



Scuole superiori

**Fisica**

**OSB**



Copyright © 2023 OSB

PUBLISHED BY OSB

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*Latest version 22 ottobre 2023*

# Indice

<b>I</b>	<b>Storia</b>	
0.1	Personaggi .....	11
<b>1</b>	<b>Breve storia della fisica .....</b>	<b>13</b>
1.1	La fisica prima di Galileo .....	13
1.1.1	... ..	13
1.1.2	Le leggi del moto dei pianeti: Copernico e Keplero .....	13
1.2	<b>XVI e XVII secolo: la meccanica e l'ottica .....</b>	<b>13</b>
1.2.1	Il metodo scientifico: Galileo .....	13
1.2.2	La meccanica classica e la legge di gravitazione universale: Newton .....	13
1.2.3	L'ottica .....	14
1.3	<b>XVIII e XIX secolo: la termodinamica e l'elettromagnetismo .....</b>	<b>14</b>
1.3.1	La meccanica analitica .....	14
1.3.2	La meccanica dei mezzi continui: solidi e fluidi .....	14
1.3.3	La termodinamica .....	14
1.3.4	La meccanica statistica .....	15
1.3.5	L'elettromagnetismo .....	15
1.4	<b>XX secolo: la fisica moderna .....</b>	<b>15</b>
1.4.1	La relatività di Einstein .....	15
1.4.2	La meccanica quantistica .....	15
<b>II</b>	<b>Il metodo scientifico</b>	
<b>2</b>	<b>Il metodo scientifico .....</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>La misura .....</b>	<b>21</b>

<b>4</b>	<b>Cinematica</b>	<b>27</b>
4.1	Cinematica del punto materiale	27
4.2	Cinematica di un sistema esteso rigido	27
4.2.1	Cinematica nel piano	28
4.2.2	Cinematica nello spazio – cenni	28
4.3	Cinematica di un sistema esteso deformabile – cenni	28
4.4	Vincoli	28
<b>5</b>	<b>Proprietà inerziali e quantità dinamiche</b>	<b>29</b>
5.1	Proprietà inerziali	29
5.1.1	Centro di massa	29
5.1.2	Momento statico	29
5.1.3	Momento di inerzia	29
5.2	Quantità dinamiche	29
5.2.1	Punto materiale	29
5.2.2	Sistema di punti materiali	30
5.2.3	Sistema di punti materiali	30
<b>6</b>	<b>Azioni</b>	<b>31</b>
6.1	Esempi di forza	31
6.1.1	Forza peso in prossimità della superficie terrestre	31
6.1.2	Legge di gravitazione universale di Newton	31
6.1.3	Molla lineare e forza elastica	32
6.1.4	Smorzatore lineare e forza viscosa	32
6.1.5	Reazioni vincolari	32
6.1.6	Forza di attrito	33
6.2	Momento di una forza	33
6.3	Impulso di una forza	33
6.4	Lavoro di una forza	34
6.5	Campo di forze	34
6.5.1	Campi di forze centrali	34
6.5.2	Campi di forze conservativi	35
<b>7</b>	<b>Statica</b>	<b>37</b>
7.1	Condizioni di equilibrio	37
7.2	Esempi	37
<b>8</b>	<b>Dinamica</b>	<b>39</b>
8.1	Principi della dinamica di Newton	39
8.1.1	Primo principio della dinamica	39
8.1.2	Secondo principio della dinamica	39
8.1.3	Terzo principio della dinamica	39

<b>8.2</b>	<b>Equazioni cardinali della dinamica</b>	<b>39</b>
8.2.1	Moto di un punto materiale	40
8.2.2	Moto di un sistema di punti materiali	40
8.2.3	Moto di un corpo rigido	42
<b>9</b>	<b>Moti notevoli ed esempi</b>	<b>43</b>
<b>9.1</b>	<b>Moti di punti materiali</b>	<b>43</b>
9.1.1	Moto rettilineo uniforme	43
9.1.2	Moto di un proiettile in prossimità della superficie terrestre	43
9.1.3	Moto sul piano inclinato	44
9.1.4	Sistema massa-molla-smorzatore	44
9.1.5	Moto circolare	44
9.1.6	Moto del pendolo	44
9.1.7	Moti impulsivi	44
<b>9.2</b>	<b>Moto di corpi estesi</b>	<b>44</b>
9.2.1	Rotolamento di un disco	44
<b>9.3</b>	<b>Moto dei corpi celesti</b>	<b>46</b>
9.3.1	Problema dei due corpi	46
9.3.2	Problema dei tre corpi – cenni	48

## IV

## Meccanica del continuo – cenni

<b>10</b>	<b>Equazioni di bilancio</b>	<b>51</b>
<b>10.1</b>	<b>Bilanci per un mezzo continuo</b>	<b>51</b>
10.1.1	Bilanci in forma integrale	51
10.1.2	Bilanci in forma differenziale	52
<b>10.2</b>	<b>Bilanci per un solido</b>	<b>52</b>
<b>10.3</b>	<b>Bilanci per un fluido newtoniano</b>	<b>52</b>
10.3.1	Corrente incomprimibile	53
<b>11</b>	<b>Appendice – Derivate su domini mobili</b>	<b>55</b>

## V

## Termodinamica

<b>12</b>	<b>Principi della termodinamica</b>	<b>61</b>
<b>12.1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>61</b>
<b>12.2</b>	<b>Principi della termodinamica</b>	<b>61</b>
12.2.1	Legge di conservazione della massa	61
12.2.2	Primo principio	62
12.2.3	Secondo principio	62
12.2.4	Terzo principio	64
12.2.5	Principio zero - Equilibrio termico	64
<b>12.3</b>	<b>Bilanci per sistemi chiusi</b>	<b>64</b>
<b>12.4</b>	<b>Bilanci per sistemi aperti</b>	<b>64</b>

<b>13</b>	<b>Coefficienti e relazioni termodinamiche</b>	<b>65</b>
13.1	Potenziali termodinamici	65
13.2	Coefficienti termodinamici	66
13.3	Relazioni termodinamiche	66
<b>14</b>	<b>Stati della materia e leggi costitutive</b>	<b>67</b>
14.1	Stati della materia, variabili termodinamiche e diagramma di stato	67
14.2	Gas	67
14.2.1	Leggi sui gas: Boyle, Gay-Lussac, Charles	67
14.2.2	Equazione di stato dei gas perfetti	67
14.2.3	Equazione di stato di Van der Waals – equazione di stato dei gas reali	69
14.2.4	Teoria cinetica dei gas – cenni	69
14.3	Liquidi	70
14.4	Solidi	70
14.5	Miscela	70
14.6	Vapore acqueo	70
14.7	Aria umida	70
<b>15</b>	<b>Trasformazioni termodinamiche e componenti termo-meccanici</b>	<b>71</b>
15.1	Trasformazioni termodinamiche	71
15.1.1	Piani delle fasi	71
15.2	Trasformazioni termodinamiche per gas perfetti	71
15.2.1	Trasformazione isoterma	71
15.2.2	Trasformazione isobara	71
15.2.3	Trasformazione isocora	71
15.2.4	Trasformazione adiabatica ideale – isentropica	72
15.3	Esempi di componenti termo-meccanici	72
15.3.1	Turbine	72
15.3.2	Compressori	73
15.3.3	Pompe a liquido	73
15.3.4	Camera di combustione	75
15.3.5	Scambiatore di calore	75
15.3.6	Condensatore	75
<b>16</b>	<b>Cicli termodinamici e macchine termiche</b>	<b>77</b>
16.1	Introduzione ai cicli termodinamici	77
16.2	Macchina ideale di Carnot	78
16.3	Enunciati del secondo principio: Kelvin e Planck	78
16.4	Cicli termodinamici e macchine termiche	79
16.4.1	Cicli termodinamici diretti	79
16.4.2	Cicli termodinamici inversi	80
<b>17</b>	<b>Trasmissione del calore</b>	<b>81</b>
17.1	Conduzione	81
17.2	Convezione	81
17.3	Irraggiamento	81

<b>18</b>	<b>Fondamenti</b>	<b>85</b>
18.1	Introduzione storica	85
18.2	Esperienze	86
18.3	Esperienze e leggi fondamentali	86
18.3.1	Legge di Coulomb	86
18.3.2	Il principio di sovrapposizione di cause ed effetti	86
18.3.3	Il campo elettrico, $\mathbf{e}(\mathbf{r})$	87
18.3.4	Il campo di spostamento, $\mathbf{d}(\mathbf{r})$	87
18.3.5	Il potenziale del campo elettrico	87
18.3.6	Legge di conservazione della carica elettrica	87
18.3.7	Legge di Gauss per il campo elettrico	87
18.3.8	Legge di Gauss per il campo magnetico	88
18.3.9	Legge di Faraday–Neumann–Lenz	88
18.3.10	Legge di Ampère–Maxwell	88
18.4	Equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana	89
<b>19</b>	<b>Approssimazione circuitale</b>	<b>91</b>
19.1	Circuiti elettrici	91
19.1.1	Componenti	91
19.1.2	Induttore	91
19.1.3	Condensatore	91
19.1.4	Leggi ai nodi e leggi alle maglie	91
19.1.5	Regimi	92
19.2	Circuiti magnetici	92
<b>20</b>	<b>Applicazioni</b>	<b>93</b>
20.1	Strumenti per la misura di grandezze elettromagnetiche	93
20.2	Trasformatori, motori e generatori	93
<b>21</b>	<b>Onde elettromagnetiche</b>	<b>95</b>
<b>22</b>	<b>Ottica</b>	<b>97</b>

<b>23</b>	<b>Cronologia</b>	<b>101</b>
<b>24</b>	<b>Radioattività</b>	<b>105</b>
24.1	Storia	105
24.2	Decadimenti nucleari	105
24.2.1	Decadimento- $\alpha$	105
24.2.2	Decadimento- $\beta$	105
24.2.3	Decadimento- $\gamma$	105
24.2.4	Emissione di neutroni	106
24.2.5	Emissione di protoni	106

---

24.2.6	Fissione spontanea .....	106
--------	--------------------------	-----

<b>25</b>	<b>Struttura della materia .....</b>	<b>107</b>
-----------	--------------------------------------	------------

**VIII****Relatività di Einstein – cenni****IX****Meccanica quantistica – cenni**

<b>Bibliografia .....</b>	<b>113</b>
---------------------------	------------

<b>Indice .....</b>	<b>115</b>
---------------------	------------

<b>Appendices .....</b>	<b>115</b>
-------------------------	------------

<b>A</b>	<b>Prima appendice .....</b>	<b>115</b>
----------	------------------------------	------------





# Storia

0.1	Personaggi . . . . .	11
<b>1</b>	<b>Breve storia della fisica . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1	La fisica prima di Galileo . . . . .	13
1.2	XVI e XVII secolo: la meccanica e l'ottica . . .	13
1.3	XVIII e XIX secolo: la termodinamica e l'elettromagnetismo . . . . .	14
1.4	XX secolo: la fisica moderna . . . . .	15



## 0.1 Personaggi

- Galileo
  - 
  -
- Newton
  - 
  -
- Snell
- Huygens
  - 
  -
- Hooke
- Lagrange: meccanica analitica
- Laplace: meccanica analitica
- Bernoulli
- Cauchy
- Navier
- Stokes
- Young
- Fresnel
- Thompson
- Fourier
- Carnot
- Joule
- Kelvin
- Volta
- Faraday
- Maxwell
- Heaviside
- Boltzmann
- Marie Skłodowska e Pierre Curie
- Thomson
- Rutherford
- Einstein
- Planck
- Bohr
- Heisenberg
- Schrodinger
- Dirac
- Born
- ...



# 1. Breve storia della fisica

## 1.1 La fisica prima di Galileo

### 1.1.1 ...

### 1.1.2 Le leggi del moto dei pianeti: Copernico e Keplero

## 1.2 XVI e XVII secolo: la meccanica e l'ottica

- studio della dinamica dei corpi: reso difficile sulla Terra dalla presenza dell'aria e dalla resistenza dei corpi in moto
  - Galileo ricava il suo principio di inerzia paragonando la condizione di quiete con la condizione nella stiva di una nave in moto non accelerato (nella stiva non si percepisce la resistenza dell'aria)
  - ci si dedica allo studio dei corpi celesti, che Newton suppone si muovano nel vuoto
- per svolgere lo studio dei corpi celesti servono strumenti ottici, come il cannocchiale
  - nel procedimento di perfezionamento del cannocchiale, gli scienziati si trovano a studiare diversi fenomeni ottici
  - i risultati degli studi che permettono di perfezionare il cannocchiale trovano applicazione anche nel miglioramento dei microscopi

### 1.2.1 Il metodo scientifico: Galileo

- Il metodo scientifico
- Osservazioni astronomiche
- Il principio di inerzia

### 1.2.2 La meccanica classica e la legge di gravitazione universale: Newton

Isaac Newton (1642-1727) era studente al Trinity College di Cambridge, quando nel 1665 l'istituto venne chiuso per il diffondersi della peste, costringendo Newton a proseguire in autonomia i propri studi. Il 1666 viene considerato il suo *annus mirabilis* nel quale approfondì i suoi studi, sviluppando il calcolo infinitesimale – sviluppato in maniera indipendente dal tedesco Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) –, formulando i tre principi della dinamica classica e la legge di gravitazione universale.

Al ritorno in università a Cambridge nel 1667, Newton venne nominato membro del Trinity College e professore di matematica nel 1669.

Nel 1679, dopo essersi dedicato agli studi sull'ottica, Newton ritornò agli studi sulla gravità per la determinazione delle orbite dei pianeti e la derivazione rigorosa delle leggi di Keplero. Proprio quest'ultima derivazione forniva la risposta al dubbio che si sarebbero posti nel 1684 tre membri della Royal Society: il matematico e architetto Christopher Wren (1632-1723) – celebre per il suo ruolo nella ricostruzione di Londra dopo il grande incendio del 1666 –, il fisico Robert Hooke (1635-1703) – curatore degli esperimenti presso la Royal Society, da considerarsi il primo sperimentatore professionista retribuito della storia, celebre per i suoi esperimenti di ottica, il perfezionamento di microscopi e telescopi e la formulazione della legge elastica –, ed Edmond Halley (1656-1742) – professore a Oxford, famoso astronomo, matematico e scienziato della Terra, al quale fu intitolata la cometa della quale prevedette correttamente il ritorno dopo le osservazioni del 1532, del 1607 di Keplero, e del 1682.

Nel 1687 vennero dati alla stampa i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, testo nel quale Newton pubblicava molti dei suoi risultati tenuti fino ad allora inediti, tra i quali i principi della dinamica e la legge di gravitazione universale, usati per svolgere alcuni problemi sul moto dei corpi celesti, spiegare le maree come effetto dell'attrazione gravitazionale della Luna e presentare una prima stima della velocità del suono nell'aria: quest'ultima stima era sbagliata, a causa dell'ipotesi sbagliata da parte di Newton sulla propagazione del suono a temperatura costante.

### 1.2.3 L'ottica

- Newton: prisma e lenti; cannocchiale a riflessione
- Huygens
- Snell e Fresnel?

## 1.3 XVIII e XIX secolo: la termodinamica e l'elettromagnetismo

### 1.3.1 La meccanica analitica

- Leonhard Euler ()
- Lagrange ()
- Laplace ()

### 1.3.2 La meccanica dei mezzi continui: solidi e fluidi

Solidi:

- Hooke: legge costitutiva di solidi elastici
- Euler ()–Bernoulli (): modello di trave elastica
- Navier (): equazioni di governo del comportamento elastico delle strutture

Fluidi:

- Torricelli e Pascal: studi sulla statica dei fluidi
- Newton: studi sulla viscosità
- Bernoulli, D'Alembert, Lagrange, Laplace, Poisson: studio dei fluidi non viscosi
- Hagen, Poiseuille: studio di alcune correnti di fluidi viscosi: correnti in tubi
- Navier, Stokes: equazioni di governo dei fluidi
- Prandtl, von Karman: studio dello strato limite
- Reynolds, Kolmogorov: studio della turbolenza

### 1.3.3 La termodinamica

- Hooke () e Boyle () compiono studi sui gas, con l'impiego di pompe ad aria
- Black () e Watt () sviluppano i concetti di capacità termica e calore latente all'Università di Glasgow

- Sadi Carnot (1796-1832), abbandonata la carriera militare nell'esercito francese, si dedicò agli studi sull'efficienza delle macchine termiche, i cui risultati vengono pubblicati nelle *Riflessioni sulla potenza motrice del fuoco*
- I primi due principi della termodinamica vengono formulati nei lavori del 1850 di William Rankine (1820-1872) tra le università di Glasgow ed Edinburgo, Rudolf Clausius (1822-1888) tra Berlino e Zurigo, e William Thompson (Lord Kelvin, 1824-1907) a Glasgow.
- Clausius introduce il concetto di entropia nel 1865.
- Josiah Willam Gibbs (1839-1903), professore di matematica fisica a Yale, pubblica tre articoli sull'equilibrio e l'evoluzione spontanea dei processi termodinamici, incluse le reazioni chimiche

### 1.3.4 La meccanica statistica

- Gli studi di Daniel Bernoulli () pubblicati nel 1738 nel volume *Hydrodynamica* fondano le basi della teoria cinetica dei gas: viene data una descrizione molecolare dei gas; la pressione viene messa in relazione con il numero di urti delle molecole, la temperatura con l'energia cinetica media.
- Studi embrionali di termodinamica statistica vengono presentati da Rudolf Clausius e James Clerk Maxwell, che propone la distribuzione delle velocità molecolari
- Ludwig Boltzmann () sviluppa la meccanica statistica, riuscendo a spiegare come le leggi della termodinamica classica (descrizione macroscopica del fenomeno) siano un'evidenza del comportamento microscopico di un sistema costituito da un gran numero di particelle: fornisce una definizione statistica dell'entropia, legandola al numero di microstati di un sistema, che può essere interpretata come una misura del disordine del sistema stesso. Nel 1902 J. Willard Gibbs formalizza la meccanica statistica come approccio generale a ogni sistema – macroscopici o microscopici, gassosi o non gassosi.

