biografia de Arthur Cayley podem ser observados no texto abaixo.

Cayley e a Teoria das Matrizes

Hygino H. Domingues

A disputa entre Newton e Leibniz (ou, mais exatamente, entre seus adeptos), em torno da primazia da criação do Cálculo, foi negativa para a matemática inglesa, embora Newton tivesse levado vantagem na polêmica. Considerando uma questão de honra nacional ser fiel ao seu mais eminente cientista, nos cem anos seguintes ao início desse episódio os matemáticos britânicos fixaram-se nos métodos geométricos puros, preferidos de Newton, em detrimento dos métodos analíticos, muito mais produtivos. Como os matemáticos da Europa Continental exploraram grandemente estes últimos métodos nesse período, a matemática britânica acabou ficando bem para trás.

Mas acabou havendo uma reação e a matemática britânica conseguiu voltar ao primeiro plano no século XIX, especialmente em álgebra, um campo que de um modo geral ficara algo marginalizado nesse meio tempo. E um dos maiores responsáveis por essa reascensão foi Arthur Cayley (1821-1895).

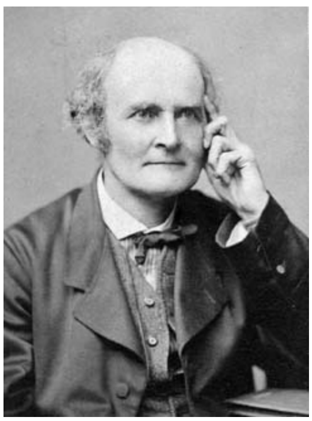


Figura 1 – Arthur Cayley (1821-1895)

Natural de Richmond, Inglaterra, Cayley descendia de uma família que conciliava talento e tradição. Desde muito cedo demonstrou grande aptidão para os estudos. Diante disso, e atendendo a sugestões de alguns de seus professores, os pais resolveram enviá-lo a estudar em Cambridge, em vez de iniciá-lo nos negócios da família. Assim, em 1838 ingressa no Trinity College, onde iria se graduar com distinção máxima. Logo em seguida inicia-se no ensino, no próprio Trinity, mas desiste três anos depois, pois sua permanência exigiria abraçar a carreira religiosa, o que não estava em seus planos. Nos quinze anos seguintes dedicou-se à advocacia, mas com certeza não integralmente, como o mostram os mais de duzentos artigos que publicou no período, na área de matemática. Foi também nessa época que conheceu James Joseph Sylvester (1814-1897), outro dos grandes expoentes da "álgebra britânica" do século XIX, com quem estabeleceu sólida amizade, consolidada até por áreas de pesquisa comuns, como a teoria dos invariantes. Em 1863 aceita convite para ocupar uma nova cadeira de matemática pura criada em Cambridge, à testa da qual ficou até a morte (salvo um semestre de 1882, em que deu cursos nos Estados Unidos). Em volume de produção matemática, em todos os tempos, Cayley talvez só seja superado por Euler e Cauchy. E, embora sua obra seja bastante diversificada, foi no campo da álgebra, com a grande facilidade que tinha para formulações abstratas, que mais se sobressaiu. Assim, por exemplo, deve-se a ele, num artigo de 1854, a noção de grupo abstrato. (Galois, que introduzira o termo grupo em 1830, com o sentido atual, só considerara grupos de permutações). Outra contribuição importante de Cayley, iniciada em 1843, é a geometria analítica n-dimensional em cuja elaboração utiliza determinantes e coordenadas homogêneas como instrumentos essenciais.O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo matriz já fora usado, com o mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester. Nesse artigo Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a ideia de matriz preceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados há muito na resolução de sistemas lineares. Quanto às matrizes, Cayley introduziu-as para simplificar a notação de uma transformação linear. Assim, em lugar de

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{escrevia} \quad (x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y)$$

A observação do efeito de duas transformações sucessivas sugeriu-lhe a definição de produto de matrizes. Daí chegou à ideia de inversa de uma matriz, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro (no caso, a matriz idêntica). Curiosamente, foi só num outro artigo, três anos depois, que Cayley introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação de matrizes por escalares, chamando inclusive a atenção para as propriedades algébricas dessas operações.

Ao desenvolver a teoria das matrizes, como outros assuntos, a grande preocupação de Cayley era com a forma e a estrutura em álgebra. O século XX se encarregaria de encontrar inúmeras aplicações para suas matrizes.(IEZZI; HAZZAN, 1993, p. 76-77)

Agora que já sabemos da importância das matrizes e de sua utilidade em diversas situações, iniciaremos o nosso trabalho com esses objetos presentes em nosso dia-a-dia, estudando as formas de representá-las.

TÓPICO 2 Notação matricial

OBJETIVO

- Estabelecer a notação matricial

Neste tópico, iniciaremos formalmente o estudo das matrizes, estabelecendo a notação comumente utilizada para representar as matrizes e suas partes e apresentando algumas definições.

Usamos a notação de *índice subscrito duplo* para nos referirmos aos elementos de uma matriz *A*: o elemento de *A* na linha *i* e coluna *j* é denotado por a_{ij} (*ij*-ésimo elemento de *A*). Com essa notação, uma matriz genérica $m \times n$ *A* tem a forma seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Alternativamente, utilizamos também o símbolo $[A]_{ij}$ para a entrada na linha *i* e coluna *j* da matriz *A*. A matriz *A* pode ser denotada compactamente por $[a_{ij}]$ (ou $[a_{ij}]_{m \times n}$, caso seja importante especificar a ordem de *A*). Veja alguns exemplos.

Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,5 & \sqrt{2} & \pi \\ \dfrac{1}{7} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são 2×2. A matriz C é 2×3, D é 3×3, E é 2×1, F é 1×4 e G é 1×1. De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são $a_{22} = 2$, $c_{13} = 4$, $e_{21} = 2$, $[D]_{23} = -\sqrt{3}$ e $[F]_{14} = 3$.

Um tipo de questão muito comum no Ensino Médio, útil como exercício de fixação da notação matricial, é a solicitação de construção de uma matriz a partir de uma lei de formação para seus elementos.

ATENÇÃO!

Em geral, utilizamos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar as suas entradas. Mas atenção, isto não é uma regra rígida. Matrizes com apenas uma linha ou uma coluna, por exemplo, costumam ser denotadas também por letras minúsculas em negrito.

Os elementos da matriz possuem dois índices de localização (i) para a posição da linha e para a posição da coluna (j). Se A é $m\times n$, temos $1\le i\le m$ e $1\le j\le n$.

Exercício resolvido

Escreva a matriz $X=[x_{ij}]_{2\times 3}$ tal que $x_{ij}=2i+j$.

Solução:

Como X é uma matriz 2×3 como elementos x_{ij}, ela pode ser representada por:

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$$

Assim, teremos:

$$x_{11}=2\cdot 1+1=3, \qquad x_{12}=2\cdot 1+2=4,$$
$$x_{21}=2\cdot 2+1=5, \qquad x_{22}=2\cdot 2+2=6$$

$$x_{13}=2\cdot 1+3=5$$
$$x_{23}=2\cdot 2+3=7$$

Portanto, a matriz X é:

$$X=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, onde $1\le i\le m$, também representada por:

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]$$

GUARDE BEM ISSO!

Cada elemento de uma matriz mora em um endereço certo! Ou seja, cada posição da matriz pode ser designada por um endereço. É muito fácil aprender a localizar a posição de um elemento na matriz. Observe que cada elemento (designado por uma letra minúscula) é acompanhado de dois índices (dois números): o primeiro deles indicará a linha a qual pertence o elemento; o segundo indicará a coluna. Assim, o elemento a32 será aquele que ocupa a terceira linha e a segunda coluna da matriz. Ficou entendido? Nada mais fácil, não é mesmo?

Chama-se a *i-ésima linha* da matriz A $m\times n$, enquanto a *j-ésima coluna* de A é a lista ordenada $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, onde $1\le j\le n$, também representada por:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Portanto, cada linha de uma matriz $m \times n$ é um vetor do $\mathbb{R}^n$ e cada coluna é um vetor do $\mathbb{R}^m$.

ATENÇÃO!

Como ilustrado na figura 2 abaixo, as linhas são enumeradas de cima para baixo; e as colunas, da esquerda para direita.

$$\begin{array}{l c} 1^a \text{ linha} \longrightarrow & \\ 2^a \text{ linha} \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ 3^a \text{ linha} \longrightarrow & \\ & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^a \text{ coluna} & 2^a \text{ coluna} & 3^a \text{ coluna} \end{array} \end{array}$$

Figura 2 – Numeração das linhas e colunas de uma matriz

Estabelecemos agora quando duas matrizes *A* e *B* são iguais. De acordo com Kolman (1998, p. 11),

Sempre que um novo objeto é introduzido em matemática, precisamos definir quando dois destes objetos são iguais. Por exemplo, no conjunto dos números racionais, os números $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são ditos iguais, embora eles não estejam representados da mesma maneira. Estamos pensando na definição de que a/b é igual a c/d quando $ad = bc$.

Definição$_1$ (Igualdade de matrizes): *Duas matrizes são* **iguais** *quando têm o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes são iguais.*

Simbolicamente:

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{r \times s}$, então, $A = B$ se, e somente se, $m = r$, $n = s$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para todos os valores de *i* e *j*.

Exemplo 2

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & y+1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & a \\ 0 & -7 & b \end{bmatrix}$.

Então, nem *A* nem *B* podem ser iguais a *C* (independentemente dos valores de *x*, *y*, *a* e *b*), já que as matrizes *A* e *B* são 2×2 e *C* é 2×3. Entretanto, $A = B$ se, e somente se, $y = 4$ e $x = -7$.

Neste tópico aprendemos a representar matrizes e suas partes, no próximo conheceremos alguns tipos particulares de matrizes que costumam ser bastante úteis.

TÓPICO 3 Matrizes de formato especial

OBJETIVO

- Reconhecer formatos especiais de matrizes

Neste tópico conheceremos alguns tipos específicos de matrizes que são bastante úteis e costumam aparecer com frequência em várias aplicações.

Algumas matrizes apresentam certas características (propriedades de seus elementos ou sua dimensão, por exemplo) que as tornam especiais. Em geral, tais matrizes são de grande utilidade e encontram um vasto campo de aplicações. Destacamos:

Definição$_2$: *Uma matriz que só possui uma linha é chamada* **matriz linha***, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada* **matriz coluna**.

Como exemplo, a matriz *F* do Exemplo 1 é uma matriz linha 1×4, enquanto a matriz *E* é uma matriz coluna 2×1.

Matriz linha e matriz coluna são chamadas também de *vetor-linha* e *vetor-coluna*, respectivamente, ou simplesmente de *vetor*. Portanto, um vetor-linha $1\times n$ $\mathbf{v}$ qualquer e um vetor-coluna $m\times 1$ $\mathbf{w}$ qualquer têm as formas

$$v=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \text{ e } w=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

Relembre que empregamos estas mesmas denominações e notações em nossa aula 2 para representar vetores. Apesar de não comum no Ensino Médio para a representação de matrizes, elas são largamente utilizada no Ensino Superior, especialmente em Computação e Álgebra Linear.

Muitas vezes é conveniente pensar numa matriz como uma lista de vetores-linha ou vetores-coluna.

Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Então A pode ser subdividida em vetores-coluna como:

ATENÇÃO!

Aqui utilizamos letras minúsculas em negrito para denotar matrizes linha ou coluna. Ademais, quando tratamos matrizes linha ou coluna como vetores, é comum escrevermos E e F, respectivamente, como $(-2,2)$ e $(2,1,0,3)$, ou seja, como listas ordenadas. Estas são notações amplamente utilizadas para vetores.

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [c_1\ c_2\ c_3\ c_4]$$

Figura 3– Divisão de uma matriz em vetores-linha

Ou em vetores-linha como:

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

Figura 4– Divisão de uma matriz em vetores-linha

As linhas pontilhadas acima servem apenas para enfatizar que as linhas e colunas estão sendo consideradas como entidades próprias. Elas *subdividem* a matriz A em quatro vetores-coluna e em três vetores-linha. Se usarmos o símbolo $l_i(A)$ para denotar o *i*-ésimo vetor linha de A e $c_j(A)$ para denotar o *j*-ésimo vetor coluna de A, então para a matriz A acima temos:

$$\begin{aligned} l_1(A) &= [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}] \\ l_2(A) &= [a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24}] \\ l_3(A) &= [a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34}] \\ l_4(A) &= [a_{41} \quad a_{42} \quad a_{43} \quad a_{44}] \end{aligned}$$

e

$$c_1(A)=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix},\quad c_2(A)=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix},\quad c_3(A)=\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix},\quad c_4(A)=\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

Um outro tipo específico de matriz muito importante e útil é o da matriz quadrada que tem uma estrutura especial. Aqui, o arranjo retangular de números torna-se um quadrado de números.

> **Definição$_3$**: *Uma matriz é dita* **quadrada** *quando tem o mesmo número de linhas e colunas. Assim, se A é uma matriz* $m \times n$*, então A é quadrada quando* $m = n$. *Dizemos, então, que A é quadrada de ordem* $n \times n$ *ou simplesmente quadrada de ordem n. Neste caso, os elementos* a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} *formam a chamada* **diagonal principal** *(ou simplesmente,* **diagonal***) da matriz A. A outra diagonal, composta pelos elementos* a_{1n}, …, a_{n1} *é denominada* **diagonal secundária**.

ATENÇÃO!

Note que os elementos da diagonal principal são os elementos aij com $i = j$ e que os elementos da diagonal secundária são os elementos aij com $i + j = n + 1$.

GUARDE BEM ISSO!

Só falaremos nas diagonais de uma matriz quando estivermos trabalhando com matrizes quadradas! Certo?

Pelas figuras a seguir, aprenda a reconhecer cada uma das diagonais de uma matriz quadrada.

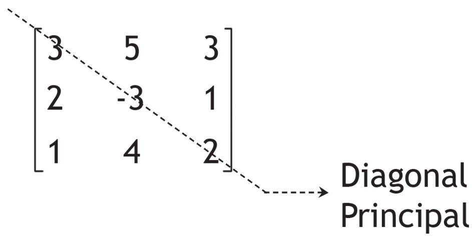


Figura 5– Diagonal principal de uma matriz

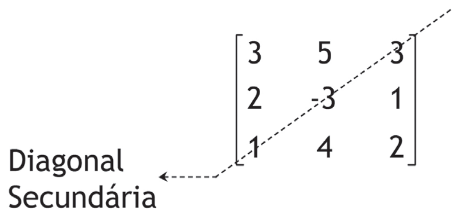


Figura 6– Diagonal secundária de uma matriz

A seguinte definição, que será utilizada mais adiante, se aplica somente a matrizes quadradas.

Definição$_4$ (Traço de uma matriz): *Se A é uma matriz quadrada, então o* **traço** *de A, denotado por* tr*(A), é soma das entradas na diagonal principal de A*.

Exemplo 3

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, então:

$$\mathrm{tr}(A) = 3 + (-7) = -4 \quad \text{e} \quad \mathrm{tr}(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

Note que o traço de uma matriz é a soma das entradas cujo número de linha e coluna coincidem, ou seja, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada $n \times n$, então

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Definição$_5$: *A matriz que tem todos os elementos iguais a zero é denominada* **matriz nula** *ou* **matriz zero**. *Denotamos a matriz nula de ordem* $m \times n$ *por* $0_{m\times n}$ *e a matriz nula de ordem n por* 0_n.

Exemplo 4

São exemplos de matrizes nulas:

$$0_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } 0_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pois bem! Vamos agora conhecer outros tipos específicos de matrizes que costumam ser bastante úteis.

Definição$_6$: *Uma matriz quadrada com todas as entradas acima da diagonal principal iguais a zero é dita* **triangular inferior** *e uma matriz quadrada com todas as entradas abaixo da diagonal principal iguais a zero é dita* **triangular superior**. *Uma matriz que é triangular inferior ou superior é dita* **triangular**.

Assim, matriz triangular é a matriz quadrada em que todos os elementos situados em um mesmo lado (acima ou abaixo) da diagonal principal são nulos.

Exemplo 5

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & 4 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$
Triangular inferior	Triangular superior

Exemplo 6

Matrizes triangulares 4×4 gerais têm a forma:

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$
Triangular inferior	Triangular superior

Este exemplo ilustra os seguintes fatos relativos a matrizes triangulares:

- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular superior se, e somente se, em cada linha, todas as entradas à esquerda da entrada diagonal são nulas, ou seja, a *i*-ésima linha começa com pelo menos $i - 1$ zeros, para cada *i*.
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior se, e somente se, em cada coluna, todas as entradas acima da entrada diagonal são nulas, ou seja, a *j*-ésima coluna começa com pelo menos $j - 1$ zeros, para cada *j*.
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular superior se, e somente se, todas as entradas à esquerda da diagonal principal são nulas, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i > j$ (Figura 7).
- Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior se, e somente se, todas as entradas à direita da diagonal principal são nulas, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i < j$ (figura 7).

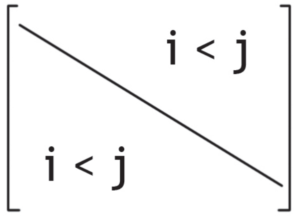


Figura 7– Formato de uma matriz triangular

Definição$_7$: Matriz diagonal *é a matriz quadrada em que todos os elementos situados fora da diagonal principal (acima e abaixo) são nulos.*

VOCÊ SABIA?

É possível uma matriz ser triangular tanto inferior quanto superior. Você pode fornecer alguns exemplos?

Numa matriz diagonal $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Veja alguns exemplos de matrizes diagonais abaixo.

Exemplo 7

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

GUARDE BEM ISSO!

Toda matriz diagonal é triangular tanto superior quanto inferior.

Definição$_8$: *Uma matriz diagonal* $A = [a_{ij}]$ *em que todos os elementos da diagonal principal são iguais é denominada* **matriz escalar**.

Numa matriz escalar $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = c$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, onde *c* é um número (escalar) qualquer. Alguns exemplos de matrizes escalares são apresentados abaixo.

Exemplo 8

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \text{ para } a \neq 0.$$

GUARDE BEM ISSO!

Toda matriz escalar é diagonal, mas nem toda matriz diagonal é escalar.

Definição$_9$: *Uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 é chamada* **matriz identidade**.

Equivalentemente, matriz identidade é a matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são nulos. A matriz identidade $n \times n$ é simbolizada por I_n. Para a matriz $I_n = [\delta_{ij}]$, temos $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$. Assim, são exemplos de matrizes identidade:

Exemplo 9

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_1 = [1].$$

GUARDE BEM ISSO!

Toda matriz identidade é quadrada, triangular e diagonal.

Nesta aula aprendemos um pouco sobre uma das ferramentas mais importantes da Álgebra Linear, as matrizes. Vimos algumas noções básicas, a notação utilizada e conhecemos alguns formatos especiais de matrizes. Nas próximas aulas aprenderemos a operar com estes objetos e veremos como utilizá-los na resolução de sistemas lineares.

SAIBA MAIS!

Você pode ampliar seus conhecimentos sobre matrizes consultando as referências que citamos ou visitando páginas da internet. Algumas páginas interessantes:

1. http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html
2. http://www.mat.uc.pt/~meresa/ALGA(Civil)05-06/cap1.pdf
3.https://ganuff.weebly.com/uploads/1/9/2/5/19255685/matrizes-determinantes-sistemas-lineares-e-inversa.pdf

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. A figura abaixo representa um mapa rodoviário que mostra as estradas que ligam as cidades 1, 2, 3 e 4.

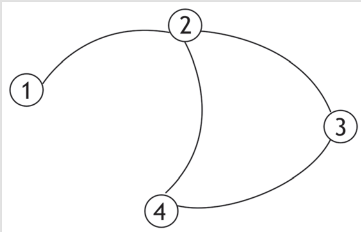


Figura 8– Mapa rodoviário

Associado a este mapa está uma matriz $A=[a_{ij}]_{4\times 4}$ definida da seguinte forma:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ se } i \text{ está ligada diretamente a } j\\ 0, \text{ se } i=j \text{ ou } i \text{ não tem ligação direta com } j\end{cases}$$

Sabendo-se que *i* e *j* referem-se às cidades do mapa e variam no conjunto {1, 2, 3, 4}, construa a matriz A.

