Scuole superiori

Matematica

OSB

PUBLISHED BY OSB

Latest version 2 ottobre 2023

Indice

I Storia

0.1 Cronologia . . . 9

II Insiemistica e Logica

III Algebra in $\mathbb{R}$

1 Algebra simbolica - Calcolo letterale . . . 15

1.1 Monomi . . . 15

1.1.1 Somma e differenza . . . 15

1.1.2 Prodotto e divisione . . . 15

1.1.3 Potenze e radici . . . 15

1.1.4 Esponenziali e logaritmi . . . 15

1.1.5 Funzioni armoniche . . . 15

1.1.6 Funzioni iperboliche . . . 15

1.2 Polinomi . . . 15

1.3 Potenze e radici . . . 16

2 Equazioni . . . 17

3 Disequazioni . . . 19

4 Sistemi di equazioni e di disequazioni . . . 21

IV Algebra in $\mathbb{C}$

4.1 Definizione dei numeri complessi . . . 25

4.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss) . . . 25

4.2 Operazioni con i numeri complessi **25**
4.2.1 Somma e differenza 25
4.2.2 Prodotto e divisione 25
4.2.3 Potenze e radici 26
4.2.4 Esponenziali e logaritmi 26

V Calcolo infinitesimale

5 Limiti **29**
5.1 Infiniti e infinitesimi **29**

6 Derivate **31**
6.1 Definizioni **31**
6.2 Regole di derivazione **31**
6.2.1 Regole 31
6.2.2 Dimostrazioni 31
6.3 Teoremi **31**
6.3.1 Teorema di de l'Hopital 31
6.4 Tabella di derivate **31**
6.5 Espansioni in serie **31**
6.6 Applicazioni **32**
6.6.1 Studio funzione 32
6.6.2 Approssimazione locale di 32

7 Integrali **33**

VI Vettori

8 Algebra vettoriale **39**
8.1 Definizioni **39**
8.1.1 Spazi vettoriali con prodotto interno 39
8.2 Applicazioni **39**
8.2.1 Geometria 39
8.2.2 Fisica 39

9 Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale **41**

VII Geometria

10 Geomteria nel piano **47**

11 Geometria nello spazio **49**

VIII Statistica

Bibilografia 53

Indice 55

Appendices 55

A Prima appendice 55

Storia

0.1 Cronologia 9

0.1 Cronologia

...

XVI secolo

- Nepier (Nepero) introduce i logaritmi

XVII secolo

- Fermat
- Descartes (Cartesio) illustra ne *La Gèometrie* i fondamenti della **geometria analitica**
- Huygens, Pascal
- Newton e Leibniz sviluppano contemporaneamente i fondamenti del **calcolo differenziale** e **integrale**, nell'ambito dello studio della **dinamica**
- fratelli Johann e Jakob Bernoulli
- de l'Hopital, Taylor

XVIII secolo

- Euler (Eulero): analisi matematica; soluzione equazioni differenziali; teoria dei numeri; analisi complessa (estensione di funzioni reali in ambito complesso; identità di Eulero); topologia e teoria dei grafi (problema die 7 ponti di Konigsberg)
- d'Alembert si dedica allo studio del moto dei corpi e lla meccanica razionale
- Legendre
- Bayes: probabilità
- istituzione di scuole scientifiche, Parigi importante centro scientifico del tempo
- Laplace: meccanica razionale e celeste (*Mécanique Céleste*); trasformata; calcolo differenziale: potenziale, laplaciano ed equazione di Laplace
- Lagrange: formulazione lagrangiana della meccanica (*Mécanique analytique*); calcolo delle variazioni; metodo dei moltiplicatori di Lagrange; teoria dei numeri

XIX secolo

- Jacobi: algebra lineare (determinante di matrici)
- Cauchy: algebra lineare; analisi complessa; statistica; teoria dei numeri; meccanica dei solidi
- Fourier: studio della trasmissione del calore; serie e trasformata di Fourier
- Gauss: teorema fondamentale dell'algebra; teoria dei numeri
- Dirichlet:
- Riemann: teoria dei numeri; geometria
- Hamilton: quaternioni; algebra lineare (teorema di Cayley-Hamilton); riformulazione della meccanica lagrangiana nella meccanica hamiltoniana
- Wierestrass: definizione rigorosa dei fondamenti dell'analisi (teorema di Weierstrass su esisteanza di minimi e massimi di funzioni a variabile reale)
- Boole: algebra sugli insiemi, logica, e teoria dell'informazione
- Peano: tentativo di definizione assiomatica della matematica
- Cantor: studio degli insiemi infiniti e la loro dimensione

