Scuole superiori

Matematica

OSB

Latest version 6 ottobre 2023

Indice

Introduzione

1. Aspetti studiati in matematica

2. Approccio alla matematica

2.1 Formulazione e soluzione di un problema

Una volta formulato un problema, ci si chiede:

- il problema ammette soluzione?
- se il problema ammette soluzione, la soluzione è unica?
- se la soluzione non è unica, quante soluzioni esistono?

Esempi

3. Breve storia della matematica

...

XVI secolo

- Nepier (Nepero) introduce i logaritmi

XVII secolo

- Fermat
- Descartes (Cartesio) illustra ne *La Gèometrie* i fondamenti della **geometria analitica**
- Huygens, Pascal
- Newton e Leibniz sviluppano contemporaneamente i fondamenti del **calcolo differenziale** e **integrale**, nell'ambito dello studio della **dinamica**
- fratelli Johann e Jakob Bernoulli
- de l'Hopital, Taylor

XVIII secolo

- Euler (Eulero): analisi matematica; soluzione equazioni differenziali; teoria dei numeri; analisi complessa (estensione di funzioni reali in ambito complesso; identità di Eulero); topologia e teoria dei grafi (problema die 7 ponti di Konigsberg)
- d'Alembert si dedica allo studio del moto dei corpi e lla meccanica razionale
- Legendre
- Bayes: probabilità
- istituzione di scuole scientifiche, Parigi importante centro scientifico del tempo
- Laplace: meccanica razionale e celeste (*Mécanique Céleste*); trasformata; calcolo differenziale: potenziale, laplaciano ed equazione di Laplace
- Lagrange: formulazione lagrangiana della meccanica (*Mécanique analytique*); calcolo delle variazioni; metodo dei moltiplicatori di Lagrange; teoria dei numeri

XIX secolo

- Jacobi: algebra lineare (determinante di matrici)
- Cauchy: algebra lineare; analisi complessa; statistica; teoria dei numeri; meccanica dei solidi
- Fourier: studio della trasmissione del calore; serie e trasformata di Fourier
- Gauss: teorema fondamentale dell'algebra; teoria dei numeri
- Dirichlet:
- Riemann: teoria dei numeri; geometria
- Hamilton: quaternioni; algebra lineare (teorema di Cayley-Hamilton); riformulazione della meccanica lagrangiana nella meccanica hamiltoniana

- Wierestrass: definizione rigorosa dei fondamenti dell'analisi (teorema di Weierstrass su esisteanza di minimi e massimi di funzioni a variabile reale)
- Boole: algebra sugli insiemi, logica, e teoria dell'informazione
- Peano: tentativo di definizione assiomatica della matematica
- Cantor: studio degli insiemi infiniti e la loro dimensione

XX secolo

- la matematica della probabilità e della meccanica quantistica: Lebesgue, Hilbert, von Neumann, Kolmogorov
- la nascita dell'informatica: Turing, Von Neumann
- la teoria dell'informazione: Shannon
- la teoria dei giochi: von Neumann, Morgestern e Nash
- l'incompletezza della matematica: Godel

II Insiemistica e Logica

4. Logica

4.1 Logica proposizionale

4.1.1 Prime definizioni

Definizione 4.1 — Proposizione. In matematica, una proposizione è un'affermazione che si può stabilire senza dubbi se è vera o falsa.

Definizione 4.2 — Valore di verità. In logica classica esistono solo due valori di verità: vero (V), falso(F). Il valore di verità di una frase stabilisce se la frase è vera o falsa.

Ma cos'è il vero e cos'è il falso?

Definizione 4.3 — Tavola di verità. Una tavola diverità rappresenta tutte le possibili combinazioni delle proposizioni coinvolte.

■ **Esempio 4.1** Può risultare utile separare le proposizioni indipendenti, dalle proposizioni dipendenti da queste. Ad esempio, indicando con p_1, p_2 due proposizioni indipendenti, e $f_1(p_1,p_2)$, $f_2(p_1,p_2)$, $f_3(p_1,p_2)$ tre proposizioni dipendenti da queste

p_1	p_2	$f_1(p_1,p_2)$	$f_2(p_1,p_2)$	$f_3(p_1,p_2)$
V	V	f_1(V,V)	f_2(V,V)	f_3(V,V)
V	F	f_1(V,F)	f_2(V,F)	f_3(V,F)
F	V	f_1(F,V)	f_2(F,V)	f_3(F,V)
F	F	f_1(F,F)	f_2(F,F)	f_3(F,F)

■

Uso delle tavole di verità. Le tavole di verità sono utili per stabilire se due espressioni sono logicamente equivalenti.

Definizione 4.4 — Identità. Un'identità è una proposizione che è sempre vera.

Definizione 4.5 — Contraddizione. Una contraddizione è una proposizione che è sempre falsa.

4.1.2 Connettivi logici e calcolo proposizionale

Definizione 4.6 — Negazione. La negazione $\overline{p}$ di una proposizione p ne inverte il valore di verità.

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Definizione 4.7 — Congiunzione. La congiunzione $p \wedge q$ di due proposizioni è vera se e solo se entrambe sono vere.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definizione 4.8 — Disgiunzione. La disgiunzione $p \vee q$ di due proposizioni è falsa se e solo se entrambe sono false.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definizione 4.9 — Implicazione logica. L'implicazione logica $p \to q$ produce una proposizione falsa se e solo se p è vera e q è falsa.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condizione sufficiente e condizione necessaria. L'implicazione logica $p \to q$ tra due proposizioni p, q consente di dare una definizione di condizione sufficiente e condizione necessaria:

- p come **condizione sufficiente** per q.
- q come **condizione necessaria** per p.