2. (Anton e Busby, 2006, p. 109) Em cada item, descreva a forma de uma matriz $A=[a_{ij}]$ de tamanho 6×6 que satisfaz a condição enunciada. Dê uma resposta tão geral quanto possível usando letras em vez de números específicos para as entradas não nulas.

a) $a_{ij}=0$ se $i\neq j$.

b) $a_{ij}=0$ se $i>j+1$.

c) $a_{ij}=0$ se $i<j-1$.

d) $a_{ij}=0$ se $|i-j|>1$.

3. Encontre, se houver, o traço das matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 7 & 0 & -3\\ -11 & 4 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad C=\begin{bmatrix}1/2 & -1\\ 5 & 2/3\end{bmatrix}$$

4. Escreva as matrizes identidade de ordem 2, 4 e 5.

AULA 6

Matrizes: operações e propriedades

Olá! Estamos iniciando a nossa sexta aula. Isso significa que chegamos à metade da nossa disciplina. Até agora, estudamos vetores e sistemas lineares e iniciamos os nossos estudos sobre as matrizes. Você já está um tanto familiarizado com as matrizes, conhecendo alguns conceitos e a notação matricial. Estamos, então, aptos a definir uma série de operações que produzirão novas matrizes a partir de matrizes dadas. Essas operações serão úteis nas aplicações de matrizes.

Para muitas aplicações é desejável ter uma "aritmética" de matrizes, na qual as matrizes possam ser somadas, subtraídas e multiplicadas de alguma maneira útil. Nos próximos tópicos, desenvolveremos esta aritmética. Estudaremos também o processo de escalonamento de matrizes, que, como já sabemos, é bastante útil na resolução de sistemas lineares.

Objetivos

- Realizar operações com matrizes
- Reconhecer as propriedades algébricas das operações com matrizes

TÓPICO 1

Adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por escalar

Objetivos

- Realizar somas de matrizes
- Realizar multiplicações de matrizes por números
- Estabelecer as propriedades das operações de adição de matrizes e multiplicação de um escalar por uma matriz

A necessidade de efetuarmos certas operações com matrizes surge naturalmente em diversas situações.

Por exemplo, consideremos as tabelas que descrevem a produção de grãos nos dois primeiros meses de 2008 em três regiões de certo país.

	Produção de grãos (em milhares de toneladas) em jan. / 2008			
	Soja	**Feijão**	**Arroz**	**Milho**
Região A	**300**	**40**	**60**	**80**
Região B	**70**	**35**	**70**	**20**
Região C	**100**	**20**	**50**	**75**

Tabela 1 – Produção de grãos nas regiões A, B e C em janeiro de 2008

	Produção de grãos (em milhares de toneladas) em fev. / 2008			
	Soja	**Feijão**	**Arroz**	**Milho**
Região A	500	10	25	0
Região B	130	30	50	50
Região C	200	20	60	65

Tabela 2 – Produção de grãos nas regiões A, B e C em fevereiro de 2008

Consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 300 & 40 & 60 & 80 \\ 70 & 35 & 70 & 20 \\ 100 & 20 & 50 & 75 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 500 & 10 & 25 & 0 \\ 130 & 30 & 50 & 50 \\ 200 & 20 & 60 & 65 \end{bmatrix}$

, correspondentes às produções de janeiro e fevereiro de 2008, respectivamente.

Se quisermos montar uma tabela com a produção de grãos por produto e por região nos dois meses em conjunto, teremos que somar os elementos correspondentes das duas matrizes *A* e *B*. A matriz das somas das produções será:

$$\begin{bmatrix} 300+500 & 40+10 & 60+25 & 80+0 \\ 70+130 & 35+30 & 70+50 & 20+50 \\ 100+200 & 20+20 & 50+60 & 75+65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 & 50 & 85 & 80 \\ 200 & 65 & 120 & 70 \\ 300 & 40 & 110 & 140 \end{bmatrix}$$

É natural que denotemos a matriz das somas das produções por $A+B$, isto é:

$$A+B = \begin{bmatrix} 300 & 40 & 60 & 80 \\ 70 & 35 & 70 & 20 \\ 100 & 20 & 50 & 75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 500 & 10 & 25 & 0 \\ 130 & 30 & 50 & 50 \\ 200 & 20 & 60 & 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 & 50 & 85 & 80 \\ 200 & 65 & 120 & 70 \\ 300 & 40 & 110 & 140 \end{bmatrix}$$

Portanto, a tabela com a produção de grãos por produto e por região nos dois meses em conjunto é:

Produção de grãos (em milhares de toneladas) no 1º bimestre de 2008				
	Soja	**Feijão**	**Arroz**	**Milho**
Região A	800	50	85	80
Região B	200	65	120	70
Região C	300	40	110	140

Tabela 3 – Produção de grãos nas regiões A, B e C no 1º. bimestre de 2008

Suponhamos agora que, devido a determinadas condições favoráveis (chegada da estação chuvosa, incentivos do governo etc), exista a possibilidade de que a produção do mês de março seja o triplo do produzido no mês de janeiro. Assim, a estimativa para o mês de março de 2008 será obtida multiplicando cada elemento da matriz *A* por 3. A matriz dos produtos das produções de janeiro por 3 será:

$$\begin{bmatrix} 3\cdot 300 & 3\cdot 40 & 3\cdot 60 & 3\cdot 80 \\ 3\cdot 70 & 3\cdot 35 & 3\cdot 70 & 3\cdot 20 \\ 3\cdot 100 & 3\cdot 20 & 3\cdot 50 & 3\cdot 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 & 120 & 180 & 240 \\ 210 & 105 & 210 & 60 \\ 300 & 60 & 150 & 225 \end{bmatrix}$$

É natural que denotemos a matriz dos produtos das produções de janeiro por $3\cdot A$ ou, simplesmente, por $3A$, isto é:

$$3\cdot A = 3\cdot \begin{bmatrix} 300 & 40 & 60 & 80 \\ 70 & 35 & 70 & 20 \\ 100 & 20 & 50 & 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 & 120 & 180 & 240 \\ 210 & 105 & 210 & 60 \\ 300 & 60 & 150 & 225 \end{bmatrix}$$

Portanto, a tabela com a produção de grãos por produto e por região prevista para o mês de março é:

Produção de grãos (em milhares de toneladas) prevista para março de 2008				
	Soja	**Feijão**	**Arroz**	**Milho**
Região A	900	120	180	240
Região B	210	105	210	60
Região C	300	60	150	225

Tabela 4 – Previsão da produção de grãos nas regiões A, B e C para março de 2008

Nas construções das tabelas acima, efetuamos duas operações com matrizes: a adição de matrizes e a multiplicação de uma matriz por um escalar (número), realizadas elemento a elemento, que definiremos formalmente a seguir.

Definição$_1$ (Adição de Matrizes): *A* **soma** *de duas matrizes A e B de mesmo tamanho* $m \times n$ *é a matriz* $m \times n$, *denotada por* $A + B$, *cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de A e B.*

GUARDE BEM ISSO!

Só podemos adicionar matrizes do mesmo tipo.

Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ têm o mesmo tamanho, essa definição diz que $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Exemplo 1

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 4+1 & 0+5 & 2+2 \\ -2+2 & 6+5 & 5+0 & 0+(-1) \\ 4+3 & -1+(-2) & 7+(-4) & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 11 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Entretanto, não estão definidas as expressões $A + C$ e $B + C$, porque os tamanhos das matrizes *A*, *B* e *C* não são compatíveis para efetuar essas operações.

A seguir, definimos formalmente a operação de multiplicação de uma matriz por um escalar.

Definição$_2$ (Multiplicação de uma Matriz por um Escalar): *O* **produto** *de uma matriz A* $m \times n$ *por um escalar (número) c é a matriz* $m \times n$, *denotada por* $c \cdot A$ *ou, simplesmente, por* cA, *cujos elementos são os produtos dos elementos de A pelo escalar c.*

SAIBA MAIS!

O produto de uma matriz A por um escalar c é chamado também múltiplo escalar cA.

Se $A=[a_{ij}]$, essa definição diz que $cA=[ca_{ij}]$.

Exemplo 2

Considere as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 3 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 8\\ -2 & 1 & -5\end{bmatrix}\quad \text{e}$$

$$C=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

$$\text{Então, } 2A=\begin{bmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 0\\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 & 2\cdot 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\ -4 & 6 & 12\end{bmatrix},$$

$$(-1)B=\begin{bmatrix}(-1)\cdot 0 & (-1)\cdot 3 & (-1)\cdot 8\\ (-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3 & -8\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{3}C=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\cdot 6 & \frac{1}{3}\cdot(-3)\\ \frac{1}{3}\cdot 3 & \frac{1}{3}\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & \frac{4}{3}\end{bmatrix}.$$

A matriz $(-1)A$ é denotada como $-A$ e chamada *oposta* de *A* ou *negativa* de *A*. Observe que, no exemplo acima, a matriz $-B$ é a matriz cujos elementos são os opostos dos elementos correspondentes de *B*. Este é um fato geral, ou seja,

Se $A=[a_{ij}]$, então $-A=[-a_{ij}]$.

A subtração de duas matrizes é definida em termos da oposta abaixo.

Definição$_3$ (Subtração de Matrizes): *A* **diferença** *de duas matrizes A e B de mesmo tamanho* $m\times n$ *é a matriz* $m\times n$, *denotada por* $A-B$, *definida por* $A-B=A+(-B)$.

ATENÇÃO!

Assim como na adição, só podemos subtrair matrizes do mesmo tipo.

Se $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ têm o mesmo tamanho, essa definição diz que $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]$.

Portanto, a diferença de duas matrizes *A* e *B* de mesmo tamanho é a matriz $A-B$ obtida pela subtração dos elementos de *B* dos elementos correspondentes de *A*.

Exemplo 3

Considerando as matrizes do Exemplo 1, temos:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-(-3) & 4-1 & 0-5 & 2-2 \\ -2-2 & 6-5 & 5-0 & 0-(-1) \\ 4-3 & -1-(-2) & 7-(-4) & 5-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

Entretanto, não estão definidas as expressões $A - C$ e $B - C$, porque os tamanhos das matrizes A, B e C não são compatíveis para efetuar essas operações.

O próximo teorema lista algumas das propriedades básicas da adição matricial e da multiplicação por escalar. Por essas operações serem realizadas elemento a elemento, é natural que todas essas propriedades sejam as análogas às propriedades correspondentes da aritmética de números reais. Por outro lado, pela observação acima, é natural também que todas as propriedades algébricas da adição de vetores e da multiplicação de um vetor por um escalar sejam válidas para as matrizes.

GUARDE BEM ISSO!

Como os vetores podem ser percebidos como matrizes linha ou coluna, é natural que as operações de adição e subtração de matrizes e a operação de multiplicação de uma matriz por um escalar acima sejam vistas como generalizações das operações correspondentes definidas para vetores.

Teorema$_1$ (Propriedades da Adição e da Multiplicação por um Escalar): *Sejam A, B e C matrizes de mesmo tamanho, e a e b, escalares. Então:*

(a) $A + B = B + A$

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(c) $A + 0 = 0 + A = A$

(d) $A + (-A) = 0$

(e) $a(A + B) = aA + aB$

(f) $(a + b)A = aA + bA$

(g) $a(bA) = (ab)A$

(h) $1A = A$ *e* $(-1)A = -A$

(i) $0A = 0$ *e* $a0 = 0$

ATENÇÃO!

Nas propriedades (c) e (d), 0 é a matriz nula de mesmo tamanho que A; na primeira igualdade da propriedade (i), o primeiro 0 é um escalar e o segundo 0 é uma matriz de mesmo tamanho que A; e na segunda igualdade da propriedade (i), os dois 0 são matrizes de mesma ordem.

VOCÊ SABIA?

A propriedade (a) é chamada lei da comutatividade da adição ou, simplesmente, comutativa da adição; a propriedade (b) é chamada lei da associatividade da adição ou, simplesmente, associativa da adição; e as propriedades (e) e (f) são chamadas leis distributivas.

As provas das propriedades no Teorema 1 são análogas às provas das propriedades correspondentes de vetores. Em cada parte devemos provar que o lado esquerdo tem o mesmo tamanho que o lado direito e que os elementos correspondentes nos dois lados são iguais. Para provar que as entradas correspondentes são iguais, podemos trabalhar com elementos individuais (elemento a elemento) ou provar que os correspondentes vetores-coluna (ou vetores-linha) dos dois lados são iguais. Para ilustrar, vamos provar a parte (b) trabalhando elemento a elemento. Prove as outras partes como exercício.

Prova de (b)

Desde que A, B e C são matrizes de mesmo tamanho, segue que $(A+B)+C$ e $(A+B)+C$ são matrizes de mesmo tamanho. Assim, resta provar que os elementos correspondentes das duas matrizes são iguais, ou seja, que $[(A+B)+C]_{ij}=[A+(B+C)]_{ij}$.

Para todos os valores de i e j. De fato,

$$\begin{aligned}
[(A+B)+C]_{ij} &= [A+B]_{ij}+[C]_{ij} \\
&= ([A]_{ij}+[B]_{ij})+[C]_{ij} \\
&= [A]_{ij}+([B]_{ij}+[C]_{ij}) \\
&= [A]_{ij}+[B+C]_{ij} \\
&= [A+(B+C)]_{ij}
\end{aligned}$$

SAIBA MAIS!

Se A, B e C são matrizes de mesmo tamanho, devido à propriedade associativa da adição, a expressão $A+B+C$ não é ambígua.

Na terceira igualdade, usamos a propriedade associativa da adição de números reais; e, nas demais igualdades, a definição de adição de matrizes.

As operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar vistas neste tópico são bem simples e são realizadas elemento a elemento. No próximo tópico veremos a multiplicação de matrizes, que não segue este mesmo padrão.

TÓPICO 2

Multiplicação de matrizes

Objetivos

- Realizar multiplicações de matrizes
- Estabelecer as propriedades da operação de multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes não é uma operação tão simples como as outras que estudamos até aqui e costuma ser um tópico difícil para os alunos do Ensino Médio. Não basta multiplicar os elementos correspondentes, como se poderia esperar. Entretanto, esta operação, aparentemente complicada, é natural e precisa ser bem motivada, por meio de exemplos cuidadosamente trabalhados, para ser mais facilmente compreendida.

Consideremos, inicialmente a seguinte situação:

Problema: Sara e Gabriel pretendem comprar frutas para a próxima semana. Cada um deles quer comprar certa quantidade de bananas, laranjas e maçãs. As quantidades pretendidas estão indicadas na Tabela 5, a seguir. Nas proximidades existem duas bancas de frutas – a da Ana e a do Leo –, cujos preços são fornecidos na Tabela 6. Quanto gastarão Sara e Gabriel para fazer suas compras em cada uma das duas bancas?

	Bananas	Laranjas	Maçãs
Sara	6	10	8
Gabriel	12	6	7

Tabela 5 – Quantidades de cada fruta

	Ana	Leo
Bananas	\$ 0,20	\$ 0,15
Laranjas	\$ 0,35	\$ 0,45
Maçãs	\$ 0,12	\$ 0,08

Tabela 6 – Preços de cada fruta

Consideremos as matrizes $D = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 12 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,15 \\ 0,35 & 0,45 \\ 0,12 & 0,08 \end{bmatrix}$, correspondentes, respectivamente, às informações de demanda e de preços das frutas dadas nas tabelas. Temos:

Se Sara comprar suas frutas na banca de Ana, gastará:

$6 \cdot 0,20 + 10 \cdot 0,35 + 8 \cdot 0,12 = \$5,66$

Isto corresponde à soma dos produtos dos elementos da primeira linha de *D* pelos elementos correspondentes da primeira coluna de *P*. Já, se Sara comprar suas frutas na banca de Leo, gastará $6 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,45 + 8 \cdot 0,08 = \$6,04$, que corresponde à soma dos produtos dos elementos da primeira linha de *D* pelos elementos correspondentes da segunda coluna de *P*.

Gabriel, por sua vez, gastará na banca de Ana $12 \cdot 0,20 + 6 \cdot 0,35 + 7 \cdot 0,12 = \$5,34$.

Isto corresponde à soma dos produtos dos elementos da segunda linha de *D* pelos elementos correspondentes da primeira coluna de *P*. Já, na banca de Leo, Gabriel gastará $12 \cdot 0,15 + 6 \cdot 0,45 + 7 \cdot 0,08 = \$5,06$, que corresponde à soma dos produtos dos elementos da segunda linha de *D* pelos elementos correspondentes da segunda coluna de *P*.

Possivelmente, Sara fará suas compras na banca de Ana; e Gabriel, na banca de Leo.

A matriz que fornece os gastos de Sara e Gabriel para fazer suas compras em cada uma das duas bancas é $\begin{bmatrix} 5,66 & 6,04 \\ 5,34 & 5,06 \end{bmatrix}$.

Na linha 1, estão os gastos de Sara e, na linha 2, os gastos de Gabriel. Nas colunas 1 e 2 estão, respectivamente, os gastos nas bancas de Ana e de Leo. Esta matriz, cujos termos são os produtos escalares das linhas de *D* pelas colunas de *P*, é chamada de *produto* da matriz *D* pela matriz *P* e será denotada por *DP*.

ATENÇÃO!

A operação de somarmos os produtos dos elementos de uma linha de uma matriz pelos elementos correspondentes de uma coluna de outra matriz, é exatamente a operação de produto escalar dos vetores linha de uma matriz e coluna da outra matriz. Esta é uma operação com a qual você já está familiarizado desde a nossa segunda aula.

Formalmente, temos a definição:

Definição$_4$ (Multiplicação de Matrizes): *Se* $A = [a_{ij}]$ ... $B = [b_{ij}]$ *é uma matriz* $p \times n$, *então o* **produto** *AB das m* ... $m \times n$, *cujo elemento na posição (i,j) é dado por:*

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p}$$

Se usarmos a notação da aula 5, onde os símbolos $l_i(M)$ e $c_j(M)$ denotam, respectivamente, o *i*-ésimo vetor linha e o *j*-ésimo vetor coluna da matriz *M*, a Definição 4 diz que o elemento $[AB]_{ij}$ do produto *AB* é o produto escalar do vetor $l_i(A)$ pelo vetor $c_j(B)$, isto é,

$$[AB]_{ij} = l_i(A) \cdot c_j(B)$$

Exercício resolvido 1

Calcule *AB*, dados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução:

Como *A* tem tamanho 2×3 e *B* tem tamanho 3×4, o produto *AB* está definido e será uma matriz 2×4 da forma:

$$AB = \begin{bmatrix} l_1(A) \cdot c_1(B) & l_1(A) \cdot c_2(B) & l_1(A) \cdot c_3(B) \\ l_2(A) \cdot c_1(B) & l_2(A) \cdot c_2(B) & l_2(A) \cdot c_3(B) \end{bmatrix}$$

, onde $l_1(A)$ e $l_2(A)$ são os vetores linha de *A* e $c_1(B)$, $c_2(B)$ e $c_3(B)$ são os vetores coluna de *B*.

SAIBA MAIS!

A notação de somatório permite simplificar a exibição de certas somas, utilizando, como símbolo, a letra grega maiúscula sigma (Σ) da seguinte forma:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

que lê-se: somatório de todos os x_i com i variando de 1 a n.