XX secolo

- la matematica della probabilità e della meccanica quantistica: Lebesgue, Hilbert, von Neumann, Kolmogorov
- la nascita dell'informatica: Turing, Von Neumann
- la teoria dell'informazione: Shannon
- la teoria dei giochi: von Neumann, Morgestern e Nash
- l'incompletezza della matematica: Godel

II Insiemistica e Logica

III Algebra in $\mathbb{R}$

1 Algebra simbolica - Calcolo letterale 15
1.1 Monomi 15
1.2 Polinomi 15
1.3 Potenze e radici 16

2 Equazioni 17

3 Disequazioni 19

4 Sistemi di equazioni e di disequazioni 21

1. Algebra simbolica - Calcolo letterale

1.1 Monomi

Definizione 1.1 — Monomio. Un monomio è un'espressione matematica costituita dal prodotto di un coefficiente esplicitamente numerico e una parte letterale, nella quale compaiono unicamente moltiplicazioni e potenze intere.

R Viene richiesto che le potenze della parte letterale siano intere, per evitare di porre delle condizioni sulle basi delle potenze, essendo le potenze non intere definite solo per numeri reali positivi.

Definizione 1.2 — Monomi simili. I monomi simili sono i monomi che hanno la stessa parte letterale.

1.1.1 Somma e differenza

1.1.2 Prodotto e divisione

1.1.3 Potenze e radici

Definizione 1.3 — Potenze e radici intere. La potenza intera di ordine $n \in \mathbb{N}$ di un monomio x è definita come il prodotto di x per se stesso n volte,

$$p_n(x) := x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ volte}} . \tag{1.1}$$

L'operazione inversa, quando possibile, è definita come radice di ordine n,

$$x := \sqrt[n]{p_n(x)} = p_n(x)^{\frac{1}{n}} . \tag{1.2}$$

R Per una comprensione più completa, bisogna rifarsi all'algebra dei numeri complessi IV.

Definizione 1.4 — Potenze e radici non intere.

1.1.4 Esponenziali e logaritmi

1.1.5 Funzioni armoniche

1.1.6 Funzioni iperboliche

1.2 Polinomi

Definizione 1.5 — Polinomio. Un polinomio reale di grado n viene definito come una combinazione lineare dei monomi di grado $\leq n$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{1.3}$$

1.3 Potenze e radici

Definizione 1.6 — Potenze e radici intere.

2. Equazioni

3. Disequazioni

4. Sistemi di equazioni e di disequazioni

IV Algebra in $\mathbb{C}$

4.1 Definizione dei numeri complessi 25
4.2 Operazioni con i numeri complessi 25

4.1 Definizione dei numeri complessi

Definizione 4.1 — Unità immaginaria.

$$i := \sqrt{-1} \tag{4.1}$$

Definizione 4.2 — Numero complesso.

$$z = x + iy \qquad , \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

4.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)

Si può definire una relazione biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e il piano $\mathbb{R}^2$.

4.1.1.1 Rappresentazione cartesiana.

4.1.1.2 Rappresentazione polare.

Trasformazione tra coordinate cartesiane e polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{atan2}(x,y) \end{cases} \tag{4.3}$$

e quindi

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4.4}$$

La relazione di Eulero e la rappresentazione polare dei numeri complessi. Usando le espansioni in serie di Taylor delle funzioni $e^{i\theta}$, $\cos\theta$ e $\sin\theta$, Eulero ricavò la formula che da lui prende il nome

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ . \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(\theta)^{2n}}{(2n)!} && = 1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \dots \\
\sin\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} && = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \dots \\
e^{i\theta} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(i\theta)^n}{n!} && = 1 + i\theta - \dfrac{\theta^2}{2} - i\dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^4}{4!} + i\dfrac{\theta^5}{5!} + \dots = \\
& && = \left[1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \dots\right] + i\left[\theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \dots\right] = \\
& && = \cos\theta + i\sin\theta \ .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2 Operazioni con i numeri complessi

4.2.1 Somma e differenza

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \ . \tag{4.7}$$

4.2.2 Prodotto e divisione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \ . \tag{4.8}$$

4.2.3 Potenze e radici

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{4.9}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i(\theta+2\pi m)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{m}{n}2\pi\right)} \tag{4.10}$$

4.2.4 Esponenziali e logaritmi

...

