Scuole superiori

Matematica

OSB

Published by OSB

Latest version 3 ottobre 2023

Indice

VII Vettori

VIII Geometria

IX Statistica

Storia

0.1 Cronologia

...

XVI secolo

- Nepier (Nepero) introduce i logaritmi

XVII secolo

- Fermat
- Descartes (Cartesio) illustra ne *La Gèometrie* i fondamenti della **geometria analitica**
- Huygens, Pascal
- Newton e Leibniz sviluppano contemporaneamente i fondamenti del **calcolo differenziale** e **integrale**, nell'ambito dello studio della **dinamica**
- fratelli Johann e Jakob Bernoulli
- de l'Hopital, Taylor

XVIII secolo

- Euler (Eulero): analisi matematica; soluzione equazioni differenziali; teoria dei numeri; analisi complessa (estensione di funzioni reali in ambito complesso; identità di Eulero); topologia e teoria dei grafi (problema die 7 ponti di Konigsberg)
- d'Alembert si dedica allo studio del moto dei corpi e lla meccanica razionale
- Legendre
- Bayes: probabilità
- istituzione di scuole scientifiche, Parigi importante centro scientifico del tempo
- Laplace: meccanica razionale e celeste (*Mécanique Céleste*); trasformata; calcolo differenziale: potenziale, laplaciano ed equazione di Laplace
- Lagrange: formulazione lagrangiana della meccanica (*Mécanique analytique*); calcolo delle variazioni; metodo dei moltiplicatori di Lagrange; teoria dei numeri

XIX secolo

- Jacobi: algebra lineare (determinante di matrici)
- Cauchy: algebra lineare; analisi complessa; statistica; teoria dei numeri; meccanica dei solidi
- Fourier: studio della trasmissione del calore; serie e trasformata di Fourier
- Gauss: teorema fondamentale dell'algebra; teoria dei numeri
- Dirichlet:
- Riemann: teoria dei numeri; geometria
- Hamilton: quaternioni; algebra lineare (teorema di Cayley-Hamilton); riformulazione della meccanica lagrangiana nella meccanica hamiltoniana
- Wierestrass: definizione rigorosa dei fondamenti dell'analisi (teorema di Weierstrass su esisteanza di minimi e massimi di funzioni a variabile reale)
- Boole: algebra sugli insiemi, logica, e teoria dell'informazione
- Peano: tentativo di definizione assiomatica della matematica
- Cantor: studio degli insiemi infiniti e la loro dimensione

XX secolo

- la matematica della probabilità e della meccanica quantistica: Lebesgue, Hilbert, von Neumann, Kolmogorov
- la nascita dell'informatica: Turing, Von Neumann
- la teoria dell'informazione: Shannon
- la teoria dei giochi: von Neumann, Morgestern e Nash
- l'incompletezza della matematica: Godel

Insiemistica e Logica

III Algebra in $\mathbb{R}$

1. Algebra simbolica - Calcolo letterale

1.1 Monomi

Definizione 1.1 — Monomio. Un monomio è un'espressione matematica costituita dal prodotto di un coefficiente esplicitamente numerico e una parte letterale, nella quale compaiono unicamente moltiplicazioni e potenze intere.

R Viene richiesto che le potenze della parte letterale siano intere, per evitare di porre delle condizioni sulle basi delle potenze, essendo le potenze non intere definite solo per numeri reali positivi.

Definizione 1.2 — Monomi simili. I monomi simili sono i monomi che hanno la stessa parte letterale.

1.1.1 Somma e differenza

1.1.2 Prodotto e divisione

1.1.3 Potenze e radici

Definizione 1.3 — Potenze e radici intere. La potenza intera di ordine $n \in \mathbb{N}$ di un monomio x è definita come il prodotto di x per se stesso n volte,

$$p_n(x) := x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \ . \tag{1.1}$$

L'operazione inversa, quando possibile, è definita come radice di ordine n,

$$x := \sqrt[n]{p_n(x)} = p_n(x)^{\frac{1}{n}} \ . \tag{1.2}$$

R Per una comprensione più completa, bisogna rifarsi all'algebra dei numeri complessi IV.

Definizione 1.4 — Potenze e radici non intere.