Por exemplo, a entrada na linha 1 e coluna 3 de *AB* é calculada como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \boxed{1} & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 1$$

As entradas todas de *AB* são:

$$
\begin{aligned}
[AB]_{11} &= l_1(A)\cdot c_1(B) = 1\cdot(-4)+4\cdot 3+(-1)\cdot(-1)=9\\
[AB]_{12} &= l_1(A)\cdot c_2(B) = 1\cdot 0+4\cdot(-2)+(-1)\cdot 2=-10\\
[AB]_{13} &= l_1(A)\cdot c_3(B) = 1\cdot 5+4\cdot(-1)+(-1)\cdot 0=1\\
[AB]_{14} &= l_1(A)\cdot c_4(B) = 1\cdot(-1)+4\cdot 1+(-1)\cdot 8=-5\\
[AB]_{21} &= l_2(A)\cdot c_1(B) = (-3)\cdot(-4)+(-1)\cdot 3+0\cdot(-1)=9\\
[AB]_{22} &= l_2(A)\cdot c_2(B) = (-3)\cdot 0+(-1)\cdot(-2)+0\cdot 2=2\\
[AB]_{23} &= l_2(A)\cdot c_3(B) = (-3)\cdot 5+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0=-14\\
[AB]_{24} &= l_2(A)\cdot c_4(B) = (-3)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+0\cdot 8=2
\end{aligned}
$$

Sempre que definimos uma operação nova, tal como a multiplicação de matrizes, devemos ser cautelosos para não presumir muito sobre ela. Seria bom, e talvez esperássemos isso, que a multiplicação de matrizes se comportasse com a multiplicação de números reais. Embora em muitos aspectos isso aconteça, existem algumas diferenças significativas. Vejamos algumas!

GUARDE BEM ISSO!

Há uma exigência para que se possa multiplicar duas matrizes. Ou seja, não são quaisquer duas matrizes que podem ser multiplicadas! Só se pode efetuar a multiplicação de duas matrizes se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. Nesse caso, o número de linhas da matriz produto é igual ao número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da matriz produto é igual ao número de colunas da segunda matriz.

O elemento na posição (i,j) da matriz produto é obtido multiplicando-se os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz e somando-se esses produtos.

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn}
\end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
l_1(A)\cdot c_1(B) & l_1(A)\cdot c_2(B) & \cdots & l_1(A)\cdot c_j(B) & \cdots & l_1(A)\cdot c_n(B)\\
l_2(A)\cdot c_1(B) & l_2(A)\cdot c_2(B) & \cdots & l_2(A)\cdot c_j(B) & \cdots & l_2(A)\cdot c_n(B)\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
l_i(A)\cdot c_1(B) & l_i(A)\cdot c_2(B) & \cdots & l_i(A)\cdot c_j(B) & \cdots & l_i(A)\cdot c_n(B)\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
l_m(A)\cdot c_1(B) & l_m(A)\cdot c_2(B) & \cdots & l_m(A)\cdot c_j(B) & \cdots & l_m(A)\cdot c_n(B)
\end{bmatrix}
$$

Exemplo 4

Em contraste com a multiplicação de números reais, a multiplicação de matrizes *não é comutativa*, ou seja, a ordem dos fatores no produto de matrizes é importante! Na verdade, na multiplicação de matrizes é possível até que um dos produtos *AB* ou *BA* esteja definido e o outro não. No Exercício resolvido 1, por exemplo, o produto *AB* está definido e é uma matriz 2×4. Entretanto, porque o número de colunas de *B* é diferente do número de linhas de *A*, o produto *BA* não está sequer definido.

Mesmo quando existem ambos os produtos *AB* e *BA*, podemos ter

$AB \neq BA$. Por exemplo, considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando-as, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad e \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Portanto, $AB \neq BA$.

Nos casos específicos em que valer a igualdade $AB = BA$, dizemos que as matrizes *A* e *B comutam*.

É fácil verificar também que $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, para matrizes, a equação $A^2 = 0$ não implica que $A = 0$. Está é mais uma diferença para a multiplicação de números reais, em que a equação $a^2 = 0$ se, e somente se, $a = 0$.

Outras coisas "obscuras" podem aparecer como $AB = 0$, mesmo com $A \neq 0$ e $B \neq 0$. Também não vale a lei do cancelamento em geral, ou seja, podemos ter $AB = AC$, mas $B \neq C$, mesmo quando $A \neq 0$. Como exercício, apresente exemplos que ilustrem estes dois casos.

Ao trabalhar com matrizes, você precisa ser um pouco cuidadoso e lembrar sempre que as matrizes não são números. O teorema seguinte resume as principais propriedades da multiplicação de matrizes. Deixamos a prova desse teorema como exercício.

Teorema$_2$ (Propriedades da Multiplicação de Matrizes): *Sejam A, B e C matrizes de tamanhos tais que as operações indicadas possam ser realizadas e seja k um escalar. Então:*

(a) $A(BC) = (AB)C$

(b) $A(B + C) = AB + AC$

(c) $(B + C)A = BA + CA$

(d) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(e) $0A = 0$ *e* $A0 = 0$ *, onde* 0 *é a matriz nula.*

(f) $I_m A = A$ *e* $AI_n = A$ *, se A for* $m \times n$.

Para encerrar esta aula, resta-nos ainda tratar de uma interessante operação, a transposição de matrizes, que não estabelece analogia com qualquer operação com números reais. Para isto, assista ao vídeo *A Transposta de uma Matriz* e aprenda, além dessa definição, outros conceitos relacionados.

Na próxima aula, nos valeremos dos conhecimentos que já temos para estudarmos relacionadamente sistemas lineares e matrizes. Aprenderemos que, associadas a um sistema linear, estão duas matrizes e veremos como estas matrizes facilitarão a resolução de sistemas lineares.

SAIBA MAIS!

Por ora, amplie seus conhecimentos sobre matrizes consultando as referências que citamos ou visitando páginas da internet. Algumas páginas interessantes são:

1. https://www.somatematica.com.br/emedio/matrizes/matrizes.php
2. http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=48%3Aoperacoesmatrizes&catid=41%3Aconteudosal&Itemid=38
3. http://www.mat.ufmg.br/~elaine/GAAL/matriz.pdf

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, resolva as equações matriciais:

a) $X + 2A - 3B = 0$

b) $2X = A + B$

c) $2(A + 4B) = 3X$

d) $2(A - B + X) = 3(X + B)$

2. Mostre que não vale, em geral, a lei do cancelamento para a o produto de matrizes. Ou seja, exiba matrizes A, B e C com $A \neq 0$ tais que $AB = AC$ e $B \neq C$.

3. Ache todas as matrizes que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. (Poole, 2006, p. 150) Prove que, se A e B são matrizes $n \times n$ anti-simétricas, $A + B$ também é.

AULA 7

Sistemas Lineares e Matrizes

Chegamos à nossa sétima aula. Este é um bom momento para você rever alguns dos conceitos e resultados que estudamos até aqui. Nesta aula, ampliaremos os nossos conhecimentos estabelecendo uma estreita relação entre dois temas que abordamos nas aulas anteriores: sistemas lineares e matrizes. Veremos que associadas a um sistema linear estão duas matrizes e veremos ainda como estas matrizes facilitarão a resolução de sistemas lineares.

Objetivos

- Estabelecer conexões entre sistemas lineares e matrizes
- Identificar as matrizes associadas a um sistema linear
- Realizar o escalonamento de matrizes

TÓPICO 1 Matrizes associadas a um sistema linear

OBJETIVOS

- Relacionar sistemas lineares e matrizes
- Reconhecer a matriz e a matriz aumentada de um sistema linear

À medida que aumenta o número de equações e de incógnitas dos sistemas lineares a complexidade da álgebra envolvida na obtenção de soluções também aumenta. Entretanto, os cálculos necessários podem ficar mais tratáveis pela simplificação da notação e pela padronização dos procedimentos. Desse modo, ao estudar sistemas de equações lineares é, em geral, mais simples utilizar a linguagem e a teoria das matrizes.

Consideremos novamente o sistema linear de *m* equações a *n* incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix} \qquad (1)$$

Recorrendo ao produto de matrizes que definimos na aula anterior, verificamos que o sistema linear acima é equivalente à equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ou, simplesmente, $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz $A = [a_{ij}]$ é a *matriz dos coeficientes das incógnitas*, também chamada *matriz do sistema*; $X = [x_j]$ é a *matriz (vetor) das incógnitas* e $B = [b_i]$ é a *matriz (vetor) das constantes* ou *matriz (vetor) dos termos independentes*.

A afirmação de equivalência significa que toda solução do sistema linear (1) é também solução da equação matricial (2), e vice-versa.

Uma outra matriz associada ao sistema linear (1) pode ser obtida. Considerando a posição dos sinais $+$ de soma, das incógnitas x_j e das igualdades $=$ do sistema, podemos abreviá-lo escrevendo somente a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Essa matriz é chamada *matriz aumentada do sistema* ou *matriz completa do sistema*. Ela é a matriz *A* do sistema linear aumentada de uma coluna correspondente ao vetor *B* das constantes.

GUARDE BEM ISSO!

O sistema linear (1) fica completamente determinado por sua matriz aumentada.

Exemplo 1

O sistema linear de duas equações a três incógnitas

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & -8 \\ x & + & 2y & - & 5z & = & 10 \end{array}$$ pode ser escrito como $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & -5 & 10 \end{bmatrix}$.

O uso de matrizes para descrever e resolver sistemas lineares é bastante antigo, como nos mostra o texto seguinte.

A Álgebra Linear na História

O primeiro exemplo conhecido do uso de uma matriz aumentada para descrever sistemas lineares aparece num manuscrito chinês intitulado Nove Capítulos de Arte Matemática, que foi publicado entre 200 a.C. e 100 a.C., durante a Dinastia Han. Naquele manuscrito foi proposto o seguinte problema:
Existem três tipos de milho, dos quais três montes do primeiro, dois do segundo

e um do terceiro totalizam 39 medidas. Dois montes do primeiro, três do segundo e um do terceiro totalizam 34 medidas. Finalmente, um monte do primeiro, dois do segundo e três do terceiro totalizam 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um monte de cada um dos tipos?

O problema leva a um sistema de três equações lineares a três incógnitas, que o autor escreve como

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Exceto pelo arranjo dos coeficientes por colunas em vez de linhas e a omissão de colchetes, essa é a matriz aumentada do sistema. Notavelmente, o autor passa a descrever uma sucessão de operações sobre as colunas que levam a uma solução do sistema.

O uso do termo matriz aumentada parece ter sido introduzido pelo matemático norte-americano Maxime Bôcher em seu livro Introduction to Higher Algebra, publicado em 1907. Além de ser um matemático excepcional e experto em Latim, Química, Filosofia, Zoologia, Geografia, Meteorologia, Arte e Música, Bôcher foi um excepcional expositor de Matemática; seus livros didáticos elementares eram enormemente apreciados pelos estudantes e continuam sendo procurados até hoje.

Maxime Bôcher (1867-1918)

(Extraído de ANTON; BUSBY, 2006, p. 63-64)

O método de eliminação de Gauss ou método do escalonamento para resolver sistemas lineares que apresentamos na Aula 4, e o método de eliminação de Gauss-Jordan tornam-se mais simples quando aplicados à matriz aumentada do sistema. Antes de apresentá-los aplicados a esta matriz, precisamos conhecer o significado de matrizes escalonadas.

TÓPICO 2

Matrizes escalonadas

Objetivo

- Reconhecer matrizes escalonadas

Neste tópico apresentamos os conceitos de matriz *escalonada* e de matriz *escalonada reduzida*. Esses conceitos serão importantes para o estudo de sistemas lineares, pois os sistemas lineares cujas matrizes associadas são escalonadas podem ser facilmente resolvidos.

De acordo com Poole (2006, p. 65), "a palavra escalonar vem da palavra latina scala, que s

Definição$_1$ (Forma escalonada de uma matriz): *Uma matriz está na* **forma escalonada por linhas** *ou, mais simplesmente, é* **escalonada** *quando satisfaz as seguintes propriedades:*

1. Se existem linhas totalmente constituídas de zeros (linhas nulas), então elas estão abaixo de todas as outras.
2. Em cada linha não nula, o primeiro elemento não nulo (chamado de **elemento líder** ou **pivô** da linha) está em uma coluna à esquerda de qualquer outro elemento líder abaixo dele.

ATENÇÃO!

Note que essas propriedades garantem que os elementos líderes fiquem posicionados formando uma escada. Em particular, em qualquer coluna que contenha um elemento líder, todos os elementos abaixo dele são nulos, como ilustram os exemplos a seguir.

Definição$_2$ (Forma escalonada reduzida de uma matriz): *Uma matriz escalonada está na* **forma escalonada reduzida por linhas** *ou, mais simplesmente, é* **escalonada reduzida** *quando satisfaz as duas propriedades adicionais:*

O elemento líder em cada linha não nula é igual a 1.

Cada coluna que contém um elemento líder tem zeros nas demais posições.

ATENÇÃO!

Uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas está necessariamente em forma escalonada por linhas, mas a recíproca não é verdadeira. Em particular, uma matriz em forma escalonada por linhas tem zeros abaixo de cada pivô, enquanto uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas tem zeros abaixo e acima de cada pivô.

Exemplo 1

As seguintes matrizes estão na forma escalonada por linhas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

As seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida por linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que cada uma das matrizes desses exemplos satisfaz todos os requisitos de sua forma respectiva.

No próximo tópico veremos o processo para escalonar uma matriz. Este processo é bastante útil na resolução de sistemas lineares.

TÓPICO 3

Escalonamento de Matrizes

OBJETIVO

- Escalonar matrizes

Neste tópico veremos o processo para *escalonar* uma matriz, ou seja, reduzir uma matriz à sua forma escalonada por linhas. Este processo, denominado *escalonamento*, quando aplicado à matriz aumentada de um sistema linear consiste em um método geral extremamente eficiente que conduzirá à resposta para a questão da existência de soluções do sistema, bem como permite a determinação explícita de tais soluções, quando existirem (LIMA *et al.*, 1998).

Na Aula 4, vimos que uma forma de resolver um sistema linear é aplicar sucessivamente uma série de operações elementares sobre as suas equações para obter um sistema linear equivalente.

Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes e os termos independentes do sistema são alterados. Podemos, então, aplicar operações correspondentes sobre as linhas da matriz aumentada do sistema e obter uma matriz escalonada ou escalonada reduzida.

Portanto, as *operações elementares sobre as linhas* de uma matriz que podem ser realizadas para reduzi-la à forma escalonada ou à forma escalonada reduzida são:

1. Trocar duas linhas de posição;
2. Multiplicar uma linha por uma constante não-nula;
3. Somar a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

Usaremos a seguinte notação para as três operações elementares com as linhas de uma matriz com linhas $L_1, L_2, \ldots, L_m$:

1. $L_i \leftrightarrow L_j$ significa trocar as linhas i e j.
2. $L_i \leftarrow kL_i$ significa multiplicar a linha i pela constante k.
3. $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ significa somar k vezes a linha j à linha i.

Definição$_3$: *Uma matriz A é* **linha-equivalente** *a uma matriz B se existir uma sequência finita de operações elementares com linhas que converta A em B.*

O teorema seguinte dá a condição necessária e suficiente para que duas matrizes sejam linha-equivalentes. Sua prova pode ser vista em Poole (2006, p. 69).

SAIBA MAIS!

Operações elementares com linhas são reversíveis, ou seja, podem ser "desfeitas". Desse modo, se uma operação elementar sobre as linhas converte A em B, existe também uma operação elementar sobre as linhas que converte B em A.

Teorema$_1$: Duas matrizes são linha-equivalentes se, e somente se, puderem ser reduzidas à mesma forma escalonada por linhas.

A seguir apresentamos um procedimento passo a passo para reduzir qualquer matriz à sua forma escalonada reduzida por linhas por meio de operações sobre as linhas da matriz. À medida que enunciarmos os passos, aplicaremos à matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 8 & 10 \\ 2 & 6 & -14 & 12 & 24 \\ 2 & 6 & -9 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

para reduzi-la à sua forma escalonada reduzida por linhas.

ATENÇÃO!

Uma vez que as operações elementares com linhas são reversíveis, se A é linha-equivalente a B, então B é linha-equivalente a A e dizemos que as matrizes A e B são linha-equivalentes.

ALGORITMO DA REDUÇÃO

Passo 1

Encontre a coluna mais à esquerda que não seja nula. Seja *j* esta coluna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 8 & 10 \\ 2 & 6 & -14 & 12 & 24 \\ 2 & 6 & -9 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

coluna não-nula mais à esquerda

Passo 2

Permute a primeira linha com outra, se necessário, para ter um elemento não-nulo ao topo da coluna *j*.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -14 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 10 \\ 2 & 6 & -9 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

a primeira e segunda linha da matriz precedente foram permutadas.

Passo 3

Se a é o elemento que está no topo da coluna j, multiplique a primeira linha por $1/a$ para introduzir um pivô igual a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 10 \\ 2 & 6 & -9 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

a primeira linha da matriz precedente foi multiplicada por 1/2.

Passo 4

Some múltiplos convenientes da primeira linha a cada uma das linhas seguintes, para ter todos os elementos abaixo do pivô da primeira linha iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & -15 \end{bmatrix}$$

-2 vezes a primeira linha foi somado à terceira linha.

Passo 5

Oculte a primeira linha da matriz e repita os Passos 1, 2, 3 e 4, aplicados à submatriz que restou. Continue o processo até que a matriz fique em forma escalonada por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & -15 \end{bmatrix}$$

coluna não-nula mais à esquerda na submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & -15 \end{bmatrix}$$

a primeira linha da submatriz foi multiplicada por -1/2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

-5 vezes a primeira linha da submatriz foi somado à segunda linha da submatriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

a primeira linha da submatriz foi ocultada e retornamos ao passo 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a primeira linha da nova submatriz foi multiplicada por 1/5.

Passo 6

Começando com a última linha não-nula e trabalhando para cima, some múltiplos convenientes da cada linha às linhas superiores para introduzir zeros acima dos pivôs.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4 vezes a terceira linha foi somado à segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-6 vezes a terceira linha foi somado à segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7 vezes a terceira linha foi somado à segunda linha.

Esta última matriz está em forma escalonada reduzida por linhas.

Este algoritmo é denominado método de *eliminação de Gauss-Jordan*. Se considerarmos o algoritmo apenas até o Passo 5, o procedimento produz uma forma escalonada por linhas e é denominado método de *eliminação de Gauss* ou método de *eliminação gaussiana*.

O próximo teorema garante que, ao aplicarmos operações elementares às equações de um sistema, o conjunto solução não é alterado. Sua prova pode ser vista em Azevedo Filho (2003, p. 30).

Teorema$_2$: Se a matriz completa de um sistema S' é obtida por uma única operação elementar com linhas da matriz completa de um sistema S, então S e S' são equivalentes.

ATENÇÃO!

Para o método de eliminação gaussina, o Passo 3 pode ser descartado, pois não há exigência de que os pivôs sejam iguais a 1. Eles só precisam ser não-nulos.

Com base no teorema acima, podemos concluir que, se a matriz aumentada de um sistema linear é linha-equivalente à matriz aumentada de outro sistema linear, esses sistemas são equivalentes.

Para concluir, aplicaremos o método de eliminação de Gauss-Jordan para a resolução de dois sistemas lineares. Uma vez que faremos os cálculos à mão, procederemos como observado em Poole (2006, p. 73):

> Do ponto de vista computacional, é mais eficiente (no sentido de requerer menos cálculos) primeiro reduzir a matriz à forma escalonada por linhas e, depois, trabalhando da direita para a esquerda, transformar cada elemento líder em 1 e criar zeros acima desses 1 líderes. Entretanto, para cálculos à mão, você achará mais fácil trabalhar da esquerda para a direita e criar o 1 líder e os zeros em suas colunas à medida que for trabalhando.

SAIBA MAIS!

1. A forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz é única. Desse modo, independentemente da sequência de operações elementares sobre as linhas (eliminação de Gauss-Jordan ou outra qualquer), sempre obtemos a mesma forma escalonada reduzida por linhas. Uma prova deste resultado pode ser encontrada em Yuster (1984).
2. As formas escalonadas reduzidas por linhas de uma matriz não são únicas. Desse modo, duas sequências de operações elementares sobre as linhas podem resultar em formas escalonadas por linhas diferentes para a mesma matriz. Contudo, todas elas terão seus pivôs nas mesmas posições e o mesmo número de linhas inteiramente nulas na base. A eliminação de Gauss produz uma das formas escalonadas por linhas de uma matriz.

