Scuole superiori

# Matematica

## OSB

Published by OSB



*Latest version 14 ottobre 2023*

# Indice

**I** **Introduzione**

1 Strumenti e discipline in matematica . . . . . 13
1.1 Quantità . . . . . 13
1.2 Classificazione . . . . . 13
1.2.1 Matematica pura . . . . . 13
1.2.2 Matematica applicata . . . . . 14

2 Approccio alla matematica . . . . . 15
2.1 Formulazione e soluzione di un problema . . . . . 15

3 Breve storia della matematica . . . . . 17

**II** **Insiemistica e Logica**

4 Logica . . . . . 23
4.1 Logica proposizionale . . . . . 23
4.1.1 Prime definizioni . . . . . 23
4.1.2 Connettivi logici e calcolo proposizionale . . . . . 23
4.1.3 Teoremi e proposizioni . . . . . 24
4.1.4 Tecniche dimostrative . . . . . 25
4.2 Logica predicativa . . . . . 26

5 Insiemistica . . . . . 27
5.1 Definizioni di base . . . . . 27
5.2 Operazioni . . . . . 27
5.3 Funzioni . . . . . 27

6 Insiemi numerici 29
6.1 Insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$ 29
6.2 Insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$ 29
6.3 Insieme dei numeri razionali, $\mathbb{Q}$ 29
6.4 Insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$ 29
6.5 Insieme dei numeri complessi, $\mathbb{C}$ 30

III Algebra in $\mathbb{R}$

7 Algebra simbolica - Calcolo letterale 33
7.1 Monomi 33
7.1.1 Somma e differenza 33
7.1.2 Prodotto e divisione 33
7.1.3 Potenze e radici 33
7.2 Polinomi 33
7.2.1 Scomposizioni notevoli 34
7.2.2 Divisione tra polinomi e resto 35
7.2.3 Formule di Viete e Newton 35
7.3 Potenze e radici 35
7.4 Esponenziali e logaritmi 35
7.4.1 Esponenziale 35
7.4.2 Logaritmo 35
7.5 Funzioni armoniche 36
7.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno 36
7.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante 36
7.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze 36
7.6 Funzioni iperboliche 36

8 Equazioni 37
8.1 Equazioni algebriche 37
8.1.1 Equazioni polinomiali 37
8.1.2 Equazioni algebriche razionali 38
8.1.3 Equazioni algebriche irrazionali 39
8.2 Equazioni non algebriche o trascendenti 40
8.2.1 Equazioni con i valori assoluti 40
8.2.2 Equazioni con esponenti e logaritmi 40
8.2.3 Equazioni con le funzioni armoniche 40
8.3 Metodi di soluzione approssimati 40
8.3.1 Metodo grafico 40
8.3.2 Metodi numerici 40

9 Disequazioni 41
9.1 Disequazioni algebriche 41
9.2 Disequazioni non algebriche 41

10 Sistemi di equazioni e di disequazioni . . . . . . . . . . 43

IV Algebra in $\mathbb{C}$

11 Algebra complessa . . . . . . . . . . 47
11.1 Definizione dei numeri complessi . . . . . . . . . . 47
11.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss) . . . . . . . . . . 47
11.2 Operazioni con i numeri complessi . . . . . . . . . . 48
11.2.1 Somma e differenza . . . . . . . . . . 48
11.2.2 Prodotto e divisione . . . . . . . . . . 48
11.2.3 Potenze e radici . . . . . . . . . . 48
11.2.4 Esponenziali e logaritmi . . . . . . . . . . 48

12 Calcolo complesso . . . . . . . . . . 49

V Serie e successioni

13 Successioni e serie di numeri reali . . . . . . . . . . 53
13.1 Successioni . . . . . . . . . . 53
13.2 Serie . . . . . . . . . . 53
13.2.1 Serie notevoli . . . . . . . . . . 53

14 Serie di funzioni . . . . . . . . . . 55
14.1 Serie di potenze . . . . . . . . . . 55
14.1.1 Serie di Taylor . . . . . . . . . . 55
14.2 Serie di Fourier . . . . . . . . . . 55

VI Calcolo infinitesimale

15 Funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e limiti . . . . . . . . . . 59
15.1 Funzioni . . . . . . . . . . 59
15.2 Limiti . . . . . . . . . . 59
15.3 Funzioni continue . . . . . . . . . . 60
15.3.1 Teoremi sulle funzioni continue . . . . . . . . . . 60
15.4 Teoremi sui limiti . . . . . . . . . . 60
15.5 Infiniti e infinitesimi . . . . . . . . . . 60
15.6 Limiti notevoli . . . . . . . . . . 60
15.6.1 Dimostrazioni . . . . . . . . . . 61

16 Derivate . . . . . . . . . . 63
16.1 Definizioni . . . . . . . . . . 63
16.2 Regole di derivazione . . . . . . . . . . 63
16.2.1 Regole . . . . . . . . . . 63
16.2.2 Dimostrazioni . . . . . . . . . . 64

**16.3 Teoremi** . . . **64**
16.3.1 Teoremi di Fermat, Rolle, Cauchy e Lagrange . . . 64
16.3.2 Teorema di de l'Hopital . . . 65
**16.4 Derivate fondamentali** . . . **66**
16.4.1 Dimostrazioni . . . 66
**16.5 Derivate di ordine superiore** . . . **67**
**16.6 Espansioni in serie di Taylor e MacLaurin** . . . **67**
**16.7 Applicazioni** . . . **68**
16.7.1 Studio funzione . . . 68

**17 Integrali** . . . **69**
**17.1 Definizioni** . . . **69**
**17.2 Proprietà** . . . **69**
**17.3 Teoremi** . . . **69**
**17.4 Integrali fondamentali** . . . **70**
**17.5 Regole di integrazione** . . . **70**
17.5.1 Integrazione per parti . . . 70
17.5.2 Integrazione con sostituzione . . . 70

**VII Equazioni differenziali ordinarie**

**18 Introduzione** . . . **75**
**18.1 Applicazioni** . . . **75**
**18.2 Definizioni** . . . **75**

**19 Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti** . . . **77**
**19.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine** . . . **77**
19.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine 77
**19.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine** . **77**
19.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine 77

**20 Metodo di separazione delle variabili** . . . **79**

**VIII Vettori**

**21 Algebra vettoriale** . . . **85**
**21.1 Introduzione** . . . **85**
**21.2 Definizioni** . . . **85**
**21.3 Spazi vettoriali con prodotto interno** . . . **86**
**21.4 Spazi vettoriali bi- e tri-dimenisonali** . . . **86**
21.4.1 Spazio vettoriale bidimensionale . . . 86
21.4.2 Spazio vettoriale tridimensionale . . . 87

**21.5 Applicazioni** . . . . . 87
21.5.1 Geometria . . . . . 87
21.5.2 Fisica . . . . . 87

**22 Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale** . . . . . 89
**22.1 Introduzione** . . . . . 89
**22.2 Funzioni di più variabili - campi** . . . . . 89
22.2.1 Limiti e funzioni continue . . . . . 89
22.2.2 Derivate . . . . . 89
22.2.3 Operatori differenziali . . . . . 90
22.2.4 Integrali . . . . . 91
22.2.5 Teoremi . . . . . 92

**IX Geometria**

**23 Geometria euclidea** . . . . . 97
**23.1 Geometria nel piano** . . . . . 97
23.1.1 Introduzione . . . . . 97
23.1.2 Rette e angoli . . . . . 97
23.1.3 Triangoli . . . . . 97
23.1.4 Circonferenza . . . . . 97
**23.2 Geometria nello spazio** . . . . . 97

**24 Geometria analitica** . . . . . 99
**24.1 Geometria nel piano** . . . . . 99
24.1.1 Coordinate cartesiane . . . . . 99
24.1.2 Punto, distanze, retta . . . . . 99
24.1.3 Trasformazioni di coordinate cartesiane e trasformazioni di curve . . . . . 99
24.1.4 Coniche . . . . . 100
**24.2 Geometria nello spazio** . . . . . 101

**X Statistica**

**25 Variabili casuali** . . . . . 105
**25.1 Statistica univariata** . . . . . 105
25.1.1 Variabili casuali, discrete e continue . . . . . 105
25.1.2 Funzioni di probabilità . . . . . 106
25.1.3 Indicatori statistici . . . . . 106
**25.2 Statistica multivariata** . . . . . 106
25.2.1 Variabili casuali discrete e continue . . . . . 106
25.2.2 Funzioni di probabilità . . . . . 106
25.2.3 Teorema di Bayes . . . . . 106
25.2.4 Momenti di una distribuzione . . . . . 106

26 Processi casuali . . . . . . . . . . 109

27 Approcci alla statistica . . . . . . . . . . 111
27.1 Statistica descrittiva . . . . . . . . . . 111
27.2 Statistica inferenziale . . . . . . . . . . 111
27.2.1 Modelli statistici . . . . . . . . . . 112

28 Esempi di applicazioni . . . . . . . . . . 113

29 Introduzione all'intelligenza artificiale . . . . . . . . . . 115

XI Matematica numerica - cenni

30 Equazioni e sistemi di equazioni . . . . . . . . . . 119
30.1 Equazioni . . . . . . . . . . 119
30.1.1 Equazioni non lineari . . . . . . . . . . 119
30.2 Sistemi di equazioni . . . . . . . . . . 120
30.2.1 Sistemi di equazioni lineari . . . . . . . . . . 120
30.2.2 Sistemi di equazioni non lineari . . . . . . . . . . 120

31 Approssimazione di funzioni . . . . . . . . . . 121
31.1 . . . . . . . . . . 121

32 Derivate . . . . . . . . . . 123
32.1 . . . . . . . . . . 123

33 Ricerca dei massimi e ottimizzazione . . . . . . . . . . 125
33.1 Ottimizzazione libera . . . . . . . . . . 125
33.1.1 Algoritmi . . . . . . . . . . 125
33.2 Ottimizzazione vincolata . . . . . . . . . . 125

34 Integrali . . . . . . . . . . 127
34.1 . . . . . . . . . . 127

35 Equazioni differenziali ordinarie . . . . . . . . . . 129
35.1 Riduzione a sistema di primo ordine . . . . . . . . . . 129
35.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy . . . . . . . . . . 129
35.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno . . . . . . . . . . 129

36 Statistica . . . . . . . . . . 131

XII Appendici, indice e bibliografia

Bibilografia . . . . . . . . . . 135

Indice . . . . . . . . . . 137

Appendices . . . . . . . . . . 137

A Prima appendice . . . . . . . . . . 137

# Introduzione


1 Strumenti e discipline in matematica . 13
1.1 Quantità . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.2 Classificazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

2 Approccio alla matematica . . . . . . . . . 15
2.1 Formulazione e soluzione di un problema . . . . 15

3 Breve storia della matematica . . . . . . . 17

# 1. Strumenti e discipline in matematica

## 1.1 Quantità

- numeri - scalari ($\mathbb{N}, \ldots, \mathbb{R}, \ldots$)
- vettori
- tensori
- quaternioni, e altri oggetti matematici esotici

Sviluppo della matematica:

- saper contare: aritmetica
- saper descrivere lo spazio: geometria

## 1.2 Classificazione

Nel corso della storia, la matematica è diventata una materia estremamente diversificata.

Una classificazione delle molte aree di interesse della matematica può risultare utile ad avere una visione di insieme della materia.

La matematica è divisa tradizionalmente in **matematica pura**, che studia gli strumenti propri della matematica e le loro proprietà, e **matematica applicata**, che applica gli strumenti della matematica a problemi di interesse tipici di altre discipline.

Una classificazione più dettagliata delle discipline della matematica è resa difficile dalle relazioni esistenti tra di esse. Viene qui presentata una classificazione parziale, ispirata alla *Classificazione delle ricerche matematiche (MSC)* usata dall'*American Mathematical Society* per la classificazione delle pubblicazioni nei database.

### 1.2.1 Matematica pura

#### 1.2.1.1 Matematica generale e fondamenti

- storia e filosofia
- logica

#### 1.2.1.2 Algebra e matematica discreta

- teoria dei numeri
- teoria dei campi
- algebra lineare e multilineare; matrici

#### 1.2.1.3 Analisi

- funzioni reali e complesse
- misura e integrazione
- equazioni differenziali, ed equazioni alle differenze
- sistemi dinamici
- successioni, serie e approssimazioni
- trasformate: analisi di Fourier
- calcolo delle variazioni, ottimizzazione e controllo

#### 1.2.1.4 Geometria e topologia

- geometria
- geometria differenziale
- topologia

### 1.2.2 Matematica applicata

#### 1.2.2.1 Statistica

#### 1.2.2.2 Fisica

#### 1.2.2.3 Altre scienze naturali

#### 1.2.2.4 Scienze sociali e del comportamento

#### 1.2.2.5 Matematica numerica e informatica

#### 1.2.2.6 Ottimizzazione

L'ottimizzazione si occupa della ricerca dei punti di massimo o di minimo di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$.

$$\text{Determinare il punto } \mathbf{x}_0 \in A \text{ tale che } f(\mathbf{x_0}) \geq f(\mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x} \in A \tag{1.1}$$

#### 1.2.2.7 Teoria dei sistemi e controllo

La teoria dei sistemi rappresenta un qualunque sistema che evolve nel tempo $t$ con:

- gli ingressi $\mathbf{u}(t)$, che possono agire sul sistema
- le uscite $\mathbf{y}(t)$, che possono essere lette dal sistema
- le variabili di stato, $\mathbf{x}(t)$ che determinano lo stato del sistema
- le equazioni di stato del sistema che ne governano la dinamica, legando lo stato e la sua evoluzione agli ingressi

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

- le equazioni di uscita che permettono di ricavare le variabili di uscita in funzione dello stato e degli ingressi

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{1.3}$$

Il problema del controllo di un sistema può essere formulato come un problema di ottimizzazione vincolata, volendone ottimizzare le prestazioni (o minimizzare le perdite), soggette ai vincoli definiti dalle equazioni che governano il sistema.