Definizione 4.10 — Co-implicazione o equivalenza logica. La coimplicazione (o equivalenza) logica $p \leftrightarrow q$ produce una proposizione vera se e solo se p e q hanno lo stesso valore di verità.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Condizione necessaria e sufficiente – equivalenza logica. L'equivalenza logica $p \to q$ tra due proposizioni p, q consente di dare una definizione di condizione necessaria e sufficiente:

- p come **condizione necessaria e sufficiente** per q, e viceversa.

4.1.3 Teoremi e proposizioni

Theorem 4.1 — Leggi di De Morgan. Le due leggi di De Morgan sono:

- prima legge di De Morgan: $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
- seconda legge di De Morgan: $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

Dimostrazione con le tavole della verità della prima legge,

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

e della seconda legge,

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

4.1.4 Tecniche dimostrative

Definizione 4.11 — Deduzione. La deduzione $a \Rightarrow b$ è un processo che, a partire da una proposizione vera a, tramite un processo logico valido, permette di ricavare una proposizione vera b.

$a \rightarrow b$	a	b
V	V	V

Definizione 4.12 — Dimostrazione diretta. Partendo da un'ipotesi I, si dimostra la tesi T tramite un numero finito di deduzioni di proposizioni intermedie $\{p_i\}_{i=1:n}$

$$I \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow T \tag{4.1}$$

$I \rightarrow p_1$	I	p_1
V	V	V

$p_1 \rightarrow p_2$	p_1	p_2
V	V	V

...	...	...
V	V	V

$p_n \rightarrow T$	p_n	T
V	V	V

Definizione 4.13 — Dimostrazione della contronominale. Partendo da un ipotesi I vera e invertendo l'implicazione logica, $I \Rightarrow T$, si vuole quindi dimostrare con dimostrazione diretta la proposizione $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$, detta **contronominale** di $I \Rightarrow T$.

$$(\overline{T} \Rightarrow \overline{I}) \Rightarrow (I \Rightarrow T) \tag{4.2}$$

I	$\overline{T} \rightarrow \overline{I}$	$\overline{I}$	$\overline{T}$	T
V	V	F	F	V

Definizione 4.14 — Dimostrazione per assurdo. Se partendo dall'ipotesi I vera e negando la tesi $\overline{T}$, si arriva a una contraddizione C (una proposizione falsa), allora è veriticata la tesi.

$$\big((I \land \overline{T}) \Rightarrow C\big) \Rightarrow (I \Rightarrow T) \tag{4.3}$$

I	C	$(I \land \overline{T}) \to C$	$(I \land \overline{T})$	$\overline{T}$	T
V	F	V	F	F	V

4.2 Logica predicativa

5. Insiemistica

5.1 Definizioni di base

Definizione 5.1 — Insieme. Un insieme è un gruppo di elementi, oggetti che possono essere di qualsiasi tipo.

Rappresentazioni, notazione ed esempi. Si è soliti indicare gli insiemi con lettere maiuscole. Un insieme S può essere rappresentato

- per **elencazione**: vengono elencati, di solito tra parentesi graffe, tutti gli elementi dell'insieme

$$S = \{\text{elemento}_1, \text{elemento}_2, \ldots, \text{elemento}_N\} \tag{5.1}$$

- per **caratteristica**: viene descritta la condizione che determina gli elementi dell'insieme

$$S = \{x \mid \text{condiizone che determina } x\} \tag{5.2}$$

La condizione può essere una condizione composta da diverse condizioni. Si rimanda agli operatori logici

■ **Esempio 5.1 — Insieme dei mesi.** L'insieme M dei (nomi dei) mesi dell'anno può essere rappresentato come:

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid x \text{ è (il nome di) un mese dell'anno}\} = \\ &= \{\text{gennaio}, \text{febbraio}, \text{marzo}, \text{aprile}, \text{maggio}, \text{giugno}, \\ &\quad \text{luglio}, \text{agosto}, \text{settembre}, \text{ottobre}, \text{novembre}, \text{dicembre}\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

■

■ **Esempio 5.2 — Insieme dei numeri naturali minori di 5.** L'insieme S dei numeri

$$\begin{aligned} S &= \{x \mid x \text{ è un numero naturale minore di } 5\} = \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x < 5\} = \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

■

5.2 Operazioni

5.3 Funzioni

6. Insiemi numerici

6.1 Insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{6.1}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri naturali:
- addizione
- moltiplicazione

6.2 Insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{6.2}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri interi:
- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione

6.3 Insieme dei numeri razionali, $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x | x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\} \tag{6.3}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri razionali:
- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione
- divisione, esclusa la divisione per 0

6.4 Insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$

Esistono dei numeri che non possono essere rappresentati come frazioni di numeri interi. Alcuni di questi numeri compaiono in semplici problemi di geometria, come il calcolo della lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario $\sqrt{2}$ o la lunghezza della circonferenza con raggio unitario π.

■ **Esempio 6.1 — Irrazionalità di $\sqrt{2}$.** Si vuole dimostrare che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, e quindi non essere scritto come rapporto di due numeri interi m, n. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, e arriviamo a una contraddizione.

Per assurdo, quindi supponiamo che si possa scrivere

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \ , \tag{6.4}$$

in forma ridotta ai minimi termini. Questo implica che i numeri m, n non possano essere contemporaneamente numeri pari, poiché altrimenti la frazione potrebbe essere ulteriormente semplificata.