Exercício resolvido 1

Resolva, usando o método de eliminação de Gauss-Jordan o seguinte sistema linear:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 8 \\ -x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & - & 7y & + & 4z & = & 10 \end{array}$$

Resolução:

A matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$.

Vamos agora reduzi-la à sua forma escalonada reduzida por linhas. Usaremos a notação indicada no início deste tópico para as operações elementares com as linhas e as indicaremos na frente da matriz em que serão aplicadas. A seta maior aponta para a matriz que resulta quando efetuadas as operações indicadas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-3)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow (-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 10L_1]{L_1 \leftarrow L_1 + (-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow (-\frac{1}{52})L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + (-7)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz é escalonada reduzida por linhas, e o sistema de equações correspondente é:

$$\begin{array}{ccccc} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 2 \end{array}$$

Assim, o sistema tem solução única, a saber, $x = 3$, $y = 1$ e $z = 2$.

GUARDE BEM ISSO!

1. O método de eliminação de Gauss-Jordan para resolução de sistemas lineares consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até que a matriz do sistema esteja na forma escalonada reduzida por linhas. Se o sistema for possível, obtêm-se as variáveis dependentes em termos das variáveis livres que tenham sobrado no sistema equivalente associado à matriz escalonada reduzida por linhas.

2. Se o método utilizado for o de eliminação gaussiana, a matrizaumentadadosistemaéreduzidaaumaforma escalonada por linhas. Nesse caso, se o sistema for possível, resolve-se o sistema linear equivalente usando retrossubstituição.

Exercício resolvido 2

Resolva, usando o método de eliminação de Gauss-Jordan o seguinte sistema linear:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\
2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\
 & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\
2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6
\end{array}$$

Resolução:

A matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Vamos agora reduzi-la à sua forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + (-2)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow (-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + (-5)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (-4)L_1}]{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + (-3)L_1]{L_1 \leftarrow L_1 + (-6)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz é escalonada reduzida por linhas, e o sistema de equações correspondente é:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & + & 2x_5 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & & & & & = & 0 \\ & & & & & & & & & & x_6 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

Aqui, eliminamos a equação degenerada $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$ correspondente à última linha da matriz escalonada reduzida por linhas, já que ela não representa restrição alguma para o sistema. O sistema linear resultante não tem equação degenerada e tem número de equações (3) menor que o número de incógnitas (6). Assim, relembrando a análise que fizemos no Tópico 2 da Aula 4, o sistema admite infinitas soluções. Ele tem $6 - 3 = 3$ variáveis livres: x_2, x_4 e x_5 que não são incógnitas principais de nenhuma equação (não aparecem como primeira incógnita com coeficiente não-nulo de nenhuma equação). Determinando as incógnitas principais em termos das variáveis livres, temos:

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Obtemos a solução geral do sistema, atribuindo valores arbitrários às variáveis livres, digamos, fazendo $x_2 = u$, $x_4 = v$ e $x_5 = w$. Desse modo, a solução geral do sistema pode ser expressa por:

$$x_1 = -3u - 4v - 2w\,, \quad x_2 = u\,, \quad x_3 = -2v\,, \quad x_4 = v\,, \; x_5 = w\,, \; x_6 = \frac{1}{3}.$$

Ou seja, a solução geral é o conjunto:

$$S = \left\{ \left(-3u - 4v - 2w, u, -2v, v, w, \frac{1}{3}\right), \text{com } u, v, w \in R \right\}$$

ATENÇÃO!

Amplie seus conhecimentos sobre matrizes e sistemas lineares consultando o capítulo 1 do livro eletrônico de Santos (2007), disponível em nosso ambiente virtual de aprendizagem (Moodle) ou no site <http://www.uesb.br/professor/flaulles/download/softwares/MVGA.pdf>, ou pesquisando em outras páginas da internet.

Os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan são gerais e podem ser aplicados à resolução de qualquer sistema linear. Nas próximas aulas, teremos a oportunidade de conhecer outros métodos: um usando inversão de matrizes e outro usando determinantes (a conhecida Regra de Cramer). Entretanto, veremos que os métodos de eliminação são os mais eficientes.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. (Anton e Busby, 2006, p. 66) Descreva uma operação elementar sobre as linhas que produz B a partir de A e então descreva uma operação elementar sobre as linhas que recupera A de B.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

2. Em cada item, determine se a matriz dada está na forma escalonada por linhas. Se não estiver, indique, justificando, quais das propriedades (1 ou 2) da definição de matriz escalonada não são satisfeitas.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Obtenha a forma escalonada reduzida por linhas de cada matriz do problema 2.

4. Resolva os sistemas lineares cujas matrizes aumentadas são:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

AULA 8

Inversão de Matrizes e o Uso do Excel para o Cálculo com Matrizes

Olá! Nesta aula, retornaremos à álgebra matricial. Apresentaremos a operação de inversão de matrizes, importante para a resolução de equações matriciais e uma alternativa para resolução de certos sistemas lineares. Veremos ainda como utilizar planilhas eletrônicas para realizar o cálculo da inversa de uma matriz e para outros cálculos mais elaborados com matrizes, como a multiplicação de matrizes.

Objetivos

- Compreender a importância da inversão de matrizes
- Resolver equações matriciais e sistemas lineares
- Utilizar planilhas eletrônicas para o cálculo com matrizes

TÓPICO 1

Inversa de uma matriz

Objetivos

- Definir a inversa de uma matriz
- Estabelecer propriedades das inversas de matrizes

Neste tópico, introduzimos o importante conceito de inversa de uma matriz e apresentamos algumas propriedades das inversas de matrizes.

Na aritmética usual, todo número real não nulo *a* tem um inverso multiplicativo, a saber, um número real *b* com a propriedade que permite tornar $a \cdot b = b \cdot a = 1$. O inverso multiplicativo de um número é também chamado recíproco ou, simplesmente, inverso. Este número é único e o denotamos por $a^{-1} = (1/a)$, ou seja, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Como exemplo, temos:

Exemplo 1

1. O inverso de 2 é $2^{-1} = \frac{1}{2}$, pois $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

2. O inverso de $\frac{2}{3}$ é $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$, pois $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$.

O conceito de inverso de um número real é usado para solucionar equações lineares do tipo $ax = b$, em que *a, b* e *x* representam números reais, quando queremos resolver a equação em *x*. Rapidamente, vemos que $x = b/a$ é a solução, mas devemos nos lembrar de que isso só é verdade se $a \neq 0$. Assumindo que $a \neq 0$ e calculando paulatinamente, chegaremos à solução usando alguns conceitos e propriedades da multiplicação numa sequência de passos, como pode ser observado no exemplo abaixo:

Exercício resolvido 1

Resolva a equação $5x = 15$.

Solução:

Multiplicando ambos os membros pelo inverso de 5, temos:

$$\frac{1}{5} \cdot (5 \cdot x) = \frac{1}{5} \cdot (15)$$

Usando, agora, a propriedade associativa da multiplicação, encontramos:

$$(\frac{1}{5} \cdot 5) \cdot x = \frac{15}{5}$$

Finalmente, usando a definição de inverso e propriedade do elemento neutro da multiplicação, obtemos:

$$1 \cdot x = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Para a equação geral $ax = b$, com $a \neq 0$, a solução é obtida como segue:

$$ax = b \Rightarrow \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \Rightarrow \left(\frac{1}{a}(a)\right)x = \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot x = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

Nosso principal objetivo neste tópico é procurar um análogo do procedimento acima na aritmética matricial. Para isso, retornamos para a descrição matricial $AX = B$ de um sistema de equações lineares e apresentamos meios de usar a álgebra das matrizes para resolver o sistema.

A necessidade de resolver equações matriciais do tipo $AX = B$, em que *A*, *X* e *B* são matrizes, fez com que a teoria de inversão de números reais se estendesse para as matrizes. O conceito de inverso também pode ser aplicado à teoria das matrizes, mas, neste caso, devemos tomar cuidados especiais.

ATENÇÃO!

Esse exemplo dá uma ideia de como processamos essa operação em nossa mente e quantas propriedades da aritmética e da álgebra assumimos!

Do que precisamos para aplicar o procedimento acima na equação matricial $AX = B$?

Raciocinando de modo similar, precisamos encontrar uma matriz A' (a análoga a $1/a$) tal que $A'A = I$, onde *I* é a matriz identidade (análoga a 1). Se tal matriz existir (no caso dos números, há a imposição de que $a \neq 0$), então, fazendo uso de propriedades da álgebra matricial, podemos proceder à seguinte sequência de cálculos:

$$AX = B \Rightarrow A'(AX) = A'B \Rightarrow (A'A)X = A'B \Rightarrow IX = A'B \Rightarrow X = A'B$$

Desse modo, nosso objetivo agora é determinar quando podemos achar a matriz A' tal que $A'A = I$. Mais ainda, para que a analogia seja completa, queremos também que $AA' = I$, ou seja, desejamos estabelecer as condições para que dada uma matriz *A*, exista uma matriz A' tal que (em analogia a $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$)

$$AA' = A'A = I$$

Essa condição exige que *A* e A' sejam matrizes quadradas de mesmo tamanho.

SAIBA MAIS!

Use os conhecimentos que você já adquiriu sobre matrizes para verificar esta afirmação.

Pretendemos ainda descrever precisamente procedimentos para, no caso de A' existir, obtê-la. Para isso, é conveniente introduzir a seguinte definição:

Definição$_1$ (Inversa de uma matriz): *Se A é uma matriz quadrada e se existe uma matriz A' de mesmo tamanho que A tal que $AA' = A'A = I$, dizemos que A é* **invertível** *ou* **não-singular** *e que A' é uma* **inversa** *de A. Se não existir uma matriz A' com essa propriedade, dizemos que A é* **não-invertível** *ou* **singular**.

ATENÇÃO!

1. Na Definição 1 acima I é a matriz identidade do mesmo tamanho que A e A'. Assim, se A e A' são quadradas de ordem n, então I e a identidade de ordem n, ou seja, $I = I_n$.
2. A condição $AA' = A'A = I$ não é alterada quando trocamos A com A'. Portanto, se A é invertível e A' é uma inversa de A, então também A' é invertível e A é uma inversa de A'. Por isso é correto dizer que A e B são inversas uma da outra quando valer a condição $AA' = A'A = I$.

Exemplo 2

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,

Então $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$,

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Portanto, *A* e *B* são invertíveis e cada uma é a inversa da outra.

Exemplo 3

Seja 0_n uma matriz quadrada nula geral de ordem *n*. É fácil verificar que 0_n não tem inversa. De fato, se tivesse, existiria uma matriz $0'_n$ tal que $00'_n = 0'_n 0 = I_n$. Entretanto, o produto da matriz nula por qualquer outra matriz é a matriz nula, e assim $00'_n = 0$ e nunca será igual à matriz identidade I_n. De um modo geral, uma matriz quadrada é singular se possui uma linha ou coluna de zeros.

Apesar de a álgebra matricial ter semelhanças com a álgebra dos números reais, devemos ressaltar, conforme apresentamos em algumas situações no final de nossa Aula 6, que algumas diferenças consideráveis ocorrem e precisamos ser cuidadosos no trato com as matrizes.

GUARDE BEM ISSO!

Mesmo entre as matrizes quadradas, muitas não possuem inversa! Este fato pode ser verificado no exemplo abaixo. Apresente outros exemplos.

Por exemplo, diferentemente do que ocorre com os números reais, nem todas as matrizes *A* não nulas possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz A' tal que $AA' = A'A = I$. A princípio, para que os produtos AA' e $A'A$ estejam definidos e sejam iguais, é preciso que as matrizes *A* e A' sejam quadradas. Portanto, somente as matrizes quadradas podem ter inversa, o que já as diferencia dos números reais, pois todo número real não nulo tem inverso.

Exercício resolvido 2

Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ não é invertível.

Solução:

Suponha que *A* seja invertível e seja $A' = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ uma inversa de *A*. A equação matricial $AA' = I$ nos fornece:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da qual obtemos o sistema de equações lineares:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} x & & & + & 2z & & & = & 1 \\ & & y & & & + & 2w & = & 0 \\ 3x & & & + & 6z & & & = & 0 \\ & & 3y & & & + & 6w & = & 1 \end{array}$$

VOCÊ SABIA?

Embora tenhamos visto que a multiplicação de matrizes não é em geral comutativa, um fato curioso é que, se uma matriz é invertível, então ela e sua inversa comutam.

Usando as técnicas que já conhecemos das aulas anteriores, poderíamos resolver este sistema pelos métodos de eliminação de Gauss ou de Gauss-Jordan. Entretanto, isto não é necessário neste caso. Basta percebermos que, somando à terceira equação -3 vezes a primeira equação, obtemos a equação degenerada $0x+0y+0z+0w=-3$, que não pode ser satisfeita. Logo, o sistema linear acima não tem solução e, portanto, A' não existe, ou seja, *A* não é invertível.

Continuando a fazer analogias com os números reais, percebemos que, se *a* é um número real não nulo, então existe um único número real *b* tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$, a saber, $b = a^{-1}$. E quanto às matrizes? O próximo teorema mostra que inversas matriciais também são únicas.

Teorema$_1$ (Unicidade da Inversa): Se A é uma matriz invertível, então sua inversa é única.

Prova:

Mostraremos que não pode existir mais de uma inversa de *A*. Suponha que *A* tenha duas inversas *A′* e *A″*. Então:

$$AA' = A'A = I \quad \text{e} \quad AA'' = A''A = I.$$

Assim,

$$A' = A'I = A'(A'A'') = (A'A)A'' = IA'' = A''.$$

Portanto, $A' = A''$, e a inversa de *A* é única.

Graças a esse teorema, uma matriz invertível *A* tem uma única inversa, e, desse modo, temos o direito de falar "na" inversa de *A*. Motivados pela notação a^{-1} do inverso multiplicativo do número real não nulo *a*, denotaremos a inversa (única) de uma matriz invertível *A* por A^{-1}. Assim, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

A observação seguinte, feita em Poole (2006, p. 153), alerta para a inexistência da operação de divisão por matriz.

Não pense em escrever $A^{-1} = \dfrac{1}{A}$. Não existe a operação "divisão por matriz". Mesmo que ela existisse, como poderíamos dividir o *escalar* 1 pela *matriz A*? Se você alguma vez se sentir tentado a "dividir" por uma matriz, o que você realmente quer fazer é multiplicar pela sua inversa.

Voltemos agora à equação matricial $AX = B$, que nos motivou para a definição da inversa de uma matriz. O próximo teorema, cuja prova de existência e unicidade é demonstrada em Poole (2006, p. 153), pode ser, então, enunciado:

Teorema$_2$: Se A é uma matriz invertível $n \times n$, o sistema de equações lineares $AX = B$ tem uma única solução $X = A^{-1}B$ para todo B em R^n.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3

Use a inversa da matriz dos coeficientes para resolver o sistema linear

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 3x + 7y &= -5 \end{aligned}$$

Solução:

A matriz dos coeficientes do sistema é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, cuja inversa foi calculada no Exemplo 2. Pelo Teorema 2, o sistema tem solução única dada por $X = A^{-1}B$, onde *B* é o vetor dos termos independentes do sistema, ou seja, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$X = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Logo, o sistema tem uma única solução, a saber, $x = 3$ e $y = -2$.

Como observado em Poole (2006, p. 155), resolver um sistema linear $Ax = b$ via $x = A^{-1}b$

> "pode parecer um bom método. Infelizmente, exceto para matrizes dos coeficientes 2×2 e para matrizes que tenham certas formas especiais, é quase sempre mais rápido usar o método de escalonamento de Gauss ou Gauss-Jordan para encontrar a solução."

Além disso, ainda que o método do escalonamento possa sempre ser aplicado, a técnica apresenta uma restrição: funciona somente quando a matriz dos coeficientes é quadrada e invertível.

No próximo teorema, apresentamos algumas das propriedades mais importantes das matrizes invertíveis. Para uma prova destes resultados, veja Poole (2006, p. 156-157).

Teorema$_3$ (Propriedades da Inversa): *Sejam A e B matrizes invertíveis de mesmo tamanho, c um escalar não nulo e n um inteiro não negativo. Então:*

(a) A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) cA *é invertível e* $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.

(c) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) A^T *é invertível e* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(e) A^n *é invertível e* $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Finalizamos este tópico apresentando o teorema seguinte, encontrado em Anton e Busby (2006, p. 133). A primeira parte desse teorema garante que basta verificarmos uma das duas condições (a outra condição será automaticamente também válida) da definição de invertibilidade para sabermos que uma matriz é a inversa de outra. A segunda parte do teorema apresenta a recíproca para o fato de o produto de matrizes invertíveis ser invertível.

ATENÇÃO!

A propriedade (c) merece destaque. Ela é uma das mais importantes e você deve tomar cuidado para não aplicá-la de forma errada. Ela funciona como a "regra da meia e sapato: apesar de calçarmos as meias antes dos sapatos, nós os retiramos na ordem inversa" (ANTON; BUSBY, 2006, p. 157). Como exercício, apresente um contra-exemplo para mostrar que, ao contrário do que poderíamos imaginar, em geral $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

Teorema$_4$: (a) Se A e B são matrizes quadradas tais que $AB = I$ ou $BA = I$, então A e B são invertíveis e cada uma é a inversa da outra.

(b) Se A e B são matrizes quadradas cujo produto é invertível, então A e B são invertíveis.

SAIBA MAIS!

A propriedade (c) pode ser estendida para mais de dois fatores:

O produto de um número qualquer de matrizes invertíveis é invertível e a inversa do produto é o produto das inversas em ordem contrária.

No próximo tópico responderemos algumas questões introduzidas neste tópico, apresentando algumas técnicas para determinar, quando existir, a inversa de uma matriz.

TÓPICO 2

Métodos para o cálculo da inversa

OBJETIVO

- Inverter matrizes

Neste tópico, discutiremos algumas questões pré-anunciadas no Tópico 1: Como saber quando uma matriz é invertível? Como achar a inversa de uma matriz invertível? Apresentaremos um procedimento geral para encontrar a inversa de uma matriz invertível.

O caso das matrizes 2×2 é suficientemente simples e a resposta para os questionamentos acima pode ser destacada no próximo teorema. Nele é estabelecida a condição para que uma matriz 2×2 seja invertível e é dada uma fórmula para obter a sua inversa.

Teorema$_5$:A matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se, e somente se, $ad-bc\neq 0$. Neste caso, a inversa de A é dada pela fórmula:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

SAIBA MAIS!

A quantidade $ad - bc$ desse teorema é denominada o determinante da matriz A de tamanho 2×2 e é denotada pelo símbolo det(A). O Teorema 5 diz que uma matriz 2×2 é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Na próxima aula, veremos que o determinante é um número definido para todas as matrizes quadradas e que esse resultado é válido em geral. Entretanto, para matrizes quadradas de ordem maior, não existem fórmulas simples para a inversa.

Prova:

A prova consiste de duas partes. Primeiro, deve ser provado que se $ad - bc \neq 0$, então *A* é invertível. Para isso, basta que se verifique que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Faça você mesmo estas contas. Reciprocamente, deve ser provado que, se $ad - bc = 0$, então *A* é não é invertível. Para isso, como sugerido em Anton e Busby (2006, p. 125), trate primeiro do caso em que *a*, *b*, *c* e *d* são todos não nulos e depois passe aos casos em que um ou mais destes números são zero. Para uma prova completa, veja Poole (2006, p. 154-155).

De acordo com Anton e Busby (2006, p. 116), a fórmula para A^{-1} dada no Teorema 5 "[...] apareceu pela primeira vez (de uma forma mais geral) do livro Memoir on the Theory of Matrices que foi publicado por Arthur Cayley em 1858."

