Scuole superiori

Matematica

OSB

Published by OSB

Latest version 11 ottobre 2023

Indice

XI Appendici, indice e bibliografia

Introduzione

1. Strumenti e discipline in matematica

1.1 Quantità

- numeri - scalari ($\mathbb{N}, \ldots, \mathbb{R}, \ldots$)
- vettori
- tensori
- quaternioni, e altri oggetti matematici esotici

1.2 Discipline

Nel corso della storia, la matematica è diventata una materia estremamente diversificata.

Una classificazione delle molte aree di interesse della matematica può risultare utile ad avere una visione di insieme della materia.

La matematica è divisa tradizionalmente in **matematica pura**, che studia gli strumenti propri della matematica e le loro proprietà, e **matematica applicata**, che applica gli strumenti della matematica a problemi di interesse tipici di altre discipline.

Una classificazione più dettagliata delle discipline della matematica è resa difficile dalle relazioni esistenti tra di esse. Viene qui presentata una classificazione parziale, ispirata alla *Classificazione delle ricerche matematiche (MSC)* usata dall'*American Mathematical Society* per la classificazione delle pubblicazioni nei database.

1.2.1 Matematica pura

1.2.1.1 Fondamenti

- storia e filosofia
- logica

1.2.1.2 Algebra e matematica discreta

- teoria dei numeri
- teoria dei campi
- algebra lineare e multilineare; matrici

1.2.1.3 Analisi

- funzioni reali e complesse
- misura e integrazione
- equazioni differenziali, ed equazioni alle differenze

- sistemi dinamici
- successioni, serie e approssimazioni
- trasformate: analisi di Fourier
- calcolo delle variazioni, ottimizzazione e controllo

1.2.1.4 Geometria e topologia

- geometria
- geometria differenziale
- topologia

1.2.2 Matematica applicata

1.2.2.1 Statistica

1.2.2.2 Fisica

1.2.2.3 Altre scienze naturali

1.2.2.4 Scienze sociali e del comportamento

1.2.2.5 Matematica numerica e informatica

1.2.2.6 Ottimizzazione

L'ottimizzazione si occupa della ricerca dei punti di massimo o di minimo di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$.

$$\text{Determinare il punto } \mathbf{x}_0 \in A \text{ tale che } f(\mathbf{x_0}) \geq f(\mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x} \in A \tag{1.1}$$

1.2.2.7 Teoria dei sistemi e controllo

La teoria dei sistemi rappresenta un qualunque sistema che evolve nel tempo t con:

- gli ingressi $\mathbf{u}(t)$, che possono agire sul sistema
- le uscite $\mathbf{y}(t)$, che possono essere lette dal sistema
- le variabili di stato, $\mathbf{x}(t)$ che determinano lo stato del sistema
- le equazioni di stato del sistema che ne governano la dinamica, legando lo stato e la sua evoluzione agli ingressi

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

- le equazioni di uscita che permettono di ricavare le variabili di uscita in funzione dello stato e degli ingressi

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{1.3}$$

Il problema del controllo di un sistema può essere formulato come un problema di ottimizzazione vincolata, volendone ottimizzare le prestazioni (o minimizzare le perdite), soggette ai vincoli definiti dalle equazioni che governano il sistema.

1.2.2.8 Didattica

2. Approccio alla matematica

2.1 Formulazione e soluzione di un problema

Una volta formulato un problema, ci si chiede:

- il problema ammette soluzione?
- se il problema ammette soluzione, la soluzione è unica?
- se la soluzione non è unica, quante soluzioni esistono?

Esempi

3. Breve storia della matematica

...

XVI secolo

- Nepier (Nepero) introduce i logaritmi

XVII secolo

- Fermat
- Descartes (Cartesio) illustra ne *La Gèometrie* i fondamenti della **geometria analitica**
- Huygens, Pascal
- Newton e Leibniz sviluppano contemporaneamente i fondamenti del **calcolo differenziale** e **integrale**, nell'ambito dello studio della **dinamica**
- fratelli Johann e Jakob Bernoulli
- de l'Hopital, Taylor

XVIII secolo

- Euler (Eulero): analisi matematica; soluzione equazioni differenziali; teoria dei numeri; analisi complessa (estensione di funzioni reali in ambito complesso; identità di Eulero); topologia e teoria dei grafi (problema die 7 ponti di Konigsberg)
- d'Alembert si dedica allo studio del moto dei corpi e lla meccanica razionale
- Legendre
- Bayes: probabilità
- istituzione di scuole scientifiche, Parigi importante centro scientifico del tempo
- Laplace: meccanica razionale e celeste (*Mécanique Céleste*); trasformata; calcolo differenziale: potenziale, laplaciano ed equazione di Laplace
- Lagrange: formulazione lagrangiana della meccanica (*Mécanique analytique*); calcolo delle variazioni; metodo dei moltiplicatori di Lagrange; teoria dei numeri

XIX secolo

- Jacobi: algebra lineare (determinante di matrici)
- Cauchy: algebra lineare; analisi complessa; statistica; teoria dei numeri; meccanica dei solidi
- Fourier: studio della trasmissione del calore; serie e trasformata di Fourier
- Gauss: teorema fondamentale dell'algebra; teoria dei numeri
- Dirichlet:
- Riemann: teoria dei numeri; geometria
- Hamilton: quaternioni; algebra lineare (teorema di Cayley-Hamilton); riformulazione della meccanica lagrangiana nella meccanica hamiltoniana

- Wierestrass: definizione rigorosa dei fondamenti dell'analisi (teorema di Weierstrass su esisteanza di minimi e massimi di funzioni a variabile reale)
- Boole: algebra sugli insiemi, logica, e teoria dell'informazione
- Peano: tentativo di definizione assiomatica della matematica
- Cantor: studio degli insiemi infiniti e la loro dimensione

XX secolo

- la matematica della probabilità e della meccanica quantistica: Lebesgue, Hilbert, von Neumann, Kolmogorov
- la nascita dell'informatica: Turing, Von Neumann
- la teoria dell'informazione: Shannon
- la teoria dei giochi: von Neumann, Morgestern e Nash
- l'incompletezza della matematica: Godel

II Insiemistica e Logica

4. Logica

4.1 Logica proposizionale

4.1.1 Prime definizioni

Definizione 4.1 — Proposizione. In matematica, una proposizione è un'affermazione che si può stabilire senza dubbi se è vera o falsa.

Definizione 4.2 — Valore di verità. In logica classica esistono solo due valori di verità: vero (V), falso(F). Il valore di verità di una frase stabilisce se la frase è vera o falsa.

Ma cos'è il vero e cos'è il falso?

Definizione 4.3 — Tavola di verità. Una tavola diverità rappresenta tutte le possibili combinazioni delle proposizioni coinvolte.

■ **Esempio 4.1** Può risultare utile separare le proposizioni indipendenti, dalle proposizioni dipendenti da queste. Ad esempio, indicando con p_1, p_2 due proposizioni indipendenti, e $f_1(p_1, p_2)$, $f_2(p_1, p_2)$, $f_3(p_1, p_2)$ tre proposizioni dipendenti da queste

p_1	p_2	$f_1(p_1,p_2)$	$f_2(p_1,p_2)$	$f_3(p_1,p_2)$
V	V	f_1(V,V)	f_2(V,V)	f_3(V,V)
V	F	f_1(V,F)	f_2(V,F)	f_3(V,F)
F	V	f_1(F,V)	f_2(F,V)	f_3(F,V)
F	F	f_1(F,F)	f_2(F,F)	f_3(F,F)

■

Uso delle tavole di verità. Le tavole di verità sono utili per stabilire se due espressioni sono logicamente equivalenti.

Definizione 4.4 — Identità. Un'identità è una proposizione che è sempre vera.