Elevando alla seconda potenza, possiamo scrivere

$$2n^2 = m^2 \tag{6.5}$$

e quindi il numero m deve essere pari, poiché il suo quadrato è pari. Il numero n dovrà allora essere dispari. Poiché il numero m è pari, può essere scritto come $m = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad \to \qquad n^2 = 2k^2 \ . \tag{6.6}$$

Dall'ultima espressione, dobbiamo concludere che il numero n sia anch'esso pari. In questo modo si arriva a una contraddizione, poiché il numero n non può essere contemporaneamente pari e dispari.

Dobbiamo concludedere che la tesi sia vera, e che quindi il numero $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. ■

■ **Esempio 6.2 — Irrazionalità della radice $\sqrt{p}$ di ogni numero primo p.** Si vuole dimostrare che il numero $\sqrt{p}$, con p numero primo, è irrazionale e quindi non può essere scritto come rapporto di due numeri interi m, n. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, e arriviamo a una contraddizione.

Per assurdo, quindi supponiamo che si possa scrivere

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} \ , \tag{6.7}$$

in forma ridotta ai minimi termini. Questo implica che i numeri m, n non possano avere divisori comuni.

Elevando alla seconda potenza, possiamo scrivere

$$pn^2 = m^2 \tag{6.8}$$

e quindi il numero m deve essere un multiplo di p, poiché il suo quadrato contiene il fattore p. Il numero n allora non potrà contenere il fattore p, poiché m ed n non possono avere fattori comuni. Poiché il numero m è pari, può essere scritto come $m = pk$ con $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$pn^2 = m^2 = (pk)^2 = p^2k^2 \qquad \to \qquad n^2 = pk^2 \ . \tag{6.9}$$

Dall'ultima espressione, dobbiamo concludere che il numero n ha un fattore p poiché il suo quadrato contiene il fattore p. In questo modo si arriva a una contraddizione, poiché il numero n non può contemporaneamente avere e non avere un sottomultiplo p.

Dobbiamo concludedere che la tesi sia vera, e che quindi il numero $\sqrt{p}$, con p primo, è un numero irrazionale. ■

6.5 Insieme dei numeri complessi, $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{ z | z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R} \} \tag{6.10}$$

III Algebra in $\mathbb{R}$

7. Algebra simbolica - Calcolo letterale

7.1 Monomi

Definizione 7.1 — Monomio. Un monomio è un'espressione matematica costituita dal prodotto di un coefficiente esplicitamente numerico e una parte letterale, nella quale compaiono unicamente moltiplicazioni e potenze intere.

R Viene richiesto che le potenze della parte letterale siano intere, per evitare di porre delle condizioni sulle basi delle potenze, essendo le potenze non intere definite solo per numeri reali positivi.

Definizione 7.2 — Monomi simili. I monomi simili sono i monomi che hanno la stessa parte letterale.

7.1.1 Somma e differenza

7.1.2 Prodotto e divisione

7.1.3 Potenze e radici

Definizione 7.3 — Potenze e radici intere. La potenza intera di ordine $n \in \mathbb{N}$ di un monomio x è definita come il prodotto di x per se stesso n volte,

$$p_n(x) := x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ volte}} \ . \tag{7.1}$$

L'operazione inversa, quando possibile, è definita come radice di ordine n,

$$x := \sqrt[n]{p_n(x)} = p_n(x)^{\frac{1}{n}} \ . \tag{7.2}$$

R Per una comprensione più completa, bisogna rifarsi all'algebra dei numeri complessi IV.

Definizione 7.4 — Potenze e radici non intere.

7.2 Polinomi

Definizione 7.5 — Polinomio. Un polinomio reale di grado n viene definito come una combinazione lineare dei monomi di grado $\leq n$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{7.3}$$

7.3 Potenze e radici

Definizione 7.6 — Potenze e radici intere.

7.4 Esponenziali e logaritmi

7.4.1 Esponenziale

Definizione 7.7 — Esponenziale. L'elevamento a potenza di un numero a

$$y = a^x \tag{7.4}$$

è un operazione che coinvolge due numeri, a detto base e x detto esponente.

7.4.1.1 Potenze non intere, valori ammissibili

7.4.1.2 Proprietà

Prodotto di potenze con la stessa base

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{7.5}$$

Potenza di potenza

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{7.6}$$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^m b^m = (ab)^m \tag{7.7}$$

7.4.2 Logaritmo

Definizione 7.8 — Logaritmo. Il logaritmo è l'operazione inversa

$$x = \log_a y \qquad \text{se } y = a^x \tag{7.8}$$

7.4.2.1 Potenze non intere, valori ammissibili

7.4.2.2 Proprietà

Somma di logaritmi con la stessa base

$$\log_a m + \log_a n = \log_a (mn) \tag{7.9}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = a^{\log_a m} \\ n = a^{\log_a n} \\ mn = a^{\log_a mn} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{gathered} mn = m \cdot n \\ a^{\log_a mn} = a^{\log_a m} a^{\log_a n} = a^{\log_a m + \log_a n} \end{gathered} \tag{7.10}$$

$$\rightarrow \log_a mn = \log_a m + \log_a n \tag{7.11}$$

Prodotto di un logaritmo per uno scalare

$$b \log_a m = \log_a m^b \tag{7.12}$$

Cambio di base di un logaritmo

$$\log_b m = \log_b a \log_a m \tag{7.13}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = b^{\log_b m} \\ a = b^{\log_b a} \\ m = a^{\log_a m} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a m} = b^{\log_b a \, \log_a m} \end{cases} \tag{7.14}$$

e confrontando le due espressioni per m si ottiene

$$\rightarrow \log_b m = \log_b a \, \log_a m \tag{7.15}$$

7.5 Funzioni armoniche

7.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno

7.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante

7.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \end{aligned} \tag{7.17}$$

7.6 Funzioni iperboliche

8. Equazioni

8.1 Equazioni algebriche

Definizione 8.1 — Equazioni algebriche. ...