### 1.3.5 L'elettromagnetismo

## 1.4 XX secolo: la fisica moderna

### 1.4.1 La relatività di Einstein

La relatività speciale o ristretta.

La relatività generale: una nuova teoria della gravitazione.

### 1.4.2 La meccanica quantistica







# Il metodo scientifico

2	Il metodo scientifico .....	19
3	La misura .....	21



## **2. Il metodo scientifico**



### **3. La misura**





# Meccanica

<b>4</b>	<b>Cinematica</b>	<b>27</b>
4.1	Cinematica del punto materiale	27
4.2	Cinematica di un sistema esteso rigido	27
4.3	Cinematica di un sistema esteso deformabile – cenni	28
4.4	Vincoli	28
<b>5</b>	<b>Proprietà inerziali e quantità dinamiche</b>	<b>29</b>
5.1	Proprietà inerziali	29
5.2	Quantità dinamiche	29
<b>6</b>	<b>Azioni</b>	<b>31</b>
6.1	Esempi di forza	31
6.2	Momento di una forza	33
6.3	Impulso di una forza	33
6.4	Lavoro di una forza	34
6.5	Campo di forze	34
<b>7</b>	<b>Statica</b>	<b>37</b>
7.1	Condizioni di equilibrio	37
7.2	Esempi	37
<b>8</b>	<b>Dinamica</b>	<b>39</b>
8.1	Principi della dinamica di Newton	39
8.2	Equazioni cardinali della dinamica	39
<b>9</b>	<b>Moti notevoli ed esempi</b>	<b>43</b>
9.1	Moti di punti materiali	43
9.2	Moto di corpi estesi	44
9.3	Moto dei corpi celesti	46





**Definizione 3.1 — Meccanica.** La meccanica è la branca della fisica che studia il moto di corpi e le sue cause.

## Argomenti

**La modellazione.** I corpi vengono rappresentati con **modelli** astratti o semplificati. I principali modelli che si usano in meccanica sono:

- corpo puntiforme
- corpo esteso rigido
- corpo esteso deformabile

Si possono riconoscere diversi aspetti della meccanica.

**Cinematica.** La cinematica si occupa della descrizione del moto dei corpi, senza indagare le cause del moto. La cinematica dei sistemi meccanici è descritta completamente quando sono note alcune quantità del sistema in funzione del tempo. Per i diversi modelli di sistemi meccanici queste quantità sono:

- punto: posizione
- corpo esteso rigido: posizione di un punto materiale e orientazione del corpo
- corpo esteso deformabile: posizione di tutti i punti del corpo

Calcolando la derivata rispetto al tempo di queste quantità si trovano la velocità e l'accelerazione dei punti, e la velocità e accelerazione angolare dei corpi estesi rigidi.

**Proprietà inerziali e quantità dinamiche.** La massa può essere definita come quantità di materia. La distribuzione di massa nello spazio determina le proprietà inerziali di un sistema. Le proprietà inerziali per i diversi modelli sono:

- punto: massa
- corpi estesi (inclusi sistemi di punti): massa totale, momento statico e momento di inerzia

Una volta note la cinematica e le proprietà inerziali di un sistema, si possono definire le quantità dinamiche che svolgono un ruolo principale nelle equazioni che governano la dinamica dei corpi. Queste quantità sono:

- quantità di moto,  $\mathbf{Q}$
- momento della quantità di moto rispetto al polo  $H$ ,  $\mathbf{\Gamma}_H$
- energia cinetica,  $K$

La loro espressione per un corpo puntiforme è:

- quantità di moto,  $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$
- momento della quantità di moto,  $\mathbf{\Gamma}_H = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_H) \times m\mathbf{v}$
- energia cinetica,  $K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$

Per definizione (si veda come vengono ricavate le equazioni del moto), queste quantità dinamiche sono **additive**. Le quantità dinamiche per corpi estesi possono quindi essere ricavate come la somma (grazie all'integrazione, per corpi continui) delle quantità dinamiche elementari delle loro singole parti

**Azioni: forze e momenti.** Le forze e i momenti sono il modello delle azioni agenti sui sistemi e delle interazioni tra di essi.

**Statica.** La statica è caso particolare della dinamica, e si occupa dell'equilibrio dei corpi. Le leggi della statica descrivono le condizioni di equilibrio di un sistema, e si ottengono come caso particolare delle equazioni della dinamica annullando tutte le derivate temporali

- corpo puntiforme:

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}^{ext} \quad (\text{equilibrio delle forze}) \quad (3.1)$$

- corpo esteso:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{R}^{ext} && \text{(equilibrio delle forze)} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{M}_H^{ext} && \text{(equilibrio dei momenti)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Dinamica – Formulazione di Newton.** La dinamica si occupa della descrizione del moto dei corpi e delle sue cause, legando la cinematica e le quantità dinamiche di un sistema alle azioni agenti su di esso: in generale, le azioni agenti su un sistema causano una variazione delle quantità dinamiche.

La dinamica classica può essere formulata a partire dai tre **principi della dinamica** di Newton:

1. principio di inerzia, che riassume la **relatività di Galileo**: rispetto a un sistema di *riferimento inerziale*, un sistema sul quale non agiscono forze esterne mantiene il suo stato di moto
2. secondo principio della dinamica: la variazione della quantità di moto di un sistema è uguale all'impulso delle forze esterne agenti sul sistema

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{I}^{ext}, \quad (3.3)$$

o per una variazione in un intervallo di tempo infinitesimo, la derivata nel tempo della quantità di moto è uguale alla risultante delle forze esterne,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext}, \quad (3.4)$$

3. principio di **azione e reazione**: nell'interazione tra due sistemi  $i, j$ , la forza  $\mathbf{F}_{ij}$  agente sul sistema  $i$  dovuta al sistema  $j$  è *uguale e contraria* alla forza agente  $\mathbf{F}_{ji}$  sul sistema  $j$  dovuta al sistema  $i$ ,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \quad (3.5)$$

dai quali si possono ricavare le **equazioni cardinali del moto**, che assumono la stessa forma generale per ogni tipo di sistema meccanico

1. l'equazione della quantità di moto coincide con il secondo principio della dinamica

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext} \quad (3.6)$$

2. l'equazione del momento della quantità di moto mette in relazione, a meno di un termine dipendente dall'eventuale moto del polo  $H$ , la derivata temporale del momento della quantità di moto con la risultante dei momenti esterni agenti sul sistema

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_H = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext} \quad (3.7)$$

3. il teorema dell'energia cinetica, mette in relazione la derivata temporale dell'energia cinetica con la potenza totale delle forze agenti sul sistema

$$\dot{K} = P^{tot} \quad (3.8)$$

## Strumenti matematici

## 4. Cinematica

La cinematica studia il moto dei corpi senza preoccuparsi delle cause del moto ...

**Definizione 4.1 — Cinematica.** La cinematica è quel ramo della meccanica che si occupa di descrivere il moto dei corpi, indipendentemente dalle cause del moto.

Il moto dei corpi viene descritto usando i concetti di **tempo** e **spazio**.

### 4.1 Cinematica del punto materiale

**Definizione 4.2 — Posizione.** Una volta definito un sistema di riferimento, si può definire la posizione di un punto  $P$  con il raggio vettore  $\mathbf{r}_P$  che unisce l'origine del sistema di riferimento con la posizione del punto  $P$ .

**Definizione 4.3 — Velocità.** La velocità di un punto  $P$  rispetto a un sistema di riferimento viene definita come la derivata nel tempo del raggio vettore  $\mathbf{r}_P$ ,

$$\mathbf{v}_P = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_P =: \dot{\mathbf{r}}_P . \quad (4.1)$$

**Definizione 4.4 — Accelerazione.** L'accelerazione di un punto  $P$  rispetto a un sistema di riferimento viene definita come la derivata nel tempo della velocità  $\mathbf{v}_P$  del punto, equivalente alla derivata seconda della posizione

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \ddot{\mathbf{r}}_P . \quad (4.2)$$

### 4.2 Cinematica di un sistema esteso rigido

**Definizione 4.5 — Vincolo di moto rigido.** Un corpo viene definito rigido se la distanza di ogni coppia di suoi punti rimane costante nel moto,

$$d_{PQ} := |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q(t)| = \text{cost} . \quad (4.3)$$

Questa definizione, implica che rimangano costanti le distanze e gli angoli tra punti materiali di un corpo che compie un atto di moto rigido.

$$(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) \perp (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|^2 = \\
&= \frac{d}{dt} [(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)] = \\
&= 2 \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) = 2 (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

**Definizione 4.6 — Velocità angolare di un corpo rigido.** Si può dimostrare che esiste un vettore  $\boldsymbol{\omega}$ , definito **velocità angolare**, tale che vale la relazione

$$(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) , \tag{4.6}$$

tra la differenze di velocità e di posizione tra ogni coppia di punti  $P, Q$  del corpo rigido.

#### 4.2.1 Cinematica nel piano

#### 4.2.2 Cinematica nello spazio – cenni

### 4.3 Cinematica di un sistema esteso deformabile – cenni

#### 4.4 Vincoli

## 5. Proprietà inerziali e quantità dinamiche

La massa può essere definita come la quantità di materia ...

### 5.1 Proprietà inerziali

■ **Definizione 5.1 — Massa.** La massa viene definita come la quantità di materia.

Per la definizione operativa della massa in dinamica si rimanda al capitolo (8).

#### 5.1.1 Centro di massa

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i . \quad (5.1)$$

#### 5.1.2 Momento statico

#### 5.1.3 Momento di inerzia

### 5.2 Quantità dinamiche

In questa sezione vengono definite alcune quantità dinamiche che risulteranno utili nello studio della dinamica dei corpi nel capitolo 8. In particolare, vengono definiti:

- la quantità di moto
- il momento della quantità di moto
- l'energia cinetica

per i sistemi meccanici modellabili come punto materiale, insieme di punti materiali, e corpi rigidi. Queste quantità sono **grandezze additive**.

#### 5.2.1 Punto materiale

##### 5.2.1.1 Quantità di moto

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v} \quad (5.2)$$

##### 5.2.1.2 Momento della quantità di moto

$$\boldsymbol{\Gamma}_H = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{Q} \quad (5.3)$$

##### 5.2.1.3 Energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 \quad (5.4)$$

## 5.2.2 Sistema di punti materiali

### 5.2.2.1 Quantità di moto

$$\mathbf{Q} = \sum_i \mathbf{Q}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad (5.5)$$

### 5.2.2.2 Momento della quantità di moto

$$\mathbf{\Gamma}_H = \sum_i \mathbf{\Gamma}_{H,i} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{Q}_i \quad (5.6)$$

### 5.2.2.3 Energia cinetica

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2 \quad (5.7)$$

### 5.2.2.4 Corpi rigidi

### 5.2.2.5 Momento della quantità di moto

### 5.2.2.6 Energia cinetica

## 5.2.3 Sistema di punti materiali

## 6. Azioni

**Definizione 6.1 — Forza.** Una forza è un'entità fisica vettoriale che è in grado di cambiare lo stato del moto di un sistema.

### 6.1 Esempi di forza

#### 6.1.1 Forza peso in prossimità della superficie terrestre

In prossimità della superficie terrestre, su un corpo di massa  $m$  agisce la sua forza peso,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} , \quad (6.1)$$

dove  $\mathbf{g}$  rappresenta il campo gravitazionale nei pressi della superficie terrestre ed è diretto verso il centro (di massa?) della Terra. La sua intensità nei pressi della superficie terrestre è circa  $9.8 \frac{m}{s^2}$ .

In una regione sufficientemente limitata dello spazio nella quale si può approssimare la superficie terrestre come piatta e piana, il campo di gravità e il peso dei corpi hanno quindi direzione verticale verso il basso.

#### 6.1.2 Legge di gravitazione universale di Newton

Secondo la legge di gravitazione universale di Newton, due corpi di massa  $m_1$ ,  $m_2$  si attraggono con una forza di intensità proporzionale al prodotto delle masse, inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i centri di massa dei due corpi e con una direzione lungo la congiungente tra i due centri di massa.

La forza agente sul corpo di massa  $m_2$ , dovuta all'attrazione gravitazionale del corpo di massa  $m_1$ , è quindi

$$\mathbf{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} , \quad (6.2)$$

essendo  $G$  la **costante di gravitazione universale**,

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \ s^2} , \quad (6.3)$$

il vettore  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  il vettore che congiunge il corpo 1 con il corpo 2,  $\hat{\mathbf{r}}_{21}$  il versore in quella direzione. La formula può quindi essere riscritta con espressioni equivalenti

$$\mathbf{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} = G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} . \quad (6.4)$$

■ **Esempio 6.1 — Attrazione gravitazionale terrestre nei pressi della superficie terrestre.**  
Prendendo il raggio e la massa della Terra,

$$R_T = 6.378 \cdot 10^6 \text{ m} \quad , \quad m_T = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad (6.5)$$

possiamo calcolare l'intensità della forza che percepisce un corpo di massa  $m$  nei pressi della superficie terrestre come

$$F = \frac{G m_T}{R_T^2} m = \frac{6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6.378 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = m \cdot 9.797 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} . \quad (6.6)$$

Abbiamo ritrovato il valore della forza per unità di massa uguale al valore dell'intensità del campo gravitazionale nei pressi della superficie terrestre. ■

■ **Esempio 6.2 — Attrazione gravitazionale terrestre sulla ISS.** ■

### 6.1.3 Molla lineare e forza elastica

Una molla ideale lineare senza massa ha una **legge costitutiva elastica** che rappresenta un legame proporzionale tra la forza impressa agli estremi della molla e l'allungamento della molla stessa,

$$F = k \Delta x , \quad (6.7)$$

essendo  $k$  la costante elastica della molla, che ha le dimensioni fisiche  $\frac{N}{m} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ , e il cui valore dipende dalla struttura della molla. . Le forze applicate ai due estremi sono di intensità uguale e verso contrario, e hanno la direzione dell'asse della molla. In forma vettoriale, assunto una lunghezza a riposo nulla, e indicando con  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  le posizioni degli estremi della molla, le forze agenti sugli estremi si possono scrivere come

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = k (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) , \quad (6.8)$$

essendo la forza  $\mathbf{F}_{12}$  la forza agente sul punto 1 a causa della molla che la collega al punto 2.

### 6.1.4 Smorzatore lineare e forza viscosa

Uno smorzatore ideale lineare senza massa ha una **legge costitutiva viscosa** che rappresenta un legame proporzionale tra la forza impressa agli estremi dello smorzatore e la velocità di allungamento dello smorzatore,

$$F = c \Delta v = c \Delta \dot{x} , \quad (6.9)$$

essendo  $c$  la costante viscosa (di smorzamento) dello smorzatore, che ha le dimensioni fisiche  $\frac{N}{\frac{m}{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ , e il cui valore dipende dalla struttura dello smorzatore. . Le forze applicate ai due estremi sono di intensità uguale e verso contrario, e hanno la direzione dell'asse dello smorzatore. In forma vettoriale, indicando con  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  le posizioni degli estremi della molla, le forze agenti sugli estremi si possono scrivere come

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = c (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = c (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) , \quad (6.10)$$

essendo la forza  $\mathbf{F}_{12}$  la forza agente sul punto 1 a causa dello smorzatore che lo collega al punto 2.

### 6.1.5 Reazioni vincolari

Fare riferimento alla sezione 4.4 e rimandare a una sezione del capitolo della dinamica dove verrà spiegato il calcolo delle reazioni vincolari



### 6.1.6 Forza di attrito

#### 6.1.6.1 Attrito statico

La forza di attrito statico agisce tra due corpi tra i quali non c'è moto relativo, in direzione tangenziale alla superficie del vincolo. Il suo valore è determinato dalla condizione di equilibrio

$$\mathbf{F}_\mu^s = F_\mu^s \hat{\mathbf{t}}, \quad \text{con } |\mathbf{F}_\mu^s| \leq \mu_s N, \quad (6.11)$$

essendo  $\mu_s$  il coefficiente di attrito statico, tipico delle superfici (e del loro stato: materiale, rugosità e finiture superficiali, lubrificazione, superficie sporche, ...) e  $N$  il modulo della reazione normale.

#### 6.1.6.2 Attrito dinamico

La forza di attrito dinamico agisce tra due corpi a contatto in moto relativo con velocità  $\mathbf{v}^{rel}$ ,  $|\mathbf{v}^{rel}| \neq 0$ , in direzione tangenziale alla superficie di contatto. Il modello di attrito di Coulomb prevede l'espressione

$$\mathbf{F}_\mu^d = -\mu_d N \frac{\mathbf{v}^{rel}}{|\mathbf{v}^{rel}|} \quad (6.12)$$

essendo  $\mu_d$  il coefficiente di attrito dinamico, tipico delle superfici (e del loro stato: materiale, rugosità e finiture superficiali, lubrificazione, superficie sporche, ...) e  $N$  il modulo della reazione normale.