Definizione 4.5 — Contraddizione. Una contraddizione è una proposizione che è sempre falsa.

4.1.2 Connettivi logici e calcolo proposizionale

Definizione 4.6 — Negazione. La negazione $\overline{p}$ di una proposizione p ne inverte il valore di verità.

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Definizione 4.7 — Congiunzione. La congiunzione $p \wedge q$ di due proposizioni è vera se e solo se entrambe sono vere.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definizione 4.8 — Disgiunzione. La disgiunzione $p \vee q$ di due proposizioni è falsa se e solo se entrambe sono false.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definizione 4.9 — Implicazione logica. L'implicazione logica $p \to q$ produce una proposizione falsa se e solo se p è vera e q è falsa.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condizione sufficiente e condizione necessaria. L'implicazione logica $p \to q$ tra due proposizioni p, q consente di dare una definizione di condizione sufficiente e condizione necessaria:

- p come **condizione sufficiente** per q.
- q come **condizione necessaria** per p.

Definizione 4.10 — Co-implicazione o equivalenza logica. La coimplicazione (o equivalenza) logica $p \leftrightarrow q$ produce una proposizione vera se e solo se p e q hanno lo stesso valore di verità.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Condizione necessaria e sufficiente – equivalenza logica. L'equivalenza logica $p \to q$ tra due proposizioni p, q consente di dare una definizione di condizione necessaria e sufficiente:

- p come **condizione necessaria e sufficiente** per q, e viceversa.

4.1.3 Teoremi e proposizioni

Teorema 4.1 — Leggi di De Morgan. Le due leggi di De Morgan sono:
- prima legge di De Morgan: $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
- seconda legge di De Morgan: $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

Dimostrazione con le tavole della verità della prima legge,

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

e della seconda legge,

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

4.1.4 Tecniche dimostrative

Definizione 4.11 — Deduzione. La deduzione $a \Rightarrow b$ è un processo che, a partire da una proposizione vera a, tramite un processo logico valido, permette di ricavare una proposizione vera b.

$a \rightarrow b$	a	b
V	V	V

Definizione 4.12 — Dimostrazione diretta. Partendo da un'ipotesi I, si dimostra la tesi T tramite un numero finito di deduzioni di proposizioni intermedie $\{p_i\}_{i=1:n}$

$$I \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow T \tag{4.1}$$

$I \rightarrow p_1$	I	p_1
V	V	V

$p_1 \rightarrow p_2$	p_1	p_2
V	V	V

...	...	...
V	V	V

$p_n \rightarrow T$	p_n	T
V	V	V

Definizione 4.13 — Dimostrazione della contronominale. Partendo da un ipotesi I vera e invertendo l'implicazione logica, $I \Rightarrow T$, si vuole quindi dimostrare con dimostrazione diretta la proposizione $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$, detta **contronominale** di $I \Rightarrow T$.

$$(\overline{T} \Rightarrow \overline{I}) \Rightarrow (I \Rightarrow T) \tag{4.2}$$

I	$\overline{T} \rightarrow \overline{I}$	$\overline{I}$	$\overline{T}$	T
V	V	F	F	V

Definizione 4.14 — Dimostrazione per assurdo. Se partendo dall'ipotesi I vera e negando la tesi $\overline{T}$, si arriva a una contraddizione C (una proposizione falsa), allora è veriticata la tesi.

$$\big((I \wedge \overline{T}) \Rightarrow C\big) \Rightarrow (I \Rightarrow T) \tag{4.3}$$

I	C	$(I \wedge \overline{T}) \to C$	$(I \wedge \overline{T})$	$\overline{T}$	T
V	F	V	F	F	V

4.2 Logica predicativa

5. Insiemistica

5.1 Definizioni di base

Definizione 5.1 — Insieme. Un insieme è un gruppo di elementi, oggetti che possono essere di qualsiasi tipo.

Rappresentazioni, notazione ed esempi. Si è soliti indicare gli insiemi con lettere maiuscole. Un insieme S può essere rappresentato

- per **elencazione**: vengono elencati, di solito tra parentesi graffe, tutti gli elementi dell'insieme

$$S = \{\text{elemento}_1, \text{elemento}_2, \ldots, \text{elemento}_N\} \tag{5.1}$$

- per **caratteristica**: viene descritta la condizione che determina gli elementi dell'insieme

$$S = \{x \mid \text{condiizone che determina } x\} \tag{5.2}$$

La condizione può essere una condizione composta da diverse condizioni. Si rimanda agli operatori logici

■ **Esempio 5.1 — Insieme dei mesi.** L'insieme M dei (nomi dei) mesi dell'anno può essere rappresentato come:

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid x \text{ è (il nome di) un mese dell'anno}\} = \\ &= \{\text{gennaio}, \text{febbraio}, \text{marzo}, \text{aprile}, \text{maggio}, \text{giugno}, \\ &\quad \text{luglio}, \text{agosto}, \text{settembre}, \text{ottobre}, \text{novembre}, \text{dicembre}\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

■

■ **Esempio 5.2 — Insieme dei numeri naturali minori di 5.** L'insieme S dei numeri

$$\begin{aligned} S &= \{x \mid x \text{ è un numero naturale minore di } 5\} = \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\} = \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

■

5.2 Operazioni

5.3 Funzioni

6. Insiemi numerici

6.1 Insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{6.1}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri naturali:

- addizione
- moltiplicazione

6.2 Insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{6.2}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri interi:

- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione

6.3 Insieme dei numeri razionali, $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{x | x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\right\} \tag{6.3}$$

Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri razionali:

- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione
- divisione, esclusa la divisione per 0

6.4 Insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$

Esistono dei numeri che non possono essere rappresentati come frazioni di numeri interi. Alcuni di questi numeri compaiono in semplici problemi di geometria, come il calcolo della lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario $\sqrt{2}$ o la lunghezza della circonferenza con raggio unitario π.

■ **Esempio 6.1 — Irrazionalità di $\sqrt{2}$.** Si vuole dimostrare che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, e quindi non essere scritto come rapporto di due numeri interi m, n. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, e arriviamo a una contraddizione.

Per assurdo, quindi supponiamo che si possa scrivere

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \ , \tag{6.4}$$

in forma ridotta ai minimi termini. Questo implica che i numeri m, n non possano essere contemporaneamente numeri pari, poiché altrimenti la frazione potrebbe essere ulteriormente semplificata.

Elevando alla seconda potenza, possiamo scrivere

$$2n^2 = m^2 \tag{6.5}$$

e quindi il numero m deve essere pari, poiché il suo quadrato è pari. Il numero n dovrà allora essere dispari. Poiché il numero m è pari, può essere scritto come $m = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad \rightarrow \qquad n^2 = 2k^2 \ . \tag{6.6}$$

Dall'ultima espressione, dobbiamo concludere che il numero n sia anch'esso pari. In questo modo si arriva a una contraddizione, poiché il numero n non può essere contemporaneamente pari e dispari.

Dobbiamo concludedere che la tesi sia vera, e che quindi il numero $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. ■

■ **Esempio 6.2 — Irrazionalità della radice $\sqrt{p}$ di ogni numero primo p.** Si vuole dimostrare che il numero $\sqrt{p}$, con p numero primo, è irrazionale e quindi non può essere scritto come rapporto di due numeri interi m, n. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, e arriviamo a una contraddizione.

Per assurdo, quindi supponiamo che si possa scrivere

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} \ , \tag{6.7}$$

in forma ridotta ai minimi termini. Questo implica che i numeri m, n non possano avere divisori comuni.