8.1.1 Equazioni polinomiali

Definizione 8.2 — Equazione polinomiale. Un'equazione polinomiale ha la forma

$$p(x) = 0 \tag{8.1}$$

dove $p(x)$ è un polinomio. Il **grado** dell'equazione corrisponde al grado del polinomio $p(x)$, cioé alla potenza massima dei monomi. In maniera più esplicita, quindi, si può scrivere un'equazione polinomiale di grado n come

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ , \qquad \text{con } a_n \neq 0 \tag{8.2}$$

Esistenza e numero delle soluzioni. Un'equazione polinomiale di grado n ha **al massimo** n soluzioni reali. L'esistenza di soluzioni reali non è in generale garantita, mentre il **teorema fondamentale dell'algebra** assicura che esistano esattamente n soluzioni complesse di un'equazione polinomiale con coefficienti complessi.

8.1.1.1 Equazioni di primo grado

La forma generale delle equazioni di primo grado è

$$ax + b = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{8.3}$$

e la soluzione è

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \ . \tag{8.4}$$

8.1.1.2 Equazioni di secondo grado

La forma generale delle equazioni di secondo grado è

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{8.5}$$

Un'equazione di secondo grado può ammettere nel campo dei numeri reali 2 soluzioni (distinte o coincidenti) o nessuna soluzione, a seconda del valore dell'espressione definita come **discriminante**, $\Delta := b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$: due soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale

Quando il discriminante è non negativo, le soluzioni dell'equazione sono date dall'espressione

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} . \tag{8.6}$$

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado. Una dimostrazione della formula risolutiva viene ricavata con la regola di completamento del quadrato

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c = \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{8.8}$$

É ora facile notare come questa equazione ha soluzioni solo quando il discriminante è non negativo. Quando il discriminante è non negativo, è possibile estrarre la radice quadra dell'espressione

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} . \tag{8.9}$$

8.1.2 Equazioni algebriche razionali

Definizione 8.3 — Equazioni algebriche razionali. Le equazioni algebriche razionali sono equazioni che contengono polinomi, loro rapporti e potenze intere.

■ **Esempio 8.1 — Esempi di equazioni algebriche razionali.**

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)} = 4x \tag{8.10}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{1}{x} \tag{8.11}$$

■

8.1.2.1 Metodo di soluzione

1. Per prima cosa è necessario determinare le **condizioni di esistenza** di una soluzione. Poiché nelle equazioni può comparire la **divisione** tra polinomi, bisogna richiedere che questa e tutte le operazioni scritte nel problema abbiano senso: ad esempio, nelle condizioni di esistenza bisogna richiedere che non avvengano divisioni per zero.
2. Successivamente, è possibile procedere con le semplificazioni per la ricerca della soluzione.

Esempi Seguendo questo metodo di soluzione, procediamo a risolvere le equazioni dell'esempio cit.

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)} = 4x \qquad \text{C.E.: } x \neq 1 \quad \rightarrow \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}
&(x+3)^2 = 4x(x-1)\\
&x^2 + 6x + 9 = 4x^2 - 4x\\
&3x^2 - 10x - 9 = 0\\
&\rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{25 + 3\cdot 9}}{6} = \frac{5 \mp \sqrt{52}}{3}
\end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{1}{x} \qquad \text{C.E.: } x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned}
&2x^2 = -x^2 - 1\\
&3x^2 = -1 \quad \rightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

8.1.3 Equazioni algebriche irrazionali

Definizione 8.4 — Equazioni algebriche irrazionali. Le equazioni algebriche razionali sono equazioni che contengono polinomi, loro rapporti e potenze intere e non.

■ **Esempio 8.2 — Esempi di equazioni algebriche irrazionali.**

$$\sqrt[3]{x-3} = 2 \qquad , \qquad \frac{2x}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = -2 \tag{8.16}$$

■

8.1.3.1 Metodo di soluzione

1. Per prima cosa è necessario determinare le **condizioni di esistenza** di una soluzione. Bisogna richiedere che questa e tutte le operazioni scritte nel problema abbiano senso: bisogna richiedere che
   - che non avvengano **divisioni** per zero;
   - che siano non negativi i radicandi di eventuali **radici** con indice intero pari o non intero.
2. Successivamente, è possibile procedere con le semplificazioni per la ricerca della soluzione.