V Calcolo infinitesimale

5 Limiti **29**
5.1 Infiniti e infinitesimi 29

6 Derivate **31**
6.1 Definizioni 31
6.2 Regole di derivazione 31
6.3 Teoremi 31
6.4 Tabella di derivate 31
6.5 Espansioni in serie 31
6.6 Applicazioni 32

7 Integrali **33**

5. Limiti

5.1 Infiniti e infinitesimi

6. Derivate

6.1 Definizioni

Definizione 6.1 — Derivata.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6.1}$$

6.2 Regole di derivazione

6.2.1 Regole

Derivata della somma di due funzioni

Proprietà 6.1 — Operatore lineare. La derivata è un operatore lineare.

Derivata del prodotto di due funzioni

Derivata del rapporto di due funzioni

Derivata di una funzione composta

6.2.2 Dimostrazioni

Derivata della somma di due funzioni

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \end{aligned} \tag{6.2}$$

Derivata del rapporto di due funzioni

Derivata di una funzione composta

6.3 Teoremi

6.3.1 Teorema di de l'Hopital

6.4 Tabella di derivate

6.5 Espansioni in serie

Definizione 6.2 — Serie di Taylor. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ centrata in $x = x_0$ è la serie polinomiale

$$T[f(x_0)](x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n . \tag{6.3}$$

Theorem 6.1 La serie di Taylor troncata alla n-esima potenza,

$$T^n[f(x_0)](x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i , \tag{6.4}$$

è un'approssimazione dell'n-esimo ordine della funzione $f(x)$, i.e.

$$f(x) - T^n[f(x_0)](x) \sim o(|x - x_0|^n) \tag{6.5}$$

Definizione 6.3 — Serie di MacLaurin. La serie di MacLaurin di una funzione $f(x)$ è definita come la sua serie di Taylor centrata in $x = 0$.

6.6 Applicazioni

6.6.1 Studio funzione

6.6.2 Approssimazione locale di

7. Integrali

Theorem 7.1 — Teorema fondmaentale del calcolo infinitesimale.

VI

Vettori

8 **Algebra vettoriale** **39**
8.1 Definizioni 39
8.2 Applicazioni 39

9 **Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale** **41**

Motivazione:

- non tutti gli oggetti di interesse della Matematica, della Fisica o delle Scienze in generale possono essere adeguatamente rappresentati da un singolo numero
- esempi: posizione, velocità, forza,...

Storia:

- ...
- da vettori nello spazio fisico a struttura astratta matematica

8. Algebra vettoriale

8.1 Definizioni

Definizione 8.1 — Spazio vettoriale. Uno spazio vettoriale è una struttura matematica composta da:

- un insieme V, i cui elementi $\mathbf{v} \in V$ sono chiamati **vettori**
- un campo F, i cui elementi $a \in F$ sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto a V, cioè il cui risultato è un elemento che appartiene a V, che soddisfano determinate proprietà
  - **somma vettoriale** di due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{8.1}$$

  - **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore $\mathbf{u} \in V$ e uno scalare $a \in F$:

$$a\mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{8.2}$$

Proprietà 8.1 — Proprietà delle operazioni.

Definizione 8.2 — Base e dimensione di uno spazio.

8.1.1 Spazi vettoriali con prodotto interno

8.2 Applicazioni

8.2.1 Geometria

8.2.2 Fisica

9. Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale

Definizione 9.1 — Vettore posizione.

Definizione 9.2 — Coordinate.

■ **Esempio 9.1 — Coordinate cartesiane.** ■

■ **Esempio 9.2 — Coordinate polari.** ■

■ **Esempio 9.3 — Coordinate sferiche e superficie terrestre.** ■

VII Geometria

10 Geomteria nel piano 47
11 Geometria nello spazio 49

Introduzione storica:
- Euclide
- Cartesio
- Riemann

10. Geomteria nel piano

11. Geometria nello spazio

VIII Statistica

Contents

Bibilografia 53

Indice 55

Appendices 55

A Prima appendice 55

Bibiliografia

A. Prima appendice

. . .