Elevando alla seconda potenza, possiamo scrivere

$$pn^2 = m^2 \tag{6.8}$$

e quindi il numero m deve essere un multiplo di p, poiché il suo quadrato contiene il fattore p. Il numero n allora non potrà contenere il fattore p, poiché m ed n non possono avere fattori comuni. Poiché il numero m è pari, può essere scritto come $m = pk$ con $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$pn^2 = m^2 = (pk)^2 = p^2k^2 \qquad \rightarrow \qquad n^2 = pk^2 \ . \tag{6.9}$$

Dall'ultima espressione, dobbiamo concludere che il numero n ha un fattore p poiché il suo quadrato contiene il fattore p. In questo modo si arriva a una contraddizione, poiché il numero n non può contemporaneamente avere e non avere un sottomultiplo p.

Dobbiamo concludedere che la tesi sia vera, e che quindi il numero $\sqrt{p}$, con p primo, è un numero irrazionale. ■

6.5 Insieme dei numeri complessi, $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}\} \tag{6.10}$$

III Algebra in $\mathbb{R}$

7. Algebra simbolica - Calcolo letterale

7.1 Monomi

Definizione 7.1 — Monomio. Un monomio è un'espressione matematica costituita dal prodotto di un coefficiente esplicitamente numerico e una parte letterale, nella quale compaiono unicamente moltiplicazioni e potenze intere.

R Viene richiesto che le potenze della parte letterale siano intere, per evitare di porre delle condizioni sulle basi delle potenze, essendo le potenze non intere definite solo per numeri reali positivi.

Definizione 7.2 — Monomi simili. I monomi simili sono i monomi che hanno la stessa parte letterale.

7.1.1 Somma e differenza

7.1.2 Prodotto e divisione

7.1.3 Potenze e radici

Definizione 7.3 — Potenze e radici intere. La potenza intera di ordine $n \in \mathbb{N}$ di un monomio x è definita come il prodotto di x per se stesso n volte,

$$p_n(x) := x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \ . \tag{7.1}$$

L'operazione inversa, quando possibile, è definita come radice di ordine n,

$$x := \sqrt[n]{p_n(x)} = p_n(x)^{\frac{1}{n}} \ . \tag{7.2}$$

R Per una comprensione più completa, bisogna rifarsi all'algebra dei numeri complessi IV.

Definizione 7.4 — Potenze e radici non intere.

7.2 Polinomi

Definizione 7.5 — Polinomio. Un polinomio reale di grado n viene definito come una combinazione lineare dei monomi di grado $\leq n$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{7.3}$$

Definizione 7.6 — Zero di un polinomio. Viene definito zero – o radice – (reale) di un polinomio un numero $\overline{x}$ ($\in \mathbb{R}$) tale che $p(\overline{x}) = 0$.

Definizione 7.7 — Scomposizione in fattori. Ogni polinomio di variabile reale e coefficienti reali può essere scomposto in fattori polinomiali di primo e secondo grado. Ad esempio un polinomio di grado n, può essere scomposto nel prodotto di p_1 polinomi di primo grado e p_2 polinomi di secondo grado,

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \\ &= (A_1 x + B_1) \ldots (A_{p_1} x + B_{p_1})(C_1 x^2 + D_1 x + E_1) \ldots (C_{p_2} x^2 + D_{p_2} x + E_{p_2}) = \\ &= K(x + \tilde{B}_1) \ldots (x + \tilde{B}_{p_1})(x^2 + \tilde{D}_1 x + \tilde{E}_1) \ldots (x^2 + \tilde{D}_{p_2} x + \tilde{E}_{p_2}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

con $p_1 + 2p_2 = n$.

7.2.1 Scomposizioni notevoli

La dimostrazione di queste identità viene ricavata facilmente tramite calcolo diretto.

Quadrato della somma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{7.5}$$

Cubo della somma

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \tag{7.6}$$

Potenza di un binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{7.7}$$

Differenza di quadrati

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{7.8}$$

Somma e differenza di cubi

$$a^3 \mp b^3 = (a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2) \tag{7.9}$$

Differenza di potenze di grado qualsiasi

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \\ &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned} \tag{7.10}$$

Somma di potenze di grado dispari Per ogni numero dispari $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, si può dimostrare che

$$\begin{aligned} a^{2m+1} + b^{2m+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a^{n-1-k} b^k = \\ &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned} \tag{7.11}$$

7.2.2 Divisione tra polinomi e resto

Definizione 7.8 — Divisione tra polinomi. Dati due polinomi $P(x)$, $D(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$, $R(x)$ tali che

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \;, \tag{7.12}$$

con il grado di $R(x)$ minore del grado di $Q(x)$. I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ vengono definiti rispettivamente **quoziente** e **resto** della divisione.

7.2.2.1 Divisione esatta e scomposizone di polinomi: regola di Ruffini

7.2.3 Formule di Viete e Newton

Relazioni tra i coefficienti di un polinomio e le sue radici

7.3 Potenze e radici

Definizione 7.9 — Potenze e radici intere.

7.4 Esponenziali e logaritmi

7.4.1 Esponenziale

Definizione 7.10 — Esponenziale. L'elevamento a potenza di un numero a

$$y = a^x \tag{7.13}$$

è un operazione che coinvolge due numeri, a detto base e x detto esponente.

7.4.1.1 Potenze non intere, valori ammissibili

7.4.1.2 Proprietà

Prodotto di potenze con la stessa base

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{7.14}$$

Potenza di potenza

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{7.15}$$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^m b^m = (ab)^m \tag{7.16}$$

7.4.2 Logaritmo

Definizione 7.11 — Logaritmo. Il logaritmo è l'operazione inversa

$$x = \log_a y \qquad \text{se } y = a^x \tag{7.17}$$

7.4.2.1 Potenze non intere, valori ammissibili

7.4.2.2 Proprietà

Somma di logaritmi con la stessa base

$$\log_a m + \log_a n = \log_a(mn) \tag{7.18}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = a^{\log_a m} \\ n = a^{\log_a n} \\ mn = a^{\log_a mn} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} mn = m \cdot n \\ a^{\log_a mn} = a^{\log_a m} a^{\log_a n} = a^{\log_a m + \log_a n} \end{array} \tag{7.19}$$

$$\rightarrow \log_a mn = \log_a m + \log_a n \tag{7.20}$$

Prodotto di un logaritmo per uno scalare

$$b \log_a m = \log_a m^b \tag{7.21}$$

Cambio di base di un logaritmo

$$\log_b m = \log_b a \log_a m \tag{7.22}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = b^{\log_b m} \\ a = b^{\log_b a} \\ m = a^{\log_a m} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a m} = b^{\log_b a \, \log_a m} \end{cases} \tag{7.23}$$

e confrontando le due espressioni per m si ottiene

$$\rightarrow \log_b m = \log_b a \, \log_a m \tag{7.24}$$

7.5 Funzioni armoniche

7.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno

7.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante

7.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \end{aligned} \tag{7.26}$$

7.6 Funzioni iperboliche

8. Equazioni

8.1 Equazioni algebriche

Definizione 8.1 — Equazioni algebriche. ...

8.1.1 Equazioni polinomiali

Definizione 8.2 — Equazione polinomiale. Un'equazione polinomiale ha la forma

$$p(x) = 0 \tag{8.1}$$

dove $p(x)$ è un polinomio. Il **grado** dell'equazione corrisponde al grado del polinomio $p(x)$, cioé alla potenza massima dei monomi. In maniera più esplicita, quindi, si può scrivere un'equazione polinomiale di grado n come

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ , \qquad \text{con } a_n \neq 0 \tag{8.2}$$

Esistenza e numero delle soluzioni. Un'equazione polinomiale di grado n ha **al massimo** n soluzioni reali. L'esistenza di soluzioni reali non è in generale garantita, mentre il **teorema fondamentale dell'algebra** assicura che esistano esattamente n soluzioni complesse di un'equazione polinomiale con coefficienti complessi.