1.2 Polinomi

Definizione 1.5 — Polinomio. Un polinomio reale di grado n viene definito come una combinazione lineare dei monomi di grado $\leq n$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{1.3}$$

1.3 Potenze e radici

Definizione 1.6 — Potenze e radici intere.

1.4 Esponenziali e logaritmi

1.4.1 Esponenziale

Definizione 1.7 — Esponenziale. L'elevamento a potenza di un numero a

$$y = a^x \tag{1.4}$$

è un operazione che coinvolge due numeri, a detto base e x detto esponente.

1.4.1.1 Potenze non intere, valori ammissibili

1.4.1.2 Proprietà

Prodotto di potenze con la stessa base

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{1.5}$$

Potenza di potenza

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{1.6}$$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^m b^m = (ab)^m \tag{1.7}$$

1.4.2 Logaritmo

Definizione 1.8 — Logaritmo. Il logaritmo è l'operazione inversa

$$x = \log_a y \qquad \text{se } y = a^x \tag{1.8}$$

1.4.2.1 Potenze non intere, valori ammissibili

1.4.2.2 Proprietà

Somma di logaritmi con la stessa base

$$\log_a m + \log_a n = \log_a(mn) \tag{1.9}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = a^{\log_a m} \\ n = a^{\log_a n} \\ mn = a^{\log_a mn} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} mn = m \cdot n \\ a^{\log_a mn} = a^{\log_a m} a^{\log_a n} = a^{\log_a m + \log_a n} \end{array} \tag{1.10}$$

$$\rightarrow \log_a mn = \log_a m + \log_a n \tag{1.11}$$

Prodotto di un logaritmo per uno scalare

$$b \log_a m = \log_a m^b \tag{1.12}$$

Cambio di base di un logaritmo

$$\log_b m = \log_b a \log_a m \tag{1.13}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = b^{\log_b m} \\ a = b^{\log_b a} \\ m = a^{\log_a m} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a m} = b^{\log_b a \ \log_a m} \end{cases} \tag{1.14}$$

e confrontando le due espressioni per m si ottiene

$$\rightarrow \log_b m = \log_b a \ \log_a m \tag{1.15}$$

1.5 Funzioni armoniche

1.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno

1.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante

1.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.6 Funzioni iperboliche

2. Equazioni

2.1 Equazioni polinomiali

Definizione 2.1 — Equazione polinomiale. Un'equazione polinomiale ha la forma

$$p(x) = 0 \tag{2.1}$$

dove $p(x)$ è un polinomio. Il **grado** dell'equazione corrisponde al grado del polinomio $p(x)$, cioé alla potenza massima dei monomi. In maniera più esplicita, quindi, si può scrivere un'equazione polinomiale di grado n come

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \,, \qquad \text{con } a_n \neq 0 \tag{2.2}$$

Esistenza e numero delle soluzioni. Un'equazione polinomiale di grado n ha **al massimo** n soluzioni reali. L'esistenza di soluzioni reali non è in generale garantita, mentre il **teorema fondamentale dell'algebra** assicura che esistano esattamente n soluzioni complesse di un'equazione polinomiale con coefficienti complessi.

2.1.1 Equazioni di primo grado

La forma generale delle equazioni di primo grado è

$$ax + b = 0 \,, \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{2.3}$$

e la soluzione è

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \,. \tag{2.4}$$

2.1.2 Equazioni di secondo grado

La forma generale delle equazioni di secondo grado è

$$ax^2 + bx + c = 0 \,, \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{2.5}$$

Un'equazione di secondo grado può ammettere nel campo dei numeri reali 2 soluzioni (distinte o coincidenti) o nessuna soluzione, a seconda del valore dell'espressione definita come **discriminante**, $\Delta := b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$: due soluzioni reali coincidenti

- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale

Quando il discriminante è non negativo, le soluzioni dell'equazione sono date dall'espressione

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \ . \tag{2.6}$$

2.1.2.1 Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado

Una dimostrazione della formula risolutiva viene ricavata con la regola di completamento del quadrato

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c = \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{2.8}$$

É ora facile notare come questa equazione ha soluzioni solo quando il discriminante è non negativo. Quando il discriminante è non negativo, è possibile estrarre la radice quadra dell'espressione

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \ . \tag{2.9}$$

3. Disequazioni

4. Sistemi di equazioni e di disequazioni

IV Algebra in $\mathbb{C}$

4.1 Definizione dei numeri complessi

Definizione 4.1 — Unità immaginaria.

$$i := \sqrt{-1} \tag{4.1}$$

Definizione 4.2 — Numero complesso.

$$z = x + iy \qquad , \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

4.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)

Si può definire una relazione biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e il piano $\mathbb{R}^2$.