#### 1.2.2.8 Didattica

# 2. Approccio alla matematica

## 2.1 Formulazione e soluzione di un problema

Una volta formulato un problema, ci si chiede:

- il problema ammette soluzione?
- se il problema ammette soluzione, la soluzione è unica?
- se la soluzione non è unica, quante soluzioni esistono?

**Esempi**

# 3. Breve storia della matematica

### Preistoria

- ...

### Antichità e Medioevo

- **Egitto**
- **Babilonia**
- **Grecia**
- **India**
  - invenzione del **sistema numerico posizionale decimale**: tra le dieci cifre, c'è lo **zero**
  - vengono introdotte le **funzioni trigonometriche** e applicate nell'ambito dell'astronomia: nel calcolo delle traiettorie introducono concetti simili a quelli di derivata, senza però mai riuscire a sviluppare una teoria del calcolo infinitesimale
- **Cina**
- **Persia e Islam**
  - mondo islamico ponte tra la cultura ellenistica e quella indiana
  - nel IX secolo, il matematico persiano **al-Khwarizmi** usa il sistema di numerazione posizionale decimale appreso dagli indiani per descrivere metodi grafici e analitici per la risoluzione delle equazioni di secondo grado. Dal suo nome deriva la parola **algoritmo**, e dalla sua opera principale la parola **algebra**
  - sviluppi in trigonometria
  - nel XIV secolo, il matematico persiano **Al-Kashi** inventa il modo per calcolare una radice di un polinomio di grado $n$, oggi conosciuta come regola di Ruffini, italiano che la riscoprì nel XVIII secolo; fornisce la prima **dimostrazione per induzione** nota a oggi, con la quale dimostra il **teorema binomiale**
  - lo sviluppo della matematica si interrompe nel XIV secolo, in un periodo di instabilità politica e religiosa
- **Europa**
  - verso il XII secolo inizia un nuovo periodo di sviluppo in Europa; ritorna interesse sulla matematica, stimolato da problemi pratici e commerciali
  - studio delle **serie infinite**, e introduzione alcuni concetti tra i concetti tra i quali il **grafico di una funzione** (Fibonacci, Oresme)
  - studio della prospettiva e geometria, stimolati da motivi artistici

### XVI secolo

- interesse per l'algebra e le soluzioni delle equazioni polinomiali di terzo (disputa da Tartaglia e Cardano, che pubblica l'*Ars Magna*) e quarto grado (Ferrari)
- Viète produce contributi alla trigonometria e all'algebra, trovando le **formule di Viète** che legano i coefficienti alle radici di un'equazione
- Nepier (Nepero) introduce i **logaritmi**
- evoluzione della notazione matematica: vengono introdotti i segni ancora utilizzati per le operazioni ($+$, -, $\times$), il segno di uguale ($=$), e maggiore e minore ($>$, $<$); Viète introduce il **calcolo letterale**, usando delle lettere per indicare i coefficienti delle equazioni

### XVII secolo

- in Europa vengono fondate accademie e associazioni scientifiche, come l'Accademia in Francia e la Royal Society in Inghilterra; nelle università vengono istituite le prime cattedre di matematica
- Fermat e Descartes (Cartesio), nella sua *La Gèometrie*, formulano e illustrano i fondamenti della **geometria analitica**, Cap.§24;
- Fermat porta contributi alla **teoria dei numeri**, formulando una gran quantità di congetture, in gran parte dimostrate da Euler pochi decenni dopo. L'ultima congettura, nota come *ultimo teorema di Fermat*, venne dimostrata solo nel 1995: di questa congettura, Fermat sostenne di conoscere la dimostrazione, ma di non aver avuto sufficiente spazio sul foglio per scriverla.
- Fermat e Pascal portano sviluppi anche al calcolo delle probabilità e delle combinazioni.
- i contributi di Wallis, Mengoli e Mercator su **serie e prodotti infiniti**, Cap.§13, introducono tecniche simili a quelle che verranno sviluppate nel calcolo infinitesimale
- nell'ambito dello studio della **dinamica** dei corpi, Newton e Leibniz sviluppano contemporaneamente i fondamenti del **calcolo infinitesimale**, Parte §VI, introducendo i concetti di **derivata**, Cap.§16, e **integrale**, Cap.§17, e dimostrando il **il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale** che lega le due operazioni
- i fratelli Johann e Jacob Bernoulli contribuiscono allo sviluppo della statistica, formulando la **legge dei grandi numeri** e allo sviluppo del calcolo infinitesimale, dedicandosi allo studio e alla soluzione delle equazioni differenziali nell'ambito di problemi di meccanica; assunto da dal marchese de l'Hopital, Johann scopre la regola che prende il nome di **regola di de l'Hopital**
- vengono sviluppate le **serie di Taylor**, Sez.16.6

### XVIII secolo

- Euler (Eulero): analisi matematica; soluzione **equazioni differenziali**; teoria dei numeri; **analisi complessa** (estensione di funzioni reali in campo complesso, identità di Eulero,...); topologia e teoria dei grafi (problema dei 7 ponti di Konigsberg)
- Daniel Bernoulli,
- d'Alembert si dedica allo studio del moto dei corpi e alla meccanica razionale
- sviluppi nel calcolo delle probabilità: vengono formulati il **teorema di Bayes** e il **metodo Monte Carlo**
- nella seconda metà del secolo, Parigi diventa il più importante centro matematico
  - viene sviluppato il **calcolo delle variazioni** e utilizzato da Laplace (*Méchanique Céleste*) e Lagrange (*Méchanique analytique*) nella riformulazione della meccanica e nello studio del moto dei corpi celesti
  - per la soluzione di problemi di meccanica, vengono introdotte le **trasformate** di Laplace e Legendre
  - viene sviluppato il metodo dei **moltiplicatori di Lagrange**
  - nell'ambito del calcolo differenziale, viene introdotto il concetto di potenziale e l'equazione differenziale di Laplace

**XIX secolo** A Parigi si aggiungono i centri tedeschi di Berlino, Konigsberg e Gottinga

- Jacobi e Cauchy ottengono notevoli risultati in **algebra lineare**, chiarendo il concetto di **determinante** di una matrice e introducendo il concetto di **jacobiano** di una funzione
- Cauchy si occupa di una formulazione e dimostrazione rigorosa di alcuni risultati di analisi infinitesimale, dando un impulso decisivo allo studio dell'**analisi complessa**, Cap.§12, estendendo i concetti dell'analisi infinitesimale alle funzioni di variabile complessa; Cauchy contribuisce allo sviluppo della statistica e allo studio delle successioni; fondamentali sono anche i suoi contributi alla **meccanica dei mezzi continui**, introducendo il concetto di sforzo e contribuendo ai primi risultati in teoria dell'elasticità
- **Fourier** introduce la **serie**, Sez.§14.2, e **la trasformata** che prendono il suo nome, nello studio dei moti ondulatori e della trasmissione del calore
- Gauss, forse il più grande matematico della modernità insieme ad Euler, studia e insegna a Gottinga. Dopo aver proposto strumenti, risultati e congetture in teoria dei numeri, tra i quali l'**aritmetica modulare** e la **congettura dei numeri primi**, nella sua tesi di dottorato dimostra il **teorema fondamentale dell'algebra**; successivamente introduce il concetto di **numeri complessi**, Cap.§11, e la loro rappresentazione grafica nel piano complesso, di *Argand e Gauss*; in piena maturità fu coinvolto in rilevazioni geografiche del Regno di Hannover, attività che gli permise di formulare dei risultati in stato embrionale di **geometria differenziale** delle superfici e delle curve e intuire l'esistenza di **geometrie non euclidee**: in questo ambito raggiunge un risultato fondamentale noto come *theorema egregium*, che mette in realzione la **curvatura delle superfici** con la misura di distanze e angoli sulla superficie, informazioni riassumibili nella **metrica**; i lavori pratici e sperimentali che riguardavano le misure gli permisero di (ri)formulare il **metodo dei minimi quadrati** per la regressione di dati sperimentali e di sviluppare la **distribuzione di probabilità gaussiana**; negli ultimi anni di vita, da una collaboarzione con il fisico Weber, si dedica agli studi primordiali sull'elettromagnetismo, e formula il **teorema (di Gauss) del flusso del campo elettrico**
- Dirichlet succede a Gauss alla cattedra di Gottinga, e produce risultati in teoria dei numeri (alcuni dei quali furono pubblicati postumi da Dedekind), nello studio dei sistemi dinamici e della loro stabilità
- Riemann studia a Gottinga e succede alla cattedra di Dirichlet. A Riemann sono dovuti progressi in analisi reale e complessa, una rivoluzione e uno sviluppo della **geometria differenziale** che avrebbe fornito tutti gli strumenti necessari ad Einstein per formulare la teoria della relatività generale, e un'unica ma rivoluzionaria opera in teoria dei numeri in cui formula un'ipotesi che una volta dimostrata permetterebbe di determinare la distribuzione dei **numeri primi**, nota oggi come **ipotesi di Riemann**
- Hamilton riformula la meccanica lagrangiana in quella oggi nota come meccanica hamiltoniana, e introduce dei nuovi oggetti matematici, i **quaternioni**, estensione dei numeri complessi in 4 dimensioni utili per rappresentare le rotazioni nello spazio tridimensionale; ottiene risultati in algebra lineare (teorema di Cayley-Hamilton)
- Wierestrass: definizione rigorosa dei fondamenti dell'analisi (teorema di Weierstrass su esisteanza di minimi e massimi di funzioni a variabile reale)
- Boole definisce le operazioni di algebra sugli insiemi, l'**algebra booleana**, dando un contributo alla logica e alla teoria dell'informazione
- Peano: tentativo di definizione assiomatica della matematica
- Dedekind e Cantor si dedicano allo studio degli insiemi infiniti e alla loro dimensione, o cardinalità

### XX secolo

- la matematica della probabilità e della meccanica quantistica: Lebesgue, Hilbert, von Neumann, Kolmogorov
- geometria: simmetrie, tassellature e impacchettamenti; i frattali (Mandelbrot)
- la nascita dell'informatica: Turing, Von Neumann
- la teoria dell'informazione: Shannon
- la teoria dei giochi: von Neumann, Morgestern e Nash
- l'incompletezza della matematica: Godel

# II Insiemistica e Logica


**4 Logica** . . . . . . **23**
4.1 Logica proposizionale . . . . . . 23
4.2 Logica predicativa . . . . . . 26

**5 Insiemistica** . . . . . . **27**
5.1 Definizioni di base . . . . . . 27
5.2 Operazioni . . . . . . 27
5.3 Funzioni . . . . . . 27

**6 Insiemi numerici** . . . . . . **29**
6.1 Insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$ . . . . . . 29
6.2 Insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$ . . . . . . 29
6.3 Insieme dei numeri razionali, $\mathbb{Q}$ . . . . . . 29
6.4 Insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$ . . . . . . 29
6.5 Insieme dei numeri complessi, $\mathbb{C}$ . . . . . . 30

# 4. Logica

## 4.1 Logica proposizionale

### 4.1.1 Prime definizioni

**Definizione 4.1 — Proposizione.** In matematica, una proposizione è un'affermazione che si può stabilire senza dubbi se è vera o falsa.

**Definizione 4.2 — Valore di verità.** In logica classica esistono solo due valori di verità: vero (V), falso(F). Il valore di verità di una frase stabilisce se la frase è vera o falsa.

Ma cos'è il vero e cos'è il falso?

**Definizione 4.3 — Tavola di verità.** Una tavola diverità rappresenta tutte le possibili combinazioni delle proposizioni coinvolte.

■ **Esempio 4.1** Può risultare utile separare le proposizioni indipendenti, dalle proposizioni dipendenti da queste. Ad esempio, indicando con $p_1$, $p_2$ due proposizioni indipendenti, e $f_1(p_1, p_2)$, $f_2(p_1, p_2)$, $f_3(p_1, p_2)$ tre proposizioni dipendenti da queste

| $p_1$ | $p_2$ | $f_1(p_1,p_2)$ | $f_2(p_1,p_2)$ | $f_3(p_1,p_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | $f_1$(V,V) | $f_2$(V,V) | $f_3$(V,V) |
| V | F | $f_1$(V,F) | $f_2$(V,F) | $f_3$(V,F) |
| F | V | $f_1$(F,V) | $f_2$(F,V) | $f_3$(F,V) |
| F | F | $f_1$(F,F) | $f_2$(F,F) | $f_3$(F,F) |

■

**Uso delle tavole di verità.** Le tavole di verità sono utili per stabilire se due espressioni sono logicamente equivalenti.