8.1.1.1 Equazioni di primo grado

La forma generale delle equazioni di primo grado è

$$ax + b = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{8.3}$$

e la soluzione è

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \ . \tag{8.4}$$

8.1.1.2 Equazioni di secondo grado

La forma generale delle equazioni di secondo grado è

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{8.5}$$

Un'equazione di secondo grado può ammettere nel campo dei numeri reali 2 soluzioni (distinte o coincidenti) o nessuna soluzione, a seconda del valore dell'espressione definita come **discriminante**, $\Delta := b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$: due soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale

Quando il discriminante è non negativo, le soluzioni dell'equazione sono date dall'espressione

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \ . \tag{8.6}$$

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado. Una dimostrazione della formula risolutiva viene ricavata con la regola di completamento del quadrato

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c = \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{8.8}$$

É ora facile notare come questa equazione ha soluzioni solo quando il discriminante è non negativo. Quando il discriminante è non negativo, è possibile estrarre la radice quadra dell'espressione

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \ . \tag{8.9}$$

8.1.2 Equazioni algebriche razionali

Definizione 8.3 — Equazioni algebriche razionali. Le equazioni algebriche razionali sono equazioni che contengono polinomi, loro rapporti e potenze intere.

■ **Esempio 8.1 — Esempi di equazioni algebriche razionali.**

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)} = 4x \tag{8.10}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{1}{x} \tag{8.11}$$

■

8.1.2.1 Metodo di soluzione

1. Per prima cosa è necessario determinare le **condizioni di esistenza** di una soluzione. Poiché nelle equazioni può comparire la **divisione** tra polinomi, bisogna richiedere che questa e tutte le operazioni scritte nel problema abbiano senso: ad esempio, nelle condizioni di esistenza bisogna richiedere che non avvengano divisioni per zero.
2. Successivamente, è possibile procedere con le semplificazioni per la ricerca della soluzione.

Esempi Seguendo questo metodo di soluzione, procediamo a risolvere le equazioni dell'esempio cit.

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)} = 4x \qquad \text{C.E.: } x \neq 1 \quad \to \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} &(x+3)^2 = 4x(x-1) \\ &x^2 + 6x + 9 = 4x^2 - 4x \\ &3x^2 - 10x - 9 = 0 \\ &\to \quad x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{25 + 3 \cdot 9}}{6} = \frac{5 \mp \sqrt{52}}{3} \end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{1}{x} \qquad \text{C.E.: } x \neq 0 \quad \to \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned} &2x^2 = -x^2 - 1 \\ &3x^2 = -1 \quad \to \quad \nexists x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{8.15}$$

8.1.3 Equazioni algebriche irrazionali

Definizione 8.4 — Equazioni algebriche irrazionali. Le equazioni algebriche razionali sono equazioni che contengono polinomi, loro rapporti e potenze intere e non.

■ **Esempio 8.2 — Esempi di equazioni algebriche irrazionali.**

$$\sqrt[3]{x-3} = 2 \quad , \quad \frac{2x}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = -2 \tag{8.16}$$

■

8.1.3.1 Metodo di soluzione

1. Per prima cosa è necessario determinare le **condizioni di esistenza** di una soluzione. Bisogna richiedere che questa e tutte le operazioni scritte nel problema abbiano senso: bisogna richiedere che
   - che non avvengano **divisioni** per zero;
   - che siano non negativi i radicandi di eventuali **radici** con indice intero pari o non intero.
2. Successivamente, è possibile procedere con le semplificazioni per la ricerca della soluzione.

Esempi

$$\sqrt[3]{x-3} = 2 \qquad \text{C.E.: } x \in \mathbb{R} \tag{8.17}$$

$$x - 3 = 8 \quad \to \quad x = 11 \tag{8.18}$$

$$\frac{2x}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = -2 \qquad \text{C.E.: } x - 1 > 0 \quad \to \quad x \in (1, +\infty) \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned} &x = -(x-1)^{\frac{1}{2}} \\ &x^2 = x - 1 \\ &x^2 - x + 1 = 0 \\ &\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \quad \to \quad \nexists x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{8.20}$$

8.2 Equazioni non algebriche o trascendenti

8.2.1 Equazioni con i valori assoluti

8.2.2 Equazioni con esponenti e logaritmi

8.2.3 Equazioni con le funzioni armoniche

8.3 Metodi di soluzione approssimati

8.3.1 Metodo grafico

8.3.2 Metodi numerici

Riferimento al capitolo dei metodi numerici

9. Disequazioni

10. Sistemi di equazioni e di disequazioni

IV Algebra in $\mathbb{C}$

10.1 Definizione dei numeri complessi

Definizione 10.1 — Unità immaginaria.

$$i := \sqrt{-1} \tag{10.1}$$

Definizione 10.2 — Numero complesso.

$$z = x + iy \qquad , \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{10.2}$$

10.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)

Si può definire una relazione biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e il piano $\mathbb{R}^2$.

10.1.1.1 Rappresentazione cartesiana.

10.1.1.2 Rappresentazione polare.

Trasformazione tra coordinate cartesiane e polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{atan2}(x,y) \end{cases} \tag{10.3}$$

e quindi

$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{10.4}$$

La relazione di Eulero e la rappresentazione polare dei numeri complessi. Usando le espansioni in serie di Taylor delle funzioni $e^{i\theta}$, $\cos\theta$ e $\sin\theta$, Eulero ricavò la formula che da lui prende il nome

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\ . \tag{10.5}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!} && = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\
\sin\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} && = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\
e^{i\theta} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(i\theta)^n}{n!} && = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots = \\
& && = \left[1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] = \\
& && = \cos\theta + i\sin\theta\ .
\end{aligned} \tag{10.6}$$

10.2 Operazioni con i numeri complessi

10.2.1 Somma e differenza

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)\ . \tag{10.7}$$

10.2.2 Prodotto e divisione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\ . \tag{10.8}$$

10.2.3 Potenze e radici

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{10.9}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i(\theta+2\pi m)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{m}{n}2\pi\right)} \tag{10.10}$$

10.2.4 Esponenziali e logaritmi

...

V Calcolo infinitesimale

11. Funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e limiti

11.1 Funzioni

Definizione 11.1 — Funzione a variabile e valori reali.

11.2 Limiti

- Limite destro e limite sinistro
- Funzioni continue

Definizione 11.2 — Limite finito al finito. Il limite finito della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \tag{11.1}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall \varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \ell| < \delta. \tag{11.2}$$

Definizione 11.3 — Limite infinito al finito. Il limite infinito della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty \tag{11.3}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall \varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon,\ \exists M \lesseqgtr 0 \text{ tale che } f(x) \lesseqgtr M. \tag{11.4}$$

Definizione 11.4 — Limite finito al infinito. Il limite finito della funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \ell \tag{11.5}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall N \lesseqgtr 0 \text{ tale che } x \lesseqgtr N,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \ell| < \delta. \tag{11.6}$$

Definizione 11.5 — Limite infinito al infinito. Il limite infinito della funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito

$$\lim_{x \to \mp^{(1)}\infty} f(x) = \mp^{(2)}\infty \tag{11.7}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall N \lesseqgtr^{(1)} 0 \text{ tale che } x \lesseqgtr^{(1)} N,\ \exists M \lesseqgtr^{(2)} 0 \text{ tale che } f(x) \lesseqgtr^{(2)} M. \tag{11.8}$$

Grafici

11.3 Funzioni continue

Definizioni:

- punto di accumulazione
- punto isolato
- intorno
- attenzione a insiemi aperti e chiusi

Definizione 11.6 — Funzione continua in un punto. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in \Omega$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\ . \tag{11.9}$$

Definizione 11.7 — Funzione continua in un intervallo. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in un intervallo $[a, b] \subset \Omega$, se è una funzione continua in tutti i punti $x \in [a, b]$.