#### 6.1.6.3 Attrito volvente

- Modello dell'azione che fa rallentare il moto di una corpo circolare in rotolamento puro su una superficie piana. Perché no, non è l'attrito statico
- Rimandare a esercizio su rotolamento puro di un disco, con e senza attrito volvente

## 6.2 Momento di una forza

**Definizione 6.2 — Momento di una forza.** Il momento di una forza rispetto a un polo  $H$ ,  $\mathbf{M}_H$ , viene definito come il prodotto vettoriale tra il raggio  $\Delta \mathbf{r}_{HP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_H$  tra il polo e il punto di applicazione e la forza  $\mathbf{F}$ ,

$$\mathbf{M}_H = \Delta \mathbf{r}_{HP} \times \mathbf{F}. \quad (6.13)$$

## 6.3 Impulso di una forza

**Definizione 6.3 — Impulso elementare di una forza.** L'impulso elementare  $\delta \mathbf{I}$  di una forza  $\mathbf{F}$  viene definito come il prodotto della forza e l'intervallo elementare di tempo  $dt$  per il quale agisce la forza,

$$\delta \mathbf{I} = \mathbf{F} dt. \quad (6.14)$$

**Definizione 6.4 — Impulso di una forza.** Viene definito come la somma di tutti gli impulsi elementari tra due istanti desiderati,  $t \in [t_0, t_1]$ , e al limite si riduce all'integrale di Riemann

$$\mathbf{I} = \int_{t=t_0}^{t_1} \delta \mathbf{I} = \int_{t=t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt. \quad (6.15)$$

## 6.4 Lavoro di una forza

**Definizione 6.5 — Lavoro elementare di una forza.** Il lavoro elementare  $\delta L$  di una forza  $\mathbf{F}$  è il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento elementare  $d\mathbf{r}$ ,

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (6.16)$$

Il lavoro di una forza è la somma dei lavori elementari. Se si suddivide la storia degli spostamenti in una somma di spostamenti incrementali,

$$\Delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{r}_i , \quad (6.17)$$

e si considera la forza applicata costante (in intensità e direzione) a tratti su ogni spostamento incrementale  $\Delta \mathbf{r}_i$ , il lavoro della forza viene definito come la somma dei lavori incrementali,  $\Delta L_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$

$$L = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i . \quad (6.18)$$

**Definizione 6.6 — Lavoro di una forza.** Se si fa tendere a zero la lunghezza degli spostamenti incrementali, il lavoro di una forza viene definito come l'integrale (di linea) di Riemann

$$L = \int_{\gamma(\mathbf{r})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma(\mathbf{r})} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} , \quad (6.19)$$

avendo indicato con  $\gamma(\mathbf{r})$  la curva nello spazio percorsa dal corpo, sulla quale avvengono gli spostamenti elementari.

## 6.5 Campo di forze

**Definizione 6.7 — Campo di forze - definizione operativa.**

### 6.5.1 Campi di forze centrali

**Definizione 6.8 — Campo di forza centrale.** Un campo di forza centrale è un campo di forze che ha direzione radiale rispetto a un punto, il centro.

Ponendo l'origine del sistema di riferimento nel centro, è possibile scrivere l'espressione di un campo centrale come

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \hat{\mathbf{r}} . \quad (6.20)$$

■ **Esempio 6.3 — Legge di gravitazione universale.** La forza gravitazionale agente su un corpo puntiforme di massa  $m$  con posizione  $\mathbf{r}$  dovuta a un corpo di massa  $M$  in corrispondenza del quale viene posto l'origine delle coordinate, ha l'espressione

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{m M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} . \quad (6.21)$$

■

■ **Esempio 6.4 — Forza elastica da una molla lineare.** La forza elastica agente sul punto  $\mathbf{r}$  collegato all'origine con una molla lineare di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla, ha l'espressione

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k \mathbf{r} \quad (6.22)$$

## 6.5.2 Campi di forze conservativi

**Definizione 6.9 — Campo di forza conservativo.** Un campo di forza è conservativo in una regione dello spazio  $\Omega$  se l'integrale del lavoro lungo un percorso  $\gamma$  qualsiasi in quella regione non dipende dal percorso ma solo dai suoi estremi.

In questo caso, se il percorso  $\gamma$  va dal punto  $\mathbf{r}_A$  al punto  $\mathbf{r}_B$ , si può scrivere

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} =: L_{A \rightarrow B} \quad (6.23)$$

**Definizione 6.10 — Energia potenziale.** Per un campo di forze conservative è possibile definire una funzione scalare dello spazio,  $V(\mathbf{r})$ , chiamata **energia potenziale**, che permette di calcolare il lavoro del campo di forze conservative come

$$L_{A \rightarrow B} = -\Delta V_{A \rightarrow B} = -[V(\mathbf{r}_B) - V(\mathbf{r}_A)] \quad (6.24)$$

EXTRA?

- dall'indipendenza del lavoro dal percorso, è possibile scrivere il campo di forze come (meno) il gradiente della funzione energia potenziale,  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

$$\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = L = -[V(\mathbf{r}_B) - V(\mathbf{r}_A)] = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} dV = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \nabla V \cdot d\mathbf{r} \quad (6.25)$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) . \quad (6.26)$$

- poiché si può scrivere il campo di forze come un gradiente, per le identità vettoriali ( $\nabla \times \nabla f \equiv 0, \forall f(\mathbf{r})$ ), si può dire che i campi di forze conservativi sono irrotazionali,  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ .

■ **Esempio 6.5 — Energia potenziale di campi uniformi.**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad V(\mathbf{r}) = -\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + V_0 \quad (6.27)$$

■ **Esempio 6.6 — Energia potenziale di campi centrali.**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \quad (6.28)$$

Se il campo di forze ha simmetria radiale, il campo di forze e l'energia potenziale dipende solo dalla distanza dall'origine  $r$ , e vale

$$v'(r) = -F(r) \quad \rightarrow \quad V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r F(t) dt , \quad (6.29)$$

dove  $r_0, V(r_0)$  si usano per fissare il valore della funzione potenziale; **la funzione potenziale è definita a meno di costanti additive** ■

■ **Esempio 6.7 — Energia potenziale del campo gravitazionale uniforme.** Definendo la direzione verticale con il versore  $\hat{\mathbf{z}}$  diretto verso l'alto, la forza peso su un corpo di massa  $m$  vale  $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{z}}$ , e quindi l'energia potenziale gravitazionale in prossimità della superficie terrestre vale

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = mg\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = mg(z - z_0) . \quad (6.30)$$

■ **Esempio 6.8 — Energia potenziale del campo gravitazionale centrale.** Per la legge di gravitazione universale,  $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ , l'energia potenziale vale

$$V(r) - V(r_0) = GMm \int_{r_0}^r t^{-2} dt = GMm \left[ -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right] . \quad (6.31)$$

Si è soliti definire la costante additiva arbitraria nell'energia potenziale gravitazionale con la condizione  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ , e quindi

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} . \quad (6.32)$$

■

■ **Esempio 6.9 — Energia potenziale del campo elastico centrale.** Per la forza elastica dovuta a una molla lineare con lunghezza a riposo nulla,  $F(r) = -kr$ , l'energia potenziale vale

$$V(r) - V(r_0) = k \int_{r_0}^r t dt = \frac{1}{2}k (r^2 - r_0^2) . \quad (6.33)$$

Si è soliti definire la costante additiva arbitraria nell'energia elastica con la condizione  $V(0) = 0$ , e quindi

$$V(r) = \frac{1}{2} k r^2 . \quad (6.34)$$

■

## 7. Statica

### 7.1 Condizioni di equilibrio

**Definizione 7.1** — Condizioni di equilibrio per un punto materiale.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

**Definizione 7.2** — Condizioni di equilibrio per un corpo esteso.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i &= \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{H,i} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.2)$$

### 7.2 Esempi



## 8. Dinamica

La dinamica studia il moto dei corpi e le sue cause ...

### 8.1 Principi della dinamica di Newton

1. principio di inerzia
2. secondo principio della dinamica
3. principio di azione e reazione

#### 8.1.1 Primo principio della dinamica

Un corpo imperturbato, sul quale agisce un sistema di forza dalla risultante nulla, rimane nello stato di quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di **referimento inerziale**.

Cosa intendiamo per sistema di riferimento inerziale?

#### 8.1.2 Secondo principio della dinamica

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{I}^{ext} , \quad (8.1)$$

o in forma differenziale

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q} = \mathbf{R}^{ext} \quad (8.2)$$

#### 8.1.3 Terzo principio della dinamica

### 8.2 Equazioni cardinali della dinamica

Dai principi della dinamica è possibile ricavare tre equazioni cardinali della dinamica, valide per ogni sistema meccanico.

**Prima equazione cardinale – quantità di moto**

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext} \quad (8.3)$$

**Seconda equazione cardinale – momento della quantità di moto**

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_H = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext} \quad (8.4)$$

**Terza equazione cardinale – energia cinetica**

$$\dot{K} = P^{tot} \quad (8.5)$$

Nelle sezioni successive, queste equazioni vengono ricavate dai principi della dinamica per i diversi modelli dei sistemi meccanici.

**8.2.1 Moto di un punto materiale****Prima equazione cardinale – quantità di moto**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{ext} \quad (8.6)$$

**Seconda equazione cardinale – momento della quantità di moto**

$$\mathbf{M}_H = \mathbf{r} \times \mathbf{Q} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{\Gamma}_H &= \frac{d}{dt}((\mathbf{r} - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{Q}) = \\ &= \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q} - \dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{Q}} = \\ &= \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}}}_{=0} - \dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{r} \times \mathbf{R}^{ext} = -\dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext} . \end{aligned} \quad (8.8)$$

**Terza equazione cardinale – energia cinetica**

$$K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} . \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}K &= \underbrace{m\dot{\mathbf{v}}}_{=\dot{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{v} = \\ &= \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{R}^{ext} \cdot \mathbf{v} = P^{ext} = P^{tot} \end{aligned} \quad (8.10)$$

**8.2.2 Moto di un sistema di punti materiali**

**Prima equazione cardinale** L'equazione cardinale per il punto  $i$ -esimo,

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{R}_i^{ext,i} = \\ &= \mathbf{R}_i^{ext} + \mathbf{R}_i^{int} = \\ &= \mathbf{R}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Sommando le equazioni di tutti i punti, si ottiene

$$\underbrace{\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i}_{m\ddot{\mathbf{r}}_G = \dot{\mathbf{Q}}} = \underbrace{\sum_i \mathbf{R}_i^{ext}}_{\mathbf{R}^{ext}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}}_{=0} \quad (8.12)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext} \quad (8.13)$$



**Seconda equazione cardinale**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_H) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) &= (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{R}_i^{ext,i} \\
(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_H) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_H) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_H) \times \left( \mathbf{R}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \\
\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_H) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= \dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext}
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Per sistemi rigidi, per i quali vale  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_H &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_H) \times m_i \mathbf{v}_i = \\
&= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_G - \mathbf{r}_H) \times m_i [\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)] = \\
&= \underbrace{\sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \mathbf{v}_G}_{m\mathbf{r}_G - m\mathbf{r}_G = \mathbf{0}} + \underbrace{\sum_i m_i (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{v}_G}_{=m} + \\
&\quad + (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_0) \times \left( \boldsymbol{\Omega} \times \underbrace{\sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)}_{m\mathbf{r}_G - m\mathbf{r}_G = \mathbf{0}} \right) - \underbrace{\sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}]}_{=\mathbb{I}_G}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_H = (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{Q} + \mathbb{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \tag{8.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} ((\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{Q}) &= (\mathbf{v}_G - \dot{\mathbf{r}}_H) \times \mathbf{Q} + (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_H) \times \dot{\mathbf{Q}} = \\
&= -\dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q} + (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_H) \times \dot{\mathbf{Q}}
\end{aligned} \tag{8.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbb{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) &= \frac{d}{dt} \left( - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] \right) = \\
&= - \sum_i m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] + \\
&\quad - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] + \\
&\quad - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}] = \\
&= - \sum_i m_i \underbrace{[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}]}_{=0} + \\
&\quad - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] + \\
&\quad + \mathbb{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} \\
&= + \sum_i m_i \boldsymbol{\Omega} \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \underbrace{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G)}_{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)}] + \\
&\quad + \sum_i m_i \underbrace{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)]}_{=0} + \\
&\quad + \mathbb{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} \\
&= \boldsymbol{\Omega} \times \left( - \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] \right) + \mathbb{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \\
&= \mathbb{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbb{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})
\end{aligned} \tag{8.18}$$

### Terza equazione cardinale

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_i \cdot m_i \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{R}_i^{ext,i} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2 \right) &= \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{R}_i^{ext} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{R}_i^{int} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{R}_i^{ext} + \mathbf{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \\
\frac{d}{dt} K_i &= P_i^{ext} + P_i^{int}
\end{aligned} \tag{8.19}$$

e sommando su tutti i punti,

$$\frac{d}{dt} K = P^{ext} + P^{int} \tag{8.20}$$

dove la potenza delle forze interne in generale non è nulla

$$P^{int} = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\{i,j\}} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{F}_{ij} . \tag{8.21}$$

Nel caso di corpo rigido, si ottiene ...

### 8.2.3 Moto di un corpo rigido

Prima equazione cardinale

Seconda equazione cardinale

Terza equazione cardinale

## 9. Moti notevoli ed esempi

In questo capitolo vengono indagati alcuni moti notevoli, esplicitando le espressioni della quantità di moto, del momento angolare, le azioni esterne, e le condizioni iniziali proprie di ogni moto. Ogni moto verrà indagato dopo aver introdotto il **sistema di coordinate** più adeguato allo studio del sistema.

### 9.1 Moti di punti materiali

#### 9.1.1 Moto rettilineo uniforme

Se la risultante delle forze esterne è nulla, la derivata nel tempo della quantità di moto è nulla. Il secondo principio della dinamica si riduce a

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Introducendo un sistema di coordinate cartesiane  $Oxy$ , si può scrivere

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x,0} \\ \dot{y}(0) = v_{y,0} \end{cases} \quad (9.2)$$

Legge del moto

$$\begin{cases} x(t) = v_{x,0}t + x_0 \\ y(t) = v_{y,0}t + y_0 \end{cases} \quad (9.3)$$

#### 9.1.2 Moto di un proiettile in prossimità della superficie terrestre

Introducendo un sistema di coordinate cartesiane  $Oxy$ , con l'asse  $x$  diretto in direzione orizzontale, l'asse  $y$  in direzione verticale verso l'alto, si può scrivere

- la posizione del punto come  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$
- il campo di gravità come  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} \quad \begin{cases} \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (9.4)$$

Utilizzando questo sistema di coordinate, si possono scrivere le coordinate dell'equazione della quantità di moto e delle condizioni iniziali,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x,0} \\ \dot{y}(0) = v_{y,0} \end{cases} \quad (9.5)$$

Legge del moto

$$\begin{cases} x(t) = v_{x,0}t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y,0}t + y_0 \end{cases} \quad (9.6)$$

### 9.1.3 Moto sul piano inclinato

■ **Esempio 9.1 — Statica sul piano inclinato.** Disegno e diagramma delle forze

$$\begin{cases} 0 = mg \sin \alpha - \mu_s N \\ 0 = -mg \cos \alpha + N \end{cases} \rightarrow N = mg \cos \alpha \quad (9.7)$$

La condizione di equilibrio può esistere solo se  $\mu_{s,max} \geq \mu_s = \tan \alpha$  ■

■ **Esempio 9.2 — Moto sul piano inclinato scabro.** Disegno e diagramma delle forze

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext} \quad (9.8)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu_d N \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \\ 0 = m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + N \end{cases} \rightarrow N = mg \cos \alpha \quad (9.9)$$

$$m\ddot{x} = mg \left( \sin \alpha - \mu_d \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \cos \alpha \right) \quad (9.10)$$

■ **Esempio 9.3 — Moto sul piano inclinato con carrucola.** Disegno e diagramma delle forze

■

■ **Esempio 9.4 — Moto sul piano inclinato libero di muoversi.** Disegno e diagramma delle forze ■

### 9.1.4 Sistema massa-molla-smorzatore

Usando il secondo principio della dinamica

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= F(t) \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (9.11)$$

### 9.1.5 Moto circolare

### 9.1.6 Moto del pendolo

Usando la seconda equazione cardinale della dinamica

$$mL^2\ddot{\theta}(t) = -mgL \sin \theta(t) . \quad (9.12)$$

### 9.1.7 Moti impulsivi

#### 9.1.7.1 Collisioni tra punti materiali

#### 9.1.7.2 Collisioni tra punti materiali e superfici fisse

## 9.2 Moto di corpi estesi

### 9.2.1 Rotolamento di un disco

■ **Esempio 9.5 — Rotolamento puro su superficie orizzontale, in assenza di attrito volvente.** *Disegno e diagramma delle forze*

**Gradi di libertà e di vincolo.** Studiando un corpo esteso nel piano, il problema ha al massimo 3 gradi di libertà. I vincoli in questo problema introducono 2 gradi di vincolo: la superficie orizzontale impone che il punto inferiore del disco sia sempre a contatto con la superficie, mentre l'ipotesi di puro rotolamento puro (senza strisciamento) impone che non ci sia velocità relativa tra il punto di contatto e la superficie.

**Vincoli cinematici.**

$$x_G(t) = R\theta(t) \quad (9.13)$$

**Equazioni del moto – approccio con equazione cardinale del momento angolare.**

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_H = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext} \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_H &= I_H \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}} = (I_G + mR^2) \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{x}_H &= R\theta \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{Q} &= m\mathbf{v}_G = mR\dot{\theta} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{M}_H^{ext} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$\begin{cases} I_H \ddot{\theta} = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \Omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \dot{\theta}(t) = \Omega \\ \theta(t) = \Omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_G(t) = 0 \\ \dot{x}_G(t) = R\Omega \\ x_G(t) = R\Omega t \end{cases} \quad (9.16)$$

■

■ **Esempio 9.6 — Rotolamento puro su superficie orizzontale, con attrito volvente.** *Disegno e diagramma delle forze*

■

■ **Esempio 9.7 — Rotolamento puro su superficie inclinata.** *Disegno e diagramma delle forze*

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_H = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext} \quad (9.17)$$

$$\mathbf{M}_H^{ext} = (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_H) \times m\mathbf{g} = R\hat{\mathbf{y}} \times (-mg \sin(\alpha)\hat{\mathbf{x}} - mg \cos(\alpha)\hat{\mathbf{y}}) = mgR \sin(\alpha) \hat{\mathbf{z}} \quad (9.18)$$

$$\begin{cases} I_H \ddot{\theta} = mgR \sin \alpha \\ \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \Omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \frac{mgR}{I_H} \sin(\alpha) \\ \dot{\theta}(t) = \frac{mgR}{I_H} \sin(\alpha) t + \Omega \\ \theta(t) = \frac{1}{2} \frac{mgR}{I_H} \sin(\alpha) t^2 + \Omega t \end{cases} \quad (9.19)$$

■

■ **Esempio 9.8 — Attrito statico e attrito dinamico in frenata – ossia, perché non bloccare le ruote quando si frena.**

■

### 9.3 Moto dei corpi celesti

Per ragioni di importanza storica, e per la rilevanza che ha avuto la *dinamica celeste* negli sviluppi della dinamica, viene riservata un'intera sezione al moto dei corpi celesti.