GUARDE BEM ISSO!

A fórmula no Teorema 5 diz que a inversa, quando existe, é obtida permutando entre si as entradas da diagonal de A, trocando o sinal das entradas fora da diagonal e dividindo todas as entradas pelo determinante de A.

Exercício resolvido 1:

Determine se a matriz dada é invertível. Se for, encontre sua inversa.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

Solução:

O determinante de *A* é $\det(A) = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0$. Assim, a matriz *A* é invertível e, pelo Teorema 5, sua inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Temos que $\det(B) = 4 \cdot (-3) - (-2) \cdot 6 = 0$. Portanto, a matriz *B* não é invertível.

Voltemos, agora, às questões apresentadas no início deste tópico. Para verificarmos se uma matriz quadrada A $n \times n$ é invertível e determinarmos a sua inversa, podemos, como sugerido no Exercício resolvido 2 (Tópico 1) e mediante os resultados dos Teoremas 1 e 4, escrever a candidata a inversa de A, digamos B, de forma genérica. Da igualdade $AB = I$ ou $BA = I$, obtemos um sistema linear S de $2n$ equações a $2n$ incógnitas.

A matriz A será invertível se, e somente se, o sistema S for possível e determinado. Neste caso, a inversa de A será determinada pela única solução de S. Entretanto, apesar de o sistema S poder ser separado em n sistemas lineares de n equações a n incógnitas cada, esse não é o melhor método. A seguir, descreveremos um método computacionalmente muito mais eficiente para determinar se a matriz A é invertível e assim obter a sua inversa.

O método que descreveremos surge das ideias usadas na prova do próximo teorema, que é fundamental e pode ser encontrado em Santos (2003, p. 83).

Teorema$_6$: *Seja A uma matriz* $n \times n$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) Existe uma matriz B, $n \times n$, *tal que* $BA = I_n$.
(b) A matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n.
(c) A matriz A é invertível.

O Teorema 6 estabelece que uma matriz A é invertível se, e somente se, A pode ser reduzida por operações elementares sobre as linhas à matriz identidade I. Se A não pode ser reduzida a I, o Teorema 6 nos garante que A não é invertível. Como consequência do Teorema 6, temos o próximo teorema, que é a base para o método eficiente de cálculo da inversa de uma matriz que descreveremos.

Teorema$_7$: *Seja A uma matriz* $n \times n$. *Se uma sequência de operações elementares nas linhas reduz A a* I_n, *a mesma sequência de operações elementares nas linhas transforma* I_n *em* A^{-1}.

Prova:

Veja em Poole (2006, p. 162).

Baseado no Teorema 7, apresentamos o *algoritmo de inversão* para obter a inversa de uma matriz invertível, como descrito em Anton e Busby (2006, p. 129):

Algoritmo de Inversão

> Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, encontre a sequência de operações elementares que reduz A a I e então efetue a mesma sequência de operações em I para obter A^{-1}.

Na prática, aplicamos o algoritmo da inversão efetuando as operações nas linhas em A e I simultaneamente. Para isto, construímos uma "matriz supercompleta" obtida juntando a matriz identidade I à direita da matriz A, ou seja, criamos uma matriz subdividida da forma $[A\,|\,I]$. Aplicando operações elementares a essa matriz subdividida até o lado esquerdo estar reduzido a I, teremos o lado direito convertido a A^{-1}. Em resumo, temos:

$$[A\,|\,I] \longrightarrow [I\,|\,A^{-1}]$$

Este método corresponde simplesmente ao método do escalonamento de Gauss-Jordan efetuado em uma matriz completa $n \times 2n$. Ilustramos esse procedimento no seguinte exemplo:

Exercício resolvido 2

Encontre a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

Aplicando o algoritmo da inversão, obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1]{L_1 \leftarrow L_2 + (-2)L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_3}]{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2+(-4)L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3+3L_4}]{L_1 \leftarrow L_1+2L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Figura 1: Aplicação do algoritmo de inversão

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 2 \\ -5 & 6 & -6 & -4 \\ 4 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifique que $AA^{-1} = I$ pela multiplicação direta. Apesar de todo esse cálculo não ser necessário, servirá para você conferir se suas contas estão certas ou não.

Você pode estar se perguntando: o que acontece se aplicarmos o algoritmo da inversão a uma matriz singular? A seguinte observação de Anton e Busby (2006, p. 130) dá a resposta:

> Aplicando o algoritmo da inversão a uma matriz que não é invertível, em algum instante das contas obtemos uma linha de zeros no lado esquerdo (por quê?). Quando isso acontece, podemos concluir que a matriz não é invertível e parar as contas.

Neste tópico, vimos alguns métodos para obter (quando existir) a inversa de uma matriz, destacando o escalonamento de Gauss-Jordan como o mais eficiente deles do ponto de vista computacional.

Apesar da eficiência deste método, o Exercício resolvido 2, neste tópico, ilustra que o trabalho de obter a inversa de uma matriz é muito árduo e aumenta consideravelmente à medida que a ordem da matriz a inverter aumenta. Desse modo, é aconselhável se recorrer ao uso de *softwares* ou equivalentes para realizar este trabalho. Isto é o que estaremos demonstrando no próximo tópico.

TÓPICO 3

Cálculo com matrizes usando planilhas eletrônicas

Objetivo

- Calcular produtos de matrizes usando planilhas eletrônicas

Neste tópico, apresentamos ferramentas computacionais para facilitar os cálculos com matrizes. Em particular, veremos como o uso de planilhas eletrônicas do *Excel* pode facilitar cálculos trabalhosos, como produtos e inversas de matrizes.

SAIBA MAIS!

O programa utilizado para calcular produtos de matrizes foi o Microsoft Office Excel, versão 2003, produzido pela empresa Microsoft Corporation.

Do que vimos até aqui, deve estar claro que o cálculo com matrizes, em especial o cálculo de produtos e inversas, demanda um esforço computacional enorme. Desse modo, durante o estudo de matrizes, pode ser incentivada a utilização de pacotes computacionais para a elaboração de planilhas eletrônicas, por exemplo, o *Excel*.

A acelerada evolução científica e tecnológica que vivemos tem marcado o mundo com transformações nos mais diversos setores da atuação humana. Tais transformações demandam significativas mudanças nas estruturas das organizações, empresas e governos e a formação e atualização constante de profissionais e cidadãos na busca de soluções inovadoras, rápidas e eficientes para os problemas já existentes e para os que vão surgindo.

Dentro desta nova dimensão mundial e face ao crescimento vertiginoso das tecnologias digitais da informação e da comunicação, para desempenhar seu papel no desenvolvimento social e atender as crescentes demandas por formação em todos os níveis, a educação precisa apresentar novas formas de ensinar, aprender e produzir conhecimentos. Neste contexto, o computador pode ser utilizado como ferramenta auxiliar da aprendizagem.

As orientações curriculares para o Ensino Médio destacam a importância de se contemplar uma formação escolar em que se tenha "a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática" (BRASIL, 2006, p. 87). Nesta via de mão dupla, a formação deve:

- Capacitar para o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, instrumentos de trabalho bastante comuns nos dias de hoje;
- Fazer uso de programas de computador (*softwares* e aplicativos) nos quais os alunos possam explorar e construir conceitos matemáticos.

De acordo com as orientações curriculares para o Ensino Médio:

> As planilhas eletrônicas são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso conhecimento matemático similar àquele necessário ao uso de calculadora, mas com maiores exigências quanto à notação de trabalho, já que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. (BRASIL, 2006, p. 87).

Mesmo sendo ferramentas que não foram pensadas para propósitos educativos, as planilhas eletrônicas, em particular o *Excel*, também podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática. Além de facilitar o trabalho, elas também ajudam no aprendizado, uma vez que o aluno terá que programar as funções necessárias para a realização das tarefas, necessitando entender as várias etapas a serem realizadas.

Devido à nossa limitação de espaço, não podemos apresentar aqui mais sobre o *Excel* – suas funções e recursos. Para tanto, um bom texto está no disponível no site:

https://www.aprenderexcel.com.br/2013/dicas/excel-primeiros-passos

Os procedimentos para o cálculo da matriz produto de duas matrizes e da matriz inversa de uma matriz é descrito a seguir.

Procedimentos para a multiplicação de duas matrizes

1. Insira as matrizes dadas em uma planilha do *Excel*.

2. Na mesma planilha, selecione um bloco de células para a matriz produto (do mesmo tamanho que a matriz produto).

3. No menu *inserir*, escolha *função*, em seguida escolha a categoria *matemática e trigonométrica* e, finalmente, escolha a função *MATRIZ.MULT*.

4. Clique OK.

5. Em Matriz 1, digite o endereço da primeira e da última célula da primeira matriz separado por dois pontos (:).

6. Em Matriz 2, digite o endereço da primeira e da última célula da primeira matriz separado por dois pontos (:).

7. Clique OK.

8. Agora, clique na barra de fórmulas, pressione as teclas *Ctrl*, *Shift* e *Enter* simultaneamente.

9. No bloco selecionado aparecerá a matriz produto das matrizes dadas.

Procedimentos para o cálculo da inversa de uma matriz

1. Insira a matriz dada em uma planilha do *Excel*.

2. Na mesma planilha, selecione um bloco de células para a inversa da matriz (do mesmo tamanho que a matriz dada).

3. No menu *inserir*, escolha *função*, em seguida escolha a categoria *matemática e trigonométrica* e, finalmente, escolha a função *MATRIZ.INVERSO*.

4. Clique OK.

5. Em Matriz, digite o endereço da primeira e da última célula da matriz dada separados por dois pontos (:).

6. Clique OK.

7. Agora, clique na barra de fórmulas, pressione as teclas *Ctrl*, *Shift* e *Enter* simultaneamente.

8. No bloco selecionado, aparecerá a inversa da matriz dada.

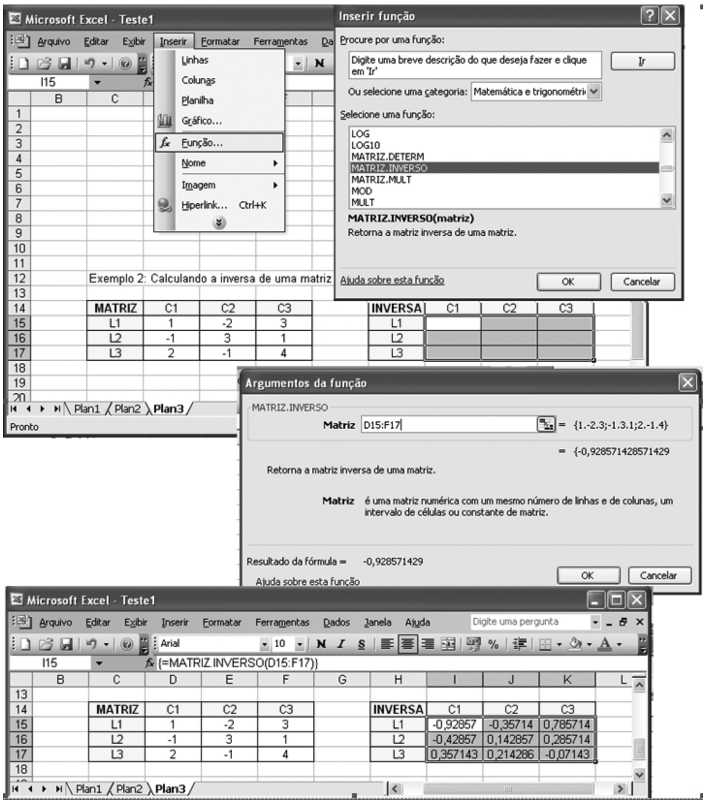


Figura 1– Inversão de matriz com a utilização do Excel

Nesta aula, vimos a operação de inversão de matrizes e algumas de suas aplicações. Estudamos ainda alguns métodos para obter a inversa de uma matriz invertível, com destaque para o método do escalonamento de Gauss-Jordan, e observamos como o uso do *Excel* pode facilitar os cálculos com matrizes.

Na próxima aula, encerraremos os nossos estudos da parte de Álgebra Linear definindo o *determinante* de uma matriz quadrada e apresentando algumas de suas aplicações e propriedades.

Aproveite para colocar seus estudos em dias e ampliar seus conhecimentos sobre matrizes e sistemas lineares consultando as referências que citamos ou pesquisando em páginas da *internet*.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Faça o que se pede:

a) Dê exemplo de uma matriz A, de ordem 2, que seja invertível.

b) Use o teorema 5 da aula 8 para calcular a inversa de A.

2. Usando a matriz A do problema 1, verifique que:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

c) $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$

3. (Azevedo Filho, 2003, p. 46) Seja A uma matriz simétrica invertível. Demonstre que A^{-1} é simétrica.

4. Dê um exemplo para mostrar que, em geral, $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

AULA 9 | Determinantes

Olá! Esta é a nossa penúltima aula. Nela, encerraremos os nossos estudos da parte de Álgebra Linear definindo o importante conceito de determinante de uma matriz quadrada e apresentando algumas de suas aplicações e propriedades.

Objetivos

- Conceituar e conhecer a história dos determinantes
- Resolver sistemas lineares usando determinantes
- Estabelecer as principais propriedades dos determinantes
- Conhecer aplicações dos determinantes

TÓPICO 1

Sobre a história e o ensino de determinantes

Objetivos

- Compreender a importância dos determinantes
- Situar o ensino de determinantes no Ensino Médio

Neste tópico, abordaremos a importância do estudo de determinantes, comentando um pouco sobre a sua história e discutindo algumas questões relacionadas ao seu ensino.

Por serem utilizados para resolver sistemas de equações lineares, os determinantes são muito importantes no estudo da álgebra linear, sobretudo no Ensino Médio.

De fato, historicamente, os determinantes apareceram primeiro no contexto de resolução de sistemas de equações lineares para um conjunto de variáveis em termos de um outro conjunto de variáveis.

Mais precisamente, os determinantes são a base para um método de resolver sistemas lineares determinados, conhecido como Regra de Cramer. Por este motivo, segundo Lima *et al*. (2001, p. 289):

> [...] os determinantes, ao permitirem a obtenção de fórmulas contendo soluções explícitas para os sistemas determinados, despertaram interesse e sua teoria teve grande desenvolvimento.

Tradicionalmente, especialmente no Ensino Médio, a Regra de Cramer vem sendo o método consagrado para a resolução dos sistemas lineares. No entanto, o emprego dessa regra apresenta certas limitações:

1. do ponto de vista conceitual: a Regra de Cramer só se aplica para sistemas lineares em que o número de equações seja igual ao número de incógnitas (sistemas nxn) e que sejam determinados. Já o método do escalonamento não apresenta restrições, ou seja, pode ser aplicado a qualquer sistema linear.

2. do ponto de vista computacional: o custo operacional (número de operações realizadas) é muito maior para a Regra de Cramer do que para o método do escalonamento e a diferença cresce significativamente se n aumenta.

A consagração do método talvez fizesse sentido antigamente, quando não se necessitava resolver sistemas lineares de grande porte. Todavia hoje, quando problemas de diversas áreas demandam resolver sistemas lineares com centenas, milhares ou até milhões de incógnitas, a Regra de Cramer (mesmo para sistemas lineares determinados) se mostra extremamente obsoleta.

Para se ter uma ideia da ineficiência da Regra de Cramer frente ao método do escalonamento, Lima *et al*. (2001, p. 289) apresenta a seguinte comparação:

> [...] imaginemos um computador (um tanto ultrapassado) capaz de efetuar um milhão de multiplicações ou divisões por segundo. Para resolver um sistema de 15 equações lineares com 15 incógnitas, usando a Regra de Cramer, tal computador demoraria 1 ano, 1 mês e 16 dias. O mesmo computador, usando o método de escalonamento (que é bem elementar e não requer determinantes) levaria milésimos de segundo para resolver dito sistema. Se tivéssemos um sistema , a Regra de Cramer requereria 2 milhões, 745 mil e 140 anos para obter a solução! O método de escalonamento usaria apenas 6 milésimos de segundo para resolver o sistema.

Desse modo, nos dias de hoje, a Regra de Cramer deve ser tratada como um fato teórico interessante, útil em algumas situações. Entretanto, pelas desvantagens e limitações que apontamos, não pode ser considerada uma técnica computacional eficiente para resolver sistemas lineares.

Em face da desvantagem computacional do uso de determinantes para resolver sistemas lineares em relação ao escalonamento, pode parecer que o interesse pela teoria dos determinantes tenha diminuído. Contudo, isso não é verdade. Determinantes continuam a ter grande interesse em Análise, em Geometria e na Álgebra, como bem ressaltam Lima *et al*. (2001, p. 289-290):

> Determinantes são um importante conceito matemático, não por terem relevância computacional mas por outros motivos. Do ponto de vista algébrico eles constituem a única função multilinear alternada das colunas de uma matriz nxn e que assume o valor 1 na matriz identidade. Do ponto de vista geométrico, eles representam o volume de um paralelepípedo (em n dimensões) cujas arestas são os vetores coluna da matriz. Do ponto de vista analítico, eles ocorrem de modo crucial na fórmula de mudança de variáveis nas integrais múltiplas.

A teoria dos determinantes tem origem na segunda metade do século XVII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares. Um fato curioso quanto ao ensino de álgebra linear, em particular no que se refere ao ensino de matrizes e determinantes, é que atualmente o estudo das matrizes aparece antes do de determinantes. Todavia, historicamente, os determinantes precederam as matrizes, tendo surgido de forma independente das matrizes. De acordo com Poole (2006, p. 239), "a teoria dos determinantes já estava bem desenvolvida quase dois séculos antes de o estudo de matrizes despertar interesse por si só".

Uma breve história dos determinantes

A história dos determinantes precede a das matrizes. De fato, determinantes foram introduzidos primeiro, de forma independente, por Seki, em 1683, e por Leibniz, em 1693. Em 1748, determinantes apareceram no Tratado sobre álgebra, de Maclaurin, incluindo um tratamento da Regra de Cramer até o caso 4x4. Em 1750, o próprio Cramer provou o caso geral de sua regra, aplicando-a ao ajuste de curvas, e, em 1772, Laplace deu uma prova de seu teorema de expansão.

O termo determinante só foi cunhado em 1801, quando utilizado por Gauss. Cauchy foi o primeiro a usar determinantes no sentido moderno, em 1812. Ele foi, de fato, o responsável pelo desenvolvimento de grande parte da teoria inicial de determinantes, incluindo muitos resultados importantes [...]: a regra do produto para determinantes, o polinômio característico e a noção de matriz diagonalizável. Determinantes só ficaram amplamente conhecidos a partir de 1841, quando Jacobi os popularizou, embora no contexto de funções de várias variáveis, que encontramos em um segundo curso de cálculo. (Sylvester, por volta de 1850, chamou de "jacobianos" esses tipos de determinantes - termo utilizado até hoje.)

No final do século XIX, a teoria dos determinantes havia se desenvolvido a ponto de livros inteiros serem dedicados a ela, incluindo, em 1867, o livro Uma teoria elementar de determinantes, de Dodgson, e uma coleção monumental de cinco volumes de Thomas Muir, que apareceu no início do século XX. Mesmo que sua história seja fascinante, determinantes hoje têm um interesse mais teórico do que prático. A Regra de Cramer é um método incorrigivelmente ineficaz na resolução de sistemas de equações lineares, enquanto métodos numéricos substituíram todo o uso que antes era feito de determinantes no

> cálculo de autovalores. Os determinantes são, no entanto, empregados para propiciar aos estudantes uma compreensão inicial do polinômio característico.
>
> *(POOLE, 2006, p. 255)*

Neste tópico, fizemos uma breve introdução ao estudo dos determinantes, falamos um pouco da sua história e discutimos questões relacionadas ao seu ensino. Nos próximos tópicos, apresentaremos formalmente o significado de determinante de uma matriz quadrada, demonstraremos algumas das propriedades fundamentais dos determinantes e mostraremos aplicações deste importante conceito da Matemática.