11.3.1 Teoremi sulle funzioni continue

Teorema 11.1 — Teorema di Weierstrass. Una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ammette in esso un massimo e un minimo assoluto.

11.4 Teoremi sui limiti

11.5 Infiniti e infinitesimi

12. Derivate

12.1 Definizioni

Definizione 12.1 — Rapporto incrementale.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{12.1}$$

Definizione 12.2 — Derivata.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x):=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{12.2}$$

Definizione 12.3

Interpretazione geometrica.

12.2 Regole di derivazione

12.2.1 Regole

Derivata della somma di due funzioni e il prodotto per uno scalare

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))'&=f'(x)+g'(x)\\(af(x))'&=af'(x)\end{aligned} \tag{12.3}$$

Proprietà 12.1 — Operatore lineare. La derivata è un operatore lineare.

Derivata del prodotto di due funzioni

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{12.4}$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{12.5}$$

Derivata di una funzione composta

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=\left.\frac{d}{dy}f(y)\right|_{y=g(x)}\frac{d}{dx}g(x) \tag{12.6}$$

Derivata della funzione inversa

$$(12.7)$$

12.2.2 Dimostrazioni

Derivata della somma di due funzioni

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) .
\end{aligned} \tag{12.8}$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x) - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x) = \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned} \tag{12.9}$$

Derivata di una funzione composta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(g(x)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(g(x+\Delta x))-f(g(x))\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \\
&= \dots \\
&= f'(g(x))\,g'(x) .
\end{aligned} \tag{12.10}$$

12.3 Teoremi

Teorema 12.1 — Teorema di Fermat. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo (a,b) e derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$, punto di estremo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.

12.3.1 Teoremi di Fermat, Rolle, Cauchy e Lagrange

Teorema 12.2 — Teorema di Rolle. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in ogni punto dell'intervallo $[a,b]$ che assume valori uguali $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ in cui la derivata della funzione si annulla, $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Secondo il teorema di Weierstrass (11.1) sulle funzioni continue, la funzione f ammette punti $c \in [a,b]$ di massimo e un minimo globali. Si possono riconoscere ora due casi:

- se i punti di massimo e minimo globali coincidono entrambi con gli estremi dell'intervallo, si può scrivere
$$m = f(a) = f(b) \leq f(x) \leq M = f(a) = f(b) \tag{12.11}$$
e quindi la funzione è costante, $f(x) = f(a) = f(b)$, e la sua derivata è nulla in tutti i punti dell'intervallo,$f'(x) = 0, \ \forall x \in (a,b)$;
- altrimenti, esiste un punto di massimo o minimo globale $x = c \in (a,b)$ interno all'intervallo; i punti di massimo o minimo globali globali sono anche punti di massimo o minimo locali e quindi, per il teorema di Fermat (12.1), $f'(c) = 0$.

■

Teorema 12.3 — Teorema di Cauchy. Siano $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili su (a,b), allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che
$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c) \ . \tag{12.12}$$

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema di Cauchy può essere svolta con un'opportuna scelta della funzione alla quale applicare il teorema di Rolle (12.2). Ad esempio, la funzione
$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)] \ , \tag{12.13}$$
soddisfa le ipotesi del teoremda di Rolle, poichè

- $h(x)$ è continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b)
- $h(a) = h(b)$, dal calcolo diretto
$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)][g(a) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(a) - f(a)] = 0 \\ h(b) &= [f(b) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(b) - f(a)] = 0 \ . \end{aligned} \tag{12.14}$$

Applicando il teorema di Rolle alla funzione $h(x)$, possiamo concludere che esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $h'(c) = 0$ e quindi
$$0 = h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x) \ . \tag{12.15}$$

■

Teorema 12.4 — Teorema di Lagrange. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \ . \tag{12.16}$$

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema di Lagrange segue direttamente dalla dimostrazione del teorema di Cauchy (12.3), usando le funzioni $f(x)$ e $g(x) = x$, la cui derivata è $g'(x) = 1$. ■

12.3.2 Teorema di de l'Hopital

Teorema 12.5 — Teorema di de l'Hopital.

12.4 Tabella di derivate

12.5 Derivate di ordine superiore

12.6 Espansioni in serie

Definizione 12.4 — Serie di Taylor. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ centrata in $x = x_0$ è la serie polinomiale

$$T[f(x_0)](x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ . \tag{12.17}$$

Teorema 12.6 La serie di Taylor troncata alla n-esima potenza,

$$T^n[f(x_0)](x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \ , \tag{12.18}$$

è un'approssimazione dell'n-esimo ordine della funzione $f(x)$, i.e.

$$f(x) - T^n[f(x_0)](x) \sim o(|x - x_0|^n) \tag{12.19}$$

Definizione 12.5 — Serie di MacLaurin. La serie di MacLaurin di una funzione $f(x)$ è definita come la sua serie di Taylor centrata in $x = 0$.

12.7 Applicazioni

12.7.1 Studio funzione

13. Integrali

13.1 Definizioni

Definizione 13.1 — Somma di Riemann. Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n | a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$, la somma di Riemann viene definita come

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}) \tag{13.1}$$

con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definizione 13.2 — Integrale di Riemann. Definendo $\Delta x := \max_i(x_i - x_{i-1})$, l'integrale di Riemann viene definito come il limite della somma di Riemann per $\Delta x \to 0$ (e di conseguenza il numero di intervalli della partizione $n \to \infty$), e viene indicato come

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_n \tag{13.2}$$

Definizione 13.3 — Integrale definito.

Interpretazione geometrica

Definizione 13.4 — Integrale indefinito.

13.2 Proprietà

13.3 Teoremi

Definizione 13.5 — Media.

$$M(f, [a, b]) = \frac{1}{b-a} \int_{x=a}^{b} f(x)dx \tag{13.3}$$

Teorema 13.1 — Teorema della media. Sia $f :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$, allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a) \ . \tag{13.4}$$

La dimostrazione è immediata, applicando il teorema di Lagrange alla primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)$, $F(x) = \int_{t=x_0}^{x} f(t)dt$

$$\int_{t=a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a) \ . \tag{13.5}$$

Teorema 13.2 — Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale.

$$\frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt = f(x) \tag{13.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t=a}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{t=a}^{x} f(t)dt\right] = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_{t=x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Delta x \, f(\xi) = \qquad\qquad (\text{con } \xi \in [x, x+\Delta x]) \\ &= f(x) \ . \end{aligned} \tag{13.7}$$

13.4 Integrali fondamentali

13.5 Regole di integrazione

13.5.1 Integrazione per parti

- Definendo $F(x)$, $G(x)$ le primitive delle funzioni $f(x)$, e $g(x)$
- Integrando in x dalla regola di **derivazione del prodotto** $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$, riscritta isolando il termine $F'(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)G'(x)$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int f(x)G(x)dx &= \int (F(x)G(x))'dx - \int F(x)G'(x)dx = \\ &= F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx \end{aligned} \tag{13.8}$$

13.5.2 Integrazione con sostituzione

- Definendo la funzione composta $\overline{F}(x) = F(y(x))$ e le derivate

$$\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) \qquad , \qquad f(y) = \frac{d}{dy}F(y) \tag{13.9}$$

- Partendo dalla regola di **derivazione della funzione composta**, $\overline{F}(x) = F(y(x))$

$$\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) = \frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{dF}{dy}(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(y(x))y'(x) \tag{13.10}$$

Usando il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

$$\begin{aligned} F(y) &= \int f(y)dy \\ \overline{F}(x) &= \int \overline{f}(x)dx = \int f(y(x)) \, y'(x)dx \end{aligned} \tag{13.11}$$

Se si introduce la dipendenza $y(x)$ nella prima equazione, si ottiene l'uguaglianza tra le ultime due espressioni, $F(y(x)) = \overline{F}(x)$, e quindi

$$\int f(y)dy = \int f(y(x))\ y'(x)dx \ . \tag{13.12}$$

VI
Equazioni differenziali ordinarie

14. Introduzione

14.1 Applicazioni

14.2 Definizioni

Definizione 14.1 — Equazione differenziale ordinaria. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che ha come incognita una funzione $y(x)$, nella quale possono comparire la funzione incognita $y(x)$, le sue derivate $y^{(n)}(x)$ e la variabile indipendente x, che può essere scritto nella forma implicita

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{14.1}$$

L'**ordine** dell'equazione differenziale viene definito come l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che compaiono nell'equazione.