#### 9.3.1 Problema dei due corpi

La forza agente su un pianeta di massa  $m$  è

$$\mathbf{F} = -\frac{G M m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9.20)$$

e quindi l'equazione del moto del pianeta è

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G M m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \rightarrow \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (9.21)$$

L'orbita descritta dal pianeta è un'orbita piana. È possibile dimostrare questa affermazione, dimostrando che il vettore  $\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  è costante.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{n} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \\ &= \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{=0} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \\ &= -\mu \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9.22)$$

È quindi possibile usare un sistema di coordinate polari. Usando le coordinate polari,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \hat{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (9.23)$$

si può scrivere l'equazione del moto in componenti

$$\begin{aligned} r : \quad \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} &= 0 \\ \theta : \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (9.24)$$

La seconda, moltiplicata per  $r$ , si può scrivere

$$0 = r (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) , \quad (9.25)$$

che equivale alla costanza del momento angolare

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{n}} . \quad (9.26)$$

**Traiettoria,  $r(\theta)$ .** Si definisce  $z := \frac{1}{r}$ , e calcolando le derivate di  $r$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = -z^{-2} z'(\theta) \dot{\theta} = -\ell z'(\theta) \quad (9.27)$$

poiché

$$\dot{\theta} = \ell r^{-2} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = -2\ell r^{-3} \dot{r} . \quad (9.28)$$

Derivando un'altra volta

$$\ddot{r} = -\ell z''(\theta)\dot{\theta} = -\ell^2 z(\theta) z''(\theta) . \quad (9.29)$$

Sostituendo nella componente radiale dell'equazione di moto

$$-\ell^2 z^2(\theta) z''(\theta) - \ell^2 z^3(\theta) + \mu z^2(\theta) = 0 , \quad (9.30)$$

e dividendo per  $z^2(\theta)$

$$z''(\theta) + z(\theta) = \frac{\mu}{\ell^2} , \quad (9.31)$$

la cui soluzione è

$$\frac{1}{r(\theta)} = z(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{\ell^2} . \quad (9.32)$$

$$r(\theta) = \frac{1}{A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{\ell^2}} \quad (9.33)$$

Allineando l'asse dal quale si misurano gli angoli con la direzione individuata da fuoco e perielio,

$$r'(\theta) = -\frac{-A \sin \theta + B \cos \theta}{\left(A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{\ell^2}\right)^2} \quad (9.34)$$

$$0 = r'(\theta = \pi) = \frac{B}{\left(A + \frac{\mu}{\ell^2}\right)^2} \quad \rightarrow \quad B = 0 \quad (9.35)$$

E quindi si può riscrivere l'equazione della traiettoria come

$$\begin{aligned} r(\theta) \left( A \cos \theta + \frac{\mu}{\ell^2} \right) &= 1 \\ r(\theta) \left( 1 - \frac{A \ell^2}{\mu} \cos \theta \right) &= \frac{\ell^2}{\mu} \end{aligned} \quad (9.36)$$

Confrontando questa espressione con l'espressione generale in coordinate polari di un'ellisse,  $r(1 - e \cos \theta) = a\sqrt{1 - e^2}$

$$a - c = r_{\min} = r(\theta = \pi) = \frac{1}{-A + \frac{\mu}{\ell^2}} = a - c = a(1 - e) \quad (9.37)$$

Per un ellisse, si trova l'afelio per  $\theta = 0$

$$a + c = r_{\max} = r(\theta = 0) = \frac{1}{A + \frac{\mu}{\ell^2}} , \quad (9.38)$$

Così che si può trovare la lunghezza dell'asse maggiore  $2a$  in relazione delle costanti  $\mu$ ,  $\ell$

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{1}{\frac{\mu}{\ell^2} - A} + \frac{1}{\frac{\mu}{\ell^2} + A} = \frac{2 \frac{\mu}{\ell^2}}{\left(\frac{\mu}{\ell^2}\right)^2 - A^2} = \frac{2 \frac{\ell^2}{\mu}}{1 - A^2 \left(\frac{\ell^2}{\mu}\right)^2} \quad (9.39)$$

$$1 - A^2 \left(\frac{\ell^2}{\mu}\right)^2 = \frac{\ell^2}{\mu a} \quad (9.40)$$

$$A = \mp \frac{\mu}{\ell^2} \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{\mu a}} \quad (9.41)$$

$$e = \frac{-A\ell^2}{\mu} = \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{\mu a}} \quad (9.42)$$

$$a(1 - e^2) = a \frac{\ell^2}{\mu a} = \frac{\ell^2}{\mu} , \quad (9.43)$$

cosicch 

$$\ell = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (9.44)$$

### 9.3.1.1 Leggi di Keplero

**Theorem 9.1 — Prima legge di Keplero.** L'orbita di un pianeta   un'ellisse e il Sole si trova in uno dei due fuochi.

**Theorem 9.2 — Seconda legge di Keplero.** La velocit  areolare di un pianeta   costante lungo la sua orbita.

L'area elementare  $dA$  descritta da uno spostamento  $d\mathbf{r}$  vale

$$dA\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} . \quad (9.45)$$

La velocit  areolare   quindi

$$\dot{A}\hat{\mathbf{n}} = \frac{dA}{dt}\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} . \quad (9.46)$$

Questo vettore   esattamente il vettore  $\mathbf{n}$  che   stato dimostrato essere costante in precedenza.

**Theorem 9.3 — Terza legge di Keplero.** I quadrati dei periodi di due orbite sono proporzionali al cubo dei loro assi maggiori.

$$T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}\ell} = \frac{2\pi a\sqrt{a^2 - c^2}}{\ell} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1 - e^2}}{\ell} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{\mu a}\sqrt{1 - e^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} \quad (9.47)$$

### 9.3.2 Problema dei tre corpi – cenni



# Meccanica del continuo – cenni



<b>10</b>	<b>Equazioni di bilancio</b>	<b>51</b>
10.1	Bilanci per un mezzo continuo	51
10.2	Bilanci per un solido	52
10.3	Bilanci per un fluido newtoniano	52
<b>11</b>	<b>Appendice – Derivate su domini mobili</b>	<b>55</b>



## 10. Equazioni di bilancio

### 10.1 Bilanci per un mezzo continuo

#### 10.1.1 Bilanci in forma integrale

##### 10.1.1.1 Bilanci integrali per un volume materiale

I bilanci in forma integrale per un volume materiale rappresentano nient'altro che i principi della meccanica classica:

- bilancio di massa: conservazione della massa
- bilancio della quantità di moto: secondo principio della dinamica
- bilancio dell'energia totale: primo principio della termodinamica

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{u} &= \int_{V_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial V_t} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho e^t &= \int_{V_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial V_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial V_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}\tag{10.1}$$

##### 10.1.1.2 Bilanci per un volume in moto arbitrario

Usando le regole per la derivata nel tempo di integrali su volumi mobili [REF](#)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e^t + \oint_{\partial v_t} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{v_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}\tag{10.2}$$

### 10.1.1.3 Bilanci per un volume di controllo fisso

Le equazioni per un volume di controllo fisso si ottengono immediatamente da quelle di un volume in moto arbitrario, ponendo la velocità del contorno  $\mathbf{u}_b = \mathbf{0}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_V \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho e^t + \oint_{\partial V} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}\quad (10.3)$$

## 10.1.2 Bilanci in forma differenziale

### 10.1.2.1 Bilanci in forma conservativa

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 && \text{(massa)} \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{T} && \text{(quantità di moto)} \\ \partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} && \text{(energia totale)}\end{aligned}\quad (10.4)$$

### 10.1.2.2 Bilanci in forma convettiva

$$\begin{aligned}D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{(massa)} \\ \rho D_t \mathbf{u} &= \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{T} && \text{(quantità di moto)} \\ \rho D_t e^t &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} && \text{(energia totale)}\end{aligned}\quad (10.5)$$

### 10.1.2.3 Bilanci dell'energia cinetica e dell'energia interna

Si ottiene il bilancio dell'energia cinetica facendo il prodotto scalare dell'equazione della quantità di moto con il campo di velocità

$$\rho D_t \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{u} \quad \text{(energia cinetica)} \quad (10.6)$$

o in forma conservativa

$$\partial_t \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{u} \quad \text{(energia cinetica)} \quad (10.7)$$

Ricordando la definizione di energia interna, come differenza tra energia totale ed energia cinetica,  $e = e^t - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$ , si può ricavare l'equazione dell'energia interna sottraendo l'equazione dell'energia cinetica all'equazione dell'energia totale,

$$\rho D_t e = \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad \text{(energia interna)} \quad (10.8)$$

o in forma conservativa

$$\partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad \text{(energia interna)} \quad (10.9)$$

## 10.2 Bilanci per un solido

## 10.3 Bilanci per un fluido newtoniano

### Leggi costitutive

**Tensore degli sforzi.** Il tensore degli sforzi per un fluido newtoniano è la somma di due contributi,

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I}, \quad (10.10)$$

il contributo della pressione e quello degli sforzi viscosi.

**Flusso di calore per conduzione.** Usando la legge di Fourier, il flusso di calore è proporzionale al gradiente della temperatura, e quindi può essere scritto come

$$\mathbf{q} = -k \nabla T . \quad (10.11)$$

**Equazioni di stato.** Servono infine delle relazioni di stato che leghino le grandezze. In particolare, di solito si scelgono delle equazioni di stato che legano le grandezze delle quali non compare la derivata nel tempo, con le grandezze di cui questa derivata compare. Essendo più espliciti, per avere un problema ben definito è necessario definire le relazioni

$$\begin{aligned} p(\rho, e^t) \\ T(\rho, e^t) \\ \dots \end{aligned} \quad (10.12)$$

### 10.3.1 Corrente incomprimibile

Il vincolo di incomprimibilità prevede che il volume delle particelle materiali non cambi e di conseguenza nemmeno la loro densità

$$D_t \rho = 0 \quad (10.13)$$

e di conseguenza, dal bilancio di massa si ottiene il vincolo di incomprimibilità sul campo di velocità

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (10.14)$$

Un caso particolare di corrente incomprimibile è la corrente a densità uniforme,  $\rho(\mathbf{r}, t) = \bar{\rho}$ . Le altre equazioni di bilancio diventano

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \partial_t (\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \partial_t (\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) &= -p \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u}}_{=0} + 2\mu |\mathbb{D}|^2 + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (10.15)$$



## 11. Appendice – Derivate su domini mobili

**Theorem 11.1 — Teorema del trasporto di Reynolds.**

$$\frac{d}{dt} \int_{v_t} f = \int_{v_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial v_t} f \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (11.1)$$

Applicando il teorema del trasporto di Reynolds a:

- un volume in moto arbitrario

$$\frac{d}{dt} \int_{v_t} f = \int_{v_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial v_t} f \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (11.2)$$

- un volume materiale

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f = \int_{V_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial V_t} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (11.3)$$

in un istante in cui i due volumi coincidono  $v_t = V_t$ , allora  $\int_{v_t} \frac{\partial f}{\partial t} = \int_{V_t} \frac{\partial f}{\partial t}$ , e quindi si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f = \frac{d}{dt} \int_{v_t=V_t} f + \oint_{\partial v_t} f (\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (11.4)$$







# Termodinamica

<b>12</b>	<b>Principi della termodinamica</b>	<b>61</b>
12.1	Introduzione	61
12.2	Principi della termodinamica	61
12.3	Bilanci per sistemi chiusi	64
12.4	Bilanci per sistemi aperti	64
<b>13</b>	<b>Coefficienti e relazioni termodinamiche</b>	<b>65</b>
13.1	Potenziali termodinamici	65
13.2	Coefficienti termodinamici	66
13.3	Relazioni termodinamiche	66
<b>14</b>	<b>Stati della materia e leggi costitutive</b>	<b>67</b>
14.1	Stati della materia, variabili termodinamiche e diagramma di stato	67
14.2	Gas	67
14.3	Liquidi	70
14.4	Solidi	70
14.5	Miscela	70
14.6	Vapore acqueo	70
14.7	Aria umida	70
<b>15</b>	<b>Trasformazioni termodinamiche e componenti termo-meccanici</b>	<b>71</b>
15.1	Trasformazioni termodinamiche	71
15.2	Trasformazioni termodinamiche per gas perfetti	71
15.3	Esempi di componenti termo-meccanici	72
<b>16</b>	<b>Cicli termodinamici e macchine termiche</b>	<b>77</b>
16.1	Introduzione ai cicli termodinamici	77
16.2	Macchina ideale di Carnot	78
16.3	Enunciati del secondo principio: Kelvin e Planck	78
16.4	Cicli termodinamici e macchine termiche	79
<b>17</b>	<b>Trasmissione del calore</b>	<b>81</b>
17.1	Conduzione	81
17.2	Convezione	81
17.3	Irraggiamento	81



- 
- **Robert Boyle** (1627-1691) formula una teoria atomistica della materia. Compie studi sulle pompe ad aria insieme a **Robert Hooke**, usate negli esperimenti sulle proprietà dei gas, che gli permettono di formulare la legge che prenderà il suo nome e che formula la relazione inversa tra pressione e volume occupato da un gas a temperatura costante.
  - Newcomen (1664-1729) presenta la sua macchina a vapore, come prima applicazione industriale del vapore.
  - **Daniel Bernoulli** (1700-1782) pubblica nel 1738 il lavoro *Hydrodynamica*, opera sullo studio dei fluidi, che contiene una prima formulazione della **teoria cinetica dei gas**
  - **James Watt** (1736-1819) all'università di Glasgow, conduce esperimenti sul vapore, insieme a Joseph Black, che introduce i concetti di calore latente e del calore specifico. Watt migliora la macchina di Newcomen e presenta il suo modello di macchina a vapore. Con l'introduzione della distribuzione a cassetti e del meccanismo biell-manovella per creare un moto rotatorio dal moto alternativo del pistone, la macchina a vapore diventa una macchina motrice a utilizzo generalizzato in molti settori, protagonista della rivoluzione industriale inglese
  - esperimenti sui gas permettono a **Jacques Charles**, **Alessandro Volta** di formulare indipendentemente la legge che verrà pubblicata nel 1802 dal **Joseph Louis Gay-Lussac**, sulla proporzionalità diretta tra temperatura e volume occupato da un gas in un sistema chiuso durante una trasformazione isobara. Gay-Lussac formula poi la legge sulla proporzionalità diretta tra pressione e temperatura di un gas in un sistema chiuso a volume costante.
  - **Sadi Carnot** (1796-1832), interessato allo studio e al miglioramento dell'efficienza dei motori termici, pubblica nel 1824 *Riflessioni sulla forza motrice del fuoco*, testo che getta le basi per lo studio della termodinamica. **cosa c'è in questo testo di interessante?**
  - **Benoit Paul Emile Clapeyron** (1799-1864) sviluppa il lavoro di Carnot, introducendo una descrizione analitica e grafica dei processi termodinamici. Indaga i cicli termodinamici nel **piano  $P - V$**  che prende il suo nome. Riprende e sviluppa l'idea di Carnot di **trasformazione reversibile** e riformula il **principio di Carnot** sull'efficienza massima di delle macchine termiche, fornendo una prima formulazione di quello che diventerà il secondo principio della termodinamica. Lavora inoltre sulle transizioni di fase, e sulla statica delle strutture elastiche.
  - gli studi **James Prescott Joule** (1818-1889) sulla natura del calore mettono in relazione il calore e il lavoro meccanico,
  - **Rudolf Clausius** (1822-1888)
    - formula i principi della termodinamica.
      - Nel 1850 formula il **primo principio della termodinamica**, introducendo il concetto di **energia interna** come variabile di stato del sistema: il primo principio della termodinamica rappresenta un bilancio dell'energia totale e, come caso particolare, la prima formulazione della **legge della conservazione dell'energia**.
      - Nel 1865 riformula il principio di Carnot e introduce il concetto di **entropia** per la distinzione tra processi reversibili e irreversibili, e la formulazione del **secondo principio della termodinamica**;
    - è autore di sviluppi nella teoria cinetica dei gas, introducendo i gradi di libertà molecolari e il concetto di cammino libero medio di una particella.
  - **William Rankine** (1820-1872), a Glasgow, dopo i primi anni dedicati alla scienza delle costruzioni e alla meccanica, si concentra sulla termodinamica e lo studio del moto dei fluidi (interessi su onde d'urto e vortici):

- compie studi sul bilancio di energia, coniando il termine *energia potenziale*, e dando la definizione di *energia come la capacità di compiere lavoro*
- compie studi sull'evaporazione di un liquido, e sul vapore, fornendo l'espressione del calore latente di evaporazione
- applica i suoi studi ai motori termici, proponendo il **ciclo termodinamico** che prende il suo nome
- **William Thomson** (1824-1907), anche noto come **Lord Kelvin**, è autore di importanti ricerche nell'ambito dell'analisi dell'elettromagnetismo e della termodinamica, oltre ad aver partecipato tra le sue tante attività alla progettazione alla posa dei cavi transatlantici per la trasmissione delle informazioni. In termodinamica, si possono ricordare:
  - la **scala di temperatura assoluta**, e l'introduzione del concetto di **zero assoluto**
  - l'enunciato della seconda legge della termodinamica
  - la scoperta dell'effetto Joule-Thomson
- **James Clerk Maxwell**
- **Ludwig Boltzmann**

## 12. Principi della termodinamica

### 12.1 Introduzione

**Definizione 12.1 — Termodinamica.** La termodinamica può essere definita come la branca della fisica che si occupa dell'**energia e dei trasferimenti di energia in tutte le sue forme**.

In meccanica vengono trattate le forme di energia cinetica e potenziale, legate al comportamento macroscopico dei sistemi. La termodinamica tratta di sistemi con un numero maggiore – spesso enorme – di gradi di libertà, come sistemi continui o composti da elementi solidi deformabili o fluidi, a livello microscopico costituiti da un numero elevato di parti elementari (molecole, atomi): una descrizione deterministica del comportamento microscopico risulta impossibile, mentre lo studio statistico dei moti microscopici può essere messo in relazione al comportamento macroscopico, riassumibile con grandezze fisiche come pressione, temperatura e densità. All'energia meccanica macroscopica, si somma un contributo di energia interna, dovuto al moto microscopico – attorno al moto medio, macroscopico – delle particelle che compongono il sistema.