4.1.1.1 Rappresentazione cartesiana.

4.1.1.2 Rappresentazione polare.

Trasformazione tra coordinate cartesiane e polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(x,y) \end{cases} \tag{4.3}$$

e quindi

$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{4.4}$$

La relazione di Eulero e la rappresentazione polare dei numeri complessi. Usando le espansioni in serie di Taylor delle funzioni $e^{i\theta}$, $\cos\theta$ e $\sin\theta$, Eulero ricavò la formula che da lui prende il nome

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ . \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(\theta)^{2n}}{(2n)!} && = 1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \dots \\
\sin\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} && = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \dots \\
e^{i\theta} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(i\theta)^n}{n!} && = 1 + i\theta - \dfrac{\theta^2}{2} - i\dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^4}{4!} + i\dfrac{\theta^5}{5!} + \dots = \\
& && = \left[1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \dots\right] + i\left[\theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \dots\right] = \\
& && = \cos\theta + i\sin\theta \ .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2 Operazioni con i numeri complessi

4.2.1 Somma e differenza

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \ . \tag{4.7}$$

4.2.2 Prodotto e divisione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \ . \tag{4.8}$$

4.2.3 Potenze e radici

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{4.9}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i(\theta+2\pi m)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{m}{n}2\pi\right)} \tag{4.10}$$

4.2.4 Esponenziali e logaritmi

...

V

Calcolo infinitesimale

5. Limiti

5.1 Infiniti e infinitesimi

6. Derivate

6.1 Definizioni

Definizione 6.1 — Derivata.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6.1}$$

Interpretazione geometrica

6.2 Regole di derivazione

6.2.1 Regole

Derivata della somma di due funzioni e il prodotto per uno scalare

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (af(x))' &= af'(x) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Proprietà 6.1 — Operatore lineare. La derivata è un operatore lineare.

Derivata del prodotto di due funzioni
Derivata del rapporto di due funzioni
Derivata di una funzione composta

6.2.2 Dimostrazioni

Derivata della somma di due funzioni
Derivata del prodotto di due funzioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)= \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Derivata di una funzione composta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(g(x)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(g(x+\Delta x))-f(g(x))\right]= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}= \\
&= \dots \\
&= f'(g(x))\,g'(x)\ .
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

6.3 Teoremi

6.3.1 Teorema di de l'Hopital

6.4 Tabella di derivate

6.5 Espansioni in serie

Definizione 6.2 — Serie di Taylor. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ centrata in $x = x_0$ è la serie polinomiale

$$T[f(x_0)](x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ . \tag{6.6}$$

Theorem 6.1 La serie di Taylor troncata alla n-esima potenza,

$$T^n[f(x_0)](x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\ , \tag{6.7}$$

è un'approssimazione dell'n-esimo ordine della funzione $f(x)$, i.e.

$$f(x)-T^n[f(x_0)](x)\sim o(|x-x_0|^n) \tag{6.8}$$

Definizione 6.3 — Serie di MacLaurin. La serie di MacLaurin di una funzione $f(x)$ è definita come la sua serie di Taylor centrata in $x = 0$.

6.6 Applicazioni

6.6.1 Studio funzione

6.6.2 Approssimazione locale di

7. Integrali

7.1 Definizioni

Definizione 7.1 — Somma di Riemann. Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n | a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$, la somma di Riemann viene definita come

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}) \tag{7.1}$$

con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definizione 7.2 — Integrale di Riemann. Definendo $\Delta x := \max_i (x_i - x_{i-1})$, l'integrale di Riemann viene definito come il limite della somma di Riemann per $\Delta x \to 0$ (e di conseguenza il numero di intervalli della partizione $n \to \infty$), e viene indicato come

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_n \tag{7.2}$$

Definizione 7.3 — Integrale definito.