Definizione 14.2 — Equazione differenziale ordinaria lineare. Un'equazione differenziale è lineare se si può scrivere come l'uguaglianza di una combinazione lineare delle derivate della funzione incognita e una funzione nota, $f(x)$. Ad esempio, la forma generale dell'equazione differenziale ordinaria di ordine n può essere scritta come

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\dots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{14.2}$$

Definizione 14.3 — Equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare con coefficienti $a_i(x) = a_i$, numeri che non dipendono dalla variabile indipendente x,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{14.3}$$

Definizione 14.4 — Equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti con $f(x) = 0$,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{14.4}$$

In generale, la soluzione dell'equazione (14.1) dipende da n parametri indeterminati. In generale, un problema differenziale è composto da:

- un'equazione differenziale di ordine n
- n condizioni per determinare gli n parametri altrimenti indeterminati

Definizione 14.5 — Problema di Cauchy. Un problema di Cauchy è definito da:

- un'equazione differenziale di ordine n

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0\ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{14.5}$$

- n condizioni che definiscono il valore della funzione incognita e delle prime $n-1$ derivate nell'estremo inferiore dell'intervallo

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y'(a) &= y_1 \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(a) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{14.6}$$

15. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti

15.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine

15.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay'(x) + by(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{15.1}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando la derivata e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta + b)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{15.2}$$

Il prodotto di tre fattori si annulla quando si annulla uno dei tre fattori:

- $e^{\beta x}$ non si annulla per nessun valore di x
- se si annulla α, $\alpha = 0$, si otterebbe la soluzione triviale $y(x) = 0$
- $\rightarrow$ deve quindi annullarsi il fattore $a\beta + b$: si ottiene quindi il valore $\beta = -\dfrac{b}{a}$

La forma generale della soluzione dell'equazione (15.1) è quindi

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{a}x} \tag{15.3}$$

Per determinare il coefficiente α è necessaria una condizione che definisca il valore della funzione (o della sua derivata) in un punto del dominio o del suo contorno.

15.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine

15.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{15.4}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando le derivate e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta^2 + b\beta + c)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{15.5}$$

I valori di β si ottiengono dalla soluzione dell'equazione di secondo grado in β, $a\beta^2+b\beta+c = 0$ che, a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, possono essere:

- $\Delta > 0$: esistono due soluzioni reali distinte $\beta_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: esistono due soluzioni reali coincidenti $\beta_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: esistono due soluzioni complesse coniugate $\beta_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \mp j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

La soluzione dell'equazione differenziale assume quindi la forma

- $\Delta > 0$:

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} \tag{15.6}$$

- $\Delta = 0$:

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 x e^{\beta x} \tag{15.7}$$

- $\Delta < 0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 e^{\beta^* x} = \\ &= \alpha_1 e^{(re\{\beta\} + i im\{\beta\})x} + \alpha_2 e^{(re\{\beta\} - i im\{\beta\})x} = \\ &= e^{re\{\beta\}x} \left(\alpha_1 e^{i\ im\{\beta\}x} + \alpha_2 e^{-i\ im\{\beta\}x} \right) \ , \end{aligned} \tag{15.8}$$

  e per avere una soluzione reale, bisogna imporre $\alpha_2 = \alpha_1^*$, per ottenere la somma di due numeri complessi coniugati, uguale al doppio della somma della loro parte reale,

$$y(x) = 2e^{re\{\beta\}x} \left(re\{\alpha_1\} \cos(\beta x) - im\{\alpha_1\} \sin(\beta x) \right) \ , \tag{15.9}$$

  che può essere riscritta come

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{re\{\beta\}x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right) = \\ &= C e^{re\{\beta\}x} \cos(\beta x + \phi) \ . \end{aligned} \tag{15.10}$$

16. Metodo di separazione delle variabili

$$y'(x) = f(x)\,g(y(x))\ , \qquad \text{con } x \in \Omega \tag{16.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x)) \tag{16.2}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \tag{16.3}$$

■ **Esempio 16.1** $y'(x) = xy(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \rightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \rightarrow \quad y(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2} \tag{16.4}$$

Verifica: $y'(x) = K\frac{1}{2}2xe^{\frac{1}{2}x^2} = Kxe^{\frac{1}{2}x^2} = xy(x)$. ■

VII

Vettori

Motivazione:

- non tutti gli oggetti di interesse della Matematica, della Fisica o delle Scienze in generale possono essere adeguatamente rappresentati da un singolo numero
- esempi: posizione, velocità, forza,...

Storia:

- ...
- da vettori nello spazio fisico a struttura astratta matematica

17. Algebra vettoriale

17.1 Introduzione

Nello studio della Fisica e delle scienze in generale, si incontrano alcune grandezze che non possono essere rappresentate adeguatamente con un numero, opportunamente accompagnato dalle unità di misura se necessario. Alcuni esempi sono la posizione, la velocità o l'accelerazione di un punto nello spazio, o una forza; Esempi ... Esempi di tensori: rotazioni, inerzia ...

17.2 Definizioni

Definizione 17.1 — Spazio vettoriale. Uno spazio vettoriale è una struttura matematica composta da:

- un insieme V, i cui elementi $\mathbf{v} \in V$ sono chiamati **vettori**
- un campo F, i cui elementi $a \in F$ sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto a V, cioè il cui risultato è un elemento che appartiene a V, che soddisfano determinate proprietà
  - **somma vettoriale** di due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{17.1}$$

  - **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore $\mathbf{u} \in V$ e uno scalare $a \in F$:

$$a\mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{17.2}$$

Proprietà 17.1 — Proprietà delle operazioni.

Definizione 17.2 — Combinazione lineare di vettori. Una combinazione lineare dei vettori $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1:K}$ è un vettore la cui espressione che può essere scritto come

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_K\mathbf{v}_K \ , \tag{17.3}$$

dove i coefficienti a_k, $k = 1 : K$, sono degli scalari appartenenti al campo F.

Definizione 17.3 — Vettori linearmente indipendenti. Un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1:K}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, se una loro combinazione lineare ha come risultato il vettore nullo solo se tutti i coefficienti della combinazione sono nulli, cioé

$$\mathbf{0} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_K\mathbf{v}_K \qquad \rightarrow \qquad a_k = 0 \ , \quad \forall k = 1 : K \ . \tag{17.4}$$

Dalla definizione, segue immediatamente che nessun vettore dell'insieme può essere scritto come una combinazione lineare degli altri vettori. Se così non fosse,...

Definizione 17.4 — Base e dimensione di uno spazio. Una base di uno spazio lineare è un insieme massimo di vettori linearmente indipendenti, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$. La dimensione dello spazio lineare è definita come il numero degli elementi della base.