Esempi

$$\sqrt[3]{x-3} = 2 \qquad \text{C.E.: } x \in \mathbb{R} \tag{8.17}$$

$$x - 3 = 8 \quad \rightarrow \quad x = 11 \tag{8.18}$$

$$\frac{2x}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = -2 \qquad \text{C.E.: } x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x \in (1, +\infty) \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}
&x = -(x-1)^{\frac{1}{2}}\\
&x^2 = x - 1\\
&x^2 - x + 1 = 0\\
&\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0 \quad \rightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{8.20}$$

8.2 Equazioni non algebriche o trascendenti

8.2.1 Equazioni con i valori assoluti

8.2.2 Equazioni con esponenti e logaritmi

8.2.3 Equazioni con le funzioni armoniche

8.3 Metodi di soluzione approssimati

8.3.1 Metodo grafico

8.3.2 Metodi numerici

Riferimento al capitolo dei metodi numerici

9. Disequazioni

10. Sistemi di equazioni e di disequazioni

IV Algebra in $\mathbb{C}$

10.1 Definizione dei numeri complessi

Definizione 10.1 — Unità immaginaria.

$$i := \sqrt{-1} \tag{10.1}$$

Definizione 10.2 — Numero complesso.

$$z = x + iy \qquad , \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{10.2}$$

10.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)

Si può definire una relazione biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e il piano $\mathbb{R}^2$.

10.1.1.1 Rappresentazione cartesiana.

10.1.1.2 Rappresentazione polare.

Trasformazione tra coordinate cartesiane e polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{atan2}(x, y) \end{cases} \tag{10.3}$$

e quindi

$$z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{10.4}$$

La relazione di Eulero e la rappresentazione polare dei numeri complessi. Usando le espansioni in serie di Taylor delle funzioni $e^{i\theta}$, $\cos\theta$ e $\sin\theta$, Eulero ricavò la formula che da lui prende il nome

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ . \tag{10.5}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!} && = 1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \dots \\ \sin\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} && = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \dots \\ e^{i\theta} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(i\theta)^n}{n!} && = 1 + i\theta - \dfrac{\theta^2}{2} - i\dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^4}{4!} + i\dfrac{\theta^5}{5!} + \dots = \\ & && = \left[1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{4!} + \dots\right] + i\left[\theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} + \dots\right] = \\ & && = \cos\theta + i\sin\theta \ . \end{aligned} \tag{10.6}$$

10.2 Operazioni con i numeri complessi

10.2.1 Somma e differenza

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \ . \tag{10.7}$$

10.2.2 Prodotto e divisione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \ . \tag{10.8}$$

10.2.3 Potenze e radici

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{10.9}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i(\theta+2\pi m)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{m}{n}2\pi\right)} \tag{10.10}$$

10.2.4 Esponenziali e logaritmi

...

V Calcolo infinitesimale

11. Limiti di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

11.1 Definizioni

- Limite destro e limite sinistro
- Funzioni continue

Definizione 11.1 — Limite finito al finito. Il limite finito della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \tag{11.1}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall \varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \ell| < \delta. \tag{11.2}$$

Definizione 11.2 — Limite infinito al finito. Il limite infinito della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty \tag{11.3}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall \varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon,\ \exists M \lesseqgtr 0 \text{ tale che } f(x) \lesseqgtr M. \tag{11.4}$$

Definizione 11.3 — Limite finito al infinito. Il limite finito della funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \ell \tag{11.5}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall N \lesseqgtr 0 \text{ tale che } x \lesseqgtr N,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \ell| < \delta. \tag{11.6}$$

Definizione 11.4 — Limite infinito al infinito. Il limite infinito della funzione $f(x)$ per x

che tende all'infinito

$$\lim_{x \to \mp^{(1)}\infty} f(x) = \mp^{(2)}\infty \tag{11.7}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall N \lesseqgtr^{(1)} 0 \text{ tale che } x \lesseqgtr^{(1)} N,\ \exists M \lesseqgtr^{(2)} 0 \text{ tale che } f(x) \lesseqgtr^{(2)} M. \tag{11.8}$$

Grafici

11.2 Funzioni continue

Definizioni:

- punto di accumulazione
- punto isolato
- intorno
- attenzione a insiemi aperti e chiusi

Definizione 11.5 — Funzione continua in un punto. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in \Omega$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ . \tag{11.9}$$

Definizione 11.6 — Funzione continua in un intervallo. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in un intervallo $[a, b] \subset \Omega$, se è una funzione continua in tutti i punti $x \in [a, b]$.

11.2.1 Teoremi sulle funzioni continue

11.3 Teoremi sui limiti

11.4 Infiniti e infinitesimi

12. Derivate

12.1 Definizioni

Definizione 12.1 — Derivata.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{12.1}$$

Interpretazione geometrica

12.2 Regole di derivazione

12.2.1 Regole

Derivata della somma di due funzioni e il prodotto per uno scalare

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (af(x))' &= af'(x) \end{aligned} \tag{12.2}$$

Proprietà 12.1 — Operatore lineare. La derivata è un operatore lineare.

Derivata del prodotto di due funzioni
Derivata del rapporto di due funzioni
Derivata di una funzione composta

12.2.2 Dimostrazioni

Derivata della somma di due funzioni
Derivata del prodotto di due funzioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) . \end{aligned} \tag{12.3}$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x) = \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

Derivata di una funzione composta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(g(x)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(g(x+\Delta x))-f(g(x))\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \\
&= \dots \\
&= f'(g(x))\,g'(x)\ .
\end{aligned}
\tag{12.5}
$$

12.3 Teoremi

12.3.1 Teorema di de l'Hopital

12.4 Tabella di derivate

12.5 Espansioni in serie

Definizione 12.2 — Serie di Taylor. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ centrata in $x = x_0$ è la serie polinomiale

$$T[f(x_0)](x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ . \tag{12.6}$$

Theorem 12.1 La serie di Taylor troncata alla n-esima potenza,

$$T^n[f(x_0)](x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\ , \tag{12.7}$$

è un'approssimazione dell'n-esimo ordine della funzione $f(x)$, i.e.

$$f(x) - T^n[f(x_0)](x) \sim o(|x-x_0|^n) \tag{12.8}$$

Definizione 12.3 — Serie di MacLaurin. La serie di MacLaurin di una funzione $f(x)$ è definita come la sua serie di Taylor centrata in $x = 0$.