Interpretazione geometrica

Definizione 7.4 — Integrale indefinito.

7.2 Teoremi

Theorem 7.1 — Teorema della media.

Theorem 7.2 — Teorema fondmaentale del calcolo infinitesimale.

$$\frac{d}{dx} \int_{t=a}^{x} f(t)dt = f(x) \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t=a}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{t=a}^{x} f(t)dt\right] = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{t=x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Delta x\, f(\xi) = \qquad\qquad (\text{con } \xi\in[x,x+\Delta x]) \\ &= f(x)\ .\end{aligned} \tag{7.4}$$

7.3 Integrali fondamentali

7.4 Regole di integrazione

7.4.1 Integrazione per parti

- Definendo $F(x)$, $G(x)$ le primitive delle funzioni $f(x)$, e $g(x)$
- Integrando in x dalla regola di **derivazione del prodotto** $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$, riscritta isolando il termine $F'(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)G'(x)$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)dx &= \int (F(x)G(x))'dx - \int F(x)G'(x)dx = \\ &= F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx\end{aligned} \tag{7.5}$$

7.4.2 Integrazione con sostituzione

- Definendo la funzione composta $\overline{F}(x) = F(y(x))$ e le derivate

$$\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) \qquad , \qquad f(y) = \frac{d}{dy}F(y) \tag{7.6}$$

- Partendo dalla regola di **derivazione della funzione composta**, $\overline{F}(x) = F(y(x))$

$$\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) = \frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{dF}{dy}(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(y(x))y'(x) \tag{7.7}$$

Usando il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

$$\begin{aligned}&F(y) = \int f(y)dy \\ &\overline{F}(x) = \int \overline{f}(x)dx = \int f(y(x))\ y'(x)dx\end{aligned} \tag{7.8}$$

Se si introduce la dipendenza $y(x)$ nella prima equazione, si ottiene l'uguaglianza tra le ultime due espressioni, $F(y(x)) = \overline{F}(x)$, e quindi

$$\int f(y)dy = \int f(y(x))\ y'(x)dx\ . \tag{7.9}$$

VI

Equazioni differenziali ordinarie

8. Introduzione

Definizione 8.1 — Equazione differenziale ordinaria. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che ha come incognita una funzione $y(x)$, nella quale possono comparire la funzione incognita $y(x)$, le sue derivate $y^{(n)}(x)$ e la variabile indipendente x, che può essere scritto nella forma implicita

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a,b]. \tag{8.1}$$

L'**ordine** dell'equazione differenziale viene definito come l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che compaiono nell'equazione.

Definizione 8.2 — Equazione differenziale ordinaria lineare. Un'equazione differenziale è lineare se si può scrivere come l'uguaglianza di una combinazione lineare delle derivate della funzione incognita e una funzione nota, $f(x)$. Ad esempio, la forma generale dell'equazione differenziale ordinaria di ordine n può essere scritta come

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{8.2}$$

Definizione 8.3 — Equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare con coefficienti $a_i(x) = a_i$, numeri che non dipendono dalla variabile indipendente x,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{8.3}$$

Definizione 8.4 — Equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti con $f(x) = 0$,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{8.4}$$

In generale, la soluzione dell'equazione (8.1) dipende da n parametri indeterminati. In generale, un problema differenziale è composto da:

- un'equazione differenziale di ordine n
- n condizioni per determinare gli n parametri altrimenti indeterminati

Definizione 8.5 — Problema di Cauchy. Un problema di Cauchy è definito da:

- un'equazione differenziale di ordine n

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{8.5}$$

- n condizioni che definiscono il valore della funzione incognita e delle prime $n-1$ derivate nell'estremo inferiore dell'intervallo

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y'(a) &= y_1 \\ &\ldots \\ y^{(n-1)}(a) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{8.6}$$

9. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti

9.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine

9.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay'(x) + by(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{9.1}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando la derivata e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta + b)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{9.2}$$