**Definizione 12.2 — Sistema e ambiente.** Quando si affronta un problema in termodinamica, e in generale in fisica, è utile definire il **sistema** di interesse, identificandone i limiti - o frontiera - e tutto quello che è al di fuori del sistema, definito **ambiente**. Sistema e ambiente possono interagire tra di loro, principalmente tramite **scambi di massa o scambi di energia**.

**Definizione 12.3 — Sistema aperti e chiusi.** Un sistema **chiuso** è un sistema che non ha scambi di massa con l'ambiente. Al contrario, un sistema **aperto** ha scambi di massa con l'ambiente.

**Definizione 12.4 — Sistema isolato.** Un sistema **isolato** è un sistema che non ha né scambi di massa né scambi di energia con l'ambiente.

### 12.2 Principi della termodinamica

#### 12.2.1 Legge di conservazione della massa

Lavoisier formula il principio di conservazione della massa nella sua forma popolare "*Nulla si crea e nulla si distrugge*". Questo principio è valido in fisica classica, mentre cessa di valere quando si manifestano fenomeni relativistici come scoperto da Einstein, per i quali si

manifesta un'equivalenza tra massa ed energia.

### 12.2.2 Primo principio

Il primo principio della termodinamica è il **bilancio di energia totale di un sistema chiuso**: la variazione di energia totale di un sistema è uguale alla somma del calore entrante nel sistema dall'ambiente e del lavoro fatto sul sistema dalle forze esterne agenti su di esso. In forma incrementale

$$\Delta E^{tot} = Q^{ext} + L^{ext} , \quad (12.1)$$

In forma incrementale,

$$dE^{tot} = \delta Q^{ext} + \delta L^{ext} , \quad (12.2)$$

$dE, \delta Q, \dots$ ; funzioni di stato,...

In forma differenziale,

$$\dot{E}^{tot} = \dot{Q}^{ext} + P^{ext} . \quad (12.3)$$

dove  $\dot{Q}^{ext}$  è il flusso di calore entrante nel sistema e  $P^{ext} = \dot{L}^{ext}$  è la potenza delle forze esterne agenti sul sistema.

#### 12.2.2.1 Energia interna

Dalla meccanica è noto il teorema dell'energia cinetica,

$$\dot{K} = P^{tot} = P^{ext} + P^{int} . \quad (12.4)$$

Si definisce quindi l'**energia interna**,  $U$ , come la differenza tra l'energia totale e l'energia cinetica del sistema,

$$U := E^{tot} - K . \quad (12.5)$$

Sottraendo l'espressione del teorema dell'energia dal primo principio della termodinamica, si ricava l'equazione di bilancio dell'energia interna,

$$\dot{U} = \dot{Q}^{ext} - P^{int} . \quad (12.6)$$

### 12.2.3 Secondo principio

Il secondo principio della termodinamica rappresenta due tendenze naturali:

1. la tendenza del calore a trasferire energia da un corpo a temperatura maggiore a un corpo a temperatura più bassa
2. la tendenza dell'energia di trasformarsi in forme “meno nobili” e meno utilizzabili per produrre lavoro meccanico – dissipazione

Il secondo principio della termodinamica ha diversi enunciati equivalenti, formulati da Clausius, Kelvin e Planck. L'enunciato più generale è quello di Clausius, mentre gli enunciati di Kelvin e Planck coinvolgono macchine termiche e quindi, per questi due enunciati, si rimanda al capitolo 16 sulle macchine termiche.

Si assume di poter separare il contributo della potenza delle forze interne  $P^{int}$  nella somma della potenza delle forze reversibili e in quella delle forze irreversibili, definita dissipazione,  $P^{int} = P^{int,rev} + D$

$$\begin{aligned}
 dU &= \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_S dx + \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_x dS \\
 dU &= \delta Q^{ext} - \delta L^{int} = \\
 &= \delta Q^{ext} - \delta^r L^{int,r} + \underbrace{\delta^+ D}_{\geq 0} = \\
 &= -\delta^r L^{int,r} + \delta Q^{ext} + \delta^+ D
 \end{aligned} \tag{12.7}$$

$$-\delta^r L^{int,r} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_S dx, \quad \delta Q^{ext} + \delta^+ D = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_x dS. \tag{12.8}$$

Definendo la temperatura  $T := \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_x > 0$ , per il terzo principio, si può riscrivere

$$TdS = \delta Q^{ext} + \delta^+ D \geq \delta Q^{ext} \quad \rightarrow \quad dS \geq \frac{\delta Q^{ext}}{T}. \tag{12.9}$$

### 12.2.3.1 Conseguenze del secondo principio della termodinamica

Nello scambio di calore tra due sistemi  $S_1, S_2$ , si manifesta un flusso di calore positivo dal corpo a temperatura maggiore a quello a temperatura minore. Chiamando  $Q_{21}$  il flusso di calore tra i due sistemi, scegliendo il segno positivo se fa aumentare l'energia del sistema 2,

$$\begin{aligned}
 Q_{21} &\geq 0 & \text{se } T_1 > T_2 \\
 Q_{21} &\leq 0 & \text{se } T_1 < T_2
 \end{aligned} \tag{12.10}$$

possiamo riassumere queste condizioni sulla trasmissione del calore con l'unica relazione

$$Q_{21} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \geq 0, \tag{12.11}$$

o, introducendo il flusso di calore “in direzione opposta”  $Q_{12} = -Q_{21}$ ,

$$\frac{Q_{21}}{T_2} + \frac{Q_{12}}{T_1} \geq 0. \tag{12.12}$$

### 12.2.3.2 Integrale di Clausius

Chiamando  $\delta Q$  il flusso di calore tra l'ambiente esterno e un sistema omogeneo, positivo se “entrante” nel sistema, si può scrivere

$$\frac{\delta Q}{T} - \frac{\delta Q}{T_{ext}} \geq 0 \tag{12.13}$$

$$0 = \oint dS \geq \oint \frac{\delta Q}{T} \geq \oint \frac{\delta Q}{T_{ext}} \tag{12.14}$$

### 12.2.3.3 Secondo principio della dinamica per sistemi non omogenei

$$\begin{aligned}
 dS &= \sum_i dS_i = \sum_i \left( \frac{\delta Q^{i,ext(i)}}{T_i} + \frac{\delta^+ D_i}{T_i} \right) = \\
 &= \sum_i \left( \frac{\delta Q^{i,ext} + \sum_{j \neq i} \delta Q_{ij}}{T_i} + \frac{\delta^+ D_i}{T_i} \right) = \\
 &= \sum_i \underbrace{\frac{\delta Q^{i,ext}}{T_i}}_{\geq \frac{\delta Q^{i,ext}}{T_i^{ext}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i}}_{\geq 0} + \sum_i \underbrace{\frac{\delta^+ D_i}{T_i}}_{\geq 0} \geq \sum_i \frac{\delta Q^{i,ext}}{T_i^{ext}}
 \end{aligned} \tag{12.15}$$

### 12.2.4 Terzo principio

Il terzo principio della termodinamica postula la positività della temperatura

$$T := \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_x > 0 \tag{12.16}$$

### 12.2.5 Principio zero - Equilibrio termico

## 12.3 Bilanci per sistemi chiusi

I bilanci fondamentali in forma integrale per un sistema chiuso  $\Omega$  sono

$$\dot{M}_\Omega = 0 \tag{12.17}$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_\Omega = \mathbf{R}^{ext} \tag{12.18}$$

$$\dot{E}_\Omega^{tot} = \dot{Q}^{ext} + \dot{P}^{ext} \tag{12.19}$$

$$\dot{S}_\Omega \geq \frac{\dot{Q}^{ext}}{T} \tag{12.20}$$

## 12.4 Bilanci per sistemi aperti

Nei bilanci per sistemi aperti compaiono i termini di flusso attraverso la frontiera del sistema

$$\dot{M}_\Omega + \Phi_{\partial\Omega}(\rho \mathbf{u}^{rel}) = 0 \tag{12.21}$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_\Omega + \Phi_{\partial\Omega}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^{rel}) = \mathbf{R}^{ext} \tag{12.22}$$

$$\dot{E}_\Omega^{tot} + \Phi_{\partial\Omega}(\rho e^{tot} \mathbf{u}^{rel}) = \dot{Q}^{ext} + \dot{P}^{ext} \tag{12.23}$$

$$\dot{S}_\Omega + \Phi_{\partial\Omega}(\rho s \mathbf{u}^{rel}) \geq \frac{\dot{Q}^{ext}}{T} \tag{12.24}$$



## 13. Coefficienti e relazioni termodinamiche

### 13.1 Potenziali termodinamici

$$\begin{aligned}dE &= -\delta L^i + \delta Q \\&= -\delta L^{i, rev} + T dS \\dE &= \left. \frac{\partial E}{\partial x_k} \right|_S dx_k + \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_{x_k} dS = \\&= -F_k^{rev} dx_k + T dS\end{aligned}\tag{13.1}$$

Nel caso di un sistema composto da un volumetto elementare contenente un fluido nel quale le forze interne reversibili sono dovute alla pressione, il lavoro di queste forze si può scrivere come

$$\begin{aligned}F_k dx_k &= F_{x,1} dx_1 + F_{x,2} dx_2 + F_{y,1} dy_1 + F_{y,2} dy_2 + F_{z,1} dz_1 + F_{z,2} dz_2 = \\&= p dy dz (dx_2 - dx_1) + p dx dz (dy_2 - dy_1) + p dx dy (dz_2 - dz_1) = \\&= p (ddx dy dz + dx ddy dz + dx dy ddz) = \\&= p d(dx dy dz) = p dV\end{aligned}\tag{13.2}$$

così che l'equazione per il differenziale dell'energia interna può essere scritta come

$$dE = -p dV + T dS\tag{13.3}$$

Usando il principio di conservazione della massa per un sistema chiuso, si possono riscrivere i differenziali delle quantità per unità di massa,

$$\begin{aligned}0 &= dm = d(\rho V) = V d\rho + \rho dV \\dV &= d(mv) = \underbrace{dm}_{=0} v + m dv = m dv \\&= d\left(\frac{m}{\rho}\right) = \underbrace{dm}_{=0} \frac{1}{\rho} - m \frac{d\rho}{\rho^2} = -m \frac{d\rho}{\rho^2} \\dE &= d(me) = \underbrace{dm}_{=0} e + m de = m de \\dS &= d(ms) = \underbrace{dm}_{=0} s + m ds = m ds\end{aligned}\tag{13.4}$$

e quindi l'equazione dell'energia interna

$$\begin{aligned} de &= -p dv + T ds \\ &= \frac{p}{\rho^2} d\rho + T ds \end{aligned} \quad (13.5)$$

Nel caso generale e non specializzato per i fluidi, indicando con  $f_k$  le forze per unità di massa,

$$de = -f_k dx_k + T ds \quad (13.6)$$

**Entalpia.** Viene definita la funzione di stato entalpia,

$$h := e + f_k x_k \quad (13.7)$$

della quale si può calcolare il differenziale

$$dh = \underbrace{de + f_k dx_k}_{=T ds} + x_k df_k = x_k df_k + T ds . \quad (13.8)$$

**Energia libera di Helmholtz.** Viene definita la funzione di stato chiamata energia libera di Helmholtz,

$$f := e - T s \quad (13.9)$$

della quale si può calcolare il differenziale

$$df = \underbrace{de - T ds}_{=-f_k dx_k} - s dT = -f_k dx_k - s dT . \quad (13.10)$$

**Energia libera di Gibbs.** Viene definita la funzione di stato chiamata energia libera di Helmholtz,

$$g := h - T s \quad (13.11)$$

della quale si può calcolare il differenziale

$$dg = \underbrace{dh - T ds}_{=x_k df_k} + s dT = x_k df_k - s dT . \quad (13.12)$$

## 13.2 Coefficienti termodinamici

**Calore specifico**

$$c_x := T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_x \quad (13.13)$$

**Coefficienti di espansione termica**

$$\alpha_x := \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_x = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_x \quad (13.14)$$

**Coefficienti di comprimibilità**

$$\beta_x := -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_x = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_x \quad (13.15)$$

## 13.3 Relazioni termodinamiche

## 14. Stati della materia e leggi costitutive

### 14.1 Stati della materia, variabili termodinamiche e diagramma di stato

### 14.2 Gas

#### 14.2.1 Leggi sui gas: Boyle, Gay-Lussac, Charles

$$PV = \text{cost} \quad \text{con } T \text{ costante (legge di Boyle)} \quad (14.1)$$

$$\frac{V}{T} = \text{cost} \quad \text{con } P \text{ costante (legge di Charles)} \quad (14.2)$$

$$\frac{P}{T} = \text{cost} \quad \text{con } V \text{ costante (legge di Gay-Lussac)} \quad (14.3)$$

#### 14.2.2 Equazione di stato dei gas perfetti

$$PV = Nk_B T \quad (14.4)$$

con  $N$  numero di molecole nel volume,  $k_B$  **costante di Boltzmann**.

Seguendo la **legge di Avogadro**, a pressione e temperatura costanti, volumi uguali di gas contengono un numero uguale di molecole, indipendentemente dalla natura del gas stesso. La **mole** viene definita come il numero di particelle di una sostanza, la cui massa totale ha un valore numerico in grammi  $[g]$  uguale alla massa molecolare espressa in unità di massa atomica  $[u]$ . In particolare, il numero di particelle (atomi o molecole) contenute in una mole viene definito **numero di Avogadro**,

$$N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23} . \quad (14.5)$$

La relazione quindi tra le unità di misura della massa grammo e unità di massa atomica è

$$1 \text{ g} = N_A u . \quad (14.6)$$

Si esplicitano alcune relazioni

- $N$  numero di molecole
- $m_1$  massa molecolare

- $n$  numero di moli:  $n = \frac{N}{N_A}$
- $M_m$  massa molare:  $M_m = N_A m_1$

La massa  $m$  contenuta in un volume  $V$  può essere scritta come

$$m = \rho V = N m_1 = n M_m . \quad (14.7)$$

Usando queste relazioni, la legge di stato dei gas perfetti può essere riscritta in forme diverse

$$PV = \underbrace{N}_{n N_A} k_B T = n \underbrace{N_A k_B}_{R_u} T = n R_u T , \quad (14.8)$$

avendo introdotto la **costante universale dei gas**,  $R_u$ . Usando la relazione  $\rho V = n M_m$ , la legge dei gas perfetti può essere ulteriormente riscritta come

$$P = \rho R T , \quad (14.9)$$

avendo definito la costante del gas preso in considerazione,  $R = \frac{R_u}{M_m}$ .

#### 14.2.2.1 Energia interna

$$e = c_v T \quad (14.10)$$

#### 14.2.2.2 Entalpia interna

$$h = c_p T \quad (14.11)$$

#### 14.2.2.3 Rapporto dei calori specifici

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (14.12)$$

#### 14.2.2.4 Relazione di Meyer

$$c_p - c_v = R \quad (14.13)$$

#### 14.2.2.5 Espressioni dell'entropia

Usando il bilancio di energia interna,  $de = P \frac{d\rho}{\rho^2} + T ds$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - \frac{P}{T\rho} \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} \quad (14.14)$$

$$\begin{array}{lll} P = \rho R T & dP = d\rho R T + \rho R dT & \frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \\ \rho = \frac{P}{RT} & \rightarrow d\rho = \frac{dP}{RT} - \frac{P}{RT^2} dT & \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} \\ T = \frac{P}{\rho R} & dT = \frac{dP}{R\rho} - \frac{P}{R\rho^2} d\rho & \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \end{array} \quad (14.15)$$

e quindi

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} = \\ &= c_v \frac{dP}{P} - c_p \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned} \quad (14.16)$$

### 14.2.3 Equazione di stato di Van der Waals – equazione di stato dei gas reali

...

### 14.2.4 Teoria cinetica dei gas – cenni

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta x}{v_x} \\ \Delta I_x^{(1)} &= 2mv_x \\ \Delta F_x^{(1)} &= \frac{\Delta I_x^{(1)}}{2\Delta t} \\ p_x^{(1)} &= \frac{\Delta F_x^{(1)}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\Delta I_x^{(1)}}{2\Delta t \Delta y \Delta z} = \frac{mv_x^2}{\Delta x \Delta y \Delta z}\end{aligned}\tag{14.17}$$

Per  $N$  particelle di massa uguale che non interagiscono tra di loro, è sufficiente sommare il contributo di tutte le particelle,

$$\sum_{k=1}^N mv_{x,k}^2 = Nm\overline{v_x^2},\tag{14.18}$$

dove  $\overline{v_x^2}$  è la media del quadrato della componente in direzione  $x$  della velocità delle particelle. Si può quindi scrivere

$$p_x = \frac{Nm}{\Delta x \Delta y \Delta z} \overline{v_x^2},\tag{14.19}$$

dove il rapporto è il rapporto tra la massa interna al volume e le dimensioni del volume stesso, ossia la densità  $\rho$ . In caso di sistema omogeneo nel quale non ci sono direzioni preferenziali, la media di tutte le componenti cartesiane della velocità ha lo stesso valore, uguale a  $\frac{1}{3}$  della media del quadrato del modulo della velocità,

$$|\mathbf{v}|^2 = \overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}.\tag{14.20}$$

La pressione può essere scritta quindi in funzione dell'energia cinetica del gas nel volume

$$pV = Nm \frac{\overline{v^2}}{3} = \frac{2}{3} N \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \bar{k}\tag{14.21}$$

Confrontando quest'ultima espressione con la legge di stato dei gas perfetti,

$$pV = nR_u T = Nk_B T,\tag{14.22}$$

si può ricavare il legame tra l'energia cinetica media  $\bar{k}$  delle particelle e la temperatura  $T$

$$\bar{k} = \frac{3}{2} k_B T,\tag{14.23}$$

tramite la costante di Boltzmann,  $k_B$ .