Definizione 17.5 — Componenti di un vettore rispetto a una base. Le componenti $\{v^k\}_{k=1:N}$ di un vettore $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ vengono definite come i coefficienti della combinazione lineare

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + \cdots + v_N\mathbf{b}_N = \sum_{k=1}^{N} v^k\mathbf{b}_k \ . \tag{17.5}$$

Un vettore è **invariante** rispetto alla base usata per descriverlo: se si cambia la base, le componenti cambiano di conseguenza.

17.3 Spazi vettoriali con prodotto interno

Definizione 17.6 — Prodotto interno. Il prodotto interno $\cdot : V \times V \rightarrow F$ è un'operazione lineare tra due elementi dello spazio vettoriale, che restituisce uno scalare non negativo, con le seguenti proprietà

- simmetria: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
- linearità: $(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- non-negatività: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, con l'uguaglianza che vale solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Definizione 17.7 — Norma indotta dal prodotto interno. La norma di un vettore $\mathbf{v}$ indotta da un prodotto interno è definita come

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \ . \tag{17.6}$$

Definizione 17.8 — Base ortonormale. Una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1:N}$, è una base i cui vettori sono legati dalla relazione

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 \ , & i = k \\ 0 \ , & i \neq k \end{cases} \tag{17.7}$$

17.4 Spazi vettoriali bi- e tri-dimenisonali

17.4.1 Spazio vettoriale bidimensionale

...

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^1\hat{\mathbf{e}}_1 + u^2\hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (v^1\hat{\mathbf{e}}_1 + v^2\hat{\mathbf{e}}_2) = u^1v^1 + u^2v^2 \ . \tag{17.8}$$

Usando una base ortogonale $\{\hat{\mathbf{E}}_i\}_{i=1:2}$ che ha il primo vettore orientato come $\mathbf{u}$, si può scrivere

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = U^1\hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (V^1\hat{\mathbf{E}}_1 + V^2\hat{\mathbf{E}}_2) = U^1V^1 = UV\cos\theta_{\mathbf{uv}} \ . \tag{17.9}$$

...

17.4.2 Spazio vettoriale tridimensionale

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + u^3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (v^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v^3 \hat{\mathbf{e}}_3) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \ . \tag{17.10}$$

Usando una base ortogonale $\{\hat{\mathbf{E}}_i\}_{i=1:3}$ che ha:

- il primo vettore orientato come $\mathbf{u}$, tale che il vettore $\mathbf{u}$ può essere scritto come $\mathbf{u} = U^1 \hat{\mathbf{E}}_1$
- il secondo vettore $\hat{\mathbf{E}}_2$ tale che il vettore $\mathbf{v}$ può essere scritto come $\mathbf{v} = V^1 \hat{\mathbf{E}}_1 + V^2 \hat{\mathbf{E}}_2$
- il terzo vettore $\hat{\mathbf{E}}_3$ orientato di conseguenza, ortogonale ai due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$

Risulta ancora una volta dimostrata la relazione

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = U^1 \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (V^1 \hat{\mathbf{E}}_1 + V^2 \hat{\mathbf{E}}_2) = U^1 V^1 = UV \cos \theta_{\mathbf{uv}} \ . \tag{17.11}$$

...

17.5 Applicazioni

17.5.1 Geometria

17.5.2 Fisica

18. Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale

18.1 Introduzione

Definizione 18.1 — Vettore posizione.

Definizione 18.2 — Coordinate.

Esempio 18.1 — Coordinate cartesiane. ■

Esempio 18.2 — Coordinate polari. ■

Esempio 18.3 — Coordinate sferiche e superficie terrestre. ■

18.2 Funzioni di più variabili - campi

18.2.1 Limiti e funzioni continue

18.2.2 Derivate

Definizione 18.3 — Funzione derivabile.

Definizione 18.4 — Derivata direzionale. La derivata direzionale di un campo $f(\mathbf{r})$ nel punto $\mathbf{r}_0$ nella direzione identificata dal versore $\hat{\mathbf{t}}$ è definita come,

$$\nabla_{\hat{\mathbf{t}}} f(\mathbf{r}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\mathbf{r}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{t}}) - f(\mathbf{r}_0)}{\varepsilon} \ , \tag{18.1}$$

cioè come il limite del rapporto incrementale del valore della funzione $f(\mathbf{r})$, muovendosi dal punto $\mathbf{r}_0$ al punto $\mathbf{r}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{t}}$.

18.2.3 Integrali

18.2.3.1 Integrali di linea

Definizione 18.5 — Lavoro. L'integrale "del lavoro" del campo vettoriale "di forza" $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ lungo la linea γ è definito come

$$L = \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \ . \tag{18.2}$$

Definizione 18.6 — Circuitazione. La circuitazione di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è definito come il suo integrale del lavoro lungo una linea chiusa γ,

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{F}) := \oint_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \ . \tag{18.3}$$

18.2.3.2 Integrali di superficie

Definizione 18.7 — Flusso.

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \ . \tag{18.4}$$

18.2.3.3 Integrali di volume

18.2.4 Operatori differenziali

Definizione 18.8 — Gradiente.

$$\nabla_{\hat{\mathbf{t}}} f =: \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla f \tag{18.5}$$

Proprietà 18.1 — Operatore nabla, ∇ – vettore formale.

Proprietà 18.2 — Coordinate cartesiane.

Proprietà 18.3 — Direzione di massima crescita.

Definizione 18.9 — Divergenza. La divergenza viene definita come l'operatore differenziale del primo ordine che prende un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e restituisce un campo scalare, che può essere rappresentato con il prodotto scalare tra il vettore formale nabla ∇ e il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \ , \tag{18.6}$$

Proprietà 18.4 — Coordinate cartesiane. L'espressione in coordinate cartesiane della divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) = \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \ . \end{aligned} \tag{18.7}$$

Proprietà 18.5 — Flusso elementare.

Definizione 18.10 — Rotore. Il rotore viene definito come l'operatore differenziale del primo ordine che prende un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e restituisce un campo vettoriale, che può essere rappresentato con il prodotto vettore tra il vettore formale nabla ∇ e il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \ , \tag{18.8}$$

Proprietà 18.6 — Coordinate cartesiane. L'espressione in coordinate cartesiane del rotore di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{18.9}$$

Proprietà 18.7 — Circuitazione elementare.

18.2.5 Teoremi

Teorema 18.1 — Teorema del gradiente.

$$\oint_{\partial V} f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \int_V \nabla f(\mathbf{r}) \tag{18.10}$$

Teorema 18.2 — Teorema della divergenza.

$$\Phi_{\partial V}(\mathbf{F}) = \oint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{18.11}$$

Teorema 18.3 — Teorema del rotore.

$$\Gamma_{\partial S}(\mathbf{F}) = \oint_{\partial S} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) = \int_S \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{18.12}$$

VIII Geometria

Introduzione storica:

- Euclide
- Cartesio
- Riemann

19. Geometria nel piano

19.1 Geometria euclidea

19.1.1 Introduzione

19.1.2 Rette e angoli

19.1.3 Triangoli

19.1.4 Circonferenza

19.2 Geometria cartesiana

19.2.1 Coordinate cartesiane

19.2.2 Punto, distanze, retta

Definizione 19.1 — Punto. Dato un sistema di coordinate cartesiane, un punto P nel piano è individuato dalle sue due coordinate (x, y).