12.6 Applicazioni

12.6.1 Studio funzione

12.6.2 Approssimazione locale di

13. Integrali

13.1 Definizioni

Definizione 13.1 — Somma di Riemann. Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n | a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$, la somma di Riemann viene definita come

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}) \tag{13.1}$$

con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definizione 13.2 — Integrale di Riemann. Definendo $\Delta x := \max_i (x_i - x_{i-1})$, l'integrale di Riemann viene definito come il limite della somma di Riemann per $\Delta x \to 0$ (e di conseguenza il numero di intervalli della partizione $n \to \infty$), e viene indicato come

$$\int_{x=a}^{b} f(x) dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_n \tag{13.2}$$

Definizione 13.3 — Integrale definito.

Interpretazione geometrica

Definizione 13.4 — Integrale indefinito.

13.2 Proprietà

13.3 Teoremi

Theorem 13.1 — Teorema della media.

Theorem 13.2 — Teorema fondmaentale del calcolo infinitesimale.

$$\frac{d}{dx} \int_{t=a}^{x} f(t) dt = f(x) \tag{13.3}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t=a}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{t=a}^{x} f(t)dt\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{t=x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Delta x\, f(\xi) = \qquad\qquad (\text{con } \xi\in[x,x+\Delta x]) \\
&= f(x)\ .
\end{aligned}
\tag{13.4}
$$

13.4 Integrali fondamentali

13.5 Regole di integrazione

13.5.1 Integrazione per parti

- Definendo $F(x)$, $G(x)$ le primitive delle funzioni $f(x)$, e $g(x)$
- Integrando in x dalla regola di **derivazione del prodotto** $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$, riscritta isolando il termine $F'(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)G'(x)$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int f(x)G(x)dx &= \int (F(x)G(x))'dx - \int F(x)G'(x)dx = \\
&= F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx
\end{aligned}
\tag{13.5}
$$

13.5.2 Integrazione con sostituzione

- Definendo la funzione composta $\overline{F}(x) = F(y(x))$ e le derivate

$$
\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) \qquad , \qquad f(y) = \frac{d}{dy}F(y)
\tag{13.6}
$$

- Partendo dalla regola di **derivazione della funzione composta**, $\overline{F}(x) = F(y(x))$

$$
\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) = \frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{dF}{dy}(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(y(x))y'(x)
\tag{13.7}
$$

Usando il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

$$
\begin{aligned}
&F(y) = \int f(y)dy \\
&\overline{F}(x) = \int \overline{f}(x)dx = \int f(y(x))\ y'(x)dx
\end{aligned}
\tag{13.8}
$$

Se si introduce la dipendenza $y(x)$ nella prima equazione, si ottiene l'uguaglianza tra le ultime due espressioni, $F(y(x)) = \overline{F}(x)$, e quindi

$$
\int f(y)dy = \int f(y(x))\ y'(x)dx\ .
\tag{13.9}
$$

VI
Equazioni differenziali ordinarie

14. Introduzione

14.1 Applicazioni

14.2 Definizioni

Definizione 14.1 — Equazione differenziale ordinaria. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che ha come incognita una funzione $y(x)$, nella quale possono comparire la funzione incognita $y(x)$, le sue derivate $y^{(n)}(x)$ e la variabile indipendente x, che può essere scritto nella forma implicita

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{14.1}$$

L'**ordine** dell'equazione differenziale viene definito come l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che compaiono nell'equazione.

Definizione 14.2 — Equazione differenziale ordinaria lineare. Un'equazione differenziale è lineare se si può scrivere come l'uguaglianza di una combinazione lineare delle derivate della funzione incognita e una funzione nota, $f(x)$. Ad esempio, la forma generale dell'equazione differenziale ordinaria di ordine n può essere scritta come

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\dots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{14.2}$$

Definizione 14.3 — Equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare con coefficienti $a_i(x) = a_i$, numeri che non dipendono dalla variabile indipendente x,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{14.3}$$

Definizione 14.4 — Equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti con $f(x) = 0$,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{14.4}$$

In generale, la soluzione dell'equazione (14.1) dipende da n parametri indeterminati. In generale, un problema differenziale è composto da:

- un'equazione differenziale di ordine n
- n condizioni per determinare gli n parametri altrimenti indeterminati

Definizione 14.5 — Problema di Cauchy. Un problema di Cauchy è definito da:

- un'equazione differenziale di ordine n

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{14.5}$$

- n condizioni che definiscono il valore della funzione incognita e delle prime $n-1$ derivate nell'estremo inferiore dell'intervallo

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y'(a) &= y_1 \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(a) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{14.6}$$

15. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti

15.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine

15.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay'(x) + by(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{15.1}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando la derivata e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta + b)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{15.2}$$

Il prodotto di tre fattori si annulla quando si annulla uno dei tre fattori:

- $e^{\beta x}$ non si annulla per nessun valore di x
- se si annulla α, $\alpha = 0$, si otterebbe la soluzione triviale $y(x) = 0$
- $\rightarrow$ deve quindi annullarsi il fattore $a\beta + b$: si ottiene quindi il valore $\beta = -\dfrac{b}{a}$

La forma generale della soluzione dell'equazione (15.1) è quindi

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{a}x} \tag{15.3}$$

Per determinare il coefficiente α è necessaria una condizione che definisca il valore della funzione (o della sua derivata) in un punto del dominio o del suo contorno.