TÓPICO 2

Determinantes de matrizes 1x1, 2x2 e 3x3

Objetivo

- Definir e calcular determinantes de matrizes 1×1, 2×2 e 3×3

Lembre que na Aula 8, quando estabelecemos a condição (no Teorema 5) para que uma matriz 2×2 fosse considerada invertível, vimos que tal condição dependia de uma quantidade denominada determinante da matriz. Neste tópico, definiremos formalmente os determinantes de matrizes quadradas $n\times n$, com *n* igual a 1, 2 ou 3 e, posteriormente, estenderemos a definição para matrizes de ordens superiores.

Para Lima *et al*. (2001, p. 290):

> Talvez os determinantes no Ensino Médio devessem limitar-se aos casos 2×2 e 3×3, com aplicação aos volumes de paralelepípedos e áreas de paralelogramos, com uma breve menção ao caso geral [...] .

GUARDE BEM ISSO!

O determinante de uma matriz 2×2 é o produto dos elementos na diagonal principal menos o produto dos elementos fora da diagonal principal.

Recorde que definimos o determinante de uma matriz 2×2 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, denotado pelo símbolo det(*A*), como:

$$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\,.$$

A notação $|A|$ é também usada para denotar o determinante de uma matriz *A*. Assim,

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\,.$$

Definido dessa forma, é possível mostrar que se a matriz dos coeficientes do sistema linear nas incógnitas *x* e *y* $\begin{matrix} ax & + & by & = & p \\ cx & + & dy & = & q \end{matrix}$ é invertível (do Teorema 5 da Aula 8, tem determinante diferente de 0), então o sistema é determinado e sua única solução é dada por $x = \dfrac{dq - bp}{ad - bc}, y = \dfrac{ap - cq}{ad - bc}$ que, em notação de determinantes, é escrita como:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}}$$

Ou seja, a solução do sistema é expressa como a razão de determinantes. Essas fórmulas constituem a Regra de Cramer para um sistema determinado geral de duas equações a duas incógnitas. Posteriormente, apresentaremos a Regra de Cramer para sistemas de *n* equações a *n* incógnitas. De acordo com Anton e Busby (2006, p. 187):

> Em torno do final do século XVII e início do século XVIII, essas fórmulas foram estendidas para sistemas de ordens superiores através da procura de padrões comuns nas soluções obtidas trabalhosamente pela resolução direta de sistemas lineares. Uma vez descobertos esses padrões, eles foram usados para definir determinantes de ordens superiores de tal modo que permitissem expressar as soluções de sistemas de ordens superiores como razões de determinantes [...].

Passemos, agora, à definição do determinante de uma matriz 3×3. Historicamente, ele foi definido de modo que a solução do sistema linear $\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & p \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & q \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & r \end{matrix}$ nas incógnitas *x*, *y* e *z* seja determinado (a matriz dos coeficientes do sistema é invertível) e tenha solução (única) dada como a razão de determinantes 3×3 apropriados. Como então podemos definir o determinante de uma matriz 3×3?

O determinante de uma matriz 3×3 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, é definido como:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Esta é a fórmula que permite manter o padrão de escrever a solução do sistema como a razão de determinantes 3×3, com o denominador sendo o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, do mesmo modo como no caso 2×2.

ATENÇÃO!

Você não precisa memorizar as fórmulas para os determinantes de matrizes 2×2 e 3×3. Elas podem ser obtidas pelos diagramas nas Figuras 1 e 2, ao lado e respectivamente.

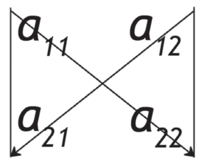


Figura 1– Diagrama para o determinante de matriz 2x2

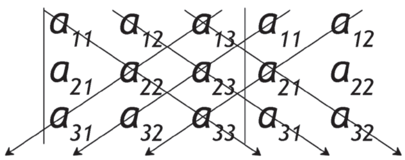


Figura 2– Diagrama para o determinante de matriz 3x3

Esses diagramas mostram que as fórmulas para esses determinantes podem ser obtidas por:

a) para matrizes 2×2: subtraindo o produto dos elementos na seta dirigida para a esquerda do produto dos elementos na seta dirigida para a direita;

b) para matrizes 3×3: duplicando as duas primeiras colunas da matriz e, então, subtraindo a soma dos produtos dos elementos nas setas dirigidas para a esquerda da soma dos produtos dos elementos nas setas dirigidas para a direita

Exemplo 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3)-1.4=-6-4=-10$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&5&-1\\4&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&5&-1\\4&-2&3\end{vmatrix}\begin{matrix}1&2\\0&5\\4&\end{matrix}$$

$=[1.5.3+2.(-1).4+3.0.(-2)]-[3.5.4+1.(-1).(-2)-$

$=[15-8+0]-[60+2+0]=7-62=-55$

Para finalizar este tópico, observamos que o determinante de uma matriz 1×1 $A=[a_{11}]$ é definido por $\det(A)=|a_{11}|=a_{11}$.

Exemplo 2

O determinante da matriz 1×1 $A=[-3]$ é $\det(A)=|-3|=-3$.

ATENÇÃO!

Você deve ser bastante cuidadoso com a notação: neste caso, $|a_{11}|$ não indica o valor absoluto de a_{11}. A propósito, a notação $|A|$ para o determinante da matriz A é uma reminiscência da notação de valor absoluto (POOLE, 2006).

Neste tópico, aprendemos a calcular determinantes de matrizes 1×1, 2×2 e 3×3. No próximo tópico estenderemos a definição para determinantes de matrizes de ordem superior.

TÓPICO 3

Determinantes de matrizes nxn: Expansão em co-fatores

Objetivo

- Definir e calcular determinantes de matrizes quadradas nxn

Neste tópico, aprenderemos a calcular determinantes de matrizes quadradas $n \times n$, com $n \geq 1$. A extensão da definição de determinante para matrizes gerais $n \times n$ costuma ser feita de uma das seguintes formas:

1. *Por permutações*: examinando a estrutura das fórmulas para os determinantes de matrizes 2×2 e 3×3, observa-se que o determinante em ambas as fórmulas é a soma de produtos, cada um contendo exatamente um elemento de cada linha e um elemento de cada coluna da matriz, sendo metade dos produtos precedidos de um sinal de mais e a outra metade por um sinal de menos. Observa-se ainda que os índices das linhas dos produtos (denominados *produtos elementares*) estão em ordem numérica, mas os índices das colunas são permutações dos números 1 a *n*. Considerando todas as permutações dos números 1 a *n* e os sinais convenientes, chega-se à seguinte definição, vista em Anton e Busby (2006, p. 189):

Definição$_1$: *O* **determinante** *de uma matriz quadrada A denotado por* $\det(A)$ *é definido como a soma de todos os produtos elementares com sinal de A.*

ATENÇÃO!

Apresentamos a Definição 1 apenas por curiosidade. A sua compreensão requer uma abordagem mais adequada, especialmente da forma como são atribuídos os sinais aos produtos elementares. Se você desejar, pode consultar a referência citada para o detalhamento preciso da definição. Essa é a forma mais convencional de se definir determinantes de modo geral e, deste modo, a definição seguinte (a que adotaremos) passa a ser um procedimento para calcular determinantes.

2. *Por recursividade* ou *recorrência*: o determinante de uma matriz quadrada de certa ordem é definido em termos de determinantes de matrizes de ordem imediatamente inferior.

Iniciaremos mostrando como um determinante 3×3 pode ser expresso em termos de determinantes 2×2. Para isso, lembre que o determinante de uma matriz A 3×3 foi definido por

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

, que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\ &= a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Observe que, nesta expressão, cada determinante 2×2 está multiplicado por um elemento da linha 1 e coluna 1 de *A* e é o determinante da submatriz obtida de *A* suprimindo-se a linha e a coluna que contêm o elemento que o multiplica. Observe ainda que os sinais que precedem os produtos se alternam entre $+$ e $-$. Antes de prosseguirmos, apresentamos a seguinte definição, similar àquela vista em Anton e Busby (2006, p. 191):

Definição$_2$: *Se A é uma matriz quadrada, então o* **menor** *do elemento* a_{ij} *(também denominado ij-ésimo menor de A) é denotado por* A_{ij} *e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos de A a i-ésima linha e a j-ésima coluna. O número* $C_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$ *é denominado o* **co-fator** *do elemento* a_{ij} *(ou o ij-ésimo co-fator).*

ATENÇÃO!

O menor do elemento a_{ij} é também chamado menor complementar do elemento a_{ij}. Para uma matriz 1×1 $A=[a_{11}]$, o menor e o co-fator são definidos como o próprio elemento a_{11}.

Usando a Definição 2, é fácil perceber que a expressão do determinante da matriz A 3×3 acima pode ser reescrita, em termos dos menores dos elementos da primeira linha, como $\det(A)=a_{11}\det A_{11}-a_{12}\det A_{12}+a_{13}\det A_{13}$, ou, em termos dos co-fatores dos elementos da primeira linha, como $\det(A)=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$.

Antes de estendermos a definição de determinante para uma matriz quadrada de uma ordem qualquer, retomamos um aspecto curioso na história dos determinantes. Veja:

A Álgebra Linear na História

Aparentemente, o termo menor é devido ao matemático inglês James Sylvester, que escreveu o seguinte num artigo científico publicado em 1850: "Agora conceba uma linha e uma coluna quaisquer sendo cancelada, e obtemos um... quadrado, com um termo a menos em largura e profundidade do que o quadrado original; e supondo que o quadrado original consista em n linhas e n colunas, variando a linha e coluna excluídas dentre todas as seleções possíveis, obtemos n^2 desses quadrados menores, cada um dos quais representa o que eu vou denominar um Primeiro Determinante Menor relativo ao determinante principal ou completo".

(ANTON; BUSBY, 2006, p. 191)

Exemplo 3

Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. O menor do elemento a_{32} é:

$$A_{32}=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5.2-(-2).1=12$$

O co-fator correspondente é $C_{32}=(-1)^{3+2}A_{32}=-A_{32}=-12$.

O determinante de A é:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 5\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+(-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 5\cdot[0\cdot 1-2\cdot 7]-3\cdot[1\cdot 1-2\cdot(-1)]+(-2)\cdot[1\cdot 7-0\cdot(-1)] \\ &= 5\cdot(-14)-3\cdot(3)+(-2)\cdot 7 \\ &= -70-9-14 \\ &= -93 \end{aligned}$$

A definição de determinante de uma matriz 3x3 se estende naturalmente para matrizes quadradas arbitrárias.

Definição$_3$: Seja $A=\left[a_{ij}\right]$ uma matriz $n\times n$, com $n\geq 2$. Então o determinante de A é dado por:

$$\begin{aligned} \det(A) &= |A| = a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+\cdots+a_{1n}C_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j} \end{aligned}$$

Em palavras, essa fórmula diz que o determinante de *A* pode ser obtido multiplicando cada elemento na primeira linha de *A* por seu co-fator e somando os produtos resultantes. Dizemos que esta é a *expansão em co-fatores pela primeira linha* de *A*. Entretanto, como pode ser visto no próximo teorema, reagrupando convenientemente as parcelas do determinante, pode ser demonstrado que a expansão em co-fatores pode ser feita por qualquer linha ou coluna. Antes, porém, conheça um pouco mais de história.

A Álgebra Linear na História

A expansão em co-fatores não é o único método para expressar o determinante de uma matriz em termos de determinantes de ordens menores. Por exemplo, embora não seja muito bem conhecido, o matemático inglês Charles Dodgson, que foi o autor de Alice no País das Maravilhas e Alice no País do Espelho sob o pseudônimo de Lewis Carroll, inventou um tal método, denominado

Teorema$_1$: O determinante de uma matriz $n\times n$ $A=\left[a_{ij}\right]$ pode ser calculado multiplicando os elementos de uma linha (ou coluna) qualquer pelos seus co-fatores e somando os produtos assim obtidos; ou seja, para cada $1\leq i\leq n$ e $1\leq j\leq n$, temos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= |A| = a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \end{aligned}$$

(que é a **expansão em co-fatores pela i-ésima linha**), e também

$$\begin{aligned} \det(A) &= |A| = a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \end{aligned}$$

(que é a **expansão em co-fatores pela j-ésima coluna**).

A comprovação deste teorema pode ser vista em Poole (2006, p. 252-253).

Exercício resolvido 1

Calcule o determinante da matriz :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Solução:

Pelo Teorema 1, podemos escolher qualquer linha ou coluna para expandir. Escolheremos a primeira coluna que contém três zeros, tornando desnecessário calcular os co-fatores correspondentes. Assim,

$$\det(A)=3\cdot C_{11}+0\cdot C_{21}+0\cdot C_{31}+0\cdot C_{41}=3\cdot C_{11}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 6 & 0\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

Fazendo novamente a expansão pela primeira coluna, obtemos:

$$\det(A)=3\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}$$

Continuando a fazer expansão pela primeira coluna (ou usando a definição de determinante 2×2), temos $\det(A)=3\cdot 1\cdot 5\cdot\left|-1\right|=3\cdot 1\cdot 5\cdot(-1)=-15$.

Você agora já sabe calcular (por meio da expansão em co-fatores) o determinante de uma matriz quadrada qualquer. No próximo tópico apresentaremos algumas das principais propriedades dos determinantes e alguns resultados que facilitarão o cálculo de determinantes.

ATENÇÃO!

Uma vez que $C_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$, cada co-fator é igual, a menos do sinal mais ou menos, ao determinante menor correspondente, sendo o sinal dado pelo fator $(-1)^{i+j}$. Para saber se o sinal é + ou -, perceba que os sinais compõem um padrão de um "tabuleiro de xadrez", alternando-se em cada linha e em cada coluna, conforme ilustrado abaixo.

$$\begin{bmatrix}+ & - & + & - & \cdots\\ - & + & - & + & \cdots\\ + & - & + & - & \cdots\\ - & + & - & + & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}$$

SAIBA MAIS!

Do exemplo acima, você deve ter percebido que o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos de sua diagonal. Essa propriedade é válida em geral para qualquer matriz triangular (tanto superior quanto inferior).

TÓPICO 4

Propriedades e resultados dos determinantes

Objetivo

- Conhecer as propriedades dos determinantes

Neste tópico, apresentaremos algumas das propriedades básicas dos determinantes e alguns resultados que podem facilitar os cálculos envolvendo determinantes.

Teorema$_2$ (Propriedades dos Determinantes): *Sejam A e B matrizes* $n \times n$. *Então:*

(a) Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$.

(b) Se A é triangular, então $\det(A)$ *é o produto dos elementos na diagonal principal.*

(c) $\det(A) = \det(A^T)$.

(d) Se B é obtida de A pela troca de duas linhas ou duas colunas, então $\det(B) = -\det(A)$.

(e) Se B é obtida de A pela multiplicação de uma única linha ou uma única coluna de A por um escalar k, então $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

(f) Se B é obtida de A pela adição de um múltiplo de uma linha de A a uma outra linha de A ou pela adição de um múltiplo de uma coluna de A a uma outra coluna de A, então $\det(B) = \det(A)$.

(g) Se A tem duas linhas ou colunas iguais, então $\det(A) = 0$.

(h) Se A tem duas linhas ou colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.

(i) $\det(kA) = k^n \det(A)$

(j) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

O Teorema 3 a seguir é muito importante e funciona como um teste do determinante para a invertibilidade de uma matriz. Diante da propriedade (h) do Teorema 2, o Teorema 3 mostra que uma matriz com duas linhas ou com duas colunas proporcionais não pode ser invertível.

Teorema$_3$: Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

A relação entre o determinante de uma matriz invertível e o determinante de sua inversa é dada no próximo teorema.

Teorema$_4$: Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Prova:

Como A é invertível, $AA^{-1} = I$. Como I é triangular com diagonal formada toda por elementos 1, seu determinante é igual a 1. Assim, $\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$. Pela propriedade (j) do Teorema 2, temos $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ e o teorema seguinte.

Concluímos este tópico apresentando o teorema que estende a Regra de Cramer (vista no Tópico 1 para sistemas lineares de duas equações a duas incógnitas) para sistemas lineares de *n* equações a *n* incógnitas.

Teorema$_5$ (Regra de Cramer): Se $Ax = b$ é um sistema linear de n equações a n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então o sistema tem uma solução única se, e somente se, $\det(A) \neq 0$, caso em que a solução é

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

onde A_j é a matriz que resulta quando a j-ésima coluna de A é substituída por b.

As provas das propriedades deste teorema que foram omitidas aqui podem ser vistas na Seção 4.3 de Poole (2006) ou nas Seções 4.1, 4.2 e 4.3 de Anton e Busby (2006).

Nesta aula, aprendemos a calcular determinantes de matrizes quadradas. Vimos algumas das propriedades básicas dos determinantes e certos resultados que facilitam o cálculo envolvendo determinantes. Estudamos ainda um método para resolver sistemas, a Regra de Cramer, que se aplica apenas aos sistemas lineares que têm número de equações igual ao número de incógnitas e que sejam determinados.

A exemplo do que foi feito na Aula 8, pode ser descrito um procedimento para calcular o determinante de uma matriz usando o *Excel*. A função a ser utilizada é "MATRIZ.DETERM". Você pode tentar fazer alguns cálculos utilizando este recurso. Vamos tentar?

Na próxima aula, encerraremos nossa disciplina, apresentando as progressões aritméticas e as progressões geométricas, que são sequências especiais com aplicações importantes no estabelecimento de padrões e nas operações financeiras.

Você pode aprofundar seus conhecimentos sobre determinantes de matrizes, conhecer mais aplicações dos determinantes e ver outros conceitos relacionados consultando as referências que citamos e pesquisando em páginas da *internet*.

ATIVIDADES DE APROFUNDAMENTO

1. Utilize o teorema 3 para encontrar todos os valores de k para os quais A é invertível.

a) $A = \begin{bmatrix} k & -8 & k-1 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -k & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ k^2 & k & 2 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$

2. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$, encontre o determinante indicado. Sugestão: utilize as propriedades (d), (e) e (f) do teorema 2.

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3d & -3e & -3f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g+2a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$

3. Mostre que se $\det(AB) = 0$, então A é singular ou B é singular ou ambas são singulares.

4. Sejam A e B matrizes 5×5 tais que $\det(A) = 3$ e $\det(B) = -4$. Encontre:

a) $\det(2A)$

b) $\det(AB)$

c) $\det(3B^T)$

d) $\det(A^2B^{-1})$

AULA 10 | Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Olá! Esta é a nossa última aula. Nela, aprenderemos um pouco sobre as sequências, especialmente sobre dois tipos de sequências numéricas bastante conhecidas – as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Apresentaremos conceitos básicos importantes para o estudo das sequências, em particular, conceitos e fórmulas presentes no tratamento das progressões aritméticas e geométricas. Procuraremos relacionar estes conceitos com outros bem conhecidos da matemática, situar o ensino das progressões aritméticas e geométricas nos livros didáticos do Ensino Médio e apresentar algumas aplicações das sequências em geral, e das progressões em particular.

Objetivos

- Compreender conceito e propriedades da sequência numérica
- Estudar dois tipos específicos de sequências: as progressões aritméticas e as progressões geométricas
- Relacionar o conceito de progressão aritmética e geométrica a situações cotidianas

TÓPICO 1

Sequência ou sucessão

Objetivos

- Entender o que é sequência
- Construir sequências numéricas

Neste tópico, trataremos da noção geral de sequência e, em particular, das sequências numéricas, que estão estreitamente associadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração, como bem salientam Youssef *et al*. (2005, p. 154):

> "Por essa razão encontramos registros de problemas envolvendo diversos tipos de sequências nos principais documentos das civilizações antigas."

Figura 1– Rio Nilo

A ideia de sequência ou sucessão aparece, por exemplo, quando se estabelece uma ordem para determinados objetos e ocorre em várias situações da vida. No nosso dia a dia encontramos diversos exemplos de sequência, por exemplo: a sequência dos meses do ano, a classificação dos alunos aprovados no vestibular, a listagem dos nomes em uma lista telefônica, a numeração das casas, a sequência dos anos nos quais ocorreram as olimpíadas. Até no diário do professor encontramos uma sequência: a enumeração dos nomes dos alunos. E você, já deu para perceber o que é sequência?