**Definizione 4.4 — Identità.** Un'identità è una proposizione che è sempre vera.

**Definizione 4.5 — Contraddizione.** Una contraddizione è una proposizione che è sempre falsa.

### 4.1.2 Connettivi logici e calcolo proposizionale

**Definizione 4.6 — Negazione.** La negazione $\overline{p}$ di una proposizione $p$ ne inverte il valore di verità.

| $p$ | $\bar{p}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

**Definizione 4.7 — Congiunzione.** La congiunzione $p \wedge q$ di due proposizioni è vera se e solo se entrambe sono vere.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

**Definizione 4.8 — Disgiunzione.** La disgiunzione $p \vee q$ di due proposizioni è falsa se e solo se entrambe sono false.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

**Definizione 4.9 — Implicazione logica.** L'implicazione logica $p \to q$ produce una proposizione falsa se e solo se $p$ è vera e $q$ è falsa.

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

**Condizione sufficiente e condizione necessaria.** L'implicazione logica $p \to q$ tra due proposizioni $p$, $q$ consente di dare una definizione di condizione sufficiente e condizione necessaria:

- $p$ come **condizione sufficiente** per $q$.
- $q$ come **condizione necessaria** per $p$.

**Definizione 4.10 — Co-implicazione o equivalenza logica.** La coimplicazione (o equivalenza) logica $p \leftrightarrow q$ produce una proposizione vera se e solo se $p$ e $q$ hanno lo stesso valore di verità.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

**Condizione necessaria e sufficiente – equivalenza logica.** L'equivalenza logica $p \to q$ tra due proposizioni $p$, $q$ consente di dare una definizione di condizione necessaria e sufficiente:

- $p$ come **condizione necessaria e sufficiente** per $q$, e viceversa.

### 4.1.3 Teoremi e proposizioni

**Teorema 4.1 — Leggi di De Morgan.** Le due leggi di De Morgan sono:

- prima legge di De Morgan: $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
- seconda legge di De Morgan: $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

Dimostrazione con le tavole della verità della prima legge,

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\overline{p \wedge q}$ | $\overline{p} \vee \overline{q}$ | $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | V |
| V | F | F | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V |

e della seconda legge,

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\overline{p \vee q}$ | $\overline{p} \wedge \overline{q}$ | $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | V |
| V | F | V | F | F | V |
| F | V | V | F | F | V |
| F | F | F | V | V | V |

### 4.1.4 Tecniche dimostrative

**Definizione 4.11 — Deduzione.** La deduzione $a \Rightarrow b$ è un processo che, a partire da una proposizione vera $a$, tramite un processo logico valido, permette di ricavare una proposizione vera $b$.

| $a \rightarrow b$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| V | V | V |

**Definizione 4.12 — Dimostrazione diretta.** Partendo da un'ipotesi $I$, si dimostra la tesi $T$ tramite un numero finito di deduzioni di proposizioni intermedie $\{p_i\}_{i=1:n}$

$$I \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow T \tag{4.1}$$

| $I \rightarrow p_1$ | $I$ | $p_1$ |
|---|---|---|
| V | V | V |

| $p_1 \rightarrow p_2$ | $p_1$ | $p_2$ |
|---|---|---|
| V | V | V |

| ... | ... | ... |
|---|---|---|
| V | V | V |

| $p_n \rightarrow T$ | $p_n$ | $T$ |
|---|---|---|
| V | V | V |

**Definizione 4.13 — Dimostrazione della contronominale.** Partendo da un ipotesi $I$ vera e invertendo l'implicazione logica, $I \Rightarrow T$, si vuole quindi dimostrare con dimostrazione diretta la proposizione $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$, detta **contronominale** di $I \Rightarrow T$.

$$(\overline{T} \Rightarrow \overline{I}) \Rightarrow (I \Rightarrow T) \tag{4.2}$$

| $I$ | $\overline{T} \rightarrow \overline{I}$ | $\overline{I}$ | $\overline{T}$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V |

**Definizione 4.14 — Dimostrazione per assurdo.** Se partendo dall'ipotesi $I$ vera e negando la tesi $\overline{T}$, si arriva a una contraddizione $C$ (una proposizione falsa), allora è veriticata la tesi.

$$\big((I \wedge \overline{T}) \Rightarrow C\big) \Rightarrow (I \Rightarrow T) \tag{4.3}$$

| $I$ | $C$ | $(I \wedge \overline{T}) \rightarrow C$ | $(I \wedge \overline{T})$ | $\overline{T}$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | F | V | F | F | V |

## 4.2 Logica predicativa

# 5. Insiemistica

## 5.1 Definizioni di base

**Definizione 5.1 — Insieme.** Un insieme è un gruppo di elementi, oggetti che possono essere di qualsiasi tipo.

**Rappresentazioni, notazione ed esempi.** Si è soliti indicare gli insiemi con lettere maiuscole. Un insieme $S$ può essere rappresentato

- per **elencazione**: vengono elencati, di solito tra parentesi graffe, tutti gli elementi dell'insieme

$$S = \{\text{elemento}_1, \text{elemento}_2, \dots, \text{elemento}_N\} \tag{5.1}$$

- per **caratteristica**: viene descritta la condizione che determina gli elementi dell'insieme

$$S = \{x \mid \text{condiizone che determina } x\} \tag{5.2}$$

La condizione può essere una condizione composta da diverse condizioni. Si rimanda agli operatori logici

■ **Esempio 5.1 — Insieme dei mesi.** L'insieme $M$ dei (nomi dei) mesi dell'anno può essere rappresentato come:

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid x \text{ è (il nome di) un mese dell'anno}\} = \\ &= \{\text{gennaio}, \text{febbraio}, \text{marzo}, \text{aprile}, \text{maggio}, \text{giugno}, \\ &\quad\ \text{luglio}, \text{agosto}, \text{settembre}, \text{ottobre}, \text{novembre}, \text{dicembre}\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

■

■ **Esempio 5.2 — Insieme dei numeri naturali minori di 5.** L'insieme $S$ dei numeri

$$\begin{aligned} S &= \{x \mid x \text{ è un numero naturale minore di } 5\} = \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\} = \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

■

## 5.2 Operazioni

## 5.3 Funzioni

# 6. Insiemi numerici

## 6.1 Insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{6.1}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri naturali:

- addizione
- moltiplicazione

## 6.2 Insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{6.2}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri interi:

- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione

## 6.3 Insieme dei numeri razionali, $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x | x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\} \tag{6.3}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri razionali:

- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione
- divisione, esclusa la divisione per 0

## 6.4 Insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$

Esistono dei numeri che non possono essere rappresentati come frazioni di numeri interi. Alcuni di questi numeri compaiono in semplici problemi di geometria, come il calcolo della lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario $\sqrt{2}$ o la lunghezza della circonferenza con raggio unitario $\pi$.

■ **Esempio 6.1 — Irrazionalità di $\sqrt{2}$.** Si vuole dimostrare che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, e quindi non essere scritto come rapporto di due numeri interi $m$, $n$. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, e arriviamo a una contraddizione.

Per assurdo, quindi supponiamo che si possa scrivere

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \ , \tag{6.4}$$

in forma ridotta ai minimi termini. Questo implica che i numeri $m$, $n$ non possano essere contemporaneamente numeri pari, poiché altrimenti la frazione potrebbe essere ulteriormente semplificata.

Elevando alla seconda potenza, possiamo scrivere

$$2n^2 = m^2 \tag{6.5}$$

e quindi il numero $m$ deve essere pari, poiché il suo quadrato è pari. Il numero $n$ dovrà allora essere dispari. Poiché il numero $m$ è pari, può essere scritto come $m = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad \rightarrow \qquad n^2 = 2k^2 \ . \tag{6.6}$$

Dall'ultima espressione, dobbiamo concludere che il numero $n$ sia anch'esso pari. In questo modo si arriva a una contraddizione, poiché il numero $n$ non può essere contemporaneamente pari e dispari.

Dobbiamo concludedere che la tesi sia vera, e che quindi il numero $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. ■

■ **Esempio 6.2 — Irrazionalità della radice $\sqrt{p}$ di ogni numero primo $p$.** Si vuole dimostrare che il numero $\sqrt{p}$, con $p$ numero primo, è irrazionale e quindi non può essere scritto come rapporto di due numeri interi $m$, $n$. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, e arriviamo a una contraddizione.

Per assurdo, quindi supponiamo che si possa scrivere

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} \ , \tag{6.7}$$

in forma ridotta ai minimi termini. Questo implica che i numeri $m$, $n$ non possano avere divisori comuni.

Elevando alla seconda potenza, possiamo scrivere

$$pn^2 = m^2 \tag{6.8}$$

e quindi il numero $m$ deve essere un multiplo di $p$, poiché il suo quadrato contiene il fattore $p$. Il numero $n$ allora non potrà contenere il fattore $p$, poiché $m$ ed $n$ non possono avere fattori comuni. Poiché il numero $m$ è pari, può essere scritto come $m = pk$ con $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$pn^2 = m^2 = (pk)^2 = p^2k^2 \qquad \rightarrow \qquad n^2 = pk^2 \ . \tag{6.9}$$

Dall'ultima espressione, dobbiamo concludere che il numero $n$ ha un fattore $p$ poiché il suo quadrato contiene il fattore $p$. In questo modo si arriva a una contraddizione, poiché il numero $n$ non può contemporaneamente avere e non avere un sottomultiplo $p$.

Dobbiamo concludedere che la tesi sia vera, e che quindi il numero $\sqrt{p}$, con $p$ primo, è un numero irrazionale. ■

## 6.5 Insieme dei numeri complessi, $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}\} \tag{6.10}$$

# III Algebra in $\mathbb{R}$


**7 Algebra simbolica - Calcolo letterale** 33
7.1 Monomi . . . 33
7.2 Polinomi . . . 33
7.3 Potenze e radici . . . 35
7.4 Esponenziali e logaritmi . . . 35
7.5 Funzioni armoniche . . . 36
7.6 Funzioni iperboliche . . . 36

**8 Equazioni** . . . 37
8.1 Equazioni algebriche . . . 37
8.2 Equazioni non algebriche o trascendenti . . . 40
8.3 Metodi di soluzione approssimati . . . 40

**9 Disequazioni** . . . 41
9.1 Disequazioni algebriche . . . 41
9.2 Disequazioni non algebriche . . . 41

**10 Sistemi di equazioni e di disequazioni** 43

# 7. Algebra simbolica - Calcolo letterale

## 7.1 Monomi

**Definizione 7.1 — Monomio.** Un monomio è un'espressione matematica costituita dal prodotto di un coefficiente esplicitamente numerico e una parte letterale, nella quale compaiono unicamente moltiplicazioni e potenze intere.

R Viene richiesto che le potenze della parte letterale siano intere, per evitare di porre delle condizioni sulle basi delle potenze, essendo le potenze non intere definite solo per numeri reali positivi.

**Definizione 7.2 — Monomi simili.** I monomi simili sono i monomi che hanno la stessa parte letterale.

### 7.1.1 Somma e differenza

### 7.1.2 Prodotto e divisione

### 7.1.3 Potenze e radici

**Definizione 7.3 — Potenze e radici intere.** La potenza intera di ordine $n \in \mathbb{N}$ di un monomio $x$ è definita come il prodotto di $x$ per se stesso $n$ volte,

$$p_n(x) := x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ volte}} \ . \tag{7.1}$$

L'operazione inversa, quando possibile, è definita come radice di ordine $n$,

$$x := \sqrt[n]{p_n(x)} = p_n(x)^{\frac{1}{n}} \ . \tag{7.2}$$

R Per una comprensione più completa, bisogna rifarsi all'algebra dei numeri complessi IV.

**Definizione 7.4 — Potenze e radici non intere.**

## 7.2 Polinomi

**Definizione 7.5 — Polinomio.** Un polinomio reale di grado $n$ viene definito come una combinazione lineare dei monomi di grado $\leq n$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{7.3}$$

**Definizione 7.6 — Zero di un polinomio.** Viene definito zero – o radice – (reale) di un polinomio un numero $\overline{x}$ ($\in \mathbb{R}$) tale che $p(\overline{x}) = 0$.

**Definizione 7.7 — Scomposizione in fattori.** Ogni polinomio di variabile reale e coefficienti reali può essere scomposto in fattori polinomiali di primo e secondo grado. Ad esempio un polinomio di grado $n$, può essere scomposto nel prodotto di $p_1$ polinomi di primo grado e $p_2$ polinomi di secondo grado,

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \\ &= (A_1 x + B_1)\dots(A_{p_1} x + B_{p_1})(C_1 x^2 + D_1 x + E_1)\dots(C_{p_2} x^2 + D_{p_2} x + E_{p_2}) = \\ &= K(x + \tilde{B}_1)\dots(x + \tilde{B}_{p_1})(x^2 + \tilde{D}_1 x + \tilde{E}_1)\dots(x^2 + \tilde{D}_{p_2} x + \tilde{E}_{p_2}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

con $p_1 + 2p_2 = n$.