15.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine

15.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{15.4}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando le derivate e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta^2 + b\beta + c)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{15.5}$$

I valori di β si ottiengono dalla soluzione dell'equazione di secondo grado in β, $a\beta^2+b\beta+c = 0$ che, a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, possono essere:

- $\Delta > 0$: esistono due soluzioni reali distinte $\beta_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: esistono due soluzioni reali coincidenti $\beta_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: esistono due soluzioni complesse coniugate $\beta_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \mp j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

La soluzione dell'equazione differenziale assume quindi la forma

- $\Delta > 0$:

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} \tag{15.6}$$

- $\Delta = 0$:

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 x e^{\beta x} \tag{15.7}$$

- $\Delta < 0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 e^{\beta^* x} = \\ &= \alpha_1 e^{(re\{\beta\} + i im\{\beta\})x} + \alpha_2 e^{(re\{\beta\} - i im\{\beta\})x} = \\ &= e^{re\{\beta\}x} \left(\alpha_1 e^{i\ im\{\beta\}x} + \alpha_2 e^{-i\ im\{\beta\}x} \right) \ , \end{aligned} \tag{15.8}$$

  e per avere una soluzione reale, bisogna imporre $\alpha_2 = \alpha_1^*$, per ottenere la somma di due numeri complessi coniugati, uguale al doppio della somma della loro parte reale,

$$y(x) = 2e^{re\{\beta\}x} \left(re\{\alpha_1\} \cos(\beta x) - im\{\alpha_1\} \sin(\beta x) \right) \ , \tag{15.9}$$

  che può essere riscritta come

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{re\{\beta\}x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right) = \\ &= C e^{re\{\beta\}x} \cos(\beta x + \phi) \ . \end{aligned} \tag{15.10}$$

16. Metodo di separazione delle variabili

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \tag{16.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x)) \tag{16.2}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \tag{16.3}$$

■ **Esempio 16.1** $y'(x) = xy(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \rightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \rightarrow \quad y(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2} \tag{16.4}$$

Verifica: $y'(x) = K\frac{1}{2}2xe^{\frac{1}{2}x^2} = Kxe^{\frac{1}{2}x^2} = xy(x)$. ■

VII Vettori

Motivazione:

- non tutti gli oggetti di interesse della Matematica, della Fisica o delle Scienze in generale possono essere adeguatamente rappresentati da un singolo numero
- esempi: posizione, velocità, forza,...

Storia:

- ...
- da vettori nello spazio fisico a struttura astratta matematica

17. Algebra vettoriale

17.1 Definizioni

Definizione 17.1 — Spazio vettoriale. Uno spazio vettoriale è una struttura matematica composta da:

- un insieme V, i cui elementi $\mathbf{v} \in V$ sono chiamati **vettori**
- un campo F, i cui elementi $a \in F$ sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto a V, cioè il cui risultato è un elemento che appartiene a V, che soddisfano determinate proprietà
  - **somma vettoriale** di due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{17.1}$$

  - **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore $\mathbf{u} \in V$ e uno scalare $a \in F$:

$$a\mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{17.2}$$

Proprietà 17.1 — Proprietà delle operazioni.

Definizione 17.2 — Base e dimensione di uno spazio.

17.1.1 Spazi vettoriali con prodotto interno

17.2 Applicazioni

17.2.1 Geometria

17.2.2 Fisica

18. Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale

Definizione 18.1 — Vettore posizione.

Definizione 18.2 — Coordinate.

Esempio 18.1 — Coordinate cartesiane. ■

Esempio 18.2 — Coordinate polari. ■

Esempio 18.3 — Coordinate sferiche e superficie terrestre. ■

VIII Geometria

Introduzione storica:

- Euclide
- Cartesio
- Riemann

19. Geomteria nel piano

19.1 Geometria euclidea

19.1.1 Introduzione

19.1.2 Rette e angoli

19.1.3 Triangoli

19.1.4 Circonferenza

19.2 Geometria cartesiana

19.2.1 Coordinate cartesiane

19.2.2 Punto, distanze, retta

Definizione 19.1 — Punto. Dato un sistema di coordinate cartesiane, un punto P nel piano è individuato dalle sue due coordinate (x, y).

Definizione 19.2 — Distanza tra due punti. La distanza tra due punti nel piano viene calcolata usando il teorema di Pitagora

$$d_{PQ}^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 \; . \tag{19.1}$$

Perchè la distanza è data come una definizione? Geometria di Riemann: la distanza definisce tutte le proprietà di una geometria

Definizione 19.3 — Retta. La retta può essere definita come l'insieme di punti (x, y) equidistanti da due punti dati $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

Partendo dalla definizione

$$\begin{gathered} d_1^2 = d_2^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\ x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \end{gathered} \tag{19.2}$$

$$\rightarrow \qquad 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0 \; . \tag{19.3}$$

Quindi l'equazione generale della retta può essere riscritta nella forma

$$Ax + By + C = 0 \; . \tag{19.4}$$

19.2.3 Trasformazioni di coordinate cartesiane e trasformazioni di curve

19.2.3.1 Traslazione dell'origine

Sistema di coordinate $O'x'y'$ con assi paralleli al sistema di coordinate Oxy e coordinate dell'origine $x_{O'}$, $y_{O'}$