#### 14.2.4.1 Equipartizione dell'energia

Il principio di equipartizione dell'energia fu proposto da **John James Waterston** nel 1854, e successivamente ripreso da **Maxwell** e **Boltzmann**. Questo principio permette di generalizzare l'espressione dell'energia cinetica media delle particelle ottenuta nella sezione precedente, e prevede che i contributi all'energia cinetica dei gradi di libertà attivi delle molecole siano uguali tra di loro, e pari a

$$\bar{k}_{1gdl} = \frac{1}{2} k_B T,\tag{14.24}$$

cosicché l'energia cinetica risulta

$$\bar{k} = n_{gdl} \bar{k}_{1gdl} = \frac{n_{gdl}}{2} k_B T.\tag{14.25}$$

**Gradi di libertà delle molecole.** Le molecole possono avere gradi di libertà traslazionali, rotazionali e vibrazionali. In generale, a temperature moderate sono attivi solo i gradi di libertà traslazionali e rotazionali, mentre a temperature elevate si attivano i gradi di libertà vibrazionali (...). Concentrandoci sulle temperature moderate, possiamo distinguere

- gas monoatomico,  $n_{gdl} = 3$ : la molecola monoatomica ha 3 gradi di libertà, corrispondenti alle traslazione nelle tre direzioni spaziali
- gas biatomico con molecola rigida,  $n_{gdl} = 5$ : la molecola biatomica ha 5 gradi di libertà, corrispondenti alla traslazione di un suo punto nelle 3 direzioni spaziali, e alle 2 rotazioni attorno agli assi perpendicolari alla congiungente dei due atomi
- gas  $n$ -atomico ( $n \geq 3$ ) con molecola rigida,  $n_{gdl} = 6$ : in generale, se non sono composte da atomi tutti allineati, le molecole  $n$ -dimensionali hanno 6 gradi di libertà, corrispondenti alle 3 traslazioni e alle 3 rotazioni che caratterizzano lo stato di un corpo rigido qualsiasi

A temperature elevate, il numero di gradi di libertà e il numero di contributi all'energia cinetica media dipende anche dalla struttura della molecola.

### 14.3 Liquidi

### 14.4 Solidi

### 14.5 Miscele

### 14.6 Vapore acqueo

### 14.7 Aria umida

## 15. Trasformazioni termodinamiche e componenti termo-meccanici

### 15.1 Trasformazioni termodinamiche

#### 15.1.1 Piani delle fasi

■ **Definizione 15.1** — Piano  $P - V$  di Clapeyron.

■ **Definizione 15.2** — Piano  $T - S$ .

■ **Definizione 15.3** — Piano  $h - S$  di Mollier.

### 15.2 Trasformazioni termodinamiche per gas perfetti

#### 15.2.1 Trasformazione isoterma

Due stati termodinamici 1, 2 collegati da una trasformazione isoterma  $T_1 = T_2 = \bar{T}$ ,

$$\begin{aligned} P_1 = \rho_1 R T_1 = \rho_1 R \bar{T} \\ P_2 = \rho_2 R T_2 = \rho_2 R \bar{T} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (15.1)$$

Una trasformazione isoterma è quella coinvolta nella legge di Boyle.

#### 15.2.2 Trasformazione isobara

$$P_1 = P_2 = \bar{P}$$

$$\begin{aligned} \bar{P} = P_1 = \rho_1 R T_1 \\ \bar{P} = P_2 = \rho_2 R T_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} \quad (15.2)$$

Una trasformazione isobara è quella coinvolta nella legge di Charles.

#### 15.2.3 Trasformazione isocora

Una trasformazione isocora avviene a volume specifico, e quindi a densità, costanti,  $\rho_1 = \rho_2 = \bar{\rho}$

$$\begin{aligned} P_1 = \rho_1 R T_1 = \bar{\rho} R T_1 \\ P_2 = \rho_2 R T_2 = \bar{\rho} R T_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (15.3)$$

Una trasformazione isocora è quella coinvolta nella legge di Gay-Lussac.

**15.2.4 Trasformazione adiabatica ideale – isentropica**

Per un fluido, si può scrivere il bilancio di energia interna come

$$\begin{aligned} dU &= -\delta L^{int} + \delta Q^{ext} = \\ &= -\delta L^{int,r} + \delta D + \delta Q^{ext} = \\ &= -Pdv + Tds \end{aligned} \quad (15.4)$$

In assenza di dissipazione,  $\delta D = 0$ , e trasmissione del calore,  $\delta Q^{ext} = 0$ , la variazione di entropia è nulla,  $ds = 0$ . Per un gas perfetto si possono usare le relazioni (14.16). Ad esempio

$$0 = ds = c_v \frac{dP}{P} - c_P \frac{d\rho}{\rho} \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (15.5)$$

e tramite integrazione

$$\ln \frac{P}{P_0} = \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad \rightarrow \quad \frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad \rightarrow \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \text{cost. lungo un'adiabatica} \quad (15.6)$$

Usando la legge dei gas perfetti si possono ottenere le relazioni tra pressione, temperatura e densità

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cost.} \quad , \quad \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{cost.} \quad , \quad \frac{P^{\gamma-1}}{T^\gamma} = \text{cost.} \quad (15.7)$$

**15.3 Esempi di componenti termo-meccanici**

**Sistemi aperti e chiusi**

**15.3.1 Turbine**

**Esempi di applicazione.**

**Bilanci.**

$$\begin{aligned} \dot{M}_\Omega^{tot} + \Phi_{\partial\Omega}(\rho \mathbf{u}^{rel}) &= 0 \\ \dot{E}_\Omega^{tot} + \Phi_{\partial\Omega}(\rho e^{tot} \mathbf{u}^{rel}) &= \dot{Q}^{ext} + P^{ext} \end{aligned} \quad (15.8)$$

Assumendo trascurabili i termini istazionari, gli sforzi viscosi rispetto a quelli di pressione

$$\dot{m}(h_2 - h_1) = \dot{Q}^{ext} + P^{mec} \quad , \quad (15.9)$$

dove  $h^t := h + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$  è l'entalpia totale, somma dell'entalpia e dell'energia cinetica per unità di massa. Nel caso il contributo cinetico sia trascurabile rispetto a quello dell'entalpia interna, si può assumere  $h^t \approx h$ .

Una turbina estrae potenza meccanica  $P^{mec} < 0$  dal fluido di lavoro, la cui entalpia diminuisce tra la sezione di ingresso e di uscita della turbina. Assumendo una trasformazione adiabatica ideale (e quindi isentropica) si può dimostrare che insieme all'entalpia diminuiscono anche temperatura e pressione.

**Trasformazioni termodinamiche.** Assumendo scambi di calore con l'esterno trascurabili  $\dot{Q}^{ext} \approx 0$ , si può scrivere

$$\dot{m}(h_2 - h_1) = P^{mec} \quad . \quad (15.10)$$



Se si assume un fluido ideale, si può fare riferimento alle formule per l'entalpia

$$h = c_p T, \quad (15.11)$$

e legare lo stato di ingresso a quello di uscita con l'equazione delle trasformazioni isentropiche (15.7), e definendo il rapporto di espansione

$$\beta := \frac{P_1}{P_2}. \quad (15.12)$$

Noto il rapporto di espansione, si può ricavare il rapporto tra le temperature e le densità

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\beta^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (15.13)$$

**Osservazioni tecniche.** Temperatura massima in turbina rappresenta un limite tecnico, dovuto alla resistenza dei materiali sottoposti a sollecitazioni meccaniche ad alta temperatura.

### 15.3.2 Compressori

**Esempi di applicazione.**

**Bilanci.** I bilanci che governano un compressore sono identici a quelli che governano una turbina, anche se il funzionamento è quello inverso: un compressore assorbe potenza meccanica  $P^{mec} > 0$  per aumentare l'entalpia (e la temperatura e la pressione) del fluido di lavoro. Trascurando gli effetti instazionari, viscosi e il flusso di calore con l'esterno, si può quindi scrivere

$$\dot{m}(h_2^t - h_1^t) = P^{mec}. \quad (15.14)$$

**Trasformazioni termodinamiche.**

**Osservazioni tecniche.**

### 15.3.3 Pompe a liquido

**Esempi.**

**Bilanci.** Semplificando i bilanci,

$$\begin{aligned} \dot{M}_\Omega^{tot} + \Phi_{\partial\Omega}(\rho \mathbf{u}^{rel}) &= 0 \\ \dot{E}_\Omega^{tot} + \Phi_{\partial\Omega}(\rho e^{tot} \mathbf{u}^{rel}) &= \dot{Q}^{ext} + P^{ext} \end{aligned} \quad (15.15)$$

nel caso di regime stazionario

$$\partial_t(\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (15.16)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e^t + \oint_{v_t} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (15.17)$$

Separando il contorno nelle sezioni di ingresso  $S_1$ , di uscita  $S_2$  e superficie solida  $S_s$ , si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e^t + \oint_{S_1} (\rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u}) + \oint_{S_2} (\rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u}) = \int_{S_s} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (15.18)$$

Ora, (a) trascurando gli effetti instazionari, (b) trascurando gli effetti viscosi sulle superfici di ingresso e uscita,  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$ , (c) trascurando la potenza delle forze di volume, e riconoscendo (d) nell'integrale di  $\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u}$  su  $S_s$  la potenza delle forze esterne sul sistema  $P^{ext}$  e (e) nell'integrale di  $-\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  il calore entrante nel sistema per unità di tempo  $\dot{Q}^{ext}$ , si può scrivere

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho e^t}_{=0(a)} + \underbrace{\oint_{S_1} (\rho e^t + p) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=\rho h^t} + \underbrace{\oint_{S_2} (\rho e^t + p) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=\rho h_t} = \underbrace{\int_{S_s} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}}_{=0(c)} + \underbrace{\oint_{\partial v_t} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u}}_{=P^{ext}(d)} - \underbrace{\oint_{\partial v_t} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{\dot{Q}^{ext}(e)} \quad (15.19)$$

e mettendo insieme i termini di flusso di entalpia totale nel flusso netto uscente  $\Phi_{\partial v_t}$ ,

$$\Phi_{\partial v_t}(\rho h^t \mathbf{u}) = P^{ext} + \dot{Q}^{ext}, \quad (15.20)$$

e nel caso si considerino delle pompe ideali nel quale lo scambio di calore è trascurabile,  $\dot{Q}^{ext} = 0$ ,

$$\Phi_{\partial v_t}(\rho h^t \mathbf{u}) = P^{ext}. \quad (15.21)$$

Se il fluido è incomprimibile, dal bilancio di energia interna (REF), il flusso netto di energia risulta essere nullo

$$\Phi_{\partial v_t}(\rho e \mathbf{u}) = \oint_{\partial v_t} \rho e \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P^{ext}, \quad (15.22)$$

e quindi, sottraendo questo bilancio da quello dell'entalpia totale,

$$\Phi_{\partial v_t} \left( \left( p + \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \mathbf{u} \right) = \oint_{\partial v_t} \rho \left( p + \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = P^{ext}, \quad (15.23)$$

Infine, se il contributo di energia cinetica è trascurabile rispetto a quello di pressione,

$$\Phi_{\partial v_t}(p \mathbf{u}) = \oint_{\partial v_t} p \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P^{ext}, \quad (15.24)$$

o, mettendo in evidenza le superfici di ingresso e di uscita, assunto proprietà costanti sulle sezioni,

$$\sum_i p_i \dot{V}_i = P^{ext}, \quad (15.25)$$

cioè la potenza fornita alla pompa si trasforma nella somma algebrica delle pressioni sulle sezioni di ingresso e uscita, pesate per il flusso volumetrico,  $\dot{V}_i > 0$  per flussi uscenti dal componente. Nel caso ci siano solo una sezione di ingresso  $S_1$  e di uscita  $S_2$ , la continuità della massa per fluidi con densità costante prevede

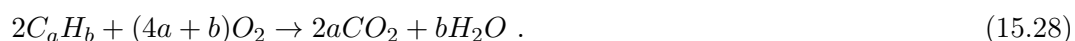
$$0 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \bar{\rho}(\dot{V}_2 + \dot{V}_1) \quad \rightarrow \quad \dot{V}_1 = -\dot{V}_2 := -\dot{V} \quad (15.26)$$

e quindi

$$\dot{V}(p_2 - p_1) = P^{ext}. \quad (15.27)$$

### 15.3.4 Camera di combustione

In camera di combustione avviene la reazione chimica di combustione,



una reazione esotermica che rilascia il calore necessario al funzionamento delle macchine termiche a combustione.

**Esempi di applicazione.**

**Bilanci.**

**Trasformazioni termodinamiche.**

**Osservazioni tecniche.**

### 15.3.5 Scambiatore di calore

**Esempi di applicazione.**

**Bilanci.**

**Trasformazioni termodinamiche.**

**Osservazioni tecniche.**

### 15.3.6 Condensatore

**Esempi di applicazione.**

**Bilanci.**

**Trasformazioni termodinamiche.**

**Osservazioni tecniche.**



## 16. Cicli termodinamici e macchine termiche

### 16.1 Introduzione ai cicli termodinamici

**Definizione 16.1 — Ciclo termodinamico.** Un ciclo termodinamico è un insieme di trasformazioni termodinamiche che riporta il sistema allo stato di partenza.

Trascurando i termini dinamici,  $E^{tot} = K + U \simeq U$ , il primo principio della termodinamica

$$\Delta U = L + Q \quad (16.1)$$

tra lo stato iniziale e finale del ciclo, coincidenti, prevede  $\Delta U = 0$ , e quindi

$$0 = L + Q, \quad (16.2)$$

o distinguendo i contributi di calore entrante  $Q^{in} > 0$  e uscente  $Q^{out} < 0$ , si può riscrivere

$$0 = L + Q^{in} + Q^{out}. \quad (16.3)$$

**Definizione 16.2 — Ciclo termodinamico diretto.** In un ciclo termodinamico diretto, si fornisce calore  $Q^{in}$  alla macchina per ottenere un lavoro meccanico,  $L < 0$ .

■ **Esempio 16.1 — Motori a combustione interna – alternativi.** ■

■ **Esempio 16.2 — Motori a combustione interna – continui.** ■

■ **Esempio 16.3 — Macchina a vapore.** ■

**Definizione 16.3 — Ciclo termodinamico inverso.** In un ciclo termodinamico inverso, si fornisce lavoro (e quindi  $L < 0$ ) a una macchina termica per sottrarre calore a un sistema.

■ **Esempio 16.4 — Frigorifero.** ■

**Definizione 16.4 — Efficienza di un ciclo termodinamico.**

$$\eta = \frac{\text{Effetto utile}}{\text{Ingresso del sistema}} \quad (16.4)$$

**Definizione 16.5 — Efficienza di un ciclo termodinamico diretto.** L'efficienza  $\eta$  di un ciclo termodinamico è il rapporto tra il lavoro utile ottenuto  $L$  e il calore fornito  $Q^{in}$  (che rappresenta il massimo lavoro ottenibile)

$$\eta = \frac{-L}{Q^{in}} = \frac{Q^{in} + Q^{out}}{Q^{in}} = 1 + \frac{Q^{out}}{Q^{in}} = 1 - \frac{|Q^{out}|}{Q^{in}} . \quad (16.5)$$

**Definizione 16.6 — Efficienza di un ciclo termodinamico inverso.**  $L > 0$

$$\eta = \frac{Q^{in}}{L} \quad (16.6)$$

## 16.2 Macchina ideale di Carnot

**Definizione 16.7 — Ciclo di Carnot.** Il ciclo ideale di Carnot è formato da due trasformazioni isoterme e due adiabatiche.

**Definizione 16.8 — Macchina ideale di Carnot.** La macchina ideale di Carnot è una macchina reversibile che opera tra due temperature, compiendo un ciclo di Carnot.

**Definizione 16.9 — Principio di Carnot.** A pari temperature estreme di un ciclo termodinamico, la macchina ideale di Carnot è la macchina che ha efficienza massima,

$$\eta \leq \eta_C . \quad (16.7)$$

Usando la relazione

$$0 \geq \oint \frac{\delta Q}{T} \geq \oint \frac{\delta Q}{T^{ext}} , \quad (16.8)$$

si può scrivere

$$0 \geq \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \quad \rightarrow \quad \frac{-Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1} \quad (16.9)$$

$$\eta = \frac{-L}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} =: \eta_C . \quad (16.10)$$

## 16.3 Enunciati del secondo principio: Kelvin e Planck

**Definizione 16.10 — Enunciato di Kelvin.** È impossibile realizzare una macchina termica ciclica in grado di convertire in lavoro tutto il calore assorbito da una sorgente a temperatura costante.

*Equivalenza enunciati di Clausius e Kelvin.* Dall'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica, si può ricavare

$$0 \geq \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} . \quad (16.11)$$

Se il calore  $Q_2$  scambiato con il corpo a temperatura  $T_2$  è nullo, allora

$$0 \geq \frac{Q_1}{T_1} , \quad (16.12)$$

e quindi, poiché la temperatura assoluta è una quantità non-negativa, segue che

$$Q_1 = -L \leq 0, \quad (16.13)$$

ossia, una macchina che scambia calore con il solo corpo a temperatura  $T_1$ , assorbe lavoro e cede calore corpo 1. È quindi impossibile realizzare la situazione contraria, cioè una macchina che assorbe calore unicamente dalla sorgente a temperatura costante  $T_1$  e produce lavoro  $-L = Q_1 > 0$ . ■

**Definizione 16.11 — Enunciato di Planck.** È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di trasferire calore da un corpo a una temperatura data a un corpo a temperatura maggiore.