### 7.2.1 Scomposizioni notevoli

La dimostrazione di queste identità viene ricavata facilmente tramite calcolo diretto.

**Quadrato della somma**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{7.5}$$

**Cubo della somma**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \tag{7.6}$$

**Potenza di un binomio**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{7.7}$$

**Differenza di quadrati**

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{7.8}$$

**Somma e differenza di cubi**

$$a^3 \mp b^3 = (a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2) \tag{7.9}$$

**Differenza di potenze di grado qualsiasi**

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \\ &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned} \tag{7.10}$$

**Somma di potenze di grado dispari** Per ogni numero dispari $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, si può dimostrare che

$$\begin{aligned} a^{2m+1} + b^{2m+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a^{n-1-k} b^k = \\ &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots - a b^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned} \tag{7.11}$$

### 7.2.2 Divisione tra polinomi e resto

**Definizione 7.8 — Divisione tra polinomi.** Dati due polinomi $P(x)$, $D(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$, $R(x)$ tali che

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \ , \tag{7.12}$$

con il grado di $R(x)$ minore del grado di $Q(x)$. I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ vengono definiti rispettivamente **quoziente** e **resto** della divisione.

#### 7.2.2.1 Divisione esatta e scomposizone di polinomi: regola di Ruffini

### 7.2.3 Formule di Viete e Newton

Relazioni tra i coefficienti di un polinomio e le sue radici

## 7.3 Potenze e radici

**Definizione 7.9 — Potenze e radici intere.**

## 7.4 Esponenziali e logaritmi

### 7.4.1 Esponenziale

**Definizione 7.10 — Esponenziale.** L'elevamento a potenza di un numero $a$

$$y = a^x \tag{7.13}$$

è un operazione che coinvolge due numeri, $a$ detto base e $x$ detto esponente.

#### 7.4.1.1 Potenze non intere, valori ammissibili

#### 7.4.1.2 Proprietà

**Prodotto di potenze con la stessa base**

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{7.14}$$

**Potenza di potenza**

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{7.15}$$

**Prodotto di potenze con lo stesso esponente**

$$a^m b^m = (ab)^m \tag{7.16}$$

### 7.4.2 Logaritmo

**Definizione 7.11 — Logaritmo.** Il logaritmo è l'operazione inversa

$$x = \log_a y \qquad \text{se } y = a^x \tag{7.17}$$

#### 7.4.2.1 Potenze non intere, valori ammissibili

#### 7.4.2.2 Proprietà

**Somma di logaritmi con la stessa base**

$$\log_a m + \log_a n = \log_a(mn) \tag{7.18}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = a^{\log_a m} \\ n = a^{\log_a n} \\ mn = a^{\log_a mn} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} mn = m \cdot n \\ a^{\log_a mn} = a^{\log_a m} a^{\log_a n} = a^{\log_a m + \log_a n} \end{array} \tag{7.19}$$

$$\rightarrow \log_a mn = \log_a m + \log_a n \tag{7.20}$$

**Prodotto di un logaritmo per uno scalare**

$$b \log_a m = \log_a m^b \tag{7.21}$$

**Cambio di base di un logaritmo**

$$\log_b m = \log_b a \log_a m \tag{7.22}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = b^{\log_b m} \\ a = b^{\log_b a} \\ m = a^{\log_a m} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a m} = b^{\log_b a \, \log_a m} \end{cases} \tag{7.23}$$

e confrontando le due espressioni per $m$ si ottiene

$$\rightarrow \log_b m = \log_b a \, \log_a m \tag{7.24}$$

## 7.5 Funzioni armoniche

### 7.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno

### 7.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante

### 7.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \end{aligned} \tag{7.26}$$

## 7.6 Funzioni iperboliche

# 8. Equazioni

## 8.1 Equazioni algebriche

**Definizione 8.1 — Equazioni algebriche.** ...

### 8.1.1 Equazioni polinomiali

**Definizione 8.2 — Equazione polinomiale.** Un'equazione polinomiale ha la forma

$$p(x) = 0 \tag{8.1}$$

dove $p(x)$ è un polinomio. Il **grado** dell'equazione corrisponde al grado del polinomio $p(x)$, cioé alla potenza massima dei monomi. In maniera più esplicita, quindi, si può scrivere un'equazione polinomiale di grado $n$ come

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ , \qquad \text{con } a_n \neq 0 \tag{8.2}$$

**Esistenza e numero delle soluzioni.** Un'equazione polinomiale di grado $n$ ha **al massimo** $n$ soluzioni reali. L'esistenza di soluzioni reali non è in generale garantita, mentre il **teorema fondamentale dell'algebra** assicura che esistano esattamente $n$ soluzioni complesse di un'equazione polinomiale con coefficienti complessi.

#### 8.1.1.1 Equazioni di primo grado

La forma generale delle equazioni di primo grado è

$$ax + b = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{8.3}$$

e la soluzione è

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \ . \tag{8.4}$$

#### 8.1.1.2 Equazioni di secondo grado

La forma generale delle equazioni di secondo grado è

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{8.5}$$

Un'equazione di secondo grado può ammettere nel campo dei numeri reali 2 soluzioni (distinte o coincidenti) o nessuna soluzione, a seconda del valore dell'espressione definita come **discriminante**, $\Delta := b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$: due soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale

Quando il discriminante è non negativo, le soluzioni dell'equazione sono date dall'espressione

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \,. \tag{8.6}$$

**Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado.** Una dimostrazione della formula risolutiva viene ricavata con la regola di completamento del quadrato

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c = \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{8.8}$$

É ora facile notare come questa equazione ha soluzioni solo quando il discriminante è non negativo. Quando il discriminante è non negativo, è possibile estrarre la radice quadra dell'espressione

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \,. \tag{8.9}$$

### 8.1.2 Equazioni algebriche razionali

**Definizione 8.3 — Equazioni algebriche razionali.** Le equazioni algebriche razionali sono equazioni che contengono polinomi, loro rapporti e potenze intere.

■ **Esempio 8.1 — Esempi di equazioni algebriche razionali.**

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)} = 4x \tag{8.10}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{1}{x} \tag{8.11}$$

■

#### 8.1.2.1 Metodo di soluzione

1. Per prima cosa è necessario determinare le **condizioni di esistenza** di una soluzione. Poiché nelle equazioni può comparire la **divisione** tra polinomi, bisogna richiedere che questa e tutte le operazioni scritte nel problema abbiano senso: ad esempio, nelle condizioni di esistenza bisogna richiedere che non avvengano divisioni per zero.
2. Successivamente, è possibile procedere con le semplificazioni per la ricerca della soluzione.

**Esempi** Seguendo questo metodo di soluzione, procediamo a risolvere le equazioni dell'esempio cit.

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)} = 4x \qquad \text{C.E.: } x \neq 1 \quad \rightarrow \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}
&(x+3)^2 = 4x(x-1)\\
&x^2+6x+9 = 4x^2-4x\\
&3x^2-10x-9=0\\
&\rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{25+3\cdot 9}}{6} = \frac{5\mp\sqrt{52}}{3}
\end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{1}{x} \qquad \text{C.E.: } x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned}
&2x^2 = -x^2-1\\
&3x^2 = -1 \quad \rightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

### 8.1.3 Equazioni algebriche irrazionali

**Definizione 8.4 — Equazioni algebriche irrazionali.** Le equazioni algebriche razionali sono equazioni che contengono polinomi, loro rapporti e potenze intere e non.

**■ Esempio 8.2 — Esempi di equazioni algebriche irrazionali.**

$$\sqrt[3]{x-3} = 2 \quad , \quad \frac{2x}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = -2 \tag{8.16}$$

■

#### 8.1.3.1 Metodo di soluzione

1. Per prima cosa è necessario determinare le **condizioni di esistenza** di una soluzione. Bisogna richiedere che questa e tutte le operazioni scritte nel problema abbiano senso: bisogna richiedere che
   - che non avvengano **divisioni** per zero;
   - che siano non negativi i radicandi di eventuali **radici** con indice intero pari o non intero.
2. Successivamente, è possibile procedere con le semplificazioni per la ricerca della soluzione.

**Esempi**

$$\sqrt[3]{x-3} = 2 \qquad \text{C.E.: } x \in \mathbb{R} \tag{8.17}$$

$$x-3 = 8 \quad \rightarrow \quad x = 11 \tag{8.18}$$

$$\frac{2x}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = -2 \qquad \text{C.E.: } x-1>0 \quad \rightarrow \quad x \in (1,+\infty) \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}
&x = -(x-1)^{\frac{1}{2}}\\
&x^2 = x-1\\
&x^2-x+1=0\\
&\Delta = (-1)^2-4\cdot 1\cdot 1 = -3<0 \quad \rightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{8.20}$$

## 8.2 Equazioni non algebriche o trascendenti

### 8.2.1 Equazioni con i valori assoluti

### 8.2.2 Equazioni con esponenti e logaritmi

### 8.2.3 Equazioni con le funzioni armoniche

## 8.3 Metodi di soluzione approssimati

### 8.3.1 Metodo grafico

### 8.3.2 Metodi numerici

Riferimento al capitolo dei metodi numerici

# 9. Disequazioni

9.1 Disequazioni algebriche
9.2 Disequazioni non algebriche

# 10. Sistemi di equazioni e di disequazioni

# IV Algebra in $\mathbb{C}$


**11 Algebra complessa** . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

11.1 Definizione dei numeri complessi . . . . . . . . . . . 47

11.2 Operazioni con i numeri complessi . . . . . . . . . 48

**12 Calcolo complesso** . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

# 11. Algebra complessa

## 11.1 Definizione dei numeri complessi

**Definizione 11.1 — Unità immaginaria.**

$$i := \sqrt{-1} \tag{11.1}$$

**Definizione 11.2 — Numero complesso.**

$$z = x + iy \qquad , \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{11.2}$$

### 11.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)

Si può definire una relazione biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e il piano $\mathbb{R}^2$.

#### 11.1.1.1 Rappresentazione cartesiana.

#### 11.1.1.2 Rappresentazione polare.

Trasformazione tra coordinate cartesiane e polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(x,y) \end{cases} \tag{11.3}$$

e quindi

$$z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{11.4}$$

**La relazione di Eulero e la rappresentazione polare dei numeri complessi.** Usando le espansioni in serie di Taylor delle funzioni $e^{i\theta}$, $\cos\theta$ e $\sin\theta$, Eulero ricavò la formula che da lui prende il nome

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\ . \tag{11.5}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!} && = 1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{4!}+\dots\\
\sin\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} && = \theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\dots\\
e^{i\theta} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(i\theta)^n}{n!} && = 1+i\theta-\frac{\theta^2}{2}-i\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+i\frac{\theta^5}{5!}+\dots=\\
& && = \left[1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{4!}+\dots\right]+i\left[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\dots\right]=\\
& && = \cos\theta+i\sin\theta\ .
\end{aligned} \tag{11.6}$$

# 11.2 Operazioni con i numeri complessi

## 11.2.1 Somma e differenza

$$z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)\ . \tag{11.7}$$

## 11.2.2 Prodotto e divisione

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}\ . \tag{11.8}$$

## 11.2.3 Potenze e radici

$$z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta} \tag{11.9}$$

$$z^{\frac{1}{n}}=\left(re^{i(\theta+2\pi m)}\right)^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{m}{n}2\pi\right)} \tag{11.10}$$

## 11.2.4 Esponenziali e logaritmi

...