Il prodotto di tre fattori si annulla quando si annulla uno dei tre fattori:

- $e^{\beta x}$ non si annulla per nessun valore di x
- se si annulla α, $\alpha = 0$, si otterebbe la soluzione triviale $y(x) = 0$
- $\rightarrow$ deve quindi annullarsi il fattore $a\beta + b$: si ottiene quindi il valore $\beta = -\dfrac{b}{a}$

La forma generale della soluzione dell'equazione (9.1) è quindi

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{a}x} \tag{9.3}$$

Per determinare il coefficiente α è necessaria una condizione che definisca il valore della funzione (o della sua derivata) in un punto del dominio o del suo contorno.

9.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine

9.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{9.4}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando le derivate e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta^2 + b\beta + c)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{9.5}$$

I valori di β si ottiengono dalla soluzione dell'equazione di secondo grado in β, $a\beta^2+b\beta+c = 0$ che, a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, possono essere:

- $\Delta > 0$: esistono due soluzioni reali distinte $\beta_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: esistono due soluzioni reali coincidenti $\beta_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: esistono due soluzioni complesse coniugate $\beta_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \mp j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

La soluzione dell'equazione differenziale assume quindi la forma

- $\Delta > 0$:
$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} \tag{9.6}$$
- $\Delta = 0$:
$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 x e^{\beta x} \tag{9.7}$$
- $\Delta < 0$:
$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 e^{\beta^* x} = \\ &= \alpha_1 e^{(re\{\beta\} + i im\{\beta\})x} + \alpha_2 e^{(re\{\beta\} - i im\{\beta\})x} = \\ &= e^{re\{\beta\}x} \left(\alpha_1 e^{i\ im\{\beta\}x} + \alpha_2 e^{-i\ im\{\beta\}x} \right) \ , \end{aligned} \tag{9.8}$$
e per avere una soluzione reale, bisogna imporre $\alpha_2 = \alpha_1^*$, per ottenere la somma di due numeri complessi coniugati, uguale al doppio della somma della loro parte reale,
$$y(x) = 2e^{re\{\beta\}x} \left(re\{\alpha_1\} \cos(\beta x) - im\{\alpha_1\} \sin(\beta x) \right) \ , \tag{9.9}$$
che può essere riscritta come
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{re\{\beta\}x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right) = \\ &= C e^{re\{\beta\}x} \cos(\beta x + \phi) \ . \end{aligned} \tag{9.10}$$

10. Metodo di separazione delle variabili

VII

Vettori

Motivazione:

- non tutti gli oggetti di interesse della Matematica, della Fisica o delle Scienze in generale possono essere adeguatamente rappresentati da un singolo numero
- esempi: posizione, velocità, forza,...

Storia:

- ...
- da vettori nello spazio fisico a struttura astratta matematica

11. Algebra vettoriale

11.1 Definizioni

Definizione 11.1 — Spazio vettoriale. Uno spazio vettoriale è una struttura matematica composta da:

- un insieme V, i cui elementi $\mathbf{v} \in V$ sono chiamati **vettori**
- un campo F, i cui elementi $a \in F$ sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto a V, cioè il cui risultato è un elemento che appartiene a V, che soddisfano determinate proprietà
  - **somma vettoriale** di due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{11.1}$$

  - **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore $\mathbf{u} \in V$ e uno scalare $a \in F$:

$$a\mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{11.2}$$

Proprietà 11.1 — Proprietà delle operazioni.

Definizione 11.2 — Base e dimensione di uno spazio.

11.1.1 Spazi vettoriali con prodotto interno

11.2 Applicazioni

11.2.1 Geometria

11.2.2 Fisica

12. Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale

Definizione 12.1 — Vettore posizione.

Definizione 12.2 — Coordinate.

■ **Esempio 12.1 — Coordinate cartesiane.** ■

■ **Esempio 12.2 — Coordinate polari.** ■

■ **Esempio 12.3 — Coordinate sferiche e superficie terrestre.** ■

VIII

Geometria

Introduzione storica:

- Euclide
- Cartesio
- Riemann

13. Geomteria nel piano

14. Geometria nello spazio

IX

Statistica

Bibiliografia

A. Prima appendice

...