Scuole superiori

Matematica

OSB

PUBLISHED BY OSB

Latest version 2 novembre 2023

Indice

III Algebra in $\mathbb{R}$

XIV Appendici, indice e bibliografia

Introduzione

1. Strumenti e discipline in matematica

1.1 Quantità

- numeri - scalari ($\mathbb{N}, \ldots, \mathbb{R}, \ldots$)
- vettori
- tensori
- quaternioni, e altri oggetti matematici esotici

Sviluppo della matematica:

- saper contare: aritmetica
- saper descrivere lo spazio: geometria

1.2 Classificazione

Nel corso della storia, la matematica è diventata una materia estremamente diversificata.

Una classificazione delle molte aree di interesse della matematica può risultare utile ad avere una visione di insieme della materia.

La matematica è divisa tradizionalmente in **matematica pura**, che studia gli strumenti propri della matematica e le loro proprietà, e **matematica applicata**, che applica gli strumenti della matematica a problemi di interesse tipici di altre discipline.

Una classificazione più dettagliata delle discipline della matematica è resa difficile dalle relazioni esistenti tra di esse. Viene qui presentata una classificazione parziale, ispirata alla *Classificazione delle ricerche matematiche (MSC)* usata dall'*American Mathematical Society* per la classificazione delle pubblicazioni nei database.

1.2.1 Matematica pura

1.2.1.1 Matematica generale e fondamenti

- storia e filosofia
- logica

1.2.1.2 Algebra e matematica discreta

- teoria dei numeri
- teoria dei campi
- algebra lineare e multilineare; matrici

1.2.1.3 Analisi

- funzioni reali e complesse
- misura e integrazione
- equazioni differenziali, ed equazioni alle differenze
- sistemi dinamici
- successioni, serie e approssimazioni
- trasformate: analisi di Fourier
- calcolo delle variazioni, ottimizzazione e controllo

1.2.1.4 Geometria e topologia

- geometria
- geometria differenziale
- topologia

1.2.2 Matematica applicata

1.2.2.1 Statistica

1.2.2.2 Fisica

1.2.2.3 Altre scienze naturali

1.2.2.4 Scienze sociali e del comportamento

1.2.2.5 Matematica numerica e informatica

1.2.2.6 Ottimizzazione

L'ottimizzazione si occupa della ricerca dei punti di massimo o di minimo di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$.

$$\text{Determinare il punto } \mathbf{x}_0 \in A \text{ tale che } f(\mathbf{x_0}) \geq f(\mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x} \in A \tag{1.1}$$

1.2.2.7 Teoria dei sistemi e controllo

La teoria dei sistemi rappresenta un qualunque sistema che evolve nel tempo t con:

- gli ingressi $\mathbf{u}(t)$, che possono agire sul sistema
- le uscite $\mathbf{y}(t)$, che possono essere lette dal sistema
- le variabili di stato, $\mathbf{x}(t)$ che determinano lo stato del sistema
- le equazioni di stato del sistema che ne governano la dinamica, legando lo stato e la sua evoluzione agli ingressi

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

- le equazioni di uscita che permettono di ricavare le variabili di uscita in funzione dello stato e degli ingressi

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{1.3}$$

Il problema del controllo di un sistema può essere formulato come un problema di ottimizzazione vincolata, volendone ottimizzare le prestazioni (o minimizzare le perdite), soggette ai vincoli definiti dalle equazioni che governano il sistema.

1.2.2.8 Didattica

2. Approccio alla matematica

2.1 Formulazione e soluzione di un problema

Una volta formulato un problema, ci si chiede:

- il problema ammette soluzione?
- se il problema ammette soluzione, la soluzione è unica?
- se la soluzione non è unica, quante soluzioni esistono?

Esempi

3. Breve storia della matematica

Preistoria

- ...

Antichità e Medioevo

- **Egitto**
- **Babilonia**
- **Grecia**
- **India**
  - invenzione del **sistema numerico posizionale decimale**: tra le dieci cifre, c'è lo **zero**
  - vengono introdotte le **funzioni trigonometriche** e applicate nell'ambito dell'astronomia: nel calcolo delle traiettorie introducono concetti simili a quelli di derivata, senza però mai riuscire a sviluppare una teoria del calcolo infinitesimale
- **Cina**
- **Persia e Islam**
  - mondo islamico ponte tra la cultura ellenistica e quella indiana
  - nel IX secolo, il matematico persiano **al-Khwarizmi** usa il sistema di numerazione posizionale decimale appreso dagli indiani per descrivere metodi grafici e analitici per la risoluzione delle equazioni di secondo grado. Dal suo nome deriva la parola **algoritmo**, e dalla sua opera principale la parola **algebra**
  - sviluppi in trigonometria
  - nel XIV secolo, il matematico persiano **Al-Kashi** inventa il modo per calcolare una radice di un polinomio di grado n, oggi conosciuta come regola di Ruffini, italiano che la riscoprì nel XVIII secolo; fornisce la prima **dimostrazione per induzione** nota a oggi, con la quale dimostra il **teorema binomiale**
  - lo sviluppo della matematica si interrompe nel XIV secolo, in un periodo di instabilità politica e religiosa
- **Europa**
  - verso il XII secolo inizia un nuovo periodo di sviluppo in Europa; ritorna interesse sulla matematica, stimolato da problemi pratici e commerciali
  - studio delle **serie infinite**, e introduzione alcuni concetti tra i concetti tra i quali il **grafico di una funzione** (Fibonacci, Oresme)
  - studio della prospettiva e geometria, stimolati da motivi artistici

XVI secolo

- interesse per l'algebra e le soluzioni delle equazioni polinomiali di terzo (disputa da Tartaglia e Cardano, che pubblica l'*Ars Magna*) e quarto grado (Ferrari)
- Viète produce contributi alla trigonometria e all'algebra, trovando le **formule di Viète** che legano i coefficienti alle radici di un'equazione
- Nepier (Nepero) introduce i **logaritmi**
- evoluzione della notazione matematica: vengono introdotti i segni ancora utilizzati per le operazioni ($+$, -, $\times$), il segno di uguale ($=$), e maggiore e minore ($>$, $<$); Viète introduce il **calcolo letterale**, usando delle lettere per indicare i coefficienti delle equazioni

XVII secolo

- in Europa vengono fondate accademie e associazioni scientifiche, come l'Accademia in Francia e la Royal Society in Inghilterra; nelle università vengono istituite le prime cattedre di matematica
- Fermat e Descartes (Cartesio), nella sua *La Gèometrie*, formulano e illustrano i fondamenti della **geometria analitica**, Cap.§25;
- Fermat porta contributi alla **teoria dei numeri**, formulando una gran quantità di congetture, in gran parte dimostrate da Euler pochi decenni dopo. L'ultima congettura, nota come *ultimo teorema di Fermat*, venne dimostrata solo nel 1995: di questa congettura, Fermat sostenne di conoscere la dimostrazione, ma di non aver avuto sufficiente spazio sul foglio per scriverla.
- Fermat e Pascal portano sviluppi anche al calcolo delle probabilità e delle combinazioni.
- i contributi di Wallis, Mengoli e Mercator su **serie e prodotti infiniti**, Cap.§13, introducono tecniche simili a quelle che verranno sviluppate nel calcolo infinitesimale
- nell'ambito dello studio della **dinamica** dei corpi, Newton e Leibniz sviluppano contemporaneamente i fondamenti del **calcolo infinitesimale**, Parte §VI, introducendo i concetti di **derivata**, Cap.§17, e **integrale**, Cap.§18, e dimostrando il **il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale** che lega le due operazioni
- i fratelli Johann e Jacob Bernoulli contribuiscono allo sviluppo della statistica, formulando la **legge dei grandi numeri** e allo sviluppo del calcolo infinitesimale, dedicandosi allo studio e alla soluzione delle equazioni differenziali nell'ambito di problemi di meccanica; assunto da dal marchese de l'Hopital, Johann scopre la regola che prende il nome di **regola di de l'Hopital**
- vengono sviluppate le **serie di Taylor**, Sez.17.6

XVIII secolo

- Euler (Eulero): analisi matematica; soluzione **equazioni differenziali**; teoria dei numeri; **analisi complessa** (estensione di funzioni reali in campo complesso, identità di Eulero,...); topologia e teoria dei grafi (problema dei 7 ponti di Konigsberg)
- Daniel Bernoulli,
- d'Alembert si dedica allo studio del moto dei corpi e alla meccanica razionale
- sviluppi nel calcolo delle probabilità: vengono formulati il **teorema di Bayes** e il **metodo Monte Carlo**
- nella seconda metà del secolo, Parigi diventa il più importante centro matematico
  - viene sviluppato il **calcolo delle variazioni** e utilizzato da Laplace (*Méchanique Céleste*) e Lagrange (*Méchanique analytique*) nella riformulazione della meccanica e nello studio del moto dei corpi celesti
  - per la soluzione di problemi di meccanica, vengono introdotte le **trasformate** di Laplace e Legendre
  - viene sviluppato il metodo dei **moltiplicatori di Lagrange**
  - nell'ambito del calcolo differenziale, viene introdotto il concetto di potenziale e l'equazione differenziale di Laplace

XIX secolo A Parigi si aggiungono i centri tedeschi di Berlino, Konigsberg e Gottinga

- Jacobi e Cauchy ottengono notevoli risultati in **algebra lineare**, chiarendo il concetto di **determinante** di una matrice e introducendo il concetto di **jacobiano** di una funzione
- Cauchy si occupa di una formulazione e dimostrazione rigorosa di alcuni risultati di analisi infinitesimale, dando un impulso decisivo allo studio dell'**analisi complessa**, Cap.§12, estendendo i concetti dell'analisi infinitesimale alle funzioni di variabile complessa; Cauchy contribuisce allo sviluppo della statistica e allo studio delle successioni; fondamentali sono anche i suoi contributi alla **meccanica dei mezzi continui**, introducendo il concetto di sforzo e contribuendo ai primi risultati in teoria dell'elasticità
- **Fourier** introduce la **serie**, Sez.§14.2, e **la trasformata** che prendono il suo nome, nello studio dei moti ondulatori e della trasmissione del calore
- Gauss, forse il più grande matematico della modernità insieme ad Euler, studia e insegna a Gottinga. Dopo aver proposto strumenti, risultati e congetture in teoria dei numeri, tra i quali l'**aritmetica modulare** e la **congettura dei numeri primi**, nella sua tesi di dottorato dimostra il **teorema fondamentale dell'algebra**; successivamente introduce il concetto di **numeri complessi**, Cap.§11, e la loro rappresentazione grafica nel piano complesso, di *Argand e Gauss*; in piena maturità fu coinvolto in rilevazioni geografiche del Regno di Hannover, attività che gli permise di formulare dei risultati in stato embrionale di **geometria differenziale** delle superfici e delle curve e intuire l'esistenza di **geometrie non euclidee**: in questo ambito raggiunge un risultato fondamentale noto come *theorema egregium*, che mette in realzione la **curvatura delle superfici** con la misura di distanze e angoli sulla superficie, informazioni riassumibili nella **metrica**; i lavori pratici e sperimentali che riguardavano le misure gli permisero di (ri)formulare il **metodo dei minimi quadrati** per la regressione di dati sperimentali e di sviluppare la **distribuzione di probabilità gaussiana**; negli ultimi anni di vita, da una collaboarzione con il fisico Weber, si dedica agli studi primordiali sull'elettromagnetismo, e formula il **teorema (di Gauss) del flusso del campo elettrico**
- Dirichlet succede a Gauss alla cattedra di Gottinga, e produce risultati in teoria dei numeri (alcuni dei quali furono pubblicati postumi da Dedekind), nello studio dei sistemi dinamici e della loro stabilità
- Riemann studia a Gottinga e succede alla cattedra di Dirichlet. A Riemann sono dovuti progressi in analisi reale e complessa, una rivoluzione e uno sviluppo della **geometria differenziale** che avrebbe fornito tutti gli strumenti necessari ad Einstein per formulare la teoria della relatività generale, e un'unica ma rivoluzionaria opera in teoria dei numeri in cui formula un'ipotesi che una volta dimostrata permetterebbe di determinare la distribuzione dei **numeri primi**, nota oggi come **ipotesi di Riemann**
- Hamilton riformula la meccanica lagrangiana in quella oggi nota come meccanica hamiltoniana, e introduce dei nuovi oggetti matematici, i **quaternioni**, estensione dei numeri complessi in 4 dimensioni utili per rappresentare le rotazioni nello spazio tridimensionale; ottiene risultati in algebra lineare (teorema di Cayley-Hamilton)
- Wierestrass: definizione rigorosa dei fondamenti dell'analisi (teorema di Weierstrass su esisteanza di minimi e massimi di funzioni a variabile reale)
- Boole definisce le operazioni di algebra sugli insiemi, l'**algebra booleana**, dando un contributo alla logica e alla teoria dell'informazione
- Peano: tentativo di definizione assiomatica della matematica
- Dedekind e Cantor si dedicano allo studio degli insiemi infiniti e alla loro dimensione, o cardinalità