# 12. Calcolo complesso

# V Serie e successioni


**13 Successioni e serie di numeri reali** . . . . **53**
13.1 Successioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
13.2 Serie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

**14 Serie di funzioni** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **55**
14.1 Serie di potenze . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
14.2 Serie di Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55

# 13. Successioni e serie di numeri reali

## 13.1 Successioni

**Definizione 13.1 — Serie di numeri reali.**

## 13.2 Serie

**Definizione 13.2 — Serie di numeri reali.**

**Definizione 13.3 — Serie infinite di numeri reali.**

**Definizione 13.4 — Carattere di una serie.** Una serie può essere

- convergente
- divergente
- indeterminata

### 13.2.1 Serie notevoli

#### 13.2.1.1 Serie armonica

**Definizione 13.5 — Serie armonica.**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k} \tag{13.1}$$

#### 13.2.1.2 Serie geometrica

**Definizione 13.6 — Serie geometrica.**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^k} \tag{13.2}$$

#### 13.2.1.3 La costante di Napier

**Definizione 13.7 — La costante di Napier, o il numero di Euler – $e$.** La successione di numeri $\{e_n\}$,

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ , \tag{13.3}$$

è una serie monotona crescente e superiormente limitata, e quindi esiste il limite finito il cui valore viene definito costante di Napier, o numero di Eulero

$$e := \lim_{n\to+\infty} e_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \ . \tag{13.4}$$

*Dimostrazione.* É immediato riconoscere che la successione $e_n$ è crescente, essendo definito come una somma di numeri positivi,

$$e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} > e_n \ . \tag{13.5}$$

Per dimostrare che è limitata superiormente, si può osservare che ogni termine della serie è minore del termine rispettivo della serie armonica di base $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots < \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + S_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \ , \end{aligned} \tag{13.6}$$

e per il limite $n \to +\infty$, si ottiene

$$e_\infty = \lim_{n\to+\infty} e_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < 1 + S\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 = 3 \ . \tag{13.7}$$

■

**Definizione 13.8 — Definizioni equivalenti di $e$.**

$$e = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{cases} \tag{13.8}$$

# 14. Serie di funzioni

14.1 Serie di potenze
14.1.1 Serie di Taylor
14.2 Serie di Fourier

# VI Calcolo infinitesimale


**15 Funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e limiti** . . . . . . . . . . . . . . **59**
15.1 Funzioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
15.2 Limiti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
15.3 Funzioni continue . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
15.4 Teoremi sui limiti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
15.5 Infiniti e infinitesimi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
15.6 Limiti notevoli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60

**16 Derivate** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **63**
16.1 Definizioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
16.2 Regole di derivazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
16.3 Teoremi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
16.4 Derivate fondamentali . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
16.5 Derivate di ordine superiore . . . . . . . . . . . . . . . 67
16.6 Espansioni in serie di Taylor e MacLaurin . . . . . . 67
16.7 Applicazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68

**17 Integrali** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **69**
17.1 Definizioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
17.2 Proprietà . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
17.3 Teoremi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
17.4 Integrali fondamentali . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
17.5 Regole di integrazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70

# 15. Funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e limiti

## 15.1 Funzioni

**Definizione 15.1 — Funzione a variabile e valori reali.**

## 15.2 Limiti

- Limite destro e limite sinistro
- Funzioni continue

**Definizione 15.2 — Limite finito al finito.** Il limite finito della funzione $f(x)$ per $x$ che tende a $x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \tag{15.1}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall \varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \ell| < \delta. \tag{15.2}$$

**Definizione 15.3 — Limite infinito al finito.** Il limite infinito della funzione $f(x)$ per $x$ che tende a $x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty \tag{15.3}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall \varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon,\ \exists M \lesseqgtr 0 \text{ tale che } f(x) \lesseqgtr M. \tag{15.4}$$

**Definizione 15.4 — Limite finito al infinito.** Il limite finito della funzione $f(x)$ per $x$ che tende all'infinito

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \ell \tag{15.5}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall N \lesseqgtr 0 \text{ tale che } x \lesseqgtr N,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \ell| < \delta. \tag{15.6}$$

**Definizione 15.5 — Limite infinito al infinito.** Il limite infinito della funzione $f(x)$ per $x$ che tende all'infinito

$$\lim_{x\to\mp^{(1)}\infty} f(x) = \mp^{(2)}\infty \tag{15.7}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall N \lessgtr^{(1)} 0 \text{ tale che } x \lessgtr^{(1)} N,\ \exists M \lessgtr^{(2)} 0 \text{ tale che } f(x) \lessgtr^{(2)} M. \tag{15.8}$$

Grafici

## 15.3 Funzioni continue

Definizioni:

- punto di accumulazione
- punto isolato
- intorno
- attenzione a insiemi aperti e chiusi

**Definizione 15.6 — Funzione continua in un punto.** Una funzione $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0\in\Omega$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ . \tag{15.9}$$

**Definizione 15.7 — Funzione continua in un intervallo.** Una funzione $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è continua in un intervallo $[a,b]\subset\Omega$, se è una funzione continua in tutti i punti $x\in[a,b]$.

### 15.3.1 Teoremi sulle funzioni continue

**Teorema 15.1 — Teorema di Weierstrass.** Una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ ammette in esso un massimo e un minimo assoluto.

## 15.4 Teoremi sui limiti

**Teorema 15.2 — Teorema del confronto.**

## 15.5 Infiniti e infinitesimi

## 15.6 Limiti notevoli

| | |
|---|---|
| Potenza | $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$ |
| Seno | $\lim_{x\to 0}\frac{\sin}{x}=1$ |
| Coseno | $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ |
| Esponenziale - def | $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ |
| " (1) | $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ |
| " (2) | $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x}=1$ |
| Logaritmo naturale | $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ |

### 15.6.1 Dimostrazioni

*Limite notevole del seno.* Il limite viene calcolato usando il teorema del confronto (15.2), con le funzioni $x$, $\sin x$ e $\tan x$

$$\sin x \leq x \leq \tan x \qquad \rightarrow \qquad 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \; . \tag{15.10}$$

Per $x \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$ e quindi $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$. ■

*Limite notevole del coseno.* Il limite viene calcolato usando il limite notevole del seno,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1} \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{15.11}$$

■

**Definizione 15.8 — Il numero di Nepero, $e$.** Il numero di Nepero, $e$ può essere definito come il limite

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \; . \tag{15.12}$$

Si prova l'esistenza al finito di questo limite, dimostrando che la serie $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è:

- crescente in maniera monotona, i.e. $a_{n+1} > a_n$, $\forall n$
- limitata superiormente, i.e. $\exists M s.t. a_n < M$, $\forall n$

Per dimostrare che la serie è crescente, cerchiamo il legame tra due termini successivi. Per dimostrare che la serie è limitata superiormente, dimostriamo che $a_n < 3$.

*Limite notevole dell'esponenziale - definizione.* Questo limite non è nient'altro che una delle definizioni del numero $e$. ■

*Limite notevole dell'esponenziale - (1).*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} - 1\right) = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = \\ &= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \dots\right) = 1 \end{aligned} \tag{15.13}$$

■

*Limite notevole dell'esponenziale - (2).*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1+x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \left[ 1 + \underbrace{\frac{x^2}{1+x} \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \dots \right)}_{\to 0} \right] = 1
\end{aligned} \tag{15.14}$$

■

*Limite notevole del logaritmo.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1+x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \left[ 1 + \underbrace{\frac{x^2}{1+x} \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \dots \right)}_{\to 0} \right] = 1
\end{aligned} \tag{15.15}$$

■

# 16. Derivate

## 16.1 Definizioni

**Definizione 16.1 — Rapporto incrementale.**

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{16.1}$$

**Definizione 16.2 — Derivata.**

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x):=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{16.2}$$

**Definizione 16.3**

**Interpretazione geometrica.**

## 16.2 Regole di derivazione

### 16.2.1 Regole

**Derivata della somma di due funzioni e il prodotto per uno scalare**

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))'&=f'(x)+g'(x)\\(af(x))'&=af'(x)\end{aligned} \tag{16.3}$$

**Proprietà 16.1 — Operatore lineare.** La derivata è un operatore lineare.

**Derivata del prodotto di due funzioni**

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{16.4}$$

**Derivata del rapporto di due funzioni**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{16.5}$$

**Derivata di una funzione composta**

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{dy}f(y)\bigg|_{y=g(x)}\frac{d}{dx}g(x) \tag{16.6}$$

**Derivata della funzione inversa**

$$(16.7)$$

### 16.2.2 Dimostrazioni

**Derivata della somma di due funzioni**
**Derivata del prodotto di due funzioni**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) .
\end{aligned} \tag{16.8}$$

**Derivata del rapporto di due funzioni**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x) = \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned} \tag{16.9}$$

**Derivata di una funzione composta**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))\right] = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\
&= \dots \\
&= f'(g(x))\, g'(x) .
\end{aligned} \tag{16.10}$$

## 16.3 Teoremi

**Teorema 16.1 — Teorema di Fermat.** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo $(a,b)$ e derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$, punto di estremo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.

### 16.3.1 Teoremi di Fermat, Rolle, Cauchy e Lagrange

**Teorema 16.2 — Teorema di Rolle.** Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in ogni punto dell'intervallo $[a,b]$ che assume valori uguali $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ in cui la derivata della funzione si annulla, $f'(c) = 0$.

*Dimostrazione.* Secondo il teorema di Weierstrass (15.1) sulle funzioni continue, la funzione $f$ ammette punti $c \in [a,b]$ di massimo e un minimo globali. Si possono riconoscere ora due casi:

- se i punti di massimo e minimo globali coincidono entrambi con gli estremi dell'intervallo, si può scrivere

$$m = f(a) = f(b) \leq f(x) \leq M = f(a) = f(b) \tag{16.11}$$

  e quindi la funzione è costante, $f(x) = f(a) = f(b)$, e la sua derivata è nulla in tutti i punti dell'intervallo, $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a,b)$;
- altrimenti, esiste un punto di massimo o minimo globale $x = c \in (a,b)$ interno all'intervallo; i punti di massimo o minimo globali globali sono anche punti di massimo o minimo locali e quindi, per il teorema di Fermat (16.1), $f'(c) = 0$.

■

**Teorema 16.3 — Teorema di Cauchy.** Siano $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili su $(a,b)$, allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)\ . \tag{16.12}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione del teorema di Cauchy può essere svolta con un'opportuna scelta della funzione alla quale applicare il teorema di Rolle (16.2). Ad esempio, la funzione

$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)]\ , \tag{16.13}$$

soddisfa le ipotesi del teoremda di Rolle, poichè

- $h(x)$ è continua su $[a,b]$ e derivabile su $(a,b)$
- $h(a) = h(b)$, dal calcolo diretto

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)][g(a) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(a) - f(a)] = 0 \\ h(b) &= [f(b) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(b) - f(a)] = 0\ . \end{aligned} \tag{16.14}$$

Applicando il teorema di Rolle alla funzione $h(x)$, possiamo concludere che esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $h'(c) = 0$ e quindi

$$0 = h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x)\ . \tag{16.15}$$

■

**Teorema 16.4 — Teorema di Lagrange.** Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$, allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)\ . \tag{16.16}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione del teorema di Lagrange segue direttamente dalla dimostrazione del teorema di Cauchy (16.3), usando le funzioni $f(x)$ e $g(x) = x$, la cui derivata è $g'(x) = 1$. ■

### 16.3.2 Teorema di de l'Hopital

**Teorema 16.5 — Teorema di de l'Hopital.**

## 16.4 Derivate fondamentali

| | | |
|---|---|---|
| Potenza | $f(x) = x^a$ | $f'(x) = ax^{a-1}$ |
| Esponenziale | $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| Logaritmo | $f(x) = \ln x$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |
| Seno | $f(x) = \sin x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| Coseno | $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\sin x$ |

### 16.4.1 Dimostrazioni

*Derivata della potenza.*

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^n - 1}{\varepsilon} x^n = \\
&= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^n - 1}{\frac{\varepsilon}{x}}}_{=n} x^{n-1} = \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
\tag{16.17}
$$

■

*Derivata della funzione esponenziale.*

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{x+\varepsilon} - e^x}{\varepsilon} = \\
&= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(e^\varepsilon - 1)}{\varepsilon}}_{=1} e^x = \\
&= e^x
\end{aligned}
\tag{16.18}
$$

■

*Derivata della funzione logaritmo.* Il dominio della funzione logaritmo è $\mathbb{R}^+$, ossia l'insieme dei numeri reali positivi. Essendo l'argomento del logaritmo diverso da zero, si può dividere per esso senza il timore di incorrere in espressioni non definite

$$
\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln(x+\varepsilon) - \ln x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)\right) - \ln x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right) - \ln x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)}{\varepsilon} = \\
&= \underbrace{\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon/x \to 0}} \frac{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)}{\frac{\varepsilon}{x}}}_{=1} \frac{1}{x} = \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
\tag{16.19}
$$

■

*Derivata della funzione seno.*

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin(x+\varepsilon)-\sin x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin x\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\cos x - \sin x}{\varepsilon} = \\
&= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)}_{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\right)=0} \sin x + \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}}_{=1} \cos x = \\
&= \cos x
\end{aligned}
\tag{16.20}
$$

■

*Derivata della funzione coseno.*

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\cos(x+\varepsilon)-\cos x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\cos x\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\sin x - \cos x}{\varepsilon} = \\
&= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)}_{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\right)=0} \cos x - \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}}_{=1} \sin x = \\
&= -\sin x
\end{aligned}
\tag{16.21}
$$

■

## 16.5 Derivate di ordine superiore

## 16.6 Espansioni in serie di Taylor e MacLaurin

**Definizione 16.4 — Serie di Taylor.** La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ centrata in $x = x_0$ è la serie polinomiale

$$
T[f(x_0)](x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \; . \tag{16.22}
$$

**Teorema 16.6** La serie di Taylor troncata alla $n$-esima potenza,

$$
T^n[f(x_0)](x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \; , \tag{16.23}
$$

è un'approssimazione dell'$n$-esimo ordine della funzione $f(x)$, i.e.

$$
f(x) - T^n[f(x_0)](x) \sim o(|x-x_0|^n) \tag{16.24}
$$

**Definizione 16.5 — Serie di MacLaurin.** La serie di MacLaurin di una funzione $f(x)$ è definita come la sua serie di Taylor centrata in $x = 0$.

## 16.7 Applicazioni

### 16.7.1 Studio funzione

# 17. Integrali

## 17.1 Definizioni

**Definizione 17.1 — Somma di Riemann.** Data una funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, e una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n | a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b\}$ dell'intervallo $[a,b]$, la somma di Riemann viene definita come

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}) \tag{17.1}$$

con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

**Definizione 17.2 — Integrale di Riemann.** Definendo $\Delta x := \max_i(x_i - x_{i-1})$, l'integrale di Riemann viene definito come il limite della somma di Riemann per $\Delta x \to 0$ (e di conseguenza il numero di intervalli della partizione $n \to \infty$), e viene indicato come

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_n \tag{17.2}$$

**Definizione 17.3 — Integrale definito.** L'integrale della definizione (17.2) svolto tra due valori di $x$ viene definito integrale definito.