A noção de sequência surgiu inicialmente das necessidades cotidianas dos antigos povos, como os egípcios, que procuraram estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo (figura 1). Para isso, eles passaram a observar as subidas do rio para ter conhecimento do melhor período para plantação e assim garantir o alimento de sua família. Perceberam que as inundações ocorriam logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol, e que esse fenômeno acontecia a cada 365 dias, criando assim um calendário solar.

Podem ser encontrados registros de problemas envolvendo diversos tipos de sequências nos principais documentos das civilizações antigas.

Várias tábuas (cf. figura 2) de cálculo que datam de cerca de 2000 a.C. foram encontradas na Mesopotâmia, dentre elas a extraordinária tábua de Plimpton 322 (1900 a.C. a 1600 a.C.). Nelas era comum encontrar sequências de quadrados e cubos de números inteiros. Desse mesmo período, datam também alguns papiros encontrados no Egito, como o encontrado em Kahun (1950 a.C.), que contém problemas teóricos de progressões aritméticas e geométricas, e o papiro de Rhind (ou Ahmés) de aproximadamente 1650 a.C., que mostra que os egípcios utilizavam sequências numéricas para fazer a decomposição de frações em somas de outras frações, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética.

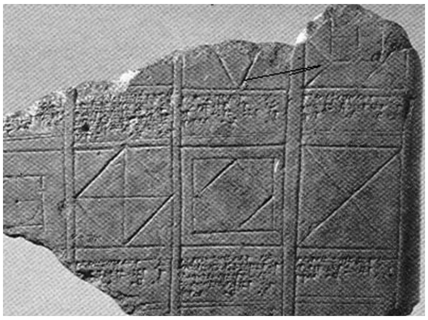


Figura 2– Tábua Babilônica

O interesse por sequências numéricas continua até hoje, com estudos sendo desenvolvidos nos mais diversos campos de atividade. O estabelecimento de padrões que possibilitou o estudo de sequências continua fascinando o homem. Há muitos séculos o homem contempla e estuda a beleza de diversos padrões (geométricos e numéricos) encontrados na natureza.

Como exemplos de padrões geométricos, podemos citar: as espirais encontradas nas conchas de moluscos e na flor do girassol, os favos hexagonais de um de uma colméia, o padrão hexagonal dos flocos de neve e as diversas simetrias poligonais que se observam nas carapaças de certos habitantes dos mares.

Por sua vez, os padrões numéricos dependem, em geral, de uma interpretação da natureza e de uma posterior associação de valores numéricos ao fenômeno estudado. Um exemplo interessante de padrão numérico é a sequência de Fibonacci. Ela surgiu no século XIII quando o matemático Leonardo de Pisa (1170-1250), também conhecido por Fibonacci, propôs, em seu livro *Liber Abacci* (1202), o problema de determinar de que forma varia o número de casais de coelhos que se originam de um casal inicial, supondo que este gere um casal a cada mês e que cada casal gerado dá origem a um novo casal, após dois meses de seu nascimento. A interessante sequência numérica que se obtém é:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots)$$

Essa sequência obedece a um padrão bem simples: cada elemento, a partir do terceiro, é obtido somando-se os dois elementos anteriores. A sequência de Fibonacci tem sido bastante estudada e encontra diversas aplicações, conforme mencionado em Youssef *et al*. (2005, p. 154):

> Desde o século XIII, além do próprio Fibonacci, muitos matemáticos dedicaram-se ao estudo da sequência por ele proposta, encontrando-se inúmeras aplicações para ela no desenvolvimento de modelos explicativos de fenômenos naturais. É o caso, por exemplo, de espirais encontradas em conchas marinhas, do crescimento de brotos e folhas em determinadas espécies vegetais e da reprodução de certos animais e bactérias. Também é notável o fato de a sequência de Fibonacci estar associada a proporções encontradas na arquitetura clássica, nas artes e nas dimensões do corpo humano.

Nas figuras abaixo, podemos ver algumas das aplicações da sequência de Fibonacci. A figura 3 mostra a construção de retângulos por adição de quadrados, a partir de dois quadrados de lado 1. A figura mostra que os lados dos quadrados adicionados formam a sequência de Fibonacci. Construindo convenientemente quartos de circunferência inscritos em cada quadrado da figura 3, formamos uma espiral constituída de arcos cujos raios são os elementos da sequência de Fibonacci e que pode ser observada em diversas conchas de moluscos como o *náutilus* (figura 4). A sequência de Fibonacci pode ser vista também no crescimento, até certa escala, dos galhos de várias espécies de plantas (figura 5).

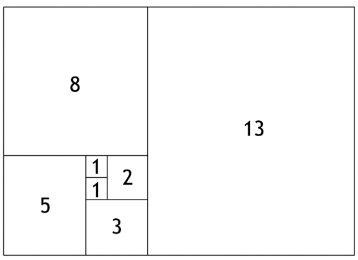


Figura 3– Retângulos por adição de quadrados


Figura 4– Concha de molusco marinho

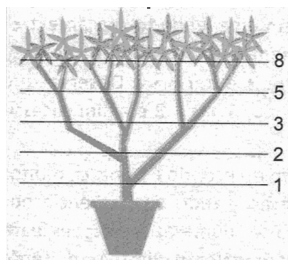


Figura 5– Crescimento de galhos de plantas

Somos atraídos para as regularidades e costumamos tentar interpretar situações procurando estabelecer (algumas vezes impondo) padrões. Os padrões e as regularidades desempenham um papel importante no ensino da matemática, destacado por Lynn Steen (1988) quando chamou a matemática de "ciência dos padrões". A essência da Matemática consiste em procurar padrões, isto é, procurar relações e repetições. Para Davis e Hersh (1995, p. 167), "O próprio objetivo da Matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão".

Feitas estas considerações iniciais, passemos à definição matemática de sequência, apresentada em Lima *et al*. (2001, p. 56):

> **Definição$_1$:** *Uma* **sequência** *ou* **sucessão** *é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais de* 1 *até* n *(sequência finita, com n termos) ou o conjunto de todos os números naturais* 1, 2, 3, … , n, … *(sequência infinita)*.

Simbolicamente, uma sequência é uma função (cf. figuras 6 e 7):

$x : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \rightarrow X$ ou $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, que associa a cada número natural *n* (no caso das sequências finitas, a cada número do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$) um elemento que indicaremos por x_n, chamado o *n-ésimo termo* da sequência.

ATENÇÃO!

O contradomínio de uma sequência pode ser um conjunto qualquer, digamos X. Se X é um conjunto numérico, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, dizemos que a sequência é uma sequência numérica.

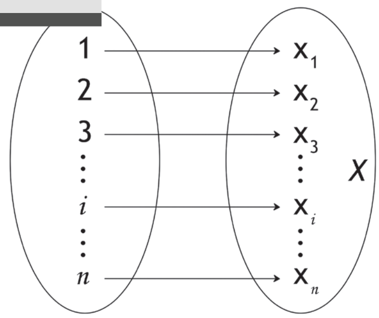


Figura 6– Sequência Finita

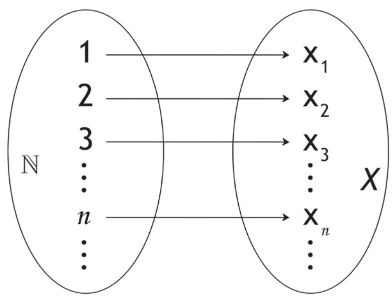


Figura 7– Sequência Infinita

Em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, é comum cometer-se o equívoco de erro definir uma sequência como "um conjunto cujos elementos são dados numa certa ordem" ou como "um conjunto ordenado". De acordo com Lima *et al*. (2001, p. 22):

> esta definição é incorreta pois um conjunto (ordenado ou não) não tem elementos repetidos. Além disso, o conjunto dos números reais é ordenado mas não é uma sequência.

Como dizem Lima *et al*. (2001, p. 56), há dois fatos básicos sobre sequência que devem ser considerados:

Em primeiro lugar, uma sequência não pode ser um conjunto porque um conjunto com todos os elementos iguais é um conjunto de um só elemento, enquanto várias sequências diferentes, como (a, a), (a, a, a), (a, a, a, a) podem ser formadas usando-se um único elemento a. Em segundo lugar porque o fato essencial a respeito de uma sequência é que cada um dos seus termos ocupa uma posição determinada por um número natural.

SAIBA MAIS!

Representamos uma sequência cujo n-ésimo termo é x_n por $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ou por $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, conforme a sequência seja finita ou infinita. Assim, numa sequência x, representamos o primeiro termo por x_1, o segundo termo é x_2, o terceiro x_3, e assim sucessivamente. Portanto, indicamos uma sequência x anotando apenas a imagem de x.

Exemplo 1

1. $(1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36)$ é a sequência (finita) dos divisores positivos de 36 dispostos em ordem crescente. O primeiro termo desta sequência é $x_1 = 1$, o segundo termo é $x_2 = 2$. Temos ainda: $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 6$, $x_6 = 9$, $x_7 = 12$ e $x_8 = 18$. O último termo da sequência é $x_9 = 36$.

2. $(4, 8, 12, 16, \ldots, 4n, \ldots)$ é a sequência (infinita) dos múltiplos inteiros positivos de 4 dispostos em ordem crescente. Temos: $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 12$, $x_4 = 16$, $x_{10} = 40$, $x_{125} = 500$ e $x_n = 4n$.

3. $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$ é a sequência (finita) dos números primos positivos menores que 20.

4. $(1, 2, 3, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots)$ é a sequência (infinita) dos números naturais.

ATENÇÃO!

Cuidado, você não pode confundir a sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ com o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ ou a sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ com o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$. Por exemplo, a sequência $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ não é o mesmo que o conjunto $\{0, 1\}$. Além disso, as sequências $(1, 2)$ e $(1, 1, 2, 2)$ são distintas, mas o conjunto de seus termos é o mesmo $\{1, 2\}$.

Toda sequência obedece a uma regra que permite dizer, para cada *n* de seu domínio, qual é seu *n*-ésimo termo, ou seja, obedece a uma lei de formação dos seus termos. A lei de formação de uma sequência numérica pode ser dada de várias formas, como:

1º Por fórmula algébrica – quando o *n*-ésimo termo é definido por meio de uma fórmula envolvendo *n*.

Exemplo 2

1. A sequência finita *x* de 5 termos, cujos termos obedecem à lei $x_n = 10^n + 1$. Temos:

$x_1 = 10^1 + 1 = 10 + 1 = 11$

$x_2 = 10^2 + 1 = 100 + 1 = 101$

$x_3 = 10^3 + 1 = 1\,000 + 1 = 1\,001$

$x_4 = 10^4 + 1 = 10\,000 + 1 = 10\,001$

$x_5 = 10^5 + 1 = 100\,000 + 1 = 100\,001$

Portanto, a sequência será $x = (11,\ 101,\ 1\,001,\ 10\,001,\ 100\,001)$.

2. A sequência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = (-1)^n n$. Então, $f = (-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ \ldots)$.

2º Por recorrência – quando são dadas duas regras: uma para determinar alguns termos iniciais e outra para calcular os termos, a partir de um certo termo, em função de alguns termos anteriores.

Exemplo 3

1. A sequência finita cujos termos são dados pela seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 0$ e $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Temos:

$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$a_6 = 2a_5 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$

Portanto, a sequência será $x = (0,\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31)$.

2. A sequência de Fibonacci é dada pela seguinte lei de recorrência. Verifique isto!

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3 \end{cases}$$

3º Por propriedade – quando é dada uma propriedade que os termos devem ter.

Exemplo 4

A sequência *x* dos divisores positivos de 12 dispostos em ordem decrescente, ou seja, $x = (12, 6, 4, 3, 2, 1)$.

A sequência dos números primos positivos colocados em ordem crescente, ou seja, $(2, 3, 5, 7, \ldots)$.

Neste tópico, em que apresentamos uma breve noção geral de sequência, estudamos seu conceito, importância, representação e vimos alguns exemplos de sequências numéricas. Nos próximos tópicos aprenderemos um pouco sobre dois tipos de sequências numéricas bastante conhecidas e bem úteis, a saber, as progressões aritméticas e geométricas.

TÓPICO 2

Progressões Aritméticas

Objetivos

- Relacionar progressão aritmética com função afim
- Compreender a lei de formação de uma progressão aritmética

Neste tópico estudaremos as *progressões aritméticas*, um tipo particular de sequência. As progressões aritméticas são bastante úteis e surgem, por exemplo, quando tratamos de grandezas que sofrem variações iguais, ou seja, quando observamos aumentos (ou reduções) constantes.

Veja a situação seguinte:

Exercício resolvido 1

Em uma padaria de Fortaleza, o preço de um pão carioquinha é R$ 0,25. Uma pessoa compra, nesta padaria, para seu consumo diário, 10 carioquinhas. Para emagrecer, entra em um regime (dieta) que consiste em diminuir, por dia, 2 pães até que passe a consumir apenas 2 pães. Quanto esta pessoa pagará diariamente pelos pães, a partir do último dia que consumiu 10 pães até o primeiro dia que atingiu sua meta?

Solução:

No último dia antes de iniciar a dieta ela pagará $10 \times \text{R\$ } 0{,}25 = \text{R\$ } 2{,}50$. A partir daí, seu gasto diminuirá $2 \times \text{R\$ } 0{,}25 = \text{R\$ } 0{,}50$ por dia (correspondente aos 2 pães que diminui) até chegar ao gasto final de $2 \times \text{R\$ } 0{,}25 = \text{R\$ } 0{,}50$. Portanto, a sequência dos valores, em reais, pagos diariamente é

$$(2{,}50,\ \ 2{,}00,\ \ 1{,}50,\ \ 1{,}00,\ \ 0{,}50)$$

A sequência acima é um exemplo de progressão aritmética. Observe que a diferença entre cada termo e o anterior é constante (neste caso, $-0{,}50$). Formalmente, temos:

Definição$_2$: *Uma* **progressão aritmética** *(PA) é uma sequência numérica na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de* **razão** *da progressão e representada pela letra r.*

Exemplo 5

A sequência $(2,5,8,11,\ldots)$ é uma PA infinita de razão 3, e $(202,197,192,187,\ldots,2)$ é uma PA finita de razão -5. Pense um pouco: quantos termos tem esta última PA?

Do ponto de vista geométrico, representando os termos de uma PA em ema reta real, teremos uma sequência de pontos igualmente espaçados sobre a reta. Este fato está ilustrado na figura 8, onde representamos a primeira sequência do exemplo 5.

GUARDE BEM ISSO!

1. Uma PA é uma sequência numérica na qual a diferença entre cada termo e o anterior é constante, equivalentemente, uma PA é uma sequência numérica na qual o aumento (ou a redução) de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.
2. Razão de uma PA é a diferença entre qualquer termo e o anterior ou a quantidade que se acrescenta a cada termo para obter o seguinte.

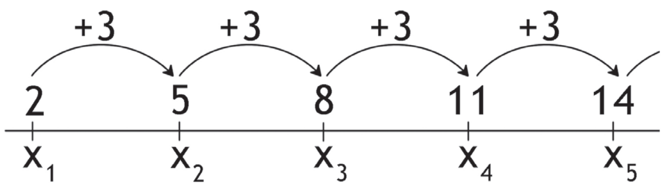


Figura 8– Representação de uma PA na reta real

A respeito da interpretação geométrica de uma PA, Lima *et al*. (2001, p. 350) afirmam que:

> Outras imagens geométricas úteis seriam os gráficos de algumas sequências. Em particular, os pontos do gráfico de uma progressão aritmética seriam colineares. Daí resultaria imediatamente que uma progressão aritmética fica determinada quando se conhecem dois de seus termos.

A sequência dos seis primeiros números pares positivos colocados em ordem crescente é a PA $f=(2,4,6,8,10,12)$ de razão 2, cujo gráfico encontra-se ilustrado na figura 9 abaixo.

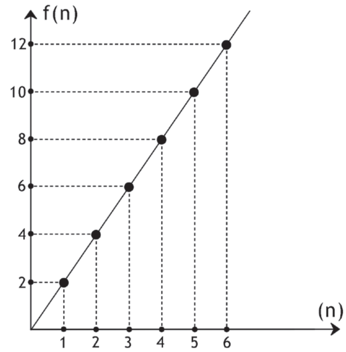


Figura 9– Gráfico da PA f = (2, 4, 6, 8, 10, 12)

ATENÇÃO!

Uma propriedade que caracteriza as progressões aritméticas e que fica evidenciada pela representação na figura 8 é o fato de que, numa PA, cada termo, menos o primeiro e o último (este no caso de PA finita), é a média aritmética entre seus dois vizinhos (o antecedente e o conseqüente do termo). Esta é a razão da denominação progressão aritmética para este tipo de sequência. Lembre que a média aritmética de dois números x e y é dada por $\frac{x+y}{2}$.

Você já deve ter percebido que não é difícil passar de um termo para outro em uma PA. Por exemplo, para avançar um termo em uma PA de razão *r*, somamos *r*; para avançar dois termos, somamos 2*r*, e assim por diante, para avançar *m* termos, somamos $m \cdot r$. O raciocínio é análogo se queremos retroceder. Assim, ao passar de a_3 para a_7, avançamos 4 termos. Portanto, $a_7 = a_3 + 4r$. Ao passar de a_5 para a_{12}, avançamos 7 termos. Portanto, $a_{12} = a_5 + 7r$. De um modo geral, temos a seguinte *fórmula para o termo geral de uma PA*.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Pelo raciocínio acima, esta fórmula decorre do fato de que, ao passarmos de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos. Esquematicamente, podemos também obter a fórmula para o termo geral de uma PA observando que:

$$\begin{array}{lllll}
a_1 & = & a_1 & = & a_1 + 0r \\
a_2 & = & a_1 + r & = & a_1 + 1r \\
a_3 & = & a_2 + r & = & a_1 + 2r \\
a_4 & = & a_3 + r & = & a_1 + 3r \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_n & = & a_{n-1} + r & = & a_1 + (n-1)r
\end{array}$$

Exemplo 6

Considere a PA $(2, 5, 8, 11, \ldots)$ do Exemplo 5. Seu primeiro termo é $a_1 = 2$ e sua razão é $r = 3$. Portanto, a fórmula do termo geral dessa PA é $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$. O 9º., o 25º. e o 100º. termo dessa PA são, respectivamente, $a_9 = 2 + 8 \cdot 3 = 26$, $a_{25} = 2 + 24 \cdot 3 = 74$ e $a_{100} = 2 + 99 \cdot 3 = 299$.

Com a fórmula do termo geral, podemos obter qualquer termo de uma PA, sem precisar escrevê-la completamente. Isto é quando são conhecidos, por exemplo:

$\rightarrow$ um determinado termo e a razão;

$\rightarrow$ dois termos distintos;

Exercício resolvido 2

Determine o número de termos da PA $(202, 197, 192, 187, \ldots, 2)$ do Exemplo 5.

Solução:

Temos: $a_1 = 202$, $r = 197 - 202 = -5$ e $a_n = 2$. Substituindo esses valores na fórmula do termo geral de uma PA, obtemos:

$$2 = 202 + (n-1)\cdot(-5) \;\Rightarrow\; n - 1 = \frac{2-202}{-5} \;\Rightarrow\; n - 1 = 40 \;\Rightarrow\; n = 41$$

Portanto, a PA tem 41 termos.

Exercício resolvido 3

Em uma PA de razão 7, o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o quinto termo dessa PA?

Solução:

Temos: $a_{20} = 50$ e $r = 7$. Para passar de a_{20} para a_5, retrocedemos 15 termos. Assim, $a_5 = a_{20} - 15r$. Logo, $a_5 = 50 - 15 \cdot 7 = -55$. Portanto, o quinto termo vale -55.