Definizione 19.2 — Distanza tra due punti. La distanza tra due punti nel piano viene calcolata usando il teorema di Pitagora

$$d_{PQ}^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 \ . \tag{19.1}$$

Perchè la distanza è data come una definizione? Geometria di Riemann: la distanza definisce tutte le proprietà di una geometria

Definizione 19.3 — Retta. La retta può essere definita come l'insieme di punti (x, y) equidistanti da due punti dati $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

Partendo dalla definizione

$$\begin{gathered} d_1^2 = d_2^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\ x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \end{gathered} \tag{19.2}$$

$$\rightarrow \qquad 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0 \ . \tag{19.3}$$

Quindi l'equazione generale della retta può essere riscritta nella forma

$$Ax + By + C = 0 \ . \tag{19.4}$$

19.2.3 Trasformazioni di coordinate cartesiane e trasformazioni di curve

19.2.3.1 Traslazione dell'origine

Sistema di coordinate $O'x'y'$ con assi paralleli al sistema di coordinate Oxy e coordinate dell'origine $x_{O'}$, $y_{O'}$

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + x_{O'} \\ y = y' + y_{O'} \end{cases} \tag{19.5}$$

19.2.3.2 Rotazione attorno all'origine

Sistema di coordinate $O'x'y'$ origine coincidente con quella del sistema di coordinate Oxy e assi rotati di un angolo θ

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \tag{19.6}$$

19.2.4 Coniche

19.2.4.1 Parabola

Definizione 19.4 — Parabola. Insieme dei punti P del piano equidistanti da un punto F, chiamato **fuoco**, e una retta r chiamata **direttrice**.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r) \tag{19.7}$$

Scegliendo il fuoco $F(0, d)$ e la retta $r : y = -d$, si ricava l'equazione della parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y degli assi cartesiani.

$$\begin{aligned} d^2_{PF} &= d^2_{Pr} \\ (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 &= (y - y_r)^2 \\ x^2 + (y - d)^2 &= (y + d)^2 \\ x^2 + y^2 - 2dy + d^2 &= y^2 + 2dy + d^2 \end{aligned} \tag{19.8}$$

$$\rightarrow \qquad 4dy = x^2 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{4d}x^2 \ . \tag{19.9}$$

19.2.4.2 Ellisse

Definizione 19.5 — Ellisse. Insieme dei punti P del piano la cui somma delle distanze da due punti F_1, F_2, chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante.

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a \tag{19.10}$$

Scegliendo i fuochi $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a \\ &\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ &x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ &4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ &(cx - a^2)^2 = (-a\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 \\ &c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2 \\ &(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \end{aligned} \tag{19.11}$$

Definendo $b^2 := a^2 - c^2 > 0$, si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{19.12}$$

19.2.4.3 Iperbole

Definizione 19.6 — Iperbole. Insieme dei punti P del piano la cui differenza delle distanze da due punti F_1, F_2, chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante in valore assoluto.

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a \tag{19.13}$$

Scegliendo i fuochi $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \mp 2a \\
&\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \mp 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\
&x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
&4cx = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\
&(cx - a^2)^2 = (\mp a\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 \\
&c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2 \\
&(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned} \tag{19.14}$$

Definendo $b^2 := c^2 - a^2 > 0$, si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{19.15}$$

20. Geometria nello spazio

IX

Statistica

X

Matematica numerica - cenni

21. Equazioni e sistemi di equazioni

21.1 Equazioni

21.1.1 Equazioni non lineari

$$f(x) = 0 \tag{21.1}$$

21.1.1.1 Metodo della bisezione

Se la funzione $f(x)$ è continua, ed esistono due valori x_1, x_2 tali che $f(x_1)f(x_2) < 0$, allora esiste una soluzione $\overline{x} \in [x_1, x_2]$ dell'equazione $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x_1,\ x_2 \quad \text{ s.t. } f(x_1) < 0 \text{ and } f(x_2) > 0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ x = 0.5(x_1 + x_2),\ f = f(x),\ res = |f| \\
&\text{Bisection loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad if(f < 0): \\
&\qquad\qquad x_1 \leftarrow x \\
&\qquad else: \\
&\qquad\qquad x_2 \leftarrow x \\
&\qquad x = 0.5(x_1 + x_2) \\
&\qquad f = f(x) \\
&\qquad res = |f(x)| \\
&\qquad niter += 1
\end{aligned} \tag{21.2}$$

21.1.1.2 Metodo di Newton

Se la funzione $f(x)$ è "sufficientemente regolare" e il tentativo iniziale x_0 è "sufficientemente vicino" a una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, il metodo di Newton

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } f(x),\ f'(x) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x = x^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |f(x)| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad f'(x)\Delta x = -f(x) \\
&\qquad x \leftarrow x + \Delta x \\
&\qquad niter += 1,\ res = |f(x)|
\end{aligned} \tag{21.3}$$

converge a una soluzione dell'equazione.

21.2 Sistemi di equazioni

21.2.1 Sistemi di equazioni lineari

Metodo di sostituzione

21.2.2 Sistemi di equazioni non lineari

21.2.2.1 Metodo di Newton per sistemi

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{f_x}(\mathbf{x}) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad \mathbf{f_x}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
&\qquad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \\
&\qquad niter += 1,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|
\end{aligned} \tag{21.4}$$

22. Approssimazione di funzioni

22.1

23. Derivate

23.1

24. Ricerca dei massimi e ottimizzazione

24.1 Ottimizzazione libera

Un problema di ottimizzazione libera può essere formulato come il problema di ricerca del massimo di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cioè il punto $\mathbf{x}^*$ tale che

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \ , \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ . \tag{24.1}$$

24.1.1 Algoritmi

Discesa lungo il gradiente.

$$\begin{aligned} & \text{Tentativo iniziale } \mathbf{x}^{(\mathbf{0})} \\ & \text{while} \ \ (\ \ \text{not stopping} \ \ ): \\ & \qquad \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - \alpha \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^{(n)}) \end{aligned} \tag{24.2}$$

24.2 Ottimizzazione vincolata

Un problema di ottimizzazione può essere soggetto ad alcuni vincoli, come:

- vincoli esprimibili con un'equazione, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- vincoli sul valore delle variabili indipendenti, $x_{i,min} \leq x_i \leq x_{i,max}$
- altri vincoli esprimibili con una disequazione, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$

■ **Esempio 24.1** Data la funzione $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, e l'equazione $g(x, y) = -2x + y - 1 = 0$ viene chiesto di

$$\text{Trovare } \max_{x,y} f(x, y) \qquad s.t. \qquad g(x, y) = 0 \tag{24.3}$$

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si definisce la funzione $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ e si cercano i valori delle variabili indipendenti e del moltiplicatore di Lagrange che ne annullano il gradiente,

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = -2x + 2\lambda \\ 0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = -2y - \lambda \\ 0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = 2x - y + 1 \end{cases} \tag{24.4}$$

In questo problema si è ottenuto un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, la cui soluzione è

$$x^* = -\frac{2}{5} \ , \quad y^* = \frac{1}{5} \ , \quad \lambda^* = -\frac{2}{5} \ . \tag{24.5}$$

■

■ Esempio 24.2 ■

■ Esempio 24.3 ■

25. Integrali

25.1

26. Equazioni differenziali ordinarie

26.1 Riduzione a sistema di primo ordine

É possibile ridurre un'equazione differenziale ordinaria di ordine n, $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$, a un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Definendo le funzioni incognite

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= y(x) \\ y_1(x) &:= y'(x) \\ &\dots \\ y_{n-1}(x) &:= y^{(n-1)}(x) \ , \end{aligned} \tag{26.1}$$

il problema differenziale originale è equivalente al sistema

$$\begin{cases} F(x, y_0(x), y_1(x), y_{n-1}(x), y'_{n-1}(x)) = 0 \\ y'_0(x) = y_1(x) \\ y'_1(x) = y_2(x) \\ \dots \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \end{cases} , \tag{26.2}$$

che può essere scritto in forma sintetica (vettoriale)

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}(x)) = \mathbf{0} \ . \tag{26.3}$$

26.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy

26.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno

27. Statistica

XI

Appendici, indice e bibliografia

Bibiliografia

A. Prima appendice

. . .