### Interpretazione geometrica

**Definizione 17.4 — Integrale indefinito.**

## 17.2 Proprietà

$$\int_{x=a}^{b} [Af(x) + Bg(x)]\, dx = A\int_{x=a}^{b} f(x)dx + B\int_{x=a}^{b} g(x)dx \tag{17.3}$$

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \int_{x=a}^{c} f(x)dx + \int_{x=c}^{b} f(x)dx \tag{17.4}$$

## 17.3 Teoremi

**Definizione 17.5 — Media.**

$$M(f,[a,b]) = \frac{1}{b-a}\int_{x=a}^{b} f(x)dx \tag{17.5}$$

**Teorema 17.1 — Teorema della media.** Sia $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$, allora esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)\ . \tag{17.6}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è immediata, applicando il teorema di Lagrange (16.4) alla primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)$, $F(x) = \int_{t=x_0}^{x} f(t)dt$

$$\int_{t=a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)\ . \tag{17.7}$$

■

**Teorema 17.2 — Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale.**

$$\frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt = f(x) \tag{17.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t=a}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{t=a}^{x} f(t)dt\right] = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{t=x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Delta x\, f(\xi) = \qquad\qquad (\text{con } \xi \in [x, x+\Delta x]) \\ &= f(x)\ .\end{aligned} \tag{17.9}$$

## 17.4 Integrali fondamentali

## 17.5 Regole di integrazione

### 17.5.1 Integrazione per parti

- Definendo $F(x)$, $G(x)$ le primitive delle funzioni $f(x)$, e $g(x)$
- Integrando in $x$ dalla regola di **derivazione del prodotto** $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$, riscritta isolando il termine $F'(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)G'(x)$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)dx &= \int (F(x)G(x))'dx - \int F(x)G'(x)dx = \\ &= F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx\end{aligned} \tag{17.10}$$

■ **Esempio 17.1** ■

### 17.5.2 Integrazione con sostituzione

- Definendo la funzione composta $\overline{F}(x) = F(y(x))$ e le derivate

$$\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) \qquad , \qquad f(y) = \frac{d}{dy}F(y) \tag{17.11}$$

- Partendo dalla regola di **derivazione della funzione composta**, $\overline{F}(x) = F(y(x))$

$$\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) = \frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{dF}{dy}(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(y(x))y'(x) \tag{17.12}$$

Usando il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

$$\begin{aligned} F(y) &= \int f(y)dy \\ \overline{F}(x) &= \int \overline{f}(x)dx = \int f(y(x))\ y'(x)dx \end{aligned} \tag{17.13}$$

Se si introduce la dipendenza $y(x)$ nella prima equazione, si ottiene l'uguaglianza tra le ultime due espressioni, $F(y(x)) = \overline{F}(x)$, e quindi

$$\int f(y)dy = \int f(y(x))\ y'(x)dx\ . \tag{17.14}$$

■ **Esempio 17.2** ■

# VII Equazioni differenziali ordinarie


**18 Introduzione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75**
18.1 Applicazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75
18.2 Definizioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75

**19 Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77**
19.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
19.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

**20 Metodo di separazione delle variabili 79**

# 18. Introduzione

## 18.1 Applicazioni

## 18.2 Definizioni

**Definizione 18.1 — Equazione differenziale ordinaria.** Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che ha come incognita una funzione $y(x)$, nella quale possono comparire la funzione incognita $y(x)$, le sue derivate $y^{(n)}(x)$ e la variabile indipendente $x$, che può essere scritto nella forma implicita

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{18.1}$$

L'**ordine** dell'equazione differenziale viene definito come l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che compaiono nell'equazione.

**Definizione 18.2 — Equazione differenziale ordinaria lineare.** Un'equazione differenziale è lineare se si può scrivere come l'uguaglianza di una combinazione lineare delle derivate della funzione incognita e una funzione nota, $f(x)$. Ad esempio, la forma generale dell'equazione differenziale ordinaria di ordine $n$ può essere scritta come

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\dots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{18.2}$$

**Definizione 18.3 — Equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti.** Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare con coefficienti $a_i(x) = a_i$, numeri che non dipendono dalla variabile indipendente $x$,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{18.3}$$

**Definizione 18.4 — Equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti.** Un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti con $f(x) = 0$,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{18.4}$$

In generale, la soluzione dell'equazione (18.1) dipende da $n$ parametri indeterminati. In generale, un problema differenziale è composto da:

- un'equazione differenziale di ordine $n$
- $n$ condizioni per determinare gli $n$ parametri altrimenti indeterminati

**Definizione 18.5 — Problema di Cauchy.** Un problema di Cauchy è definito da:

- un'equazione differenziale di ordine $n$

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \,, \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{18.5}$$

- $n$ condizioni che definiscono il valore della funzione incognita e delle prime $n-1$ derivate nell'estremo inferiore dell'intervallo

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y'(a) &= y_1 \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(a) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{18.6}$$

# 19. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti

## 19.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine

### 19.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay'(x) + by(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{19.1}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando la derivata e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta + b)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{19.2}$$

Il prodotto di tre fattori si annulla quando si annulla uno dei tre fattori:

- $e^{\beta x}$ non si annulla per nessun valore di $x$
- se si annulla $\alpha$, $\alpha = 0$, si otterebbe la soluzione triviale $y(x) = 0$
- $\rightarrow$ deve quindi annullarsi il fattore $a\beta + b$: si ottiene quindi il valore $\beta = -\dfrac{b}{a}$

La forma generale della soluzione dell'equazione (19.1) è quindi

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{a}x} \tag{19.3}$$

Per determinare il coefficiente $\alpha$ è necessaria una condizione che definisca il valore della funzione (o della sua derivata) in un punto del dominio o del suo contorno.

## 19.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine

### 19.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{19.4}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando le derivate e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta^2 + b\beta + c)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{19.5}$$

I valori di $\beta$ si ottiengono dalla soluzione dell'equazione di secondo grado in $\beta$, $a\beta^2+b\beta+c = 0$ che, a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, possono essere:

- $\Delta > 0$: esistono due soluzioni reali distinte $\beta_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: esistono due soluzioni reali coincidenti $\beta_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: esistono due soluzioni complesse coniugate $\beta_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \mp j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

La soluzione dell'equazione differenziale assume quindi la forma

- $\Delta > 0$:

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} \tag{19.6}$$

- $\Delta = 0$:

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 x e^{\beta x} \tag{19.7}$$

- $\Delta < 0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 e^{\beta^* x} = \\ &= \alpha_1 e^{(re\{\beta\}+i im\{\beta\})x} + \alpha_2 e^{(re\{\beta\}-i im\{\beta\})x} = \\ &= e^{re\{\beta\}x}\left(\alpha_1 e^{i\ im\{\beta\}x} + \alpha_2 e^{-i\ im\{\beta\}x}\right) \ , \end{aligned} \tag{19.8}$$

  e per avere una soluzione reale, bisogna imporre $\alpha_2 = \alpha_1^*$, per ottenere la somma di due numeri complessi coniugati, uguale al doppio della somma della loro parte reale,

$$y(x) = 2e^{re\{\beta\}x}\left(re\{\alpha_1\}\cos(\beta x) - im\{\alpha_1\}\sin(\beta x)\right) \ , \tag{19.9}$$

  che può essere riscritta come

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{re\{\beta\}x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right) = \\ &= Ce^{re\{\beta\}x}\cos(\beta x + \phi) \ . \end{aligned} \tag{19.10}$$

# 20. Metodo di separazione delle variabili

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \tag{20.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x)) \tag{20.2}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \tag{20.3}$$

■ **Esempio 20.1** $y'(x) = xy(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \rightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \rightarrow \quad y(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2} \tag{20.4}$$

Verifica: $y'(x) = K\frac{1}{2}2xe^{\frac{1}{2}x^2} = Kxe^{\frac{1}{2}x^2} = xy(x)$. ■

# VIII Vettori


**21 Algebra vettoriale** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **85**
21.1 Introduzione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
21.2 Definizioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
21.3 Spazi vettoriali con prodotto interno . . . . . . . . . 86
21.4 Spazi vettoriali bi- e tri-dimenisonali . . . . . . . . . 86
21.5 Applicazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87

**22 Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **89**
22.1 Introduzione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
22.2 Funzioni di più variabili - campi . . . . . . . . . . . . 89

Motivazione:

- non tutti gli oggetti di interesse della Matematica, della Fisica o delle Scienze in generale possono essere adeguatamente rappresentati da un singolo numero
- esempi: posizione, velocità, forza,...

Storia:

- ...
- da vettori nello spazio fisico a struttura astratta matematica

# 21. Algebra vettoriale

## 21.1 Introduzione

Nello studio della Fisica e delle scienze in generale, si incontrano alcune grandezze che non possono essere rappresentate adeguatamente con un numero, opportunamente accompagnato dalle unità di misura se necessario. Alcuni esempi sono la posizione, la velocità o l'accelerazione di un punto nello spazio, o una forza; Esempi ... Esempi di tensori: rotazioni, inerzia ...

## 21.2 Definizioni

**Definizione 21.1 — Spazio vettoriale.** Uno spazio vettoriale è una struttura matematica composta da:

- un insieme $V$, i cui elementi $\mathbf{v} \in V$ sono chiamati **vettori**
- un campo $F$, i cui elementi $a \in F$ sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto a $V$, cioè il cui risultato è un elemento che appartiene a $V$, che soddisfano determinate proprietà
  - **somma vettoriale** di due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{21.1}$$

  - **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore $\mathbf{u} \in V$ e uno scalare $a \in F$:

$$a\mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{21.2}$$

**Proprietà 21.1 — Proprietà delle operazioni.**

**Definizione 21.2 — Combinazione lineare di vettori.** Una combinazione lineare dei vettori $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1:K}$ è un vettore la cui espressione che può essere scritto come

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_K\mathbf{v}_K \ , \tag{21.3}$$

dove i coefficienti $a_k$, $k = 1 : K$, sono degli scalari appartenenti al campo $F$.

**Definizione 21.3 — Vettori linearmente indipendenti.** Un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1:K}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, se una loro combinazione lineare ha come risultato il vettore nullo solo se tutti i coefficienti della combinazione sono nulli, cioé

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_K \mathbf{v}_K \qquad \rightarrow \qquad a_k = 0 \ , \quad \forall k = 1 : K \ . \tag{21.4}$$

Dalla definizione, segue immediatamente che nessun vettore dell'insieme può essere scritto come una combinazione lineare degli altri vettori. Se così non fosse,...

**Definizione 21.4 — Base e dimensione di uno spazio.** Una base di uno spazio lineare è un insieme massimo di vettori linearmente indipendenti, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$. La dimensione dello spazio lineare è definita come il numero degli elementi della base.

**Definizione 21.5 — Componenti di un vettore rispetto a una base.** Le componenti $\{v^k\}_{k=1:N}$ di un vettore $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ vengono definite come i coefficienti della combinazione lineare

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + \dots + v_N \mathbf{b}_N = \sum_{k=1}^{N} v^k \mathbf{b}_k \ . \tag{21.5}$$

Un vettore è **invariante** rispetto alla base usata per descriverlo: se si cambia la base, le componenti cambiano di conseguenza.