*Equivalenza enunciati di Clausius e Planck.* Dall'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica, si può ricavare

$$0 \geq \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}. \quad (16.14)$$

Se il lavoro fatto sul sistema è nullo,  $L = 0$ , allora

$$0 = Q_1 + Q_2, \quad (16.15)$$

e quindi,

$$0 \geq Q_1 \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right). \quad (16.16)$$

Se  $T_1 > T_2$ , segue che  $\left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) < 0$  e quindi  $Q_1 = -Q_2 > 0$ , cioè il sistema trasferisce il calore dalla sorgente a temperatura maggiore a quella a temperatura minore. ■

## 16.4 Cicli termodinamici e macchine termiche

### 16.4.1 Cicli termodinamici diretti

#### 16.4.1.1 Ciclo Otto

**Storia e applicazioni.** **Motori industriali**

**Analisi del sistema e ciclo termodinamico** Ciclo reale:

- aspirazione
- compressione adiabatica
- combustione
- espansione adiabatica
- scarico

Ciclo ideale:

- compressione adiabatica
- trasformazione isocora
- espansione adiabatica
- trasformazione isocora

#### 16.4.1.2 Ciclo Diesel

**Storia e applicazioni.** **Motori industriali**

**Analisi del sistema e ciclo termodinamico** Ciclo reale:

- aspirazione
- compressione adiabatica
- combustione
- espansione adiabatica
- scarico

Ciclo ideale:

- compressione adiabatica
- trasformazione isobara
- espansione adiabatica
- trasformazione isocora

**16.4.1.3 Ciclo Joule-Brayton**

**Storia e applicazioni.** Turbine a ciclo aperto: motori aeronautici; turbine a ciclo chiuso: conversione energia da termica a elettrica

**Analisi del sistema e ciclo termodinamico** Ciclo ideale:

- compressione adiabatica
- riscaldamento isobaro
- espansione adiabatica
- raffreddamento isobaro

**16.4.1.4 Ciclo Rankine**

**Storia e applicazioni.** Produzione di energia (conversione da termica ad elettrica) nelle centrali termoelettriche, con turbine a vapore.

**Analisi del sistema e ciclo termodinamico.** Ciclo ideale:

- compressione adiabatica, con una pompa ad acqua
- riscaldamento isobaro, in un bollitore
- espansione adiabatica, nella turbina a vapore
- raffreddamento isobaro, in un condensatore

**Ciclo di Rankine con vapore surriscaldato.** Per evitare una formazione eccessiva di frazione liquida negli ultimi stadi della turbina, e ridurre problemi di corrosione, il riscaldamento del vapore non si limita a arrivare al vapore saturo ma riscalda ulteriormente il fluido, nella regione di vapore surriscaldato.

**Ciclo di Rankine con riscaldamento multiplo.**

**Ciclo di Rankine con rigenerazione.** La rigenerazione prevede l'uso di turbine in serie, dalle quali viene sottratto calore per pre-riscaldare e ridurre quindi il calore netto richiesto dal bollitore.

**Ciclo combinato.** Le centrali termoelettriche più moderne prevedono un ciclo combinato di un ciclo a gas Joule-Brayton e di un ciclo Rankine a vapore: in particolare, il calore rilasciato dal ciclo a gas viene ceduto al ciclo a vapore.

**16.4.2 Cicli termodinamici inversi**



## 17. Trasmissione del calore

### 17.1 Conduzione

La conduzione è un meccanismo di trasmissione del calore che avviene nei solidi e nei fluidi. La conduzione del calore in un solido è descritto dall'**equazione di Fourier**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (17.1)$$

### 17.2 Convezione

La convezione è il meccanismo di trasmissione del calore principale nei fluidi.

### 17.3 Irraggiamento

L'irraggiamento è un meccanismo di trasmissione del calore nel vuoto.



# VI Elettromagnetismo

<b>18</b>	<b>Fondamenti</b> .....	<b>85</b>
18.1	Introduzione storica .....	85
18.2	Esperienze .....	86
18.3	Esperienze e leggi fondamentali .....	86
18.4	Equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana .....	89
<b>19</b>	<b>Approssimazione circuitale</b> .....	<b>91</b>
19.1	Circuiti elettrici .....	91
19.2	Circuiti magnetici .....	92
<b>20</b>	<b>Applicazioni</b> .....	<b>93</b>
20.1	Strumenti per la misura di grandezze elettromagnetiche .....	93
20.2	Trasformatori, motori e generatori .....	93
<b>21</b>	<b>Onde elettromagnetiche</b> .....	<b>95</b>
<b>22</b>	<b>Ottica</b> .....	<b>97</b>



## 18. Fondamenti

### 18.1 Introduzione storica

- prime esperienze con cariche elettriche e magneti
- Franklin
- **Chalres–Augustin de Coulomb** (1736-1806): nel 1784 pubblica sulle sue forze tra due cariche elettriche
- **Alessandro Volta** (1745-1827):
- negli esperimenti del 1802 **Gian Domenico Romagnosi** (1761-1835) e del 1820 **Hans Christian Oersted** (1777-1851) osservano che la corrente elettrica produce un campo magnetico, interagendo con magneti posti nelle vicinanze
- **André–Marie Ampère** ripete l'esperimento di Oersted e presenta la legge che lega l'intensità del campo magnetico nello spazio in funzione della corrente elettrica nel filo. Questa legge verrà corretta e completata da Maxwell
- nel 1820 **Jean–Baptiste Biot** (1774-1862) e **Félix Savart** (1791-1841) pubblicano i risultati dei loro esperimenti che l'intensità del campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente con l'intensità della corrente.
- **Michael Faraday** (1791-1867), di estrazione sociale più che umile, nella società classista inglese di inizi '800 grazie a coincidenze fortuite, riesce a studiare e lavorare presso la Royal Institution alle dipendenze di Humphry Davy, inizialmente dedicandosi alla chimica e successivamente all'elettromagnetismo:
  - dispositivi che rappresentano i primordi dei motori elettrici
  - nel 1831 riprende gli studi sull'**induzione elettromagnetica**, principio alla base di molti componenti elettrici (motori, generatori e trasformatori): induzione tra circuiti (primordi di trasformatore), campo elettrico indotto da un campo magnetico variabile (ad esempio generato da un magnete in movimento): questo fenomeno fisico viene successivamente formalizzato nella **legge di Faraday–Neumann–Lenz**
  - studi sulla distribuzione di cariche nei conduttori, che portano alla gabbia di Faraday
- **James Clerk Maxwell** (1831-1879)
  - nel 1861 si accorge di un termine mancante nella legge di Ampère, la **corrente di spostamento**. Nel 1865 pubblica le equazioni dell'elettromagnetismo aggiornate, ora note come **equazioni di Maxwell** in *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, testo nel quale ricava le **equazioni delle onde per**

il campo elettromagnetico.

- nel 1873 pubblica *A Treatise on Electricity and Magnetism* unificando tutte le conoscenze note ad allora di elettromagnetismo

- **Heindrik Antoon Lorentz** (1853-1928)

## 18.2 Esperienze

- esistenza della carica elettrica ( )
- esistenza dei cambi magnetici
- forza di Coulomb tra due cariche elettriche

## 18.3 Eseprienze e leggi fondamentali

### 18.3.1 Legge di Coulomb

La legge di Coulomb esprime la forza tra due **cariche elettriche puntiformi**. La forza agente sulla carica 2, dovuta alla carica elettrica  $q_1$  ha l'espressione

$$\mathbf{F}_{21} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} . \quad (18.1)$$

dove  $k$  è la costante di Coulomb, che può essere riscritta in funzione di una costante del mezzo, definita costante dielettrica,

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon} \quad (18.2)$$

**Descrizione esperimento.** La forza tra due corpi carichi con carica elettrica moderata è sufficientemente debole da aver richiesto a Coulomb di usare una bilancia di torsione a filo. La bilancia di torsione viene tarata con dei carichi noti, così da poter mettere in relazione l'angolo di torsione  $\theta$  con il momento applicato alla bilancia  $M$ ,  $M(\theta)$ . Nel caso questa sia una relazione di proporzionalità si può scrivere questa relazione usando la rigidezza torsionale,  $\frac{GJ}{L}$ ,

$$M(\theta) = \frac{GJ}{L}\theta . \quad (18.3)$$

Grazie a delle formule di geometria elementari si può ricavare la distanza tra le due sfere in funzione dell'angolo,

$$r = 2R \sin \frac{\theta}{2} , \quad (18.4)$$

dove  $R$  è il raggio della bilancia di torsione.

Assumendo che la forza agisca lungo la congiungente dei centri delle due sfere, il momento di questa forza attorno all'asse della bilancia è

$$M = FR \cos \frac{\theta}{2} \quad (18.5)$$

L'esperimento viene condotto caricando inizialmente le due sfere e riducendo la carica di una delle due sfere di un fattore  $\frac{1}{2}$  toccandola con una sfera identica inizialmente scarica.

### 18.3.2 Il principio di sovrapposizione di cause ed effetti

In molti casi, nell'ambito dei fenomeni elettromagnetici si osserva un comportamento lineare, riassumibile con il principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti.

### 18.3.3 Il campo elettrico, $\mathbf{e}(\mathbf{r})$

**Definizione operativa con carica di prova.** Il campo elettrico può essere definito da un punto di vista operativo tramite l'uso di una carica elettrica di prova, di carica elettrica nota  $q$ . Il campo elettrico in ogni punto  $\mathbf{r}$  dello spazio può essere definito come il rapporto tra la forza  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  (misurabile) agente sulla carica di prova posta in  $\mathbf{r}$  e la carica elettrica di prova  $q^{test}$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q^{test}} . \quad (18.6)$$

Non è difficile osservare che questo rapporto è indipendente dalla carica di prova  $q^{test}$ , essendo la forza  $\mathbf{F}$  proporzionale ad essa.

### 18.3.4 Il campo di spostamento, $\mathbf{d}(\mathbf{r})$

La legge costitutiva di un mezzo lineare isotropo stabilisce la relazione tra il campo elettrico  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  e il campo di spostamento  $\mathbf{d}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r}) . \quad (18.7)$$

### 18.3.5 Il potenziale del campo elettrico

### 18.3.6 Legge di conservazione della carica elettrica

La forma integrale della legge di conservazione della carica elettrica per un volume di controllo fisso  $V$  postula che la variazione di carica  $Q_V$  all'interno del volume  $V$  è uguale al flusso di carica netto entrante  $-\Phi_{\partial V}(\mathbf{j})$  nel volume attraverso la sua frontiera  $\partial V$ ,

$$\frac{d}{dt}Q_V = -\Phi_{\partial V}(\mathbf{j}) , \quad (18.8)$$

avendo indicato con  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ , la densità di corrente elettrica come prodotto della densità di carica per la velocità media locale delle cariche. Essendo la carica totale  $Q_V$  la somma di tutte le cariche interne al volume (che per una distribuzione continua prende la forma di integrale  $Q_V = \int_V \rho$ ), si può riscrivere il bilancio integrale come

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 . \quad (18.9)$$

Se le grandezze coinvolte hanno una distribuzione sufficientemente regolare, si può ricavare il bilancio di carica elettrica in forma differenziale,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (18.10)$$

### 18.3.7 Legge di Gauss per il campo elettrico

Sfruttando il principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti, la definizione di campo elettrico e la legge di Coulomb per una carica elementare,

$$d\mathbf{d}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \rho(\mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV_0 , \quad (18.11)$$

si può scrivere il campo totale nel punto  $\mathbf{r}$  generato da tutte le cariche con distribuzione  $\rho(\mathbf{r}_0)$  nei punti  $\mathbf{r}_0$  del volume  $V_0$  come

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \int_{V_0} d\mathbf{d}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \int_{V_0} \frac{1}{4\pi} \rho(\mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV_0 , \quad (18.12)$$

e il flusso del campo  $\mathbf{d}(\mathbf{r})$  attraverso la frontiera del volume  $V$  diventa

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial V}(\mathbf{d}(\mathbf{r})) &= \oint_{\partial V} \mathbf{d}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \int_{V_0} \rho(\mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dV_0 dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \rho(\mathbf{r}_0) \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS dV_0 =\end{aligned}\quad (18.13)$$

Si riconosce l'integrale dell'angolo solido di una superficie chiusa

$$\oint_{\partial V} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS =: E_{\partial V}(\mathbf{r}_0) = \begin{cases} 4\pi & \text{se } \mathbf{r}_0 \in V \\ 2\pi & \text{se } \mathbf{r}_0 \in \partial V \\ 0 & \text{se } \mathbf{r}_0 \notin V \cup \partial V \end{cases} \quad (18.14)$$

Il valore di questo integrale seleziona i punti carichi dello spazio che contribuiscono al flusso netto del campo  $\mathbf{d}$  attraverso la frontiera  $\partial V$ : tra tutti i punti dello spazio, contribuiscono al flusso solo quelli interni alla frontiera  $\partial V$ ,

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial V}(\mathbf{d}(\mathbf{r})) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \rho(\mathbf{r}_0) \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS dV_0 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \rho(\mathbf{r}_0) E_{\partial V}(\mathbf{r}_0) dV_0 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V \cap V_0} \rho(\mathbf{r}_0) \underbrace{E_{\partial V}(\mathbf{r}_0)}_{=4\pi, \mathbf{r}_0 \in V} dV_0 + \frac{1}{4\pi} \int_{V_0 \setminus V} \rho(\mathbf{r}_0) \underbrace{E_{\partial V}(\mathbf{r}_0)}_{=0, \mathbf{r}_0 \notin V} dV_0 = \\ &= \int_{V \cap V_0} \rho(\mathbf{r}_0) dV_0 = Q_V^{int}\end{aligned}\quad (18.15)$$

La legge di Gauss per il flusso del campo di spostamento diventa quindi in forma integrale

$$\Phi_{\partial V}(\mathbf{d}) = Q_V^{int}, \quad (18.16)$$

e, se i campi sono sufficientemente regolari, in forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho. \quad (18.17)$$

### 18.3.8 Legge di Gauss per il campo magnetico

$$\Phi_{\partial V}(\mathbf{b}) = 0, \quad (18.18)$$

e, se i campi sono sufficientemente regolari, in forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (18.19)$$

### 18.3.9 Legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$\Gamma_{\partial S}(\mathbf{e}) + \dot{\Phi}_S(\mathbf{b}) = 0 \quad (18.20)$$

e, se i campi sono sufficientemente regolari, in forma differenziale

$$\nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (18.21)$$

### 18.3.10 Legge di Ampère-Maxwell

$$\Gamma_{\partial S}(\mathbf{h}) - \dot{\Phi}_S(\mathbf{d}) = \Phi_S(\mathbf{j}) \quad (18.22)$$

e, se i campi sono sufficientemente regolari, in forma differenziale

$$\nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{j}. \quad (18.23)$$



## 18.4 Equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana

### Equazione di continuità per la carica elettrica

$$\frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho = \oint_{\partial v_t} \underbrace{\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{\mathbf{j}^*} \quad (18.24)$$

### Legge di Gauss per il campo $\mathbf{d}(\mathbf{r})$

$$\oint_{\partial v_t} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v_t} \rho \quad (18.25)$$

### Legge di Gauss per il campo $\mathbf{b}(\mathbf{r})$

$$\oint_{\partial v_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (18.26)$$

### Legge di Faraday–Neumann–Lenz

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt} \int_{s_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{s_t} \partial_t \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial s_t} \mathbf{u}_b \times \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{t}} = (\dots) = \\ &= \int_{s_t} \partial_t \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial s_t} [\mathbf{e} - \mathbf{b} \times \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\ &= \int_{s_t} \partial_t \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial s_t} \mathbf{e}^* \cdot \hat{\mathbf{t}} = \end{aligned} \quad (18.27)$$

### Legge di Ampère–Maxwell

$$\begin{aligned} \oint_{s_t} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt} \int_{s_t} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} - \int_{s_t} \partial_t \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial s_t} \mathbf{u}_b \times \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{t}} = (\dots) = \\ &= \int_{s_t} \partial_t \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial s_t} [\mathbf{h} + \mathbf{d} \times \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\ &= \int_{s_t} \partial_t \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial s_t} \mathbf{h}^* \cdot \hat{\mathbf{t}} = \end{aligned} \quad (18.28)$$

### Schema del capitolo

- carica e corrente elettrica, magneti:
  - esperimenti fondamentali
  - definizioni operative di campi elettrico e magnetico con cariche e bussole di prova
- definizioni di flusso e circuitazione
- principi
  - Equazioni di Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{\partial V^*}(\mathbf{d}^*) = Q_{V^*}^{int} \\ \Gamma_{\partial S^*}(\mathbf{e}^*) + \frac{d}{dt} \Phi_{S^*}(\mathbf{b}^*) = 0 \\ \Phi_{\partial V^*}(\mathbf{b}^*) = 0 \\ \Gamma_{\partial S^*}(\mathbf{h}^*) - \frac{d}{dt} \Phi_{S^*}(\mathbf{d}^*) = \Phi_{S^*}(\mathbf{j}) \end{array} \right. \quad (18.29)$$

- continuità della carica elettrica

$$\frac{d}{dt}Q_{V^*}^{int} + \Phi_{\partial V^*}(\mathbf{j}^*) = 0 \quad (18.30)$$

- approssimazione circuitale

## 19. Approssimazione circuitale

### 19.1 Circuiti elettrici

#### 19.1.1 Componenti

##### 19.1.1.1 Resistore lineare

In un materiale la cui legge costitutiva è lineare

$$\mathbf{e} = \rho_R \mathbf{j} , \quad (19.1)$$

assumendo proprietà uniformi lungo un tubo di flusso del campo vettoriale, e svolgendo l'integrale di linea lungo il tubo di flusso

$$Av = \int_S \int_\ell \nabla v \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_V \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_S \int_\ell \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_\ell \int_S \rho_R \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \rho_R Li \quad (19.2)$$

$$v = \frac{\rho_R L}{A} i = R i , \quad (19.3)$$

avendo definito  $R = \frac{\rho_R L}{A}$  la resistenza elettrica di un materiale con resistività  $\rho_R$  di lunghezza e sezione  $A$ .