Passaremos agora a determinar uma fórmula para calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PA qualquer. Antes, porém, veja a seguinte curiosidade histórica .

Para encontrar o resultado, Gauss teve o seguinte raciocínio: $1 + 100 = 101$; $2 + 99 = 101$; $3 + 98 = 101$; e assim em diante, até chegar a $49 + 52 = 101$ e $50 + 51 = 101$.

VOCÊ SABIA?

Carl Friedrich Gauss foi um matemático que nasceu na Alemanha e viveu de 1777 a 1855. Aos sete anos de idade entrou para a escola. Conta-se que, quando tinha dez anos, seu professor J. G. Büttner, querendo manter o silêncio em sala de aula por um bom tempo, propôs aos alunos o seguinte problema: somem todos os números inteiros de 1 a 100, ou seja, $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$. Após alguns segundos, Gauss deu a resposta correta ao professor: 5050.

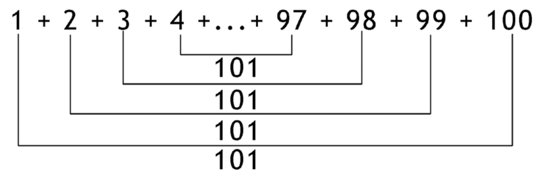


Figura 10– Raciocínio de Gauss

Com esse raciocínio, ele concluiu que se tem um total de 50 pares de números cuja soma dá 101. Logo, a soma total é $50 \times 101 = 5050$. Seguindo este mesmo raciocínio, é fácil provar que:

Teorema$_1$: *A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética* $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ *é* $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Apesar de ser bem simples, omitimos a comprovação desse teorema. Deixamos, então, como pesquisa para você realizar. Você pode encontrá-la na maioria dos livros didáticos. Dentre eles, citamos Lima *et*. *al*. (2006).

Exercício resolvido 4

Quanto vale a soma dos 30 primeiros termos da PA $(2, 6, 10, \ldots)$?

Solução:

Temos:

$a_{30} = a_1 + 29r = 2 + 29 \cdot 4 = 118$.

Logo, $S_{30} = \dfrac{(2+118)30}{2} = \dfrac{120 \cdot 30}{2} = 1\,800$.

Neste tópico estudamos como são formadas as progressões aritméticas e discutimos alguns conceitos e resultados relacionados a esse tipo de sequência. No próximo tópico, trataremos das progressões geométricas, outro tipo de sequência com diversas aplicações.

TÓPICO 3

Progressões Geométricas

Objetivos

- Relacionar progressão geométrica com função exponencial
- Compreender a lei de formação de uma progressão geométrica

Neste tópico estudaremos as *progressões geométricas*, um tipo particular de sequência que aparece com frequência em problemas de diversas áreas. As progressões geométricas estão presentes sempre que estudamos uma grandeza variável que cresce (ou decresce) com uma taxa (porcentagem) de crescimento constante. Seguiremos o mesmo roteiro adotado para as progressões aritméticas, apresentando: definição, fórmula do termo geral, soma dos termos, problemas, etc.

Veja a situação seguinte adaptada de Lima *et al*. (2006, p. 25, Exemplo 3):

Exercício resolvido 5

Para o pleito de 2008, certo município do interior do Ceará contava com 40 000 eleitores. Sabendo que a população eleitoral desse município tem o extraordinário crescimento de 5% ao ano, quantos eleitores terá esse município para o pleito de 2012?

Solução:

Se a população eleitoral cresce 5% ao ano, em cada ano essa população é de 105% da população do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a população eleitoral sofre uma multiplicação por $105\% = 1{,}05$. Assim, em 2009 a população eleitoral será $40\,000 \times 1{,}05 = 42\,000$. Em 2010 será $42\,000 \times 1{,}05 = 40\,000 \times (1{,}05)^2 = 44\,100$. Em 2011, a população eleitoral será igual $44\,100 \times 1{,}05 = 40\,000 \times (1{,}05)^3 = 46\,305$. Finalmente, em 2012 o município atingirá a marca de $46\,305 \times 1{,}05 = 40\,000 \times (1{,}05)^4 \cong 48\,620$

eleitores. Portanto, a sequência dos números de eleitores, por ano, no período 2008 – 2012 é:

$$(40\,000,\ 42\,000,\ 44\,100,\ 46\,305,\ 48\,620)$$

A sequência acima é um exemplo de progressão geométrica. Observe que a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de 5%, o que faz com que cada termo seja igual a $105\% = 1{,}05$ do termo anterior. Dito de outro modo, o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é sempre o mesmo (neste caso, $1{,}05$). Formalmente, temos:

Definição$_2$: *Uma* **progressão geométrica** *(PG) é uma sequência numérica na qual o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é constante. Esse quociente constante é chamado de* **razão** *da progressão e representado pela letra q.*

Exemplo 7

A sequência $(3, 12, 48, 192, \ldots)$ é uma PG infinita de razão 4 e $\left(32, 16, 8, 4, \ldots, \frac{1}{64}\right)$ é uma PG finita de razão $\frac{1}{2}$. Pense um pouco: quantos termos tem esta última PG?

Do ponto de vista geométrico, pensando em uma PG como uma função que associa a cada número natural *n* o valor a_n, pode-se perceber que o seu gráfico é constituído por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial. Este fato está ilustrado na figura 11, onde representamos a PG finita $f = (2, 4, 8, 16)$.

GUARDE BEM ISSO!

1. Uma PG é uma sequência numérica na qual o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é constante; equivalentemente, uma PG é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é constante.
2. Razão de uma PG é o quociente da divisão de qualquer termo pelo termo anterior ou a quantidade pela qual se multiplica cada termo para obter o seguinte.

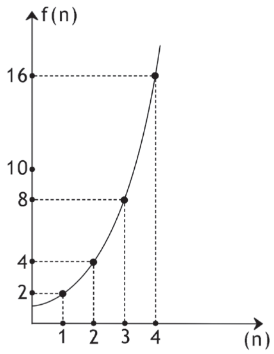


Figura 11– Gráfico da PG f = (2, 4, 8, 16)

SAIBA MAIS!

A razão da denominação progressão geométrica para este tipo de sequência vem do fato de que, numa PG de razão $q>0$, cada termo, menos o primeiro e o último (este no caso de PG finita), é a média geométrica entre seus dois vizinhos (o antecedente e o conseqüente do termo). Lembre que a média geométrica de dois números x e y é dada por $\sqrt{xy}$.

Do mesmo modo que nas progressões aritméticas, não é difícil passar de um termo para outro em uma PG. Para avançar um termo em uma PG de razão *q*, multiplicamos por *q*; para avançar dois termos, multiplicamos duas vezes por *q*, ou seja, multiplicamos q^2 , e assim por diante, para avançar *m* termos, multiplicamos por q^m . O raciocínio é análogo (dividindo ao invés de multiplicar) se queremos retroceder. Assim, ao passar de a_4 para a_7 , avançamos 3 termos. Portanto, $a_7 = a_4 q^3$. Ao passar de a_{20} para a_8 , retrocedemos 8 termos. Portanto, $a_8 = \dfrac{a_{20}}{q^{12}}$. De um modo geral, temos a seguinte *fórmula para o termo geral de uma PG*.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Pelo raciocínio acima, esta fórmula decorre do fato de que, ao passarmos de a_1 para a_n , avançamos $n-1$ termos. Esquematicamente, podemos também obter a fórmula para o termo geral de uma PA observando que:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & = & a_1 & = & a_1 q^0 \\
a_2 & = & a_1 q & = & a_1 q^1 \\
a_3 & = & a_2 q & = & a_1 q^2 \\
a_4 & = & a_3 q & = & a_1 q^3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_n & = & a_{n-1} q & = & a_1 q^{n-1}
\end{array}$$

Exemplo 8

Considere a PG $(3, 12, 48, 192, \ldots)$ do exemplo 7. Seu primeiro termo é $a_1 = 3$ e sua razão é $r = 4$. Portanto, a fórmula do termo geral dessa PG é $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$. O 5º. e o 10º. termos dessa PG são, respectivamente, $a_5 = 3 \cdot 4^{5-1} = 3 \cdot 4^4 = 768$ e $a_{10} = 3 \cdot 4^{10-1} = 3 \cdot 4^9 = 786\,432$.

Com a fórmula do termo geral, podemos obter qualquer termo de uma PG, sem precisar escrevê-la completamente. Isto é possível quando são conhecidos, por exemplo:

$\rightarrow$ um determinado termo e a razão;

$\rightarrow$ dois termos distintos.

Exercício resolvido 6

Determine o número de termos da PA $\left(32, 16, 8, 4, \ldots, \frac{1}{64}\right)$ do Exemplo 7.

Solução:

Temos: $a_1 = 32$, $q = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ e $a_n = \frac{1}{64}$. Substituindo esses valores na fórmula do termo geral de uma PG, obtemos:

$$\frac{1}{64} = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^6}\frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \Rightarrow n-1 = 11 \Rightarrow n = 12$$

Portanto, a PG tem 12 termos.

VOCÊ SABIA?

Conta-se que certo rei que se sentia entediado anunciou que tornaria riquíssimo quem descobrisse um modo de entretê-lo. Surgiram vários inventores de jogos e de outros divertimentos, mas nada satisfazia o rei, até que lhe foi apresentado o jogo do xadrez. O rei ficou encantado com o extraordinário jogo inventado por um homem simples que diziam ser muito sábio e dotado de aptidão matemática. Para cumprir sua promessa, o rei disse ao sábio inventor que escolhesse o pagamento que quisesse, sugerindo-lhe o seu peso em ouro ou em jóias ou na maior riqueza que entendesse. O homem pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa do tabuleiro até chegar ao fim (à sexagésima quarta casa). O rei e toda a corte riram da modéstia do pedido do homem, mas, feitas as contas, percebeu-se que nem todo o trigo produzido em seu enorme reino ou mesmo no mundo inteiro daria para satisfazer o pedido do inventor.

Exercício resolvido 7

Em uma PG, o quarto termo vale 40 e o nono termo vale $1\,280$. Quanto vale o sétimo termo dessa PG?

Solução:

Para passar do quarto termo para o nono termo, avançamos 5 termos. Assim, $a_9 = a_4 q^5$. Logo, $1\,280 = 40q^5$ e $q = 2$. De modo análogo, $a_7 = a_4 q^3 = 40 \cdot 2^3 = 320$. Portanto, o sétimo termo da PG vale 320.

Passaremos agora a determinar uma fórmula para calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PG qualquer. Antes, porém, veja a curiosidade seguinte. Trata-se de uma lenda, muitas vezes contada que apresenta diversas versões.

Uma vez que o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedido pelo inventor é a soma dos 64 primeiros termos da PG $1, 2, 4, \ldots$. Para determinar esse número, podemos usar o teorema seguinte:

Teorema$_2$: *A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica* $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ *de razão* $q \neq 1$, *é* $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Prova:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$. Multiplicando por *q*, obtemos

$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_n + a_{n+1}$

Subtraindo membro a membro as duas igualdades acima, temos $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$. Usando a fórmula do termo geral, isto dá $S_n(1-q) = a_1 - a_1q^n$.

Portanto, $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Voltando ao problema de determinar a quantidade de grãos pedida pelo inventor do xadrez ao rei, temos:

$$S_{64} = a_1 \frac{1-q^{64}}{1-q} = 1\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

Calculando, com auxílio de uma calculadora, obtemos um exorbitante número de 20 dígitos:

18 446 744 073 709 551 615 !

Neste tópico estudamos como são formadas as progressões geométricas e discutimos alguns conceitos e resultados relacionados a esse tipo de sequência. No próximo tópico, conheceremos mais aplicações e alguns recursos no estudo das progressões aritméticas e geométricas.

TÓPICO 4

Aplicações e recursos para Progressões Geométricas

Objetivos

- Conhecer aplicações para as progressões aritméticas e geométricas
- Conhecer recursos para trabalhar com as progressões aritméticas e geométricas

Finalizamos nossa aula, apresentando mais aplicações para as progressões aritméticas e geométricas e mostrando como podem ser usados recursos como calculadora e aplicativos, para facilitar a determinação dessas sequências.

As progressões aritméticas e geométricas têm inúmeras aplicações, mas apresentaremos aqui apenas alguns exemplos: Nas ciências biológicas, esses conceitos são utilizados para analisar a velocidade de reprodução de uma determinada bactéria e conhecer a quantidade de bactérias após um determinado período. Na Estatística, esses conceitos são aplicados para analisar o crescimento populacional de uma cidade. Em matemática financeira, são muitas as aplicações das progressões, como, por exemplo, no cálculo de juros e montantes em regimes de capitalização a juros simples ou compostos. De acordo com Lima *et al*. (2001, p. 350):

> Progressões geométricas são bem mais interessantes do que aritméticas, não apenas porque são mais ricas matematicamente como também pela multiplicidade de suas aplicações na vida real, em problemas de natureza financeira, econômica, física, química, biológica, farmacológica, etc.

Desse modo, é possível fazer um estudo contextualizado das progressões. Seu estudo, sobretudo no Ensino Médio, pode e deve ser motivado com exemplos atraentes de culturas de bactérias, compras a prazo, desintegração radioativa, concentração de substâncias em nosso organismo, resfriamento de corpos, pressão atmosférica, etc.

Deve-se também dar ênfase ao uso de recursos tecnológicos, como calculadoras e certos aplicativos, para o trabalho com progressões.

A maioria das calculadoras simples é capaz de mostrar no visor os termos de uma PA ou de uma PG de forma bastante prática. Para uma PA, basta digitar o primeiro termo, o sinal de adição, a razão e a tecla igual, sucessivamente. Os termos da PA irão aparecer no visor. No caso da PG (figura 12), basta digitar o primeiro termo, o sinal de multiplicação, a razão e a tecla igual, sucessivamente.

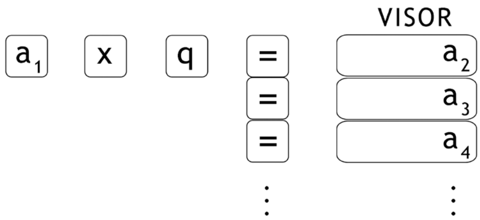


Figura 12– Passos para obter uma PG com uma calculadora simples

Exemplo:

Para obter os diversos termos da PG do exemplo 7 de razão 4 com primeiro termo 3, digite, nesta ordem:

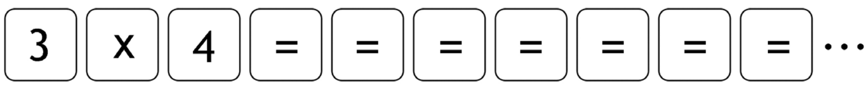


Figura 13– Sequência de digitação para obter a PG (3, 12, 48, 192, ...)

Você verá então os seguintes números aparecerem no visor:

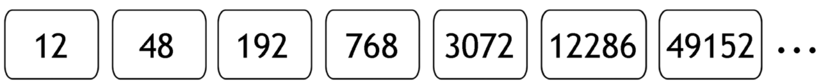


Figura 14– Termos da PG (3, 12, 48, 192, ...) a partir do segundo termo

Esses são os termos da PG a partir do segundo termo. O primeiro termo você já conhecia. Desse modo, a PG ficou determinada.

Planilhas eletrônicas, como o *Excel,* também podem ser utilizadas para calcular PAs e PGs. Lembre que elas já foram utilizadas por nós na aula 8 para o trabalho com matrizes. Fornecemos, a seguir, o *link* onde você encontrará planilhas elaboradas por Luis Alberto D'Afonseca para o trabalho com progressões:

http://www.ime.unicamp.br/~akiles/teia/teia-saber.html

Lá, fornecendo o primeiro termo, a razão e o número de termo da progressão são calculados cada termo, a soma e um gráfico dos termos da progressão. Neste *link*, você encontrará também planilhas para a exploração de outros conteúdos da matemática, o que mostra que o computador é um forte aliado para o ensino e aprendizagem da matemática.

Nesta aula, conhecemos um pouco sobre as sequências em geral e estudamos as progressões aritméticas e geométricas, duas sequências bastante úteis com aplicações em diversas situações. Nem todos os conceitos foram abordados aqui, no entanto você poderá aprofundar os conhecimentos sobre estes temas consultando as referências que citamos ou pesquisando em páginas da *internet*. Algumas páginas interessantes são:

1. www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/func.s.pdf

2. http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2447

3. http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/matzoo/sequencias.pdfp

Parabéns por você ter chegado até aqui. Esperamos ter contribuido para que você tenha adquirido novos conhecimentos e aprimorado aqueles com os quais você já estava familiarizado. Desejamos que você possa usar o que aprendeu nesta disciplina de Fundamentos de Matemática II como ferramenta para as outras disciplinas do curso e que possa, ainda, melhorar a sua prática como docente.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard e BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Tradução Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2006.

AZEVEDO FILHO, Manoel Ferreira de. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2. ed. Fortaleza: Edições Livro Técnico, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias. vol. 2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

D'AFONSECA, Luiz Alberto. **Excel como ferramenta para o ensino da matemática**. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~akiles/teia/teia-saber.html>. Acesso em: 21 set. 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. vol. único. São Paulo: Ática, 2005.

DAVIS, P. J.; HERSH, R.. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**. vol 4, 6. ed. São Paulo: Atual, 1993, p. 76-77.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**. vol 4. São Paulo: Atual, 1993.

KOLMAN, Bernard. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 6. ed. Tradução Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1998.

LIMA, Elon Lages, *et al*. **A matemática do ensino médio**. vol. 3. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

LIMA, Elon Lages et al. **Exame de textos:** análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Espaço**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1992.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino** (Coleção do Professor de Matemática). 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear:** teoria e problemas. 3. ed. Tradução Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

PANCIEIRA, Letícia Menezes e FERREIRA, Márcio Violante. A Modelagem Matemática no Ensino de Matrizes e Sistemas Lineares. In: **12º Jornada Nacional de Educação**. Santa Maria: Anais da 12º Jornada Nacional de Educação, 2006. p. 1-9.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. Tradução Martha Salerno Monteiro et al. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

STEEN, Lynn A. The Science of Patterns. **Science**, 1988. 240, p. 611-616.

YOUSSEF, Antônio Nicolau; SOARES, Elizabeth; FERNANDEZ, Vicente Paz. **Matemática**: ensino médio (volume único). São Paulo: Scipione, 2005.

YUSTER, Thomas. “The Reduced Row Echeleon Form of a Matrix is Unique: A Simple Proof”. **Mathematics Magazine**, Vol. 57, 2, 1984, p. 93-94.

CURRÍCULO

Francisco Gêvane Muniz Cunha

Francisco Gêvane Muniz Cunha é professor efetivo do Instituto Federal do Ceará – IFCE desde 1993. Nascido em São João do Jaguaribe – CE em 1970, é técnico em informática industrial pela Escola Técnica Federal do Ceará (1993). Licenciado (1993) e bacharel (1994) em matemática pela Universidade Federal do Ceará – UFC. Possui mestrado em matemática (1997) e mestrado em ciência da computação (2002), ambos pela UFC. É doutor em engenharia de sistemas e computação (2007) pela Universidade Federal do Rio de Janeiro com tese na linha de otimização. Tem experiência na área de matemática aplicada, no ensino de matemática, na formação de professores, no uso de tecnologias e no ensino na modalidade a distância. Atualmente é professor de disciplinas de matemática dos cursos de licenciatura em matemática, engenharias e outros do IFCE. Na modalidade semi-presencial é professor conteudista e formador de disciplinas de matemática do curso licenciatura em matemática do IFCE, tendo produzido diversos livros didáticos. Orienta alunos em nível de graduação e pós-graduação em matemática, ensino de Matemática ou educação Matemática. Tem interesse no uso de ambientes informatizados e, em especial, no uso de softwares educativos como apoio para o ensino de matemática. Dentre outras atividades, gosta de ler a bíblia, ajudar as pessoas, ensinar, estudar matemática e computação e assistir corridas de fórmula.