## 21.3 Spazi vettoriali con prodotto interno

**Definizione 21.6 — Prodotto interno.** Il prodotto interno $\cdot : V \times V \rightarrow F$ è un'operazione lineare tra due elementi dello spazio vettoriale, che restituisce uno scalare non negativo, con le seguenti proprietà

- simmetria: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
- linearità: $(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- non-negatività: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, con l'uguaglianza che vale solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

**Definizione 21.7 — Norma indotta dal prodotto interno.** La norma di un vettore $\mathbf{v}$ indotta da un prodotto interno è definita come

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \ . \tag{21.6}$$

**Definizione 21.8 — Base ortonormale.** Una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1:N}$, è una base i cui vettori sono legati dalla relazione

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 \ , & i = k \\ 0 \ , & i \neq k \end{cases} \tag{21.7}$$

## 21.4 Spazi vettoriali bi- e tri-dimensonali

### 21.4.1 Spazio vettoriale bidimensionale

**Prodotto interno.** ...

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u^2 \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (v^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v^2 \hat{\mathbf{e}}_2) = u^1 v^1 + u^2 v^2 \ . \tag{21.8}$$

Usando una base ortogonale $\{\hat{\mathbf{E}}_i\}_{i=1:2}$ che ha il primo vettore orientato come $\mathbf{u}$, si può scrivere

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = U^1 \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (V^1 \hat{\mathbf{E}}_1 + V^2 \hat{\mathbf{E}}_2) = U^1 V^1 = UV \cos\theta_{\mathbf{uv}} \ . \tag{21.9}$$

**Prodotto vettoriale.**

### 21.4.2 Spazio vettoriale tridimensionale

**Prodotto interno.**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + u^3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (v^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v^3 \hat{\mathbf{e}}_3) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \ . \tag{21.10}$$

Usando una base ortogonale $\{\hat{\mathbf{E}}_i\}_{i=1:3}$ che ha:
- il primo vettore orientato come $\mathbf{u}$, tale che il vettore $\mathbf{u}$ può essere scritto come $\mathbf{u} = U^1 \hat{\mathbf{E}}_1$
- il secondo vettore $\hat{\mathbf{E}}_2$ tale che il vettore $\mathbf{v}$ può essere scritto come $\mathbf{v} = V^1 \hat{\mathbf{E}}_1 + V^2 \hat{\mathbf{E}}_2$
- il terzo vettore $\hat{\mathbf{E}}_3$ orientato di conseguenza, ortogonale ai due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$

Risulta ancora una volta dimostrata la relazione

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = U^1 \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (V^1 \hat{\mathbf{E}}_1 + V^2 \hat{\mathbf{E}}_2) = U^1 V^1 = UV \cos\theta_{\mathbf{uv}} \ . \tag{21.11}$$

**Prodotto vettoriale.** ...

## 21.5 Applicazioni

### 21.5.1 Geometria

### 21.5.2 Fisica

# 22. Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale

## 22.1 Introduzione

**Definizione 22.1 — Vettore posizione.**

**Definizione 22.2 — Coordinate.** Il vettore posizione in uno spazio euclideo $N$-dimensionale può essere espresso come una funzione di $N$ variabili indipendenti $\{q^i\}_{i=1:N}$, dette coordinate,

$$\mathbf{r}(q^i) \ . \tag{22.1}$$

Se ogni combinazione di coordinate identifica un punto nello spazio, le coordinate vengono definite **regolari**.

■ **Esempio 22.1 — Coordinate cartesiane.** ■

■ **Esempio 22.2 — Coordinate polari nel piano.** ■

■ **Esempio 22.3 — Coordinate sferiche.** ■

## 22.2 Funzioni di più variabili - campi

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}(q^i)) = F(q^i) \tag{22.2}$$

### 22.2.1 Limiti e funzioni continue

### 22.2.2 Derivate

**Definizione 22.3 — Funzione derivabile.**

**Definizione 22.4 — Derivate parziali.** La derivata parziale di una funzione viene definita come la derivata della funzione rispetto a una delle variabili indipendenti, mantenendo costanti le altre variabili,

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(q^1, \dots, q^i + \varepsilon, \dots, q^N) - f(q^1, \dots, q^i, \dots, q^N)}{\varepsilon} \tag{22.3}$$

**Definizione 22.5 — Derivata direzionale.** La derivata direzionale di un campo $f(\mathbf{r})$ nel punto $\mathbf{r}_0$ nella direzione identificata dal versore $\hat{\mathbf{t}}$ è definita come,

$$\nabla_{\hat{\mathbf{t}}} f(\mathbf{r}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\mathbf{r}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{t}}) - f(\mathbf{r}_0)}{\varepsilon} \ , \tag{22.4}$$

cioè come il limite del rapporto incrementale del valore della funzione $f(\mathbf{r})$, muovendosi dal punto $\mathbf{r}_0$ al punto $\mathbf{r}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{t}}$.

### 22.2.3 Operatori differenziali

**Definizione 22.6 — Gradiente.**

$$\nabla_{\hat{\mathbf{t}}} f =: \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla f \tag{22.5}$$

**Proprietà 22.1 — Operatore nabla, $\nabla$ – vettore formale.**

**Proprietà 22.2 — Coordinate cartesiane.**

**Proprietà 22.3 — Direzione di massima crescita.**

**Definizione 22.7 — Divergenza.** La divergenza viene definita come l'operatore differenziale del primo ordine che prende un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e restituisce un campo scalare, che può essere rappresentato con il prodotto scalare tra il vettore formale nabla $\nabla$ e il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \ , \tag{22.6}$$

**Proprietà 22.4 — Coordinate cartesiane.** L'espressione in coordinate cartesiane della divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) & = \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) = \\ & = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \ .\end{aligned} \tag{22.7}$$

**Proprietà 22.5 — Flusso elementare.**

**Definizione 22.8 — Rotore.** Il rotore viene definito come l'operatore differenziale del primo ordine che prende un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e restituisce un campo vettoriale, che può essere rappresentato con il prodotto vettore tra il vettore formale nabla $\nabla$ e il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \ , \tag{22.8}$$

**Proprietà 22.6 — Coordinate cartesiane.** L'espressione in coordinate cartesiane del rotore di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{22.9}$$

**Proprietà 22.7 — Circuitazione elementare.**

### 22.2.4 Integrali

#### 22.2.4.1 Integrali di linea

**Definizione 22.9 — Massa.** L'integrale "della massa" $m$ di una curva $\gamma$, viene definito come l'integrale sulla curva di una funzione scalare $f(\mathbf{r})$, definita densità lineare,

$$m = \int_\gamma f(\mathbf{r}) \tag{22.10}$$

**Definizione 22.10 — Lavoro.** L'integrale "del lavoro" del campo vettoriale "di forza" $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ lungo la linea $\gamma$ è definito come

$$L = \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}\ . \tag{22.11}$$

**Definizione 22.11 — Circuitazione.** La circuitazione di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è definito come il suo integrale del lavoro lungo una linea chiusa $\gamma$,

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{F}) := \oint_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}\ . \tag{22.12}$$

#### 22.2.4.2 Integrali di superficie

**Definizione 22.12 — Massa.** L'integrale "della massa" $m$ di una superficie $S$, viene definito come l'integrale sulla superficie di una funzione scalare $f(\mathbf{r})$, definita densità superficiale,

$$m = \int_S f(\mathbf{r}) \tag{22.13}$$

**Definizione 22.13 — Flusso.**

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\ . \tag{22.14}$$

#### 22.2.4.3 Integrali di volume

**Definizione 22.14 — Massa.** L'integrale "della massa" $m$ di una superficie $V$, viene definito come l'integrale sul volume di una funzione scalare $f(\mathbf{r})$, definita densità volumetrica,

$$m = \int_V f(\mathbf{r}) \tag{22.15}$$

### 22.2.5 Teoremi

**Teorema 22.1 — Teorema del gradiente.**

$$\oint_{\partial V} f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \int_V \nabla f(\mathbf{r}) \tag{22.16}$$

**Teorema 22.2 — Teorema della divergenza.**

$$\Phi_{\partial V}(\mathbf{F}) = \oint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{22.17}$$

**Teorema 22.3 — Teorema del rotore.**

$$\Gamma_{\partial S}(\mathbf{F}) = \oint_{\partial S} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) = \int_S \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{22.18}$$

IX

# Geometria


**23 Geometria euclidea** . . . . . . . . . . . . . . . . . . **97**
23.1 Geometria nel piano . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97
23.2 Geometria nello spazio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97

**24 Geometria analitica** . . . . . . . . . . . . . . . . . . **99**
24.1 Geometria nel piano . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
24.2 Geometria nello spazio . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101

Introduzione storica:

- Euclide
- Cartesio
- Riemann

# 23. Geometria euclidea

23.1 Geometria nel piano
23.1.1 Introduzione
23.1.2 Rette e angoli
23.1.3 Triangoli
23.1.4 Circonferenza
23.2 Geometria nello spazio

# 24. Geometria analitica

## 24.1 Geometria nel piano

### 24.1.1 Coordinate cartesiane

### 24.1.2 Punto, distanze, retta

**Definizione 24.1 — Punto.** Dato un sistema di coordinate cartesiane, un punto $P$ nel piano è individuato dalle sue due coordinate $(x, y)$.

**Definizione 24.2 — Distanza tra due punti.** La distanza tra due punti nel piano viene calcolata usando il teorema di Pitagora

$$d_{PQ}^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 \ . \tag{24.1}$$

Perchè la distanza è data come una definizione? Geometria di Riemann: la distanza definisce tutte le proprietà di una geometria

**Definizione 24.3 — Retta.** La retta può essere definita come l'insieme di punti $(x, y)$ equidistanti da due punti dati $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

Partendo dalla definizione

$$\begin{gathered} d_1^2 = d_2^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\ x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \end{gathered} \tag{24.2}$$

$$\rightarrow \qquad 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0 \ . \tag{24.3}$$

Quindi l'equazione generale della retta può essere riscritta nella forma

$$Ax + By + C = 0 \ . \tag{24.4}$$

### 24.1.3 Trasformazioni di coordinate cartesiane e trasformazioni di curve

#### 24.1.3.1 Traslazione dell'origine

Sistema di coordinate $O'x'y'$ con assi paralleli al sistema di coordinate $Oxy$ e coordinate dell'origine $x_{O'}$, $y_{O'}$

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + x_{O'} \\ y = y' + y_{O'} \end{cases} \tag{24.5}$$

#### 24.1.3.2 Rotazione attorno all'origine

Sistema di coordinate $O'x'y'$ origine coincidente con quella del sistema di coordinate $Oxy$ e assi rotati di un angolo $\theta$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \tag{24.6}$$

### 24.1.4 Coniche

#### 24.1.4.1 Parabola

**Definizione 24.4 — Parabola.** Insieme dei punti $P$ del piano equidistanti da un punto $F$, chiamato **fuoco**, e una retta $r$ chiamata **direttrice**.

$$\mathrm{dist}(P,F) = \mathrm{dist}(P,r) \tag{24.7}$$

Scegliendo il fuoco $F(0,d)$ e la retta $r : y = -d$, si ricava l'equazione della parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse $y$ degli assi cartesiani.

$$\begin{aligned} d_{PF}^2 &= d_{Pr}^2 \\ (x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 &= (y-y_r)^2 \\ x^2 + (y-d)^2 &= (y+d)^2 \\ x^2 + y^2 - 2dy + d^2 &= y^2 + 2dy + d^2 \end{aligned} \tag{24.8}$$

$$\rightarrow \qquad 4dy = x^2 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{4d}x^2 \ . \tag{24.9}$$

#### 24.1.4.2 Ellisse

**Definizione 24.5 — Ellisse.** Insieme dei punti $P$ del piano la cui somma delle distanze da due punti $F_1$, $F_2$, chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante.

$$\mathrm{dist}(P,F_1) + \mathrm{dist}(P,F_2) = 2a \tag{24.10}$$

Scegliendo i fuochi $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} = 2a \\ &\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ &x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ &4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ &(cx-a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 \\ &c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \\ &(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \end{aligned} \tag{24.11}$$

Definendo $b^2 := a^2 - c^2 > 0$, si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{24.12}$$

#### 24.1.4.3 Iperbole

**Definizione 24.6 — Iperbole.** Insieme dei punti $P$ del piano la cui differenza delle distanze da due punti $F_1$, $F_2$, chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante in valore assoluto.

$$|\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)| = 2a \tag{24.13}$$

Scegliendo i fuochi $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = \mp 2a \\
&\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \mp 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
&4cx = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&(cx - a^2)^2 = (\mp a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\
&c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \\
&(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned} \tag{24.14}$$

Definendo $b^2 := c^2 - a^2 > 0$, si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{24.15}$$

## 24.2 Geometria nello spazio

X

# Statistica


25 Variabili casuali . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105
25.1 Statistica univariata . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105
25.2 Statistica multivariata . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106

26 Processi casuali . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109

27 Approcci alla statistica . . . . . . . . . . . . . 111
27.1 Statistica descrittiva . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
27.2 Statistica inferenziale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111

28 Esempi di applicazioni . . . . . . . . . . . . . . 113

29 Introduzione all'intelligenza artificiale 115

# 25. Variabili casuali

**Definizione 25.1 — $\sigma$-algebra, $\mathcal{F}$.**

**Definizione 25.2 — Misura di probabilità, $\nu$.**

**Definizione 25.3 — Spazio misurabile, $(\Omega, \mathcal{F})$.**

**Definizione 25.4 — Spazio di probabilità, $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$.**

**Definizione 25.5 — Variabile casuale, $X : (\Omega, \mathcal{F}, \nu) \to (E, \mathcal{E})$.** Una variabile casuale può essere definita come una funzione $X : \Omega \to E$, che ha come:

- dominio l'insieme degli eventi (o spazio campionario), $\Omega$,
- codominio lo spazio dei risultati o delle osservazioni, $E$

## 25.1 Statistica univariata

### 25.1.1 Variabili casuali, discrete e continue

**Definizione 25.6 — Variabile casuale discreta.** Una variabile aleatoria è discreta, se l'insieme dei suoi possibili valori (discreti) è finito o numerabile, cioé può essere messo in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

■ **Esempio 25.1** La variabile casuale che descrive il lancio di un dado a sei facce può i valori $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e quindi è una variabile casuale discreta. ■

■ **Esempio 25.2** Una variabile casuale che ha come possibili valori i numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ è una variabile discreta, poiché l'insieme dei suoi valori è numerabile. ■

**Definizione 25.7 — Variabile casuale continua.** Una variabile aleatoria è continua, se l'insieme dei suoi possibili valori ha la potenza del continuo, come i numeri reali.