##### 19.1.2 Induttore

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (19.4)$$

##### 19.1.3 Condensatore

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (19.5)$$

##### 19.1.4 Leggi ai nodi e leggi alle maglie

###### 19.1.4.1 Legge ai nodi

Dall'equazione della continuità della carica elettrica

$$\dot{Q}_V = -\Phi_{\partial V}(\mathbf{j}) = \sum_k i_k , \quad (19.6)$$

se una regione del circuito non ha la capacità di immagazzinare carica elettrica,  $\dot{Q}_V = 0$ , segue

$$\sum_k i_k = 0 . \quad (19.7)$$

#### 19.1.4.2 Legge alle maglie

Lungo un circuito chiuso che si trova in una regione dello spazio dove il campo magnetico è assente, la legge di Faraday diventa

$$\oint_{\ell} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0 , \quad (19.8)$$

e il campo elettrico può essere espresso come gradiente del potenziale elettrico  $\mathbf{e} = -\nabla v$ , e quindi è possibile riscrivere la legge di Faraday

$$0 = \oint_{\ell} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = - \oint_{\ell} \nabla v \cdot \hat{\mathbf{t}} = - \sum_k \int_{\ell_k \subset \ell} \nabla v \cdot \hat{\mathbf{t}} = - \sum_k v_k \quad (19.9)$$

### 19.1.5 Regimi

#### 19.1.5.1 Stazionario

#### 19.1.5.2 Instazionario transitorio

#### 19.1.5.3 Instazionario periodico

### 19.2 Circuiti magnetici

## **20. Applicazioni**

**20.1** Strumenti per la misura di grandezze elettromagnetiche

**20.2** Trasformatori, motori e generatori



## **21. Onde elettromagnetiche**





## 22. Ottica



# La struttura della materia – cenni



<b>23</b>	<b>Cronologia</b> .....	<b>101</b>
<b>24</b>	<b>Radioattività</b> .....	<b>105</b>
24.1	Storia .....	105
24.2	Decadimenti nucleari .....	105
<b>25</b>	<b>Struttura della materia</b> .....	<b>107</b>



## 23. Cronologia

**Fluorescenza e fosforescenza.** Sono entrambi meccanismi di rilassamento di un atomo che si trova in uno stato eccitato.

- la fluorescenza si interrompe immediatamente quando si interrompe la sorgente di eccitazione; è dovuta a una conversione *singoletto-singoletto*
- la fosforescenza continua per un determinato lasso di tempo dopo lo spegnimento della sorgente di eccitazione; è dovuta a una conversione *tripletto* e successivamente al decadimento allo stato fondamentale di *singoletto*

**Definizione 23.1 — Fluorescenza.** È la proprietà di un materiale di rimettere le radiazioni elettromagnetiche assorbite. Di solito, vengono assorbite radiazioni nell'ultravioletto e rimesse nel visibile. Descritta nel 1845 da John Herschel, può essere compresa solo con le conoscenze della struttura atomica del XX secolo.

L'effetto si interrompe immediatamente quando cessa la fonte di energia.

**Definizione 23.2 — Fosforescenza.** L'effetto continua per un lasso di tempo dopo lo spegnimento della fonte di energia.

### Studi su radioattività

- nel 1895 Röntgen scopre i raggi X
  - nel 1896 Becquerel scopre la radioattività naturale dell'uranio, durante uno studio sulla relazione tra fosforescenza e raggi X; osserva il decadimento- $\beta$
  - nel 1898 Marie e Pierre Curie scoprono gli elementi radioattivi polonio e radio
  - nel 1898 Rutherford osserva il decadimento- $\alpha$
  - nel 1900 Villard osserva il decadimento- $\gamma$
  - in seguito agli studi di Rutherford, i decadimenti nucleari vengono classificati in 3 classi principali
    - decadimento- $\alpha$
    - decadimento- $\beta$
    - decadimento- $\gamma$
- alle quali successivamente si aggiungono
- emissione di neutroni
  - emissione di protoni
  - fissione spontanea

### Studi su tubi a vuoto e raggi

- **William Crookes** conduce una serie di ricerche sulla conduzione elettrica nei gas a

bassa pressione (nei tubi di Crooks), osservando i cosiddetti *raggi catodi*, poi scoperti essere raggi di elettroni

- **J.J. Thomson** riconosce l'elettrone nei raggi catodici, misurandone il rapporto  $\frac{\text{carica}}{\text{massa}}$ , costante al variare del gas usato nei tubi a vuoto
- **Eugen Goldstein** conduce esperimenti sui raggi catodici, insieme al fisico **Wilhelm Wien**. Riconosce l'esistenza di una corrente di particelle cariche positive in direzione inversa, i raggi anodici. A differenza degli elettroni nei raggi catodici, queste correnti positive dipendono dal gas all'interno del tubo, misurandone il rapporto  $\frac{\text{carica}}{\text{massa}}$ : riconoscendo il rapporto massimo usando l'idrogeno come gas, si può considerare questa la prima osservazione dei protoni, cioè di ioni  $\text{H}^+$ . Questi lavori gettano le basi per la spettrografia di massa.

### Studi sulla struttura della materia Cronologia degli studi

- filosofi greci: natura discreta della materia, esistenza del vuoto?
- **Evangelista Torricelli**, '600, esperimenti sulla pressione nei liquidi, acqua e mercurio: barometro di Torricelli, creazione del vuoto
- **Robert Boyle**, ultimo degli alchimisti e primo dei chimici ("toglie la "al" davanti a "chimia"). Descrizione precisa degli esperimenti, in modo tale da poter essere replicati. Pubblica un trattato che può essere considerato il primo testo di chimica. Indagini sulla natura discreta della materia. Legge di Boyle: "l'aria si comporta come una molla", a  $T$  costante,  $\Delta P = K \Delta \left(\frac{1}{V}\right)$
- **Daniel Bernoulli** pubblica *Hydrodynamica*, nel quale presenta un'embrionale **teoria cinetica dei gas**: immagina i gas composto da una moltitudine di particelle in moto; la pressione su una parete è generata dagli urti delle particelle su di essa.
- **Antoine Lavoisier** (1743-1794), il più importante chimico del secolo. Importanza della misura del peso di reagenti e prodotti. Formula la **legge di conservazione della massa**, valida in fisica classica.
- **Robert Brown** (1773-1858) osserva il moto dei pollini al microscopio, successivamente chiamato moto browniano.
- Berthollet si chiede se le sostanze chimiche hanno una composizione definita
- Joseph Proust analizza il carbonato basico di rame dei tetti (malachite), riprodotta in laboratorio a partire dal rame: tutti e 3 i campioni hanno la stessa composizione, rispondendo a Berthollet: le sostanze hanno una composizione definita. **ma come fa ad analizzare la composizione delle sostanze? Tramite reazioni?**
- **John Dalton** (1766-1844). Durante i suoi studi di botanica, scopre di non percepire i colori come i suoi colleghi: si accorge quindi di quello che chiamiamo daltonismo. Riprende gli studi di Lavoisier e Proust, dai quali parte per le sue analisi chimiche, i cui risultati sono pubblicati nei *Sistemi di filosofia chimica*: scopre che c'è sempre **un rapporto molto semplice** (tra interi "piccoli") tra i componenti elementari delle sostanze. Questa osservazione gli permette di formulare la sua teoria atomica. Inoltre spiega come pesare gli atomi in relazione all'atomo di idrogeno, ma purtroppo ne sbaglia la formula molecolare.
- **Gay-Lussac**: esperimenti sui gas, legati alla sua passione per le mongolfiere. Compie esperimenti concentrandosi sulla misura del volume: ad esempio, facendo reagire  $\text{H}$ ,  $\text{Cl}$  per ottenere  $\text{HCl}$ , serve esattamente un litro di  $\text{H}$  e un litro di  $\text{Cl}$  per ottenere un litro di  $\text{HCl}$ ;  $2\text{l H}_2 + 1\text{l O}_2$  per ottenere  $2\text{l di H}_2\text{O}$ . Dibattito con Dalton sulle proporzioni nella reazione dell'acqua (dovuta agli esperimenti errati di Dalton, e all'errore logico e di autorità "sono sbagliati i tuoi esperimenti perché non sono in accordo con la mia teoria")
- **Amedeo Avogadro** (1776-1856) leggendo gli studi di Gay-Lussac, deduce la legge

che prende il suo nome: *Volumi uguali di gas nelle stesse condizioni di temperatura e pressione contengono lo stesso numero di molecole*, trovando la corretta composizione di idrogeno, ossigeno, acqua e la relazione bilanciata



Il suo lavoro rimane sconosciuto. La confusione dovuta agli studi sbagliati di Dalton continua.

- Liebig e Wholer (1824) sintetizzano due sostanze con la stessa composizione
- Berzelius: notazione moderna degli elementi. Controlla gli esperimenti di Liebig e Wholer e conferma che si ottengono due sostanze diverse con la stessa composizione, e gli dà il nome di **isomeri**: non solo la composizione, ma anche la loro disposizione all'interno degli atomi
- **Stanislao Cannizzaro** (1860) incaricato di tenere un corso universitario all'università di Genova, scrive delle dispense che, riprendendo il lavoro di Avogadro, cercano di dipanare la gran confusione presente allora in chimica e le pubblica come un corso di filosofia chimica.
- la fisica sviluppa teorie della termodinamica, incluse le leggi della trasmissione del calore, e dell'elettromagnetismo che prevedono che la materia sia continua e infinitamente divisibile.
- **Rudolf Clausius** si pone la domanda: come si muovono gli atomi? Domanda che ai chimici poco interessava. Nel 1857 pubblica un lavoro sulla teoria cinetica dei gas legando la temperatura dei gas con la velocità media delle particelle, prevedendo delle velocità enormi,  $\sim 500m/s$ . Le molecole si urtano tra di loro.
- **James Clerk Maxwell** sviluppa la teoria cinetica dei gas, prevedendo la distribuzione di velocità delle molecole in un fluido
- **Ludwig Boltzmann** (1844-1906) partendo dagli studi di Maxwell, con i suoi sviluppi fonda quella che oggi conosciamo come Meccanica Statistica. Diatriba con Mach sulla natura atomica della materia. Debole psicologicamente, si toglie la vita a Trieste a inizio '900.
- nel 1905, Einstein pubblica il lavoro sul moto browniano per una spiegazione del moto del polline osservato da Brown: non si riesce a vedere il moto delle molecole d'acqua, ma l'effetto dei loro urti sul polline. Perrin, compie un esperimento che lega la teoria matematica di Einstein sul moto browniano e le osservazioni sul polline.
- ...
- **J.J. Thomson** studi sui raggi catodici:
  - 1897: scoperta dell'elettrone, e stima del rapporto  $\frac{\text{massa}}{\text{carica}}$
  - modello atomico “a panettone”
  - scoperta degli isotopi

A Thomson sono dovute la scoperta della radioattività naturale del potassio e che l'atomo di idrogeno ha un solo elettrone.

- **Ernest Rutherford** (1871-1937)
  - lavori sulla radioattività:
    - studio sulla radioattività di torio, uranio e radio
    - studi sul tempo di dimezzamento (o emivita) nei processi radioattivi
  - lavori sulla struttura atomica
    - esperimenti di Geiger–Marsden: bombardamento con particelle- $\alpha$  di una lamina d'oro
    - nel 1911 Rutherford interpreta lo scattering delle particelle- $\alpha$  su uno schermo fluorescente (solfuro di zinco), e propone il modello di atomo, con un nucleo positivo compatto

- nel 1919 viene scoperto il protone
- nel 1910 **Robert Millikan** pubblica i risultati dei suoi studi che consentono la misura la carica dell'elettrone con l'esperimento della goccia d'olio
- **James Chadwick** scopre il neutrone nel 1932
- ...
- 1981: microscopi a forza atomica

### Riferimenti

- conferenza di Dario Bressanini, *Vedere gli atomi con la mente – La scoperta degli atomi*
- video dell'IBM sul film più piccolo al mondo, *A boy and his atom*

Capitoli successivi:

- Prerequisiti:
  - fluorescenza
  - fosforescenza
- Esperimenti:
  -



## 24. Radioattività

### 24.1 Storia

### 24.2 Decadimenti nucleari

#### 24.2.1 Decadimento- $\alpha$

Osservati da Rutherford nel 1899. Un nucleo instabile emette una particella- $\alpha$ , cioè un nucleo di elio  ${}^4\text{He}$ , composto da 2 protoni e due neutroni

$$A_1(Z, N) \rightarrow A_2(Z - 2, N - 2) + \alpha \quad (24.1)$$

È un fenomeno che si manifesta come la tendenza di tutti i sistemi fisici a convergere verso condizioni stabili di energia minima, che si manifesta principalmente per elementi transuranici con  $A > 210$ , tramite l'*effetto tunnel*.

#### 24.2.2 Decadimento- $\beta$

Osservati da Becquerel nel 1896. La radiazione emessa è di elettroni.

Si possono distinguere 3 tipi di decadimento- $\beta$ :

- decadimento positivo

$$A(Z, N) \rightarrow A(Z - 1, N + 1) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (24.2)$$

- decadimento negativo

$$A(Z, N) \rightarrow A(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (24.3)$$

- cattura elettronica

$$A(Z, N) + e^- \rightarrow A(Z - 1, N + 1) + \nu_e \quad (24.4)$$

Esempio

$${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{27}\text{Ni}^* + e^- + \bar{\nu}_e \quad (24.5)$$

#### 24.2.3 Decadimento- $\gamma$

Osservati da Villard nel 1900. La radiazione è composta da fotoni, quanti di radiazione elettromagnetica, non da materia. Non essendo composti da materia, hanno un potere

ionizzante minore, e per una loro schermatura servono spessori maggiori. I raggi- $\gamma$  sono prodotti da transizioni nucleari o subatomiche.

Esempio



In termini di ionizzazione, la radiazione- $\gamma$  interagisce con la materia in tre modi principali:

- l'effetto fotoelettrico
- lo scattering di Compton
- la creazione di coppie

#### **24.2.4 Emissione di neutroni**

#### **24.2.5 Emissione di protoni**

#### **24.2.6 Fissione spontanea**

È un processo di decadimento tipico di isotopi pesanti

## 25. Struttura della materia

**Esperimento di Thomson.** Possiamo riassumere l'idea dell'esperimento di Thomson analizzando la deviazione di una carica in movimento quando attraversa una regione dello spazio dove è presente un campo magnetico.

- Velocità iniziale della carica in moto:  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$
- traiettoria della carica soggetta alla forza di Lorentz in una regione di spazio con campo elettromagnetico uniforme

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^{Lorentz} = q(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{v}) = q(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{r}}) . \quad (25.1)$$

- solo campo elettrico trasversale al moto,  $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = qE \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} Et^2 \end{cases} \quad (25.2)$$

Se la lunghezza in direzione  $x$  della regione in cui il campo elettrico non è trascurabile è  $L$ , la particella raggiunge questo punto in  $t^* = \frac{L}{v}$  la velocità della particella carica in  $x = L$  è

$$\begin{cases} u(t^*) = v \\ v(t^*) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \left(\frac{L}{v}\right)^2 \end{cases} \quad (25.3)$$

- solo campo magnetico trasversale al moto,  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -qB\dot{z} \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qB\dot{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 \dot{x} = 0 \\ y(t) = 0 \\ \ddot{z} + \left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 \dot{z} = 0 \end{cases} \quad (25.4)$$

$$\begin{cases} \ddot{u} + \left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 u = 0 \\ y(t) = 0 \\ \ddot{w} + \left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 w = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(t) = A_u \cos(\Omega t) + B_u \sin(\Omega t) \\ v(t) = 0 \\ w(t) = A_w \cos(\Omega t) + B_w \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (25.5)$$

$$\begin{cases} v = u(0) = A_u \\ 0 = \dot{u}(0) = 0 \\ 0 = w(0) = A_w \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v}{\Omega} \sin(\Omega t) - \frac{B_u}{\Omega} \cos(\Omega t) + C_u \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{B_w}{\Omega} \cos(\Omega t) + C_w \end{cases}$$

$$(25.6)$$

$$\begin{cases} 0 = x(0) = -\frac{B_u}{\Omega} + C_u \\ 0 = y(0) = 0 \\ 0 = z(0) = -\frac{B_w}{\Omega} + C_w \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v}{\Omega} \sin(\Omega t) + \frac{B_u}{\Omega} [1 - \cos(\Omega t)] \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{B_w}{\Omega} [1 - \cos(\Omega t)] \end{cases} \quad (25.7)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} + \Omega \dot{z} = \\ &= -v\Omega \sin(\Omega t) + B_u \Omega \cos(\Omega t) + \Omega [B_w \sin(\Omega t)] \end{aligned} \quad (25.8)$$

$$\rightarrow B_w = v, \quad B_u = 0. \quad (25.9)$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v}{\Omega} \sin(\Omega t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{v}{\Omega} [1 - \cos(\Omega t)] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v}{B} \frac{m}{q} \sin\left(\frac{q}{m} B t\right) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{v}{B} \frac{m}{q} [1 - \cos\left(\frac{q}{m} B t\right)] \end{cases} \quad (25.10)$$

**Esperimento di Millikan.** Esperimento delle gocce d'olio. La resistenza aerodinamica agente su un corpo di piccole dimensioni è proporzionale alla velocità,

$$\mathbf{F} = -c\mathbf{v}. \quad (25.11)$$

L'equazione del moto in direzione verticale (con l'asse positivo verso il basso) di una particella d'olio in un campo elettrico  $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$  è

$$m\ddot{z} = mg - c\dot{z} + qE \rightarrow m\dot{v} + cv = mg \quad (25.12)$$

L'integrazione delle equazioni differenziali con velocità iniziale  $v(0) = v_0$  porta all'espressione della velocità delle particelle d'olio,

$$v(t) = \frac{mg + qE}{c} + \left(v_0 - \frac{mg + qE}{c}\right) e^{-\frac{c}{m}t}. \quad (25.13)$$

Le velocità limite nel caso di campo elettrico nullo o campo elettrico acceso sono,

$$v_{\infty,0} = \frac{mg}{c}, \quad v_{\infty} = \frac{mg + qE}{c}. \quad (25.14)$$

Dal confronto delle due velocità, si può calcolare la carica delle particelle,

$$\rightarrow \frac{qE}{c} = v_{\infty} - v_{\infty,0} \rightarrow q = \frac{c}{E} (v_{\infty} - v_{\infty,0}). \quad (25.15)$$

Il campo elettrico  $E$  è regolabile nell'esperimento, le velocità limite  $v_{\infty}$ ,  $v_{\infty,0}$  possono essere misurate, il coefficiente di resistenza  $c$  può essere stimato dalla legge di Stokes per delle sfere minuscole

$$c = 6\pi \mu r \quad (25.16)$$

# Relatività di Einstein – cenni



## Relatività



# Meccanica quantistica – cenni



	<b>Bibilografia</b> .....	<b>113</b>
	<b>Indice</b> .....	<b>115</b>
	<b>Appendices</b> .....	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Prima appendice</b> .....	<b>115</b>





## Bibiliografia



## A. Prima appendice

...