XX secolo

- la matematica della probabilità e della meccanica quantistica: Lebesgue, Hilbert, von Neumann, Kolmogorov
- geometria: simmetrie, tassellature e impacchettamenti; i frattali (Mandelbrot)
- la nascita dell'informatica: Turing, Von Neumann
- la teoria dell'informazione: Shannon
- la teoria dei giochi: von Neumann, Morgestern e Nash
- l'incompletezza della matematica: Godel

II Insiemistica e Logica

4. Logica

4.1 Logica proposizionale

4.1.1 Prime definizioni

Definizione 4.1 — Proposizione. In matematica, una proposizione è un'affermazione che si può stabilire senza dubbi se è vera o falsa.

Definizione 4.2 — Valore di verità. In logica classica esistono solo due valori di verità: vero (V), falso(F). Il valore di verità di una frase stabilisce se la frase è vera o falsa.

Ma cos'è il vero e cos'è il falso?

Definizione 4.3 — Tavola di verità. Una tavola diverità rappresenta tutte le possibili combinazioni delle proposizioni coinvolte.

■ **Esempio 4.1** Può risultare utile separare le proposizioni indipendenti, dalle proposizioni dipendenti da queste. Ad esempio, indicando con p_1, p_2 due proposizioni indipendenti, e $f_1(p_1, p_2)$, $f_2(p_1, p_2)$, $f_3(p_1, p_2)$ tre proposizioni dipendenti da queste

p_1	p_2	$f_1(p_1, p_2)$	$f_2(p_1, p_2)$	$f_3(p_1, p_2)$
V	V	f_1(V,V)	f_2(V,V)	f_3(V,V)
V	F	f_1(V,F)	f_2(V,F)	f_3(V,F)
F	V	f_1(F,V)	f_2(F,V)	f_3(F,V)
F	F	f_1(F,F)	f_2(F,F)	f_3(F,F)

■

Uso delle tavole di verità. Le tavole di verità sono utili per stabilire se due espressioni sono logicamente equivalenti.

Definizione 4.4 — Identità. Un'identità è una proposizione che è sempre vera.

Definizione 4.5 — Contraddizione. Una contraddizione è una proposizione che è sempre falsa.

4.1.2 Connettivi logici e calcolo proposizionale

Definizione 4.6 — Negazione. La negazione $\overline{p}$ di una proposizione p ne inverte il valore di verità.

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Definizione 4.7 — Congiunzione. La congiunzione $p \wedge q$ di due proposizioni è vera se e solo se entrambe sono vere.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definizione 4.8 — Disgiunzione. La disgiunzione $p \vee q$ di due proposizioni è falsa se e solo se entrambe sono false.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definizione 4.9 — Implicazione logica. L'implicazione logica $p \to q$ produce una proposizione falsa se e solo se p è vera e q è falsa.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condizione sufficiente e condizione necessaria. L'implicazione logica $p \to q$ tra due proposizioni p, q consente di dare una definizione di condizione sufficiente e condizione necessaria:

- p come **condizione sufficiente** per q.
- q come **condizione necessaria** per p.

Definizione 4.10 — Co-implicazione o equivalenza logica. La coimplicazione (o equivalenza) logica $p \leftrightarrow q$ produce una proposizione vera se e solo se p e q hanno lo stesso valore di verità.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Condizione necessaria e sufficiente – equivalenza logica. L'equivalenza logica $p \to q$ tra due proposizioni p, q consente di dare una definizione di condizione necessaria e sufficiente:

- p come **condizione necessaria e sufficiente** per q, e viceversa.

4.1.3 Teoremi e proposizioni

Teorema 4.1 — Leggi di De Morgan. Le due leggi di De Morgan sono:
- prima legge di De Morgan: $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
- seconda legge di De Morgan: $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

Dimostrazione con le tavole della verità della prima legge,

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

e della seconda legge,

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

4.1.4 Tecniche dimostrative

Definizione 4.11 — Deduzione. La deduzione $a \Rightarrow b$ è un processo che, a partire da una proposizione vera a, tramite un processo logico valido, permette di ricavare una proposizione vera b.

$a \rightarrow b$	a	b
V	V	V

Definizione 4.12 — Dimostrazione diretta. Partendo da un'ipotesi I, si dimostra la tesi T tramite un numero finito di deduzioni di proposizioni intermedie $\{p_i\}_{i=1:n}$

$$I \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow T \tag{4.1}$$

$I \rightarrow p_1$	I	p_1
V	V	V

$p_1 \rightarrow p_2$	p_1	p_2
V	V	V

...	...	...
V	V	V

$p_n \rightarrow T$	p_n	T
V	V	V

Definizione 4.13 — Dimostrazione della contronominale. Partendo da un ipotesi I vera e invertendo l'implicazione logica, $I \Rightarrow T$, si vuole quindi dimostrare con dimostrazione diretta la proposizione $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$, detta **contronominale** di $I \Rightarrow T$.

$$(\overline{T} \Rightarrow \overline{I}) \Rightarrow (I \Rightarrow T) \tag{4.2}$$

I	$\overline{T} \rightarrow \overline{I}$	$\overline{I}$	$\overline{T}$	T
V	V	F	F	V

Definizione 4.14 — Dimostrazione per assurdo. Se partendo dall'ipotesi I vera e negando la tesi $\overline{T}$, si arriva a una contraddizione C (una proposizione falsa), allora è veriticata la tesi.

$$\big((I \wedge \overline{T}) \Rightarrow C\big) \Rightarrow (I \Rightarrow T) \tag{4.3}$$

I	C	$(I \wedge \overline{T}) \rightarrow C$	$(I \wedge \overline{T})$	$\overline{T}$	T
V	F	V	F	F	V

4.2 Logica predicativa

5. Insiemistica

5.1 Definizioni di base

Definizione 5.1 — Insieme. Un insieme è un gruppo di elementi, oggetti che possono essere di qualsiasi tipo.

Rappresentazioni, notazione ed esempi. Si è soliti indicare gli insiemi con lettere maiuscole. Un insieme S può essere rappresentato

- per **elencazione**: vengono elencati, di solito tra parentesi graffe, tutti gli elementi dell'insieme

$$S = \{\text{elemento}_1, \text{elemento}_2, \dots, \text{elemento}_N\} \tag{5.1}$$

- per **caratteristica**: viene descritta la condizione che determina gli elementi dell'insieme

$$S = \{x \mid \text{condiizone che determina } x\} \tag{5.2}$$

La condizione può essere una condizione composta da diverse condizioni. Si rimanda agli operatori logici

■ **Esempio 5.1 — Insieme dei mesi.** L'insieme M dei (nomi dei) mesi dell'anno può essere rappresentato come:

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid x \text{ è (il nome di) un mese dell'anno}\} = \\ &= \{\text{gennaio}, \text{febbraio}, \text{marzo}, \text{aprile}, \text{maggio}, \text{giugno}, \\ &\quad \text{luglio}, \text{agosto}, \text{settembre}, \text{ottobre}, \text{novembre}, \text{dicembre}\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

■

■ **Esempio 5.2 — Insieme dei numeri naturali minori di 5.** L'insieme S dei numeri

$$\begin{aligned} S &= \{x \mid x \text{ è un numero naturale minore di } 5\} = \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\} = \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

■

■ **Notation 5.1 — Elemento contenuto o non contenuto in un insieme.** Per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A si usa la notazione $x \in A$. Per indicare che non vi appartiene, $x \notin A$.

Definizione 5.2 — Insieme vuoto, $\emptyset$. L'insieme vuoto è l'insieme che non contiene elementi.

Definizione 5.3 — Sottoinsieme. Dati un insieme A e B, si definisce B un sottoinsieme di A se ogni elemento di B appartiene anche ad A,

$$B \subseteq A \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in B \rightarrow x \in A, \ \forall x \in B \tag{5.5}$$

Definizione 5.4 — Insieme delle parti. L'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ dell'insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi, propri e impropri dell'insieme A,

$$\mathcal{P}(A) = \{S | S \subseteq A\} \tag{5.6}$$

■ **Esempio 5.3** Dato l'insieme $A = \{a, b, c\}$, l'insieme delle parti è

$$\mathcal{P}(A) = \{S | S \subseteq A\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\} \tag{5.7}$$

■

Definizione 5.5 — Prodotto cartesiano di due insiemi. Il prodotto cartesiano $A \times B$ dei due insiemi A, B è l'insieme di tutte le **coppie ordinate** (a, b) con il primo elemento appartenente al primo insieme $a \in A$ e il secondo elemento appartenente al secondo insieme $b \in B$,

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, \, b \in B\} \tag{5.8}$$

Definizione 5.6 — Prodotto cartesiano di n insiemi. Il prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times \ldots A_n$ degli n insiemi A_i, $i = 1 : n$, è l'insieme di tutte le **liste ordinate** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con $a_i \in A_i$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, \ \ i = 1 : n\} \tag{5.9}$$

Definizione 5.7 — Insieme universo o insieme ambiente. Dato un insieme A, o una lista di insiemi A_i, $i = 1 : N$, si può definire un insieme universo U un qualsiasi insieme che contiene A, o ogni insieme della lista A_i, come sottoinsieme proprio o improprio,

$$A_i \subseteq U \ . \tag{5.10}$$

5.2 Operazioni

Definizione 5.8 — Unione. L'insieme $A \cup B$ unione degli insiemi A, B è l'insieme che contiene gli elementi che appartengono anche all'insieme A o all'insieme B,

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} \ . \tag{5.11}$$

Definizione 5.9 — Intersezione. L'insieme $A \cap B$ intersezione degli insiemi A, B è l'insieme che contiene gli elementi che appartengono sia all'insieme A sia all'insieme B,

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} \ . \tag{5.12}$$

Definizione 5.10 — Differenza. L'insieme $A \backslash B$ differenza degli insiemi A, B è l'insieme che contiene gli elementi che appartengono ad A ma non a B

$$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \ . \tag{5.13}$$

La differenza $B \backslash A$ in generale è diversa da $A \backslash B$

Definizione 5.11 — Differenza simmetrica. L'insieme $A \Delta B$ differenza simmetrica degli insiemi A, B è l'insieme degli elementi che sono contenuti in uno solo dei due insiemi

$$A \Delta B = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \ . \tag{5.14}$$

Definizione 5.12 — Insieme complementare. Dato l'insieme A e l'insieme universo U, si definisce l'insieme complementare $A^{C(U)}$ di A in U come l'insieme di tutti gli elementi di U che non appartengono ad A

$$A^{C(U)} = \{x | x \in U \wedge x \notin A\} \tag{5.15}$$

É immediato dimostrare dalle definizioni, che vale $A^{C(U)} = U \backslash A$.