■ **Esempio 25.3** Una variabile casuale che rappresenta la distanza di un lancio di freccia dal centro di un bersaglio è una variabile casuale continua, poiché può assumere tutti i valori reali non nulli, $X(\omega) \in \mathbb{R}^+$. ■

■ **Esempio 25.4** Una variabile casuale che ha come possibili valori i numeri reali dell'intervallo limitato $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è una variabile continua. ■

### 25.1.2 Funzioni di probabilità

**Definizione 25.8 — Funzione cumulativa di probabilità.** La funzione cumulativa di probabilità valuta la probabilità totale che un evento $\omega$ abbia un valore osservato $X(\omega)$ appartenente a un sottoinsieme del codominio, $A \subseteq E$

$$P_X(A) = \nu\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = P(X \in A) \tag{25.1}$$

**Definizione 25.9 — Distribuzione di probabilità – variabile discreta.** Per una variabile discreta $X$, la funzione distribuzione di probabilità rappresenta la probabilità dei singoli valori osservabili,

$$p(x) = P(X = x) \tag{25.2}$$

**Definizione 25.10 — Distribuzione di probabilità – variabile continua.** Per una variabile continua $X$, la funzione cumulativa $P(X \in A)$ può essere rappresentata come l'integrale sull'insieme $A$ della funzione distribuzione di probabilità $p(x)$,

$$P(X \in A) = \int_A p(x) \tag{25.3}$$

**Proprietà delle funzioni di probabilità.**

- **Non-negatività**: la probabilità di un evento è non negativa. Da questo segue che la distribuzione di probabilità è non negativa,

$$p(x) \geq 0\ . \tag{25.4}$$

- **Unitarietà**: la probabilità cumulativa su tutti i possibili valori che può assumere la variabile casuale è unitaria, 100%. Questo risultato implica che non si possono verificare eventi che implichino un valore della variabile casuale al di fuori del suo codominio;
  - per una variabile discreta:

$$\sum_k p(x_k) = 1 \tag{25.5}$$

  - per una variabile continua:

$$\int_E p(x)dx = 1 \tag{25.6}$$

### 25.1.3 Indicatori statistici

## 25.2 Statistica multivariata

### 25.2.1 Variabili casuali discrete e continue

### 25.2.2 Funzioni di probabilità

### 25.2.3 Teorema di Bayes

### 25.2.4 Momenti di una distribuzione

Dopo aver raccolto le variabili casuali scalari $X_i$ in una variabile casuale vettoriale $\mathbf{X}$, usando il formalismo matriciale

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} \tag{25.7}$$

possiamo definire alcuni indicatori sintetici.

**Definizione 25.11 — Valore atteso (volgarmente chiamato media).** Il valore atteso di una variabile casuale multivariata (o multidimensionale) viene definita come la media pesata di tutti i possibili valori $\mathbf{x}_I$ della variabile casuale $\mathbf{X}_I$, pesati per il valore corrispondente della densità di probabilità

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] := \overline{\mathbf{X}} := \mu_X = \sum_I f(\mathbf{x}_I)\mathbf{x}_I \ . \tag{25.8}$$

**Definizione 25.12 — Covarianza.** La covarianza viene definita come il valore atteso del "prodotto tensoriale" della deviazione della media con sé stesso, cioé

$$\mathbf{C}_{XX} := \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})^T] \ . \tag{25.9}$$

Usando le proprietà della media, si può riscrivere la covarianza come

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{XX} &= \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}})^T] = \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - \mathbf{E}[\mathbf{X}\overline{\mathbf{X}}^T] - \mathbf{E}[\overline{\mathbf{X}}\mathbf{X}^T] + \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T = \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - \mathbf{E}[\mathbf{X}]\overline{\mathbf{X}}^T - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{E}[\mathbf{X}^T] + \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T = \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - \mathbf{E}[\mathbf{X}]\overline{\mathbf{X}}^T - \overline{\mathbf{X}}\mathbf{E}[\mathbf{X}^T] + \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T = \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T
\end{aligned} \tag{25.10}$$

# 26. Processi casuali

# 27. Approcci alla statistica

## 27.1 Statistica descrittiva

**Definizione 27.1 — Statistica descrittiva.** La statistica descrittiva si occupa principalmente di una **rappresentazione riassuntiva**, tramite indicatori statistici o grafici. La statistica descrittiva non si preoccupa di costruire un modello del fenomeno che si sta osservando, ma piuttosto di rappresentare i dati in forma non parametrica.

Di solito, un approccio descrittivo al problema costituisce una fase preliminare a un approccio inferenziale: prima di scegliere un tipo di modello adatto a rappresentare il problema, è meglio dare un'occhiata ai dati disponibili.

**Variabili aleatorie univariate.** La rappresentazione descrittiva delle osservazioni di una variabile casuale prevede:

- la rappresentazione grafica della distribuzione della probabilità (istogrammi,...)
- indicatori statistici sintetici di:
  - di tendenza: media, mediana, moda
  - di dispersione: varianza, deviazione standard, intervalli e quartili
  - di forma: simmetria (skewness), curtosi (kurtosis)

**Variabili aleatorie multivariate.** La rappresentazione simultanea di più variabili casuali prevede anch'essa

- la rappresentazione grafica delle probabilità congiunte, condizionali o marginali, in forma tabulare o grafica
- indicatori statistici sintetici
  - indicatori di tendenza, dispersione e forma
  - indicatori di relazione tra le variabili: dipendenza, correlazione e covarianza

## 27.2 Statistica inferenziale

**Definizione 27.2 — Statistica inferenziale.** L'approccio inferenziale alla statistica prevede l'uso dei dati per la **costruzione di un modello** del fenomeno osservato, che permetta di formulare delle proposizioni sul fenomeno osservato, come:

- la stima di valori, con un certo intervallo di confidenza, ad esempio tramite regressione
- la classificazione, o il raggruppamento di osservazioni in gruppi
- la conferma o la confutazione di un'ipotesi

### 27.2.1 Modelli statistici

Un modello statistico del fenomeno osservato spesso si riduce a un modello matematico della distribuzione di probabilità, e il problema di allenamento/taratura del modello si riduce a un problema di approssimazione di una funzione. A seconda del numero di parametri liberi (gradi di libertà) del modello da tarare, e dalla rigidità delle ipotesi sul modello si possono distinguere:

- **modelli parametrici**: modelli costruiti su ipotesi che possono essere stringenti, e che hanno un numero finito di parametri liberi di cui calcolare il valore. Ad esempio, si può assumere che la funzione densità di probabilità possa essere stimata con una combinazione di funzioni appartenenti a una famiglia di funzioni. Il valore dei parametri del modello viene calcolato risolvendo il problema di approssimazione di una funzione, che meglio rappresenti i dati disponibili. Esempi molto comuni di questo tipo di modelli sono:
  - i modelli lineari generalizzati
  - le reti neurali, che permettono una combinazione non lineare di funzioni
- **modelli non parametrici**: modelli costruiti senza alcuna ipotesi particolare, che spesso si basano su stimatori non parametrici dei valori di tendenza e dispersione
- **modelli semi-parametrici**: una via di mezzo tra i due

Quando si progetta e si calcolano i parametri di un modello, bisogna prestare attenzione a:

- modello sufficientemente generale da poter rappresentare il fenomeno
- modello che permetta degli adeguati livelli di **accuratezza** e **generalizzazione**: **tradeoff bias-variance**
- valutazione della bontà del modello

# 28. Esempi di applicazioni

# 29. Introduzione all’intelligenza artificiale

# XI Matematica numerica - cenni


**30 Equazioni e sistemi di equazioni** ..... **119**
30.1 Equazioni ..... 119
30.2 Sistemi di equazioni ..... 120

**31 Approssimazione di funzioni** ..... **121**
31.1 ..... 121

**32 Derivate** ..... **123**
32.1 ..... 123

**33 Ricerca dei massimi e ottimizzazione** **125**
33.1 Ottimizzazione libera ..... 125
33.2 Ottimizzazione vincolata ..... 125

**34 Integrali** ..... **127**
34.1 ..... 127

**35 Equazioni differenziali ordinarie** ..... **129**
35.1 Riduzione a sistema di primo ordine ..... 129
35.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy ..... 129
35.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno ..... 129

**36 Statistica** ..... **131**

# 30. Equazioni e sistemi di equazioni

## 30.1 Equazioni

### 30.1.1 Equazioni non lineari

$$f(x) = 0 \tag{30.1}$$

#### 30.1.1.1 Metodo della bisezione

Se la funzione $f(x)$ è continua, ed esistono due valori $x_1$, $x_2$ tali che $f(x_1)f(x_2) < 0$, allora esiste una soluzione $\overline{x} \in [x_1, x_2]$ dell'equazione $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x_1,\ x_2 \quad \text{ s.t. } f(x_1) < 0 \text{ and } f(x_2) > 0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ x = 0.5(x_1 + x_2),\ f = f(x),\ res = |f| \\
&\text{Bisection loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad if(f < 0): \\
&\qquad\qquad x_1 \leftarrow x \\
&\qquad else: \\
&\qquad\qquad x_2 \leftarrow x \\
&\qquad x = 0.5(x_1 + x_2) \\
&\qquad f = f(x) \\
&\qquad res = |f(x)| \\
&\qquad niter += 1
\end{aligned} \tag{30.2}$$

#### 30.1.1.2 Metodo di Newton

Se la funzione $f(x)$ è "sufficientemente regolare" e il tentativo iniziale $x_0$ è "sufficientemente vicino" a una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, il metodo di Newton

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } f(x),\ f'(x) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x = x^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |f(x)| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad f'(x)\Delta x = -f(x) \\
&\qquad x \leftarrow x + \Delta x \\
&\qquad niter += 1,\ res = |f(x)|
\end{aligned} \tag{30.3}$$

converge a una soluzione dell'equazione.

## 30.2 Sistemi di equazioni

### 30.2.1 Sistemi di equazioni lineari

Metodo di sostituzione

### 30.2.2 Sistemi di equazioni non lineari

#### 30.2.2.1 Metodo di Newton per sistemi

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{f_x}(\mathbf{x}) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad \mathbf{f_x}(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
&\qquad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \\
&\qquad niter += 1,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|
\end{aligned} \tag{30.4}$$

# 31. Approssimazione di funzioni

## 31.1

# 32. Derivate

## 32.1

# 33. Ricerca dei massimi e ottimizzazione

## 33.1 Ottimizzazione libera

Un problema di ottimizzazione libera può essere formulato come il problema di ricerca del massimo di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cioè il punto $\mathbf{x}^*$ tale che

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \ , \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ . \tag{33.1}$$

### 33.1.1 Algoritmi

**Discesa lungo il gradiente.**

$$\begin{aligned}
&\text{Tentativo iniziale } \mathbf{x}^{(\mathbf{0})} \\
&\text{while} \quad ( \quad \text{not stopping} \quad ): \\
&\qquad \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - \alpha \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^{(n)})
\end{aligned} \tag{33.2}$$

## 33.2 Ottimizzazione vincolata

Un problema di ottimizzazione può essere soggetto ad alcuni vincoli, come:

- vincoli esprimibili con un'equazione, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- vincoli sul valore delle variabili indipendenti, $x_{i,min} \leq x_i \leq x_{i,max}$
- altri vincoli esprimibili con una disequazione, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$

■ **Esempio 33.1** Data la funzione $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, e l'equazione $g(x, y) = -2x + y - 1 = 0$ viene chiesto di

$$\text{Trovare } \max_{x,y} f(x, y) \qquad s.t. \qquad g(x, y) = 0 \tag{33.3}$$

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si definisce la funzione $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ e si cercano i valori delle variabili indipendenti e del moltiplicatore di Lagrange che ne annullano il gradiente,

$$\begin{cases}
0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = -2x + 2\lambda \\
0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = -2y - \lambda \\
0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = 2x - y + 1
\end{cases} \tag{33.4}$$

In questo problema si è ottenuto un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, la cui soluzione è

$$x^* = -\frac{2}{5}\ , \quad y^* = \frac{1}{5}\ , \quad \lambda^* = -\frac{2}{5}\ . \tag{33.5}$$

■

**■ Esempio 33.2** ■

**■ Esempio 33.3** ■

# 34. Integrali

## 34.1

# 35. Equazioni differenziali ordinarie

## 35.1 Riduzione a sistema di primo ordine

É possibile ridurre un'equazione differenziale ordinaria di ordine $n$, $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$, a un sistema di $n$ equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Definendo le funzioni incognite

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= y(x) \\ y_1(x) &:= y'(x) \\ &\dots \\ y_{n-1}(x) &:= y^{(n-1)}(x) \ , \end{aligned} \tag{35.1}$$

il problema differenziale originale è equivalente al sistema

$$\begin{cases} F(x, y_0(x), y_1(x), y_{n-1}(x), y'_{n-1}(x)) = 0 \\ y'_0(x) = y_1(x) \\ y'_1(x) = y_2(x) \\ \dots \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \end{cases} \ , \tag{35.2}$$

che può essere scritto in forma sintetica (vettoriale)

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}(x)) = \mathbf{0} \ . \tag{35.3}$$

## 35.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy

## 35.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno

# 36. Statistica

# XII

# Appendici, indice e bibliografia


Bibilografia . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

Indice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137

Appendices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137

A Prima appendice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137

# Bibiliografia

# A. Prima appendice

...