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + x_{O'} \\ y = y' + y_{O'} \end{cases} \tag{19.5}$$

19.2.3.2 Rotazione attorno all'origine

Sistema di coordinate $O'x'y'$ origine coincidente con quella del sistema di coordinate Oxy e assi rotati di un angolo θ

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \tag{19.6}$$

19.2.4 Coniche

19.2.4.1 Parabola

Definizione 19.4 — Parabola. Insieme dei punti P del piano equidistanti da un punto F, chiamato **fuoco**, e una retta r chiamata **direttrice**.

$$\mathrm{dist}(P,F) = \mathrm{dist}(P,r) \tag{19.7}$$

Scegliendo il fuoco $F(0,d)$ e la retta $r : y = -d$, si ricava l'equazione della parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y degli assi cartesiani.

$$\begin{aligned} d_{PF}^2 &= d_{Pr}^2 \\ (x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 &= (y-y_r)^2 \\ x^2 + (y-d)^2 &= (y+d)^2 \\ x^2 + y^2 - 2dy + d^2 &= y^2 + 2dy + d^2 \end{aligned} \tag{19.8}$$

$$\rightarrow \qquad 4dy = x^2 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{4d}x^2 \; . \tag{19.9}$$

19.2.4.2 Ellisse

Definizione 19.5 — Ellisse. Insieme dei punti P del piano la cui somma delle distanze da due punti F_1, F_2, chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante.

$$\mathrm{dist}(P,F_1) + \mathrm{dist}(P,F_2) = 2a \tag{19.10}$$

Scegliendo i fuochi $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} = 2a \\ &\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ &x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ &4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ &(cx - a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 \\ &c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \\ &(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \end{aligned} \tag{19.11}$$

Definendo $b^2 := a^2 - c^2 > 0$, si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{19.12}$$

19.2.4.3 Iperbole

Definizione 19.6 — Iperbole. Insieme dei punti P del piano la cui differenza delle distanze da due punti F_1, F_2, chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante in valore assoluto.

$$|\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)| = 2a \tag{19.13}$$

Scegliendo i fuochi $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \mp 2a \\
&\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \mp 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\
&x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
&4cx = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\
&(cx - a^2)^2 = (\mp a\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 \\
&c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2 \\
&(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned} \tag{19.14}$$

Definendo $b^2 := c^2 - a^2 > 0$, si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{19.15}$$

20. Geometria nello spazio

IX

Statistica

X
Matematica numerica - cenni

21. Equazioni e sistemi di equazioni

21.1 Equazioni

21.1.1 Equazioni non lineari

$$f(x) = 0 \tag{21.1}$$

21.1.1.1 Metodo della bisezione

Se la funzione $f(x)$ è continua, ed esistono due valori x_1, x_2 tali che $f(x_1)f(x_2) < 0$, allora esiste una soluzione $\overline{x} \in [x_1, x_2]$ dell'equazione $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x_1,\ x_2 \quad \text{ s.t. } f(x_1) < 0 \text{ and } f(x_2) > 0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ x = 0.5(x_1 + x_2),\ f = f(x),\ res = |f| \\
&\text{Bisection loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad if(f < 0): \\
&\qquad\qquad x_1 \leftarrow x \\
&\qquad else: \\
&\qquad\qquad x_2 \leftarrow x \\
&\qquad x = 0.5(x_1 + x_2) \\
&\qquad f = f(x) \\
&\qquad res = |f(x)| \\
&\qquad niter+ = 1
\end{aligned} \tag{21.2}$$

21.1.1.2 Metodo di Newton

Se la funzione $f(x)$ è "sufficientemente regolare" e il tentativo iniziale x_0 è "sufficientemente vicino" a una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, il metodo di Newton

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } f(x),\ f'(x) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x = x^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |f(x)| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad f'(x)\Delta x = -f(x) \\
&\qquad x \leftarrow x + \Delta x \\
&\qquad niter += 1,\ res = |f(x)|
\end{aligned} \tag{21.3}$$

converge a una soluzione dell'equazione.

21.2 Sistemi di equazioni

21.2.1 Sistemi di equazioni lineari

Metodo di sostituzione

21.2.2 Sistemi di equazioni non lineari

21.2.2.1 Metodo di Newton per sistemi

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
&\qquad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \\
&\qquad niter += 1,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|
\end{aligned} \tag{21.4}$$

22. Derivate

22.1

23. Ricerca dei massimi e ottimizzazione

23.1

24. Integrali

24.1

25. Equazioni differenziali ordinarie

25.1 Riduzione a sistema di primo ordine

É possibile ridurre un'equazione differenziale ordinaria di ordine n, $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$, a un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Definendo le funzioni incognite

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= y(x) \\ y_1(x) &:= y'(x) \\ &\dots \\ y_{n-1}(x) &:= y^{(n-1)}(x) \ , \end{aligned} \tag{25.1}$$

il problema differenziale originale è equivalente al sistema

$$\begin{cases} F(x, y_0(x), y_1(x), y_{n-1}(x), y'_{n-1}(x)) = 0 \\ y'_0(x) = y_1(x) \\ y'_1(x) = y_2(x) \\ \dots \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \end{cases} \ , \tag{25.2}$$

che può essere scritto in forma sintetica (vettoriale)

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}(x)) = \mathbf{0} \ . \tag{25.3}$$

25.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy

25.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno

26. Statistica

XI

Appendici, indice e bibliografia

Bibiliografia

A. Prima appendice

. . .