5.3 Funzioni

Definizione 5.13 — Funzione. Dati due insiemi A, B, si definisce **funzione** dall'insieme A all'insieme B una relazione $f : A \to B$ che lega a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B

Se la funzione $f : A \to B$ lega l'elemento $a \in A$ all'elemento $b \in B$, si può scrivere $f(a) = b$. In particolare si può definire b come immagine di a tramite la funzione f.

Definizione 5.14 — Funzione suriettiva. Si definisce una funzione suriettiva, se ogni elemento di B è immagine di un elemento di A,

$$\text{Per } \forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad f(a) = b \ . \tag{5.16}$$

Definizione 5.15 — Funzione iniettiva. Si definisce una funzione iniettiva, se elementi distinti di A hanno immagini distinte in B,

$$\text{Per } \forall a_1, a_2 \in A, \ a_1 \neq a_2 \quad \Rightarrow \quad f(a_1) \neq f(a_2) \ . \tag{5.17}$$

Definizione 5.16 — Funzione biunivoca o biiettiva. Una funzione biunivoca è una funzione sia suriettiva, sia iniettiva.

Una funzione biunivoca crea un legame uno a uno tra gli elementi dei due insiemi, rendendo possibile identificare ogni elemento di un insieme con un elemento dell'altro insieme.

Definizione 5.17 — Funzione composta. Dati tre insiemi A, B, C, e due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$, si definisce la funzione comoposta $g \circ f : A \to C$, la funzione

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \tag{5.18}$$

6. Insiemi numerici

6.1 Insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$

L'insieme dei numeri naturali,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \ , \tag{6.1}$$

contiene i numeri intuitivamente usati per **contare** (o **ordinare**), e possono essere interpretati come il risultato del **processo di astrazione**, che associa a un gruppo di oggetti il suo numero.

Cenni storici. Dal punto di vista storico, il processo di astrazione che ha portato al concetto di unità – il numero 1 – e dei suoi multipli – i numeri naturali maggiori di 1 –, viene fatto risalire all'epoca preistorica, ed esistono diversi reperti storici che testimoniano il loro uso in Mesopotamia e in Egitto nel III millennio a.C. L'introduzione del **numero 0** avviene inizialmente nelle civiltà mediterranee come segnaposto, e succssivamente in India tra il VI e VII secolo d.C. come numero nel sistema decimale posizionale formulato in India e diffusosi tra le popolazioni persiane e arabe.

Operazioni chiuse. Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri naturali:

- addizione, $+$
- moltiplicazione, $\times$

Queste due operazioni hanno le seguenti proprietà:

- commutatività: $a + b = b + a$, $a \times b = b \times a$
- associatività: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- esistenza dell'elemento identità: il numero 0 è l'elemento identità dell'addizione $a + 0 = a$, il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione $a \times 1 = a$
- distributività della moltiplicazione sull'addizione $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- Fattorizzazione dello zero: se $a \times b = 0$ allora almeno uno dei due fattori è uguale a zero.

6.2 Insieme dei numeri interi, $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{6.2}$$

Cenni storici. 1700? Eulero?

Operazioni chiuse. Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri interi:
- addizione, $+$
- sottrazione, $-$
- moltiplicazione, $\times$

6.3 Insieme dei numeri razionali, $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\} \tag{6.3}$$

Cenni storici. Egitto e Grecia

Operazioni chiuse. Si possono definire alcune operazioni chiuse (DEF) sull'insieme dei numeri razionali:
- addizione
- sottrazione
- moltiplicazione
- divisione, esclusa la divisione per 0

Equivalenza con i numeri decimali con parte periodica. L'insieme dei numeri razionali è equivalente all'insieme dei numeri con parte decimale periodica. In altre parole, ogni numero razionale in forma decimale ha una parte decimale periodica e ogni numero che ha una parte decimale periodica è un numero razionale.

Dimostrazione: decimale periodico $\Rightarrow$ razionale. Sia n un numero con parte intera a, prima parte decimale $d_1 \dots d_q$ e parte periodica $d_{q+1} \dots d_{q+p}$

$$n = a, d_1 d_2 \dots d_q d_{q+1} \dots d_{q+p} d_{q+1} \dots d_{q+p} \dots = a, d_1 d_2 \dots d_q \, \overline{d_{q+1} \dots d_{q+p}} \ . \tag{6.4}$$

Si vuole dimostrare che n è un numero razionale, cioè può essere scritto come frazione di due numeri interi. Sottraendo la parte non periodica,

$$\tilde{n} = 0, \underbrace{00 \dots 0}_{q} \overline{d_{q+1} \dots d_{q+p}} \ , \tag{6.5}$$

e moltiplicando per 10^{-p}, si ottiene

$$\tilde{n} \cdot 10^{-p} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{q+p} \, \overline{d_{q+1} \dots d_{q+p}} \ , \tag{6.6}$$

e sottraendo le due

$$\tilde{n}(1 - 10^{-p}) = 0, \underbrace{00 \dots 0}_{q} d_{q+1} \dots d_{q+p} = d_{q+1} \dots d_{q+p} \cdot 10^{-p-q} \ . \tag{6.7}$$

Esplicitando $\tilde{n}$, risulta evidente come $\tilde{n}$ possa essere scritta come frazione di due numeri interi

$$\tilde{n} = \frac{d_{q+1} \dots d_{q+p}}{10^{q+p} - 10^{q}} \ . \tag{6.8}$$

■

Esempio 6.1 Il numero $n = 0.2\overline{16}$ si può scrivere come $\frac{2}{10} + 0.0\overline{16}$. Il numero $0.0\overline{16}$ può essere scritto ($q = 1$, $p = 2$) come

$$0.0\overline{16} = \frac{16}{10^3 - 10^1} = \frac{16}{990} \ , \tag{6.9}$$

e quindi $n = \frac{2}{10} + \frac{16}{990} = \frac{214}{990}$. ■

Dimostrazione: decimale periodico $\Leftarrow$ razionale. ■

6.4 Insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$

Esistono dei numeri che non possono essere rappresentati come frazioni di numeri interi, che vengono quindi definiti **irrazionali**. Facendo riferimento al paragrafo precedente, si può quindi dire che esistono dei numeri che, scritti in forma decimale, hanno una parte decimale non periodica.

Definizione 6.1 — Insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$. L'unione dei numeri razionali e dei numeri irrazionali è l'insieme dei numeri reali.

Cenni storici. Alcuni di questi numeri compaiono in semplici problemi di geometria, come il calcolo della lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario $\sqrt{2}$ o la lunghezza della circonferenza con raggio unitario π.

Operazioni chiuse.

Numeri reali come limite dei numeri razionali.

■ **Esempio 6.2 — Irrazionalità di $\sqrt{2}$.** Si vuole dimostrare che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, e quindi non essere scritto come rapporto di due numeri interi m, n. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, e arriviamo a una contraddizione.

Per assurdo, quindi supponiamo che si possa scrivere

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \ , \tag{6.10}$$

in forma ridotta ai minimi termini. Questo implica che i numeri m, n non possano essere contemporaneamente numeri pari, poiché altrimenti la frazione potrebbe essere ulteriormente semplificata.

Elevando alla seconda potenza, possiamo scrivere

$$2n^2 = m^2 \tag{6.11}$$

e quindi il numero m deve essere pari, poiché il suo quadrato è pari. Il numero n dovrà allora essere dispari. Poiché il numero m è pari, può essere scritto come $m = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad \rightarrow \qquad n^2 = 2k^2 \ . \tag{6.12}$$

Dall'ultima espressione, dobbiamo concludere che il numero n sia anch'esso pari. In questo modo si arriva a una contraddizione, poiché il numero n non può essere contemporaneamente pari e dispari.

Dobbiamo concludedere che la tesi sia vera, e che quindi il numero $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. ■

■ **Esempio 6.3 — Irrazionalità della radice $\sqrt{p}$ di ogni numero primo p.** Si vuole dimostrare che il numero $\sqrt{p}$, con p numero primo, è irrazionale e quindi non può essere scritto come rapporto di due numeri interi m, n. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa, e arriviamo a una contraddizione.

Per assurdo, quindi supponiamo che si possa scrivere

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} \ , \tag{6.13}$$

in forma ridotta ai minimi termini. Questo implica che i numeri m, n non possano avere divisori comuni.

Elevando alla seconda potenza, possiamo scrivere

$$pn^2 = m^2 \tag{6.14}$$

e quindi il numero m deve essere un multiplo di p, poiché il suo quadrato contiene il fattore p. Il numero n allora non potrà contenere il fattore p, poiché m ed n non possono avere fattori comuni. Poiché il numero m è pari, può essere scritto come $m = pk$ con $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$pn^2 = m^2 = (pk)^2 = p^2 k^2 \qquad \rightarrow \qquad n^2 = pk^2 \ . \tag{6.15}$$

Dall'ultima espressione, dobbiamo concludere che il numero n ha un fattore p poiché il suo quadrato contiene il fattore p. In questo modo si arriva a una contraddizione, poiché il numero n non può contemporaneamente avere e non avere un sottomultiplo p.

Dobbiamo concludedere che la tesi sia vera, e che quindi il numero $\sqrt{p}$, con p primo, è un numero irrazionale. ■

6.5 Insieme dei numeri complessi, $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}\} \tag{6.16}$$

III

Algebra in $\mathbb{R}$

7. Algebra simbolica - Calcolo letterale

7.1 Monomi

Definizione 7.1 — Monomio. Un monomio è un'espressione matematica costituita dal prodotto di un coefficiente esplicitamente numerico e una parte letterale, nella quale compaiono unicamente moltiplicazioni e potenze intere.

R Viene richiesto che le potenze della parte letterale siano intere, per evitare di porre delle condizioni sulle basi delle potenze, essendo le potenze non intere definite solo per numeri reali positivi.

Definizione 7.2 — Monomi simili. I monomi simili sono i monomi che hanno la stessa parte letterale.

7.1.1 Somma e differenza

7.1.2 Prodotto e divisione

7.1.3 Potenze e radici

Definizione 7.3 — Potenze e radici intere. La potenza intera di ordine $n \in \mathbb{N}$ di un monomio x è definita come il prodotto di x per se stesso n volte,

$$p_n(x) := x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ volte}} \ . \tag{7.1}$$

L'operazione inversa, quando possibile, è definita come radice di ordine n,

$$x := \sqrt[n]{p_n(x)} = p_n(x)^{\frac{1}{n}} \ . \tag{7.2}$$

R Per una comprensione più completa, bisogna rifarsi all'algebra dei numeri complessi IV.

Definizione 7.4 — Potenze e radici non intere.

7.2 Polinomi

Definizione 7.5 — Polinomio. Un polinomio reale di grado n viene definito come una combinazione lineare dei monomi di grado $\leq n$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{7.3}$$

Definizione 7.6 — Zero di un polinomio. Viene definito zero – o radice – (reale) di un polinomio un numero $\overline{x}$ ($\in \mathbb{R}$) tale che $p(\overline{x}) = 0$.

Definizione 7.7 — Scomposizione in fattori. Ogni polinomio di variabile reale e coefficienti reali può essere scomposto in fattori polinomiali di primo e secondo grado. Ad esempio un polinomio di grado n, può essere scomposto nel prodotto di p_1 polinomi di primo grado e p_2 polinomi di secondo grado,

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \\ &= (A_1 x + B_1) \ldots (A_{p_1} x + B_{p_1})(C_1 x^2 + D_1 x + E_1) \ldots (C_{p_2} x^2 + D_{p_2} x + E_{p_2}) = \\ &= K(x + \tilde{B}_1) \ldots (x + \tilde{B}_{p_1})(x^2 + \tilde{D}_1 x + \tilde{E}_1) \ldots (x^2 + \tilde{D}_{p_2} x + \tilde{E}_{p_2}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

con $p_1 + 2p_2 = n$.

7.2.1 Scomposizioni notevoli

La dimostrazione di queste identità viene ricavata facilmente tramite calcolo diretto.

Quadrato della somma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{7.5}$$

Cubo della somma

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \tag{7.6}$$

Potenza di un binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{7.7}$$

Differenza di quadrati

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{7.8}$$

Somma e differenza di cubi

$$a^3 \mp b^3 = (a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2) \tag{7.9}$$

Differenza di potenze di grado qualsiasi

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \\ &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned} \tag{7.10}$$

Somma di potenze di grado dispari Per ogni numero dispari $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, si può dimostrare che

$$\begin{aligned} a^{2m+1} + b^{2m+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a^{n-1-k} b^k = \\ &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned} \tag{7.11}$$

7.2.2 Divisione tra polinomi e resto

Definizione 7.8 — Divisione tra polinomi. Dati due polinomi $P(x)$, $D(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$, $R(x)$ tali che

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \ , \tag{7.12}$$

con il grado di $R(x)$ minore del grado di $Q(x)$. I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ vengono definiti rispettivamente **quoziente** e **resto** della divisione.

7.2.2.1 Divisione esatta e scomposizone di polinomi: regola di Ruffini

7.2.3 Formule di Viete e Newton

Relazioni tra i coefficienti di un polinomio e le sue radici

7.3 Potenze e radici

Definizione 7.9 — Potenze e radici intere.

7.4 Esponenziali e logaritmi

7.4.1 Esponenziale

Definizione 7.10 — Esponenziale. L'elevamento a potenza di un numero a

$$y = a^x \tag{7.13}$$

è un operazione che coinvolge due numeri, a detto base e x detto esponente.

7.4.1.1 Potenze non intere, valori ammissibili

7.4.1.2 Proprietà

Prodotto di potenze con la stessa base

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{7.14}$$

Potenza di potenza

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{7.15}$$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^m b^m = (ab)^m \tag{7.16}$$

7.4.2 Logaritmo

Definizione 7.11 — Logaritmo. Il logaritmo è l'operazione inversa

$$x = \log_a y \qquad \text{se } y = a^x \tag{7.17}$$

7.4.2.1 Potenze non intere, valori ammissibili

7.4.2.2 Proprietà

Somma di logaritmi con la stessa base

$$\log_a m + \log_a n = \log_a(mn) \tag{7.18}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = a^{\log_a m} \\ n = a^{\log_a n} \\ mn = a^{\log_a mn} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} mn = m \cdot n \\ a^{\log_a mn} = a^{\log_a m} a^{\log_a n} = a^{\log_a m + \log_a n} \end{matrix} \tag{7.19}$$

$$\rightarrow \log_a mn = \log_a m + \log_a n \tag{7.20}$$

Prodotto di un logaritmo per uno scalare

$$b \log_a m = \log_a m^b \tag{7.21}$$

Cambio di base di un logaritmo

$$\log_b m = \log_b a \log_a m \tag{7.22}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = b^{\log_b m} \\ a = b^{\log_b a} \\ m = a^{\log_a m} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a m} = b^{\log_b a \, \log_a m} \end{cases} \tag{7.23}$$

e confrontando le due espressioni per m si ottiene

$$\rightarrow \log_b m = \log_b a \, \log_a m \tag{7.24}$$

7.5 Funzioni armoniche

7.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno

7.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante

7.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \end{aligned} \tag{7.26}$$

7.6 Funzioni iperboliche

8. Equazioni

8.1 Equazioni algebriche

Definizione 8.1 — Equazioni algebriche. ...

8.1.1 Equazioni polinomiali

Definizione 8.2 — Equazione polinomiale. Un'equazione polinomiale ha la forma

$$p(x) = 0 \tag{8.1}$$

dove $p(x)$ è un polinomio. Il **grado** dell'equazione corrisponde al grado del polinomio $p(x)$, cioé alla potenza massima dei monomi. In maniera più esplicita, quindi, si può scrivere un'equazione polinomiale di grado n come

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ , \qquad \text{con } a_n \neq 0 \tag{8.2}$$

Esistenza e numero delle soluzioni. Un'equazione polinomiale di grado n ha **al massimo** n soluzioni reali. L'esistenza di soluzioni reali non è in generale garantita, mentre il **teorema fondamentale dell'algebra** assicura che esistano esattamente n soluzioni complesse di un'equazione polinomiale con coefficienti complessi.

8.1.1.1 Equazioni di primo grado

La forma generale delle equazioni di primo grado è

$$ax + b = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{8.3}$$

e la soluzione è

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \ . \tag{8.4}$$

8.1.1.2 Equazioni di secondo grado

La forma generale delle equazioni di secondo grado è

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{8.5}$$

Un'equazione di secondo grado può ammettere nel campo dei numeri reali 2 soluzioni (distinte o coincidenti) o nessuna soluzione, a seconda del valore dell'espressione definita come **discriminante**, $\Delta := b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$: due soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale

Quando il discriminante è non negativo, le soluzioni dell'equazione sono date dall'espressione

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \; . \tag{8.6}$$

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado. Una dimostrazione della formula risolutiva viene ricavata con la regola di completamento del quadrato

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c = \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{8.8}$$

É ora facile notare come questa equazione ha soluzioni solo quando il discriminante è non negativo. Quando il discriminante è non negativo, è possibile estrarre la radice quadra dell'espressione

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \; . \tag{8.9}$$

8.1.2 Equazioni algebriche razionali

Definizione 8.3 — Equazioni algebriche razionali. Le equazioni algebriche razionali sono equazioni che contengono polinomi, loro rapporti e potenze intere.

■ **Esempio 8.1 — Esempi di equazioni algebriche razionali.**

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)} = 4x \tag{8.10}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{1}{x} \tag{8.11}$$

■

8.1.2.1 Metodo di soluzione

1. Per prima cosa è necessario determinare le **condizioni di esistenza** di una soluzione. Poiché nelle equazioni può comparire la **divisione** tra polinomi, bisogna richiedere che questa e tutte le operazioni scritte nel problema abbiano senso: ad esempio, nelle condizioni di esistenza bisogna richiedere che non avvengano divisioni per zero.
2. Successivamente, è possibile procedere con le semplificazioni per la ricerca della soluzione.

Esempi Seguendo questo metodo di soluzione, procediamo a risolvere le equazioni dell'esempio cit.

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)} = 4x \qquad \text{C.E.: } x \neq 1 \quad \to \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}
&(x+3)^2 = 4x(x-1)\\
&x^2+6x+9 = 4x^2-4x\\
&3x^2-10x-9=0\\
&\to \quad x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{25+3\cdot 9}}{6} = \frac{5 \mp \sqrt{52}}{3}
\end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\frac{2x}{x^2+1} = -\frac{1}{x} \qquad \text{C.E.: } x \neq 0 \quad \to \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned}
&2x^2 = -x^2-1\\
&3x^2 = -1 \quad \to \quad \nexists x \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

8.1.3 Equazioni algebriche irrazionali

Definizione 8.4 — Equazioni algebriche irrazionali. Le equazioni algebriche razionali sono equazioni che contengono polinomi, loro rapporti e potenze intere e non.

■ **Esempio 8.2 — Esempi di equazioni algebriche irrazionali.**

$$\sqrt[3]{x-3} = 2 \quad , \quad \frac{2x}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = -2 \tag{8.16}$$

■

8.1.3.1 Metodo di soluzione

1. Per prima cosa è necessario determinare le **condizioni di esistenza** di una soluzione. Bisogna richiedere che questa e tutte le operazioni scritte nel problema abbiano senso: bisogna richiedere che
   - che non avvengano **divisioni** per zero;
   - che siano non negativi i radicandi di eventuali **radici** con indice intero pari o non intero.
2. Successivamente, è possibile procedere con le semplificazioni per la ricerca della soluzione.

Esempi

$$\sqrt[3]{x-3} = 2 \qquad \text{C.E.: } x \in \mathbb{R} \tag{8.17}$$

$$x-3 = 8 \quad \to \quad x = 11 \tag{8.18}$$

$$\frac{2x}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = -2 \qquad \text{C.E.: } x-1>0 \quad \to \quad x \in (1,+\infty) \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}
&x = -(x-1)^{\frac{1}{2}}\\
&x^2 = x-1\\
&x^2-x+1=0\\
&\Delta = (-1)^2-4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0 \quad \to \quad \nexists x \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{8.20}$$

8.2 Equazioni non algebriche o trascendenti

8.2.1 Equazioni con i valori assoluti

8.2.2 Equazioni con esponenti e logaritmi

8.2.3 Equazioni con le funzioni armoniche

8.3 Metodi di soluzione approssimati

8.3.1 Metodo grafico

8.3.2 Metodi numerici

Riferimento al capitolo dei metodi numerici

9. Disequazioni

10. Sistemi di equazioni e di disequazioni

IV Algebra in $\mathbb{C}$

11. Algebra complessa

11.1 Definizione dei numeri complessi

Definizione 11.1 — Unità immaginaria.

$$i := \sqrt{-1} \tag{11.1}$$

Definizione 11.2 — Numero complesso.

$$z = x + iy \qquad , \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{11.2}$$

11.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)

Si può definire una relazione biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e il piano $\mathbb{R}^2$.

11.1.1.1 Rappresentazione cartesiana.

11.1.1.2 Rappresentazione polare.

Trasformazione tra coordinate cartesiane e polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(x,y) \end{cases} \tag{11.3}$$

e quindi

$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{11.4}$$

La relazione di Eulero e la rappresentazione polare dei numeri complessi. Usando le espansioni in serie di Taylor delle funzioni $e^{i\theta}$, $\cos\theta$ e $\sin\theta$, Eulero ricavò la formula che da lui prende il nome

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ . \tag{11.5}$$

Dimostrazione con le serie di Taylor.

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} && = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\
\sin\theta &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} && = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} && = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots = \\
& && = \left[1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] = \\
& && = \cos\theta + i\sin\theta \ .
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

■

Dimostrazione con la derivata. Si definisce la funzione con variabile reale $\theta \in \mathbb{R}$ e valori complessi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, e si calcola la derivata rispetto alla variabile indipedente θ

$$\frac{d}{d\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{11.7}$$

La funzione $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ soddisfa quindi l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\theta}f(\theta) = if(\theta) \ , \tag{11.8}$$

con condizione $f(0) = 1$. Essendo questo un problema lineare, se esiste, esiste una sola soluazione. Si può dimostrare che questa equazione è soddisfatta anche dalla funzione a variabile reale e valori complessi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(\theta) = e^{i\theta}$, la cui derivata è $g'(\theta) = ie^{i\theta} = ig(\theta)$. Possiamo quindi concludere l'uguaglianza tra le due funzioni $g(\theta) = f(\theta)$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. ■

11.2 Operazioni con i numeri complessi

In questa sezione vengono presentate le operazioni algebriche con i numeri complessi, osservando come convenga la forma cartesiana per somma e differenza, mentre la forma polare per prodotti, divisioni e soprattutto potenze e radici.

11.2.1 Somma e differenza

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \ . \tag{11.9}$$

11.2.2 Prodotto e divisione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \ . \tag{11.10}$$

11.2.3 Potenze e radici

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{11.11}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i(\theta+2\pi m)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{m}{n}2\pi\right)} \tag{11.12}$$

11.2.4 Esponenziali e logaritmi

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y) \\ &= e^{re^{i\theta}} = e^{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{r\cos\theta} e^{i\,r\ \sin\theta} = e^{r\cos\theta}\,[\cos(r\sin\theta) + i\sin(r\sin\theta)] \end{aligned} \tag{11.13}$$

$$\ln z = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\,\theta \tag{11.14}$$

12. Calcolo complesso

V Serie e successioni

13. Successioni e serie di numeri reali

13.1 Successioni

Definizione 13.1 — Serie di numeri reali.

13.2 Serie

Definizione 13.2 — Serie di numeri reali.

Definizione 13.3 — Serie infinite di numeri reali.

Definizione 13.4 — Carattere di una serie. Una serie può essere

- convergente
- divergente
- indeterminata

13.2.1 Serie notevoli

13.2.1.1 Serie armonica

Definizione 13.5 — Serie armonica.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k} \tag{13.1}$$

13.2.1.2 Serie geometrica

Definizione 13.6 — Serie geometrica.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^k} \tag{13.2}$$

13.2.1.3 La costante di Napier

Definizione 13.7 — La costante di Napier, o il numero di Euler – e. La successione di numeri $\{e_n\}$,

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ , \tag{13.3}$$

è una serie monotona crescente e superiormente limitata, e quindi esiste il limite finito il cui valore viene definito costante di Napier, o numero di Eulero

$$e := \lim_{n\to+\infty} e_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \ . \tag{13.4}$$

Dimostrazione. É immediato riconoscere che la successione e_n è crescente, essendo definito come una somma di numeri positivi,

$$e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} > e_n \ . \tag{13.5}$$

Per dimostrare che è limitata superiormente, si può osservare che ogni termine della serie è minore del termine rispettivo della serie armonica di base $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots < \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + S_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \ , \end{aligned} \tag{13.6}$$

e per il limite $n \to +\infty$, si ottiene

$$e_\infty = \lim_{n\to+\infty} e_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < 1 + S\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 = 3 \ . \tag{13.7}$$

■

Definizione 13.8 — Definizioni equivalenti di e.

$$e = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{cases} \tag{13.8}$$

Si vuole dimostrare che le due definizioni sono tra di loro equivalenti, confrontando i valori della serie troncata e della funzione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ t_n &:= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned} \tag{13.9}$$

$t_n \le s_n$. Usando il teorema binomiale

$$\begin{aligned} t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \\ &= 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\,\frac{1}{n^3} + \dots = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots = \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n \end{aligned} \tag{13.10}$$

■

$t_n \ge s_n$. Si prende un numero $m < n$ fissato, e si definisce

$$\begin{aligned} t_{n,m} &:= \left(1+\frac{1}{n}\right)^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) = \\ &< t_n \\ s_m &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m!} \end{aligned} \tag{13.11}$$

Fissando m e facendo tendere all'infinito n, $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} t_n > \lim_{n\to\infty} t_{n,m} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m \tag{13.12}$$

■

Conclusioni. Sapendo che

$$\begin{cases} s_n > t_n \\ s_n < \lim_{m\to\infty} t_m \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \text{limsup}_{n\to\infty} s_n \ge \text{limsup}_{n\to\infty} t_n \\ s_n \le \text{liminf}_{n\to\infty} t_n \end{cases} \tag{13.13}$$

e ricordando che $\limsup \ge \liminf$ si può scrivere

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \ge \liminf_{n\to\infty} t_n \ge \limsup_{n\to\infty} s_n \ge \limsup_{n\to\infty} t_n \ . \tag{13.14}$$

■

14. Serie di funzioni

VI

Calcolo infinitesimale

15. Funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

In questo capitolo vengono elencate alcune funzioni elementari.

15.1 Definizioni

Definizione 15.1 — Funzioni pari e dispari.

Definizione 15.2 — Funzione invertibile e funzione inversa.

15.2 Funzioni elementari

15.2.1 Potenza

$f(x) = x^a$

15.2.2 Radice

Inversa della potenza. Dominio? Nel caso in cui la potenza non sia una funzione invertibile, quale ramo? $f(x) = \sqrt[a]{x}$

15.2.3 Esponenziale

$f(x) = a^x$ $f(x) = e^x$

15.2.4 Logaritmo

Inversa dell'esponenziale. Dominio ...

15.2.5 Funzioni armoniche

Dalla geometria ...

Vengono definite le funzioni *seno* e *coseno*,

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\overline{PH}}{R} \\ \cos x &= \frac{\overline{OH}}{R} \end{aligned} \tag{15.1}$$

Viene defita la funzione *tangente*, per valori della variabile indipendente $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tan x = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{15.2}$$

15.2.5.1 Proprietà

Identità fondamentale. Usando il teorema di Pitagora, è immediato dimostrare l'identità fondamentale delle funzioni armoniche,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ . \tag{15.3}$$

Funzioni armoniche di somme e differenze. Dimostrazione geometrica

$$\begin{aligned} \cos(x \mp y) &= \cos x \cos y \pm \sin x \sin y \\ \sin(x \mp y) &= \sin x \cos y \mp \sin y \cos x \end{aligned} \tag{15.4}$$

Altre identità *Formule di Werner*

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right] \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right] \end{aligned} \tag{15.5}$$

Formule di prostaferesi Definendo $x - y = p$, $x + y = q$, cosicché $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{q-p}{2}$

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{q-p}{2}\right) \\ \cos p - \cos q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right) \\ \cos p + \cos q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{q-p}{2}\right) \end{aligned} \tag{15.6}$$

15.2.6 Funzioni iperboliche

16. Limiti di funzioni reali

16.1 Cenni di topologia per l'analisi

Definizione 16.1 — Intervallo. Un intervallo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali.

Definizione 16.2 — Estremi superiore e inferiore. Se esiste, l'**estremo superiore** $M \in \mathbb{R}$ di un intervallo E è il più piccolo maggiorante (cioè un numero uguale o maggiore di tutti i numeri dell'intervallo E), cioè:

- $M \geq x \ , \forall x \in E$
- $\nexists z$ maggiorante di E, con $z < M$

Se esiste, l'**estremo inferiore** $m \in \mathbb{R}$ di un intervallo E è il più grande minorante (cioè un numero uguale o minore di tutti i numeri dell'intervallo E), cioè:

- $m \leq x \ , \forall x \in E$
- $\nexists z$ minorante di E, con $z > m$

Definizione 16.3 — Intervallo aperto. Un intervallo aperto è un intervallo che non include nessuno dei suoi estremi.

Definizione 16.4 — Intervallo chiuso. Un intervallo chiuso è un intervallo che include tutti i suoi estremi.

Punti: accumulazione/isolato, interni/esterni/frontiera Intervalli: limitati/illimitati, aperti/chiusi, intorno

Definizione 16.5 — Intorno di un punto. L'intorno completo $B(x_0, \varepsilon)$ del punto x_0 di raggio ε è l'intervallo aperto

$$B(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \tag{16.1}$$

Definizione 16.6 — Intorno destro e sinisto. L'intorno destro di un punto x_0 della retta reale è l'insieme aperto

$$B^+(x_0, \varepsilon) = (x_0, x_0 + \varepsilon) \ . \tag{16.2}$$

L'intorno destro di un punto x_0 della retta reale è l'insieme aperto

$$B^-(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \ . \tag{16.3}$$

Definizione 16.7 — Intorno di infinito. L'intorno di $-\infty$ viene definito come l'insieme aperto

$$B(-\infty, M) = (-\infty, M) \tag{16.4}$$

L'intorno di $+\infty$ viene definito come l'insieme aperto

$$B(+\infty, M) = (M, +\infty) \tag{16.5}$$

Definizione 16.8 — Punto di accumulazione.

Definizione 16.9 — Punto interno.

Definizione 16.10 — Intervallo chiuso. Un intervallo è chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Definizione 16.11 — Intervallo aperto. Un intervallo è aperto se ogni suo punto è un punto interno.

Definizione 16.12

16.2 Funzioni

Definizione 16.13 — Funzione a variabile e valori reali.

16.3 Limiti

- Limite destro e limite sinistro
- Funzioni continue

Definizione 16.14 — Limite finito al finito. Il limite finito della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \tag{16.6}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall \varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \ell| < \delta. \tag{16.7}$$

Definizione 16.15 — Limite infinito al finito. Il limite infinito della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty \tag{16.8}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall \varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon,\ \exists M \lesseqgtr 0 \text{ tale che } f(x) \lesseqgtr M. \tag{16.9}$$

Definizione 16.16 — Limite finito al infinito. Il limite finito della funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \ell \tag{16.10}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall N \lesseqgtr 0 \text{ tale che } x \lesseqgtr N,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - \ell| < \delta. \tag{16.11}$$

Definizione 16.17 — Limite infinito al infinito. Il limite infinito della funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito

$$\lim_{x \to \mp^{(1)}\infty} f(x) = \mp^{(2)}\infty \tag{16.12}$$

è definito dalla condizione

$$\text{Per } \forall N \lesseqgtr^{(1)} 0 \text{ tale che } x \lesseqgtr^{(1)} N,\ \exists M \lesseqgtr^{(2)} 0 \text{ tale che } f(x) \lesseqgtr^{(2)} M. \tag{16.13}$$

Grafici

16.4 Funzioni continue

Definizione 16.18 — Funzione continua in un punto. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in \Omega$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ . \tag{16.14}$$

Definizione 16.19 — Funzione continua in un intervallo. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in un intervallo $[a, b] \subset \Omega$, se è una funzione continua in tutti i punti $x \in [a, b]$.

16.4.1 Teoremi sulle funzioni continue

Teorema 16.1 — Teorema di Weierstrass. Una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ammette in esso un massimo e un minimo assoluto.

Teorema 16.2 — Teorema della permanenza del segno. Preso un punto x_0 appartenente al dominio Ω di un funzione continua, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tale che $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno $B(x_0)$ del punto x_0 tale che $f(x) > 0$ per $\forall x \in B(x_0)$.

Teorema 16.3 — Teorema dei valori intermedi. Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, la funzione assume nell'intervallo $[a, b]$ tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.
Assumendo $f(a) < f(b)$, per ogni valore $y_0 \in [f(a), f(b)]$ esiste almeno un valore $x_0 \in [a, b]$ tale che $y_0 = f(x_0)$.

16.5 Teoremi sui limiti

Teorema 16.4 — Teorema del confronto.

Teorema 16.5 — Teorema di de l'Hopital – anticipazione. Il teorema di de l'Hopital riguarda il calcolo delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, cioè i limiti che possono essere scritti nella forma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{16.15}$$

con
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oppure
- $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$

Per l'enunciato completo e la dimostrazione del teorema di de l'Hopital si rimanda al teorema §17.5 cap.§17 sulle derivate.

16.6 Infiniti e infinitesimi

16.7 Limiti notevoli

Potenza		$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a$
Seno		$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin}{x} = 1$
Coseno		$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
Esponenziale - def		$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
"	(1)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
"	(2)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1+x} = 1$
Logaritmo naturale		$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

16.7.1 Dimostrazioni

Limite notevole del seno. Il limite viene calcolato usando il teorema del confronto (16.4), con le funzioni x, $\sin x$ e $\tan x$

$$\sin x \le x \le \tan x \qquad \to \qquad 1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}\ . \tag{16.16}$$

Per $x \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$ e quindi $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$. ∎

Limite notevole del coseno. Il limite viene calcolato usando il limite notevole del seno,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1} \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{16.17}$$

∎

REMOVE from here, MOVE to chapter about series

Definizione 16.20 — Il numero di Nepero, *e*. Il numero di Nepero, e può essere definito come il limite

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ . \tag{16.18}$$

Si prova l'esistenza al finito di questo limite, dimostrando che la serie $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è:

- crescente in maniera monotona, i.e. $a_{n+1} > a_n$, $\forall n$
- limitata superiormente, i.e. $\exists M s.t. a_n < M$, $\forall n$

Per dimostrare che la serie è crescente, cerchiamo il legame tra due termini successivi. Per dimostrare che la serie è limitata superiormente, dimostriamo che $a_n < 3$.

Limite notevole dell'esponenziale - definizione. Questo limite non è nient'altro che una delle definizioni del numero e, come mostrato nella Sez.§13.2.1.3. ■

Limite notevole dell'esponenziale - (1).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}-1\right) = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right) = \\ &= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\dots\right) = 1\end{aligned} \tag{16.19}$$

■

Limite notevole dell'esponenziale - (2).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right) = \\ &= \lim_{x\to 0}\left[1+\underbrace{\frac{x^2}{1+x}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\dots\right)}_{\to 0}\right] = 1\end{aligned} \tag{16.20}$$

■

Limite notevole del logaritmo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right) = \\ &= \lim_{x\to 0}\left[1+\underbrace{\frac{x^2}{1+x}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\dots\right)}_{\to 0}\right] = 1\end{aligned} \tag{16.21}$$

■

17. Derivate

17.1 Definizioni

Definizione 17.1 — Rapporto incrementale. Il rapporto incrementale della funzione reale a valori reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di un incremento Δx attorno al valore x della variabile indipendente è definito come il rapporto della differenza del valore della funzione e del valore dell'incremento,

$$\Delta f(x; \Delta x) := \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ . \tag{17.1}$$

Definizione 17.2 — Derivata. La derivata della funzione reale a valori reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale a valori reali, denotata $\frac{df}{dx}$, o $f'(x)$, e definita in ogni punto come il limite del rapporto incrementale per valori dell'incremento che tendono a 0,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ . \tag{17.2}$$

Definizione 17.3 — Funzione derivabile. Una funzione $f : \Omega \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è **derivabile in un punto** x se esiste il limite del rapporto incrementale, $\Delta f[x, \Delta x]$. La funzione è **derivabile in un intervallo** I, se è derivabile in tutti per tutti i valori di x compresi nell'intervallo I.

Interpretazione geometrica. La derivata della funzione $f(x)$ ha un'interpretazione geometrica immediata, se si rappresenta nel piano cartesiano il grafico della funzione, $y = f(x)$. Il valore della derivata $f'(x)$ coincide con la pendenza della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$, nel punto $(x, y) = (x, f(x))$.

- relazione con la secante
- grafico (.gif?) per valore puntuale, con limite della secante alla tangente
- grafico (.gif?) per funzione

17.2 Regole di derivazione

Usando la definizione di derivata (17.2) si possono dimostrare le seguenti regole per il calcolo delle derivate.

Derivata della somma di due funzioni e il prodotto per uno scalare

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \\ (af(x))' &= af'(x) \end{aligned} \tag{17.3}$$

Proprietà 17.1 — Operatore lineare. La derivata è un operatore lineare.

Derivata del prodotto di due funzioni

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{17.4}$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{17.5}$$

Derivata di una funzione composta

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dy} f(y)\bigg|_{y=g(x)} \frac{d}{dx} g(x) \tag{17.6}$$

Derivata della funzione inversa

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\left.\dfrac{df}{dy}\right|_{y=f(x)}} \tag{17.7}$$

17.2.1 Dimostrazioni

Derivata della combinazione lineare di due funzioni.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha f(x+\Delta x) + \beta g(x+\Delta x) - [\alpha f(x) + \beta g(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\alpha \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] = \\ &= \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= \alpha f'(x) + \beta g'(x) \ . \end{aligned} \tag{17.8}$$

■

Derivata del prodotto di due funzioni.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ . \end{aligned} \tag{17.9}$$

■

Derivata del rapporto di due funzioni.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) & = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \\
& = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\
& = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} = \\
& = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x) = \\
& = \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned} \tag{17.10}$$

■

Derivata di una funzione composta.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(g(x)) & = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))\right] = \\
& = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\
& = \dots \\
& = f'(g(x))\, g'(x)\ .
\end{aligned} \tag{17.11}$$

■

Derivata della funzione inversa. Per dimostrare la formula della derivata della funzione inversa $f^{-1}(x)$ della funzione $f(x)$, si sfrutta la definizione

$$f(y) = x \quad , \quad f^{-1}(x) = y \qquad \rightarrow \qquad x = f(f^{-1}(x))\ . \tag{17.12}$$

Si calcola la derivata rispetto a x dell'ultima relazione, usando la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx}\left(f(f^{-1}(x))\right) \qquad \rightarrow \qquad 1 = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=f(x)} \frac{df^{-1}(x)}{dx} \tag{17.13}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=f(x)}} \tag{17.14}$$

■

17.3 Teoremi

Teorema 17.1 — Teorema di Fermat. Sia $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo (a,b) e derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$, punto di estremo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.

Teorema 17.2 — Teorema di Rolle. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in ogni punto dell'intervallo $[a,b]$ che assume valori uguali $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ in cui la derivata della funzione si annulla, $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Secondo il teorema di Weierstrass (16.1) sulle funzioni continue, la funzione f ammette punti $c \in [a,b]$ di massimo e un minimo globali. Si possono riconoscere ora due casi:

- se i punti di massimo e minimo globali coincidono entrambi con gli estremi dell'intervallo, si può scrivere

$$m = f(a) = f(b) \le f(x) \le M = f(a) = f(b) \tag{17.15}$$

  e quindi la funzione è costante, $f(x) = f(a) = f(b)$, e la sua derivata è nulla in tutti i punti dell'intervallo,$f'(x) = 0, \ \forall x \in (a,b)$;
- altrimenti, esiste un punto di massimo o minimo globale $x = c \in (a,b)$ interno all'intervallo; i punti di massimo o minimo globali globali sono anche punti di massimo o minimo locali e quindi, per il teorema di Fermat (17.1), $f'(c) = 0$.

■

Teorema 17.3 — Teorema di Cauchy. Siano $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili su (a,b), allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c) \ . \tag{17.16}$$

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema di Cauchy può essere svolta con un'opportuna scelta della funzione alla quale applicare il teorema di Rolle (17.2). Ad esempio, la funzione

$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)] \ , \tag{17.17}$$

soddisfa le ipotesi del teoremda di Rolle, poichè

- $h(x)$ è continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b)
- $h(a) = h(b)$, dal calcolo diretto

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)][g(a) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(a) - f(a)] = 0 \\ h(b) &= [f(b) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(b) - f(a)] = 0 \ . \end{aligned} \tag{17.18}$$

Applicando il teorema di Rolle alla funzione $h(x)$, possiamo concludere che esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $h'(c) = 0$ e quindi

$$0 = h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x) \ . \tag{17.19}$$

■

Teorema 17.4 — Teorema di Lagrange. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \ . \tag{17.20}$$

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema di Lagrange segue direttamente dalla dimostrazione del teorema di Cauchy (17.3), usando le funzioni $f(x)$ e $g(x) = x$, la cui derivata è $g'(x) = 1$. ■

17.3.1 Teorema di de l'Hopital

Teorema 17.5 — Teorema di de l'Hopital.

17.4 Derivate fondamentali

	funzione	**derivata**
Potenza	$f(x) = x^a$	$f'(x) = ax^{a-1}$
Esponenziale	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Logaritmo	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Seno	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
Coseno	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

17.4.1 Dimostrazioni

Derivata della potenza.

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^n - 1}{\varepsilon}x^n = \\ &= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^n - 1}{\frac{\varepsilon}{x}}}_{=n} x^{n-1} = \\ &= nx^{n-1}\end{aligned} \tag{17.21}$$

■

Derivata della funzione esponenziale.

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{x+\varepsilon} - e^x}{\varepsilon} = \\ &= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(e^\varepsilon - 1)}{\varepsilon}}_{=1} e^x = \\ &= e^x\end{aligned} \tag{17.22}$$

■

Derivata della funzione logaritmo. Il dominio della funzione logaritmo è $\mathbb{R}^+$, ossia l'insieme dei numeri reali positivi. Essendo l'argomento del logaritmo diverso da zero, si può dividere per esso senza il timore di incorrere in espressioni non definite

$$
\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(x+\varepsilon)-\ln x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\left(x\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)\right)-\ln x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)-\ln x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)}{\varepsilon} = \\
&= \underbrace{\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon/x\to 0}}\frac{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)}{\frac{\varepsilon}{x}}}_{=1}\frac{1}{x} = \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
\tag{17.23}
$$

■

Derivata della funzione seno.

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(x+\varepsilon)-\sin x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin x\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\cos x-\sin x}{\varepsilon} = \\
&= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\cos\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)}_{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\right)=0}\sin x+\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}}_{=1}\cos x = \\
&= \cos x
\end{aligned}
\tag{17.24}
$$

■

Derivata della funzione coseno.

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(x+\varepsilon)-\cos x}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos x\cos\varepsilon-\sin\varepsilon\sin x-\cos x}{\varepsilon} = \\
&= \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\cos\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)}_{\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\right)=0}\cos x-\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}}_{=1}\sin x = \\
&= -\sin x
\end{aligned}
\tag{17.25}
$$

■

17.5 Derivate di ordine superiore

Poiché la derivata $f'(x)$ di una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si può calcolare la derivata della funzione $f'(x)$

17.6 Espansioni in serie di Taylor e MacLaurin

Definizione 17.4 — Serie di Taylor. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ centrata in $x = x_0$ è la serie polinomiale

$$T[f(x_0)](x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ . \tag{17.26}$$

Teorema 17.6 La serie di Taylor troncata alla n-esima potenza,

$$T^n[f(x_0)](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^k \ , \tag{17.27}$$

è un'approssimazione dell'n-esimo ordine della funzione $f(x)$, i.e.

$$f(x) - T^n[f(x_0)](x) \sim o(|x - x_0|^n) \tag{17.28}$$

Definizione 17.5 — Serie di MacLaurin. La serie di MacLaurin di una funzione $f(x)$ è definita come la sua serie di Taylor centrata in $x = 0$.

17.7 Applicazioni

17.7.1 Studio funzione

17.7.1.1 Punti in cui $f'(x) = 0$: punti di estremo locale e flessi orizzontali

Per una funzione derivabile, i punti in cui si annulla la derivata prima di una funzione $f(x)$ possono essere:

- punti di massimo locale
- punti di minimo locale
- punti di flesso orizzontale

Definizione 17.6 — Punto di massimo locale.

Teorema 17.7 — Condizioni per un punto di massimo locale. Il punto x_0 è un punto di massimo locale per una funzione $f(x)$ derivabile se

- $f'(x_0) = 0$
- la prima derivata di ordine superiore valutata in x_0 diversa da zero, è una derivata di **ordine pari** ed è **negativa**, $f^{(n)}(x_0) < 0$

Definizione 17.7 — Punto di minimo locale.

Teorema 17.8 — Condizioni per un punto di minimo locale. Il punto x_0 è un punto di mimimo locale per una funzione $f(x)$ derivabile se

- $f'(x_0) = 0$
- la prima derivata di ordine superiore valutata in x_0 diversa da zero, è una derivata di **ordine pari**, ed è **positiva**, $f^{(n)}(x_0) > 0$

Definizione 17.8 — Punto di flesso orizzontale.

Teorema 17.9 — Condizioni per un punto di flesso orizzontale. Il punto x_0 è un punto di

flesso orizzontale per una funzione $f(x)$ derivabile se
- $f'(x_0) = 0$
- la prima derivata di ordine superiore valutata in x_0 diversa da zero, è una derivata di **ordine dispari**

17.7.1.2 Punti in cui $f''(x) = 0$: punti di flesso

■ Esempio 17.1 — Studio di funzione. Si vuole studiare la funzione $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$
Dominio.
Limiti all'infinito e agli eventuali punti di discontinuità.
Ricerca minimi e massimi locali ■

17.7.2 Ottimizzazione libera e vincolata

Il tipico problema di ottimizzazione consiste nella ricerca di un massimo o un minimo di una funzione,

$$\mathbf{x}^* = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \ . \tag{17.29}$$

Questa ricerca può essere soggetta a vincoli sulla variabile indipendente, che in generale possono essere:
- valori estremi della variabile
- vincoli di uguaglianza della forma $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- vincoli di disuguaglianza della forma $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$

17.7.2.1 Ottimizzazione libera

17.7.2.2 Ottimizzazione vincolata

Medoto dei moltiplicatori di Lagrange per vincoli di uguaglianza

18. Integrali

18.1 Definizioni

Definizione 18.1 — Somma di Riemann. Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n | a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$, la somma di Riemann viene definita come

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \tag{18.1}$$

con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definizione 18.2 — Integrale di Riemann. Definendo $\Delta x := \max_i(x_i - x_{i-1})$, l'integrale di Riemann viene definito come il limite della somma di Riemann per $\Delta x \to 0$ (e di conseguenza il numero di intervalli della partizione $n \to \infty$), e viene indicato come

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_n \tag{18.2}$$

Definizione 18.3 — Integrale definito. L'integrale della definizione (18.2) svolto tra due valori di x viene definito integrale definito.

Interpretazione geometrica

Proprietà degli integrali definiti

$$\int_{x=a}^{b} [Af(x) + Bg(x)]\,dx = A\int_{x=a}^{b} f(x)dx + B\int_{x=a}^{b} g(x)dx \tag{18.3}$$

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \int_{x=a}^{c} f(x)dx + \int_{x=c}^{b} f(x)dx \tag{18.4}$$

Definizione 18.4 — Integrale indefinito. Si può definire l'integrale indefinito di una funzione come l'integrale definito funzione del secondo estremo dell'intervallo, con il primo estremo fissato,

$$\int_{t=a}^{x} f(t)\,dt = F(x) + c\ , \tag{18.5}$$

18.2 Teoremi

Definizione 18.5 — Media.

$$M(f,[a,b]) = \frac{1}{b-a}\int_{x=a}^{b} f(x)dx \tag{18.6}$$

Teorema 18.1 — Teorema della media. Sia $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$, allora esiste un punto $c\in[a,b]$ tale che

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)\ . \tag{18.7}$$

Dimostrazione. Poiché $f(x)$ è continua per $x\in[a,b]$, allora per il teorema di Weierstrass (16.1) si può scrivere

$$m \le f(x) \le M\ , \tag{18.8}$$

essendo m, M i punti di minimo e massimo della funzione. Integrando questa relazione su $[a,b]$, si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx \\ &m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a) \\ &m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M\ . \end{aligned} \tag{18.9}$$

Chiamando a, b i valori per cui $f(a)=m$, $f(b)=M$, per il teorema dei valori intermedi (16.3), per ogni valore y della funzione compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, esiste almeno un punto $c\in[a,b]$ tale che $y=f(c)$. Tra tutti i valori compresi tra gli estremi, questo numero deve esistere anche per il valore particolare (compreso tra gli estremi) $y=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, e quindi

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\ . \tag{18.10}$$

Moltiplicando per il fattore $(b-a)$ si conclude la dimostrazione ottenendo l'espressione dell'enunciato del teorema. ■

Teorema 18.2 — Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale.

$$\frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt = f(x) \tag{18.11}$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt = && \text{(def. di derivata)}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t=a}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{t=a}^{x} f(t)dt\right] = && \text{(prorietà (18.4))}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{t=x}^{x+\Delta x} f(t)dt = && \text{(teorema della media (18.1))}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\frac{1}{\Delta x}\Delta x}_{=1}\ f(\xi) = && \text{con } \xi\in[x,x+\Delta x],\ f(x) \text{ continua}\\
& && \left(\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x)\right)\\
&= f(x)\ .
\end{aligned}
\tag{18.12}
$$

■

18.3 Integrali fondamentali

Partendo della tabella delle derivate fondamentali, si può usare il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale (18.2) per "invertire l'operazione" e ottenere una tabella di integrali fondamentali.

	funzione		**primitiva**
Potenza	$f(x) = x^a\,,$	$a \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c$
Logaritmo	$f(x) = \frac{1}{x}$		$F(x) = \ln\|x\| + c$
Esponenziale	$f(x) = e^x$		$F(x) = e^x + c$
Seno	$f(x) = \sin x$		$F(x) = -\cos x + c$
Coseno	$f(x) = \cos x$		$F(x) = \sin x + c$

18.4 Regole di integrazione

18.4.1 Integrazione per parti

- Definendo $F(x)$, $G(x)$ le primitive delle funzioni $f(x)$, e $g(x)$
- Integrando in x dalla regola di **derivazione del prodotto** $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$, riscritta isolando il termine $F'(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)G'(x)$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int f(x)G(x)dx &= \int (F(x)G(x))'dx - \int F(x)G'(x)dx = \\
&= F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx
\end{aligned}
\tag{18.13}
$$

■ **Esempio 18.1** ■

18.4.2 Integrazione con sostituzione

- Definendo la funzione composta $\overline{F}(x) = F(y(x))$ e le derivate

$$
\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) \qquad , \qquad f(y) = \frac{d}{dy}F(y)
\tag{18.14}
$$

- Partendo dalla regola di **derivazione della funzione composta**, $\overline{F}(x) = F(y(x))$

$$\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) = \frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{dF}{dy}(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(y(x))y'(x) \tag{18.15}$$

Usando il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

$$\begin{aligned} F(y) &= \int f(y)dy \\ \overline{F}(x) &= \int \overline{f}(x)dx = \int f(y(x))\ y'(x)dx \end{aligned} \tag{18.16}$$

Se si introduce la dipendenza $y(x)$ nella prima equazione, si ottiene l'uguaglianza tra le ultime due espressioni, $F(y(x)) = \overline{F}(x)$, e quindi

$$\int f(y)dy = \int f(y(x))\ y'(x)dx\ . \tag{18.17}$$

■ **Esempio 18.2** ■

VII

Equazioni differenziali ordinarie

19. Introduzione

19.1 Applicazioni

19.2 Definizioni

Definizione 19.1 — Equazione differenziale ordinaria. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che ha come incognita una funzione $y(x)$, nella quale possono comparire la funzione incognita $y(x)$, le sue derivate $y^{(n)}(x)$ e la variabile indipendente x, che può essere scritto nella forma implicita

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{19.1}$$

L'**ordine** dell'equazione differenziale viene definito come l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che compaiono nell'equazione.

Definizione 19.2 — Equazione differenziale ordinaria lineare. Un'equazione differenziale è lineare se si può scrivere come l'uguaglianza di una combinazione lineare delle derivate della funzione incognita e una funzione nota, $f(x)$. Ad esempio, la forma generale dell'equazione differenziale ordinaria di ordine n può essere scritta come

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{19.2}$$

Definizione 19.3 — Equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare con coefficienti $a_i(x) = a_i$, numeri che non dipendono dalla variabile indipendente x,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{19.3}$$

Definizione 19.4 — Equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti con $f(x) = 0$,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{19.4}$$

In generale, la soluzione dell'equazione (19.1) dipende da n parametri indeterminati. In generale, un problema differenziale è composto da:

- un'equazione differenziale di ordine n
- n condizioni per determinare gli n parametri altrimenti indeterminati

Definizione 19.5 — Problema di Cauchy. Un problema di Cauchy è definito da:

- un'equazione differenziale di ordine n

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{19.5}$$

- n condizioni che definiscono il valore della funzione incognita e delle prime $n-1$ derivate nell'estremo inferiore dell'intervallo

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y'(a) &= y_1 \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(a) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{19.6}$$

20. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti

20.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine

20.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay'(x) + by(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{20.1}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando la derivata e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta + b)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{20.2}$$

Il prodotto di tre fattori si annulla quando si annulla uno dei tre fattori:

- $e^{\beta x}$ non si annulla per nessun valore di x
- se si annulla α, $\alpha = 0$, si otterebbe la soluzione triviale $y(x) = 0$
- $\rightarrow$ deve quindi annullarsi il fattore $a\beta + b$: si ottiene quindi il valore $\beta = -\dfrac{b}{a}$

La forma generale della soluzione dell'equazione (20.1) è quindi

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{a}x} \tag{20.3}$$

Per determinare il coefficiente α è necessaria una condizione che definisca il valore della funzione (o della sua derivata) in un punto del dominio o del suo contorno.

20.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine

20.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{20.4}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando le derivate e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta^2 + b\beta + c)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{20.5}$$

I valori di β si ottiengono dalla soluzione dell'equazione di secondo grado in β, $a\beta^2+b\beta+c = 0$ che, a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, possono essere:

- $\Delta > 0$: esistono due soluzioni reali distinte $\beta_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: esistono due soluzioni reali coincidenti $\beta_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: esistono due soluzioni complesse coniugate $\beta_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \mp j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

La soluzione dell'equazione differenziale assume quindi la forma

- $\Delta > 0$:
$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} \tag{20.6}$$
- $\Delta = 0$:
$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 x e^{\beta x} \tag{20.7}$$
- $\Delta < 0$:
$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 e^{\beta^* x} = \\ &= \alpha_1 e^{(re\{\beta\} + i im\{\beta\})x} + \alpha_2 e^{(re\{\beta\} - i im\{\beta\})x} = \\ &= e^{re\{\beta\}x} \left(\alpha_1 e^{i\ im\{\beta\}x} + \alpha_2 e^{-i\ im\{\beta\}x} \right) \ , \end{aligned} \tag{20.8}$$
e per avere una soluzione reale, bisogna imporre $\alpha_2 = \alpha_1^*$, per ottenere la somma di due numeri complessi coniugati, uguale al doppio della somma della loro parte reale,
$$y(x) = 2e^{re\{\beta\}x} \left(re\{\alpha_1\} \cos(\beta x) - im\{\alpha_1\} \sin(\beta x) \right) \ , \tag{20.9}$$
che può essere riscritta come
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{re\{\beta\}x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right) = \\ &= C e^{re\{\beta\}x} \cos(\beta x + \phi) \ . \end{aligned} \tag{20.10}$$

21. Metodo di separazione delle variabili

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x))\ , \qquad \text{con } x \in \Omega \tag{21.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x)) \tag{21.2}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \tag{21.3}$$

■ **Esempio 21.1** $y'(x) = xy(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \rightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \rightarrow \quad y(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2} \tag{21.4}$$

Verifica: $y'(x) = K\frac{1}{2}2xe^{\frac{1}{2}x^2} = Kxe^{\frac{1}{2}x^2} = xy(x)$. ■

VIII Vettori

Motivazione:

- non tutti gli oggetti di interesse della Matematica, della Fisica o delle Scienze in generale possono essere adeguatamente rappresentati da un singolo numero
- esempi: posizione, velocità, forza,...

Storia:

- ...
- da vettori nello spazio fisico a struttura astratta matematica

22. Algebra vettoriale

22.1 Introduzione

Nello studio della Fisica e delle scienze in generale, si incontrano alcune grandezze che non possono essere rappresentate adeguatamente con un numero, opportunamente accompagnato dalle unità di misura se necessario. Alcuni esempi sono la posizione, la velocità o l'accelerazione di un punto nello spazio, o una forza; Esempi ... Esempi di tensori: rotazioni, inerzia ...

22.2 Definizioni

Definizione 22.1 — Spazio vettoriale. Uno spazio vettoriale è una struttura matematica composta da:

- un insieme V, i cui elementi $\mathbf{v} \in V$ sono chiamati **vettori**
- un campo F, i cui elementi $a \in F$ sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto a V, cioè il cui risultato è un elemento che appartiene a V, che soddisfano determinate proprietà
  - **somma vettoriale** di due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{22.1}$$

  - **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore $\mathbf{u} \in V$ e uno scalare $a \in F$:

$$a\mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{22.2}$$

Proprietà 22.1 — Proprietà delle operazioni.

Definizione 22.2 — Combinazione lineare di vettori. Una combinazione lineare dei vettori $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1:K}$ è un vettore la cui espressione che può essere scritto come

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_K\mathbf{v}_K \ , \tag{22.3}$$

dove i coefficienti a_k, $k = 1 : K$, sono degli scalari appartenenti al campo F.

Definizione 22.3 — Vettori linearmente indipendenti. Un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1:K}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, se una loro combinazione lineare ha come risultato il vettore nullo solo se tutti i coefficienti della combinazione sono nulli, cioé

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_K \mathbf{v}_K \qquad \rightarrow \qquad a_k = 0 \ , \quad \forall k = 1 : K \ . \tag{22.4}$$

Dalla definizione, segue immediatamente che nessun vettore dell'insieme può essere scritto come una combinazione lineare degli altri vettori. Se così non fosse,...

Definizione 22.4 — Base e dimensione di uno spazio. Una base di uno spazio lineare è un insieme massimo di vettori linearmente indipendenti, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$. La dimensione dello spazio lineare è definita come il numero degli elementi della base.

Definizione 22.5 — Componenti di un vettore rispetto a una base. Le componenti $\{v^k\}_{k=1:N}$ di un vettore $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ vengono definite come i coefficienti della combinazione lineare

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + v_N \mathbf{b}_N = \sum_{k=1}^{N} v^k \mathbf{b}_k \ . \tag{22.5}$$

Un vettore è **invariante** rispetto alla base usata per descriverlo: se si cambia la base, le componenti cambiano di conseguenza.

22.3 Spazi vettoriali con prodotto interno

Definizione 22.6 — Prodotto interno. Il prodotto interno $\cdot : V \times V \rightarrow F$ è un'operazione lineare tra due elementi dello spazio vettoriale, che restituisce uno scalare non negativo, con le seguenti proprietà

- simmetria: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
- linearità: $(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- non-negatività: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, con l'uguaglianza che vale solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Definizione 22.7 — Norma indotta dal prodotto interno. La norma di un vettore $\mathbf{v}$ indotta da un prodotto interno è definita come

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \ . \tag{22.6}$$

Definizione 22.8 — Base ortonormale. Una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1:N}$, è una base i cui vettori sono legati dalla relazione

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 \ , & i = k \\ 0 \ , & i \neq k \end{cases} \tag{22.7}$$

22.4 Spazi vettoriali bi- e tri-dimensionali

22.4.1 Spazio vettoriale bidimensionale

Prodotto interno. ...

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u^2 \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (v^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v^2 \hat{\mathbf{e}}_2) = u^1 v^1 + u^2 v^2 \ . \tag{22.8}$$

Usando una base ortogonale $\{\hat{\mathbf{E}}_i\}_{i=1:2}$ che ha il primo vettore orientato come $\mathbf{u}$, si può scrivere

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = U^1 \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (V^1 \hat{\mathbf{E}}_1 + V^2 \hat{\mathbf{E}}_2) = U^1 V^1 = UV \cos\theta_{\mathbf{uv}} \ . \tag{22.9}$$

Prodotto vettoriale.

22.4.2 Spazio vettoriale tridimensionale

Prodotto interno.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + u^3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (v^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v^3 \hat{\mathbf{e}}_3) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 \ . \qquad (22.10)$$

Usando una base ortogonale $\{\hat{\mathbf{E}}_i\}_{i=1:3}$ che ha:

- il primo vettore orientato come $\mathbf{u}$, tale che il vettore $\mathbf{u}$ può essere scritto come $\mathbf{u} = U^1 \hat{\mathbf{E}}_1$
- il secondo vettore $\hat{\mathbf{E}}_2$ tale che il vettore $\mathbf{v}$ può essere scritto come $\mathbf{v} = V^1 \hat{\mathbf{E}}_1 + V^2 \hat{\mathbf{E}}_2$
- il terzo vettore $\hat{\mathbf{E}}_3$ orientato di conseguenza, ortogonale ai due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$

Risulta ancora una volta dimostrata la relazione

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = U^1 \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (V^1 \hat{\mathbf{E}}_1 + V^2 \hat{\mathbf{E}}_2) = U^1 V^1 = UV \cos\theta_{\mathbf{uv}} \ . \qquad (22.11)$$

Prodotto vettoriale. ...

22.5 Applicazioni

22.5.1 Geometria

22.5.2 Fisica

23. Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale

23.1 Introduzione

Definizione 23.1 — Vettore posizione.

Definizione 23.2 — Coordinate. Il vettore posizione in uno spazio euclideo N-dimensionale può essere espresso come una funzione di N variabili indipendenti $\{q^i\}_{i=1:N}$, dette coordinate,

$$\mathbf{r}(q^i) \ . \tag{23.1}$$

Se ogni combinazione di coordinate identifica un punto nello spazio, le coordinate vengono definite **regolari**.

■ **Esempio 23.1 — Coordinate cartesiane.** ■

■ **Esempio 23.2 — Coordinate polari nel piano.** ■

■ **Esempio 23.3 — Coordinate sferiche.** ■

23.2 Funzioni di più variabili - campi

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}(q^i)) = F(q^i) \tag{23.2}$$

23.2.1 Limiti e funzioni continue

23.2.2 Derivate

Definizione 23.3 — Funzione derivabile.

Definizione 23.4 — Derivate parziali. La derivata parziale di una funzione viene definita come la derivata della funzione rispetto a una delle variabili indipendenti, mantenendo costanti le altre variabili,

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(q^1, \dots, q^i + \varepsilon, \dots, q^N) - f(q^1, \dots, q^i, \dots, q^N)}{\varepsilon} \tag{23.3}$$

Definizione 23.5 — Derivata direzionale. La derivata direzionale di un campo $f(\mathbf{r})$ nel punto $\mathbf{r}_0$ nella direzione identificata dal versore $\hat{\mathbf{t}}$ è definita come,

$$\nabla_{\hat{\mathbf{t}}} f(\mathbf{r}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\mathbf{r}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{t}}) - f(\mathbf{r}_0)}{\varepsilon} \ , \tag{23.4}$$

cioè come il limite del rapporto incrementale del valore della funzione $f(\mathbf{r})$, muovendosi dal punto $\mathbf{r}_0$ al punto $\mathbf{r}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{t}}$.

23.2.3 Operatori differenziali

Definizione 23.6 — Gradiente.

$$\nabla_{\hat{\mathbf{t}}} f =: \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla f \tag{23.5}$$

Proprietà 23.1 — Operatore nabla, ∇ – vettore formale.

Proprietà 23.2 — Coordinate cartesiane.

Proprietà 23.3 — Direzione di massima crescita.

Definizione 23.7 — Divergenza. La divergenza viene definita come l'operatore differenziale del primo ordine che prende un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e restituisce un campo scalare, che può essere rappresentato con il prodotto scalare tra il vettore formale nabla ∇ e il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \ , \tag{23.6}$$

Proprietà 23.4 — Coordinate cartesiane. L'espressione in coordinate cartesiane della divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) = \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \ . \end{aligned} \tag{23.7}$$

Proprietà 23.5 — Flusso elementare.

Definizione 23.8 — Rotore. Il rotore viene definito come l'operatore differenziale del primo ordine che prende un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e restituisce un campo vettoriale, che può essere rappresentato con il prodotto vettore tra il vettore formale nabla ∇ e il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \ , \tag{23.8}$$

Proprietà 23.6 — Coordinate cartesiane. L'espressione in coordinate cartesiane del rotore di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{23.9}$$

Proprietà 23.7 — Circuitazione elementare.

23.2.4 Integrali

23.2.4.1 Integrali di linea

Definizione 23.9 — Massa. L'integrale "della massa" m di una curva γ, viene definito come l'integrale sulla curva di una funzione scalare $f(\mathbf{r})$, definita densità lineare,

$$m = \int_\gamma f(\mathbf{r}) \tag{23.10}$$

Definizione 23.10 — Lavoro. L'integrale "del lavoro" del campo vettoriale "di forza" $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ lungo la linea γ è definito come

$$L = \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \ . \tag{23.11}$$

Definizione 23.11 — Circuitazione. La circuitazione di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è definito come il suo integrale del lavoro lungo una linea chiusa γ,

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{F}) := \oint_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \ . \tag{23.12}$$

23.2.4.2 Integrali di superficie

Definizione 23.12 — Massa. L'integrale "della massa" m di una superficie S, viene definito come l'integrale sulla superficie di una funzione scalare $f(\mathbf{r})$, definita densità superficiale,

$$m = \int_S f(\mathbf{r}) \tag{23.13}$$

Definizione 23.13 — Flusso.

$$\Phi_S(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \ . \tag{23.14}$$

23.2.4.3 Integrali di volume

Definizione 23.14 — Massa. L'integrale "della massa" m di una superficie V, viene definito come l'integrale sul volume di una funzione scalare $f(\mathbf{r})$, definita densità volumetrica,

$$m = \int_V f(\mathbf{r}) \tag{23.15}$$

23.2.5 Teoremi

Teorema 23.1 — Teorema del gradiente.

$$\oint_{\partial V} f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \int_V \nabla f(\mathbf{r}) \tag{23.16}$$

Teorema 23.2 — Teorema della divergenza.

$$\Phi_{\partial V}(\mathbf{F}) = \oint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{23.17}$$

Teorema 23.3 — Teorema del rotore.

$$\Gamma_{\partial S}(\mathbf{F}) = \oint_{\partial S} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) = \int_S \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{23.18}$$

IX

Geometria

Introduzione storica:

- Euclide
- Cartesio
- Riemann

24. Geometria euclidea

25. Geometria analitica

La geometria analitica tratta lo studio dello spazio e delle entità geometriche facendo uso di sistemi di coordinate. Le coordinate parametrizzano lo spazio. Le entità geometriche possono essere rappresentate da equazioni che legano il valore delle coordinate.

25.1 Geometria nel piano

25.1.1 Coordinate

25.1.1.1 Coordinate cartesiane

25.1.1.2 Coordinate polari

25.1.2 Punto, distanze, retta

Definizione 25.1 — Punto. Dato un sistema di coordinate cartesiane, un punto P nel piano è individuato dalle sue due coordinate (x, y).

Definizione 25.2 — Distanza tra due punti. La distanza tra due punti nel piano viene calcolata usando il teorema di Pitagora

$$d_{PQ}^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 \ . \tag{25.1}$$

Perchè la distanza è data come una definizione? Geometria di Riemann: la distanza definisce tutte le proprietà di una geometria

Definizione 25.3 — Retta. La retta può essere definita come l'insieme di punti (x, y) equidistanti da due punti dati $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

Partendo dalla definizione

$$\begin{gathered} d_1^2 = d_2^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\ x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \end{gathered} \tag{25.2}$$

$$\rightarrow \qquad 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0 \ . \tag{25.3}$$

Quindi l'equazione generale della retta può essere riscritta nella forma

$$Ax + By + C = 0 \ . \tag{25.4}$$

25.1.3 Trasformazioni di coordinate cartesiane e trasformazioni di curve

25.1.3.1 Traslazione dell'origine

Sistema di coordinate $O'x'y'$ con assi paralleli al sistema di coordinate Oxy e coordinate dell'origine $x_{O'}$, $y_{O'}$

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + x_{O'} \\ y = y' + y_{O'} \end{cases} \tag{25.5}$$

25.1.3.2 Rotazione attorno all'origine

Sistema di coordinate $O'x'y'$ origine coincidente con quella del sistema di coordinate Oxy e assi rotati di un angolo θ

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \tag{25.6}$$

25.1.4 Coniche

25.1.4.1 Parabola

Definizione 25.4 — Parabola. Insieme dei punti P del piano equidistanti da un punto F, chiamato **fuoco**, e una retta r chiamata **direttrice**.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r) \tag{25.7}$$

Scegliendo il fuoco $F(0, d)$ e la retta $r : y = -d$, si ricava l'equazione della parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y degli assi cartesiani.

$$\begin{aligned} d_{PF}^2 &= d_{Pr}^2 \\ (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 &= (y - y_r)^2 \\ x^2 + (y - d)^2 &= (y + d)^2 \\ x^2 + y^2 - 2dy + d^2 &= y^2 + 2dy + d^2 \end{aligned} \tag{25.8}$$

$$\rightarrow \qquad 4dy = x^2 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{4d}x^2 \ . \tag{25.9}$$

Coordinate polari. In coordinate polari, con l'origine nel fuoco della parabola

$$r = r\cos\theta + 2d \qquad \rightarrow \qquad r(1 - \cos\theta) = 2d \ . \tag{25.10}$$

25.1.4.2 Ellisse

Definizione 25.5 — Ellisse. Insieme dei punti P del piano la cui somma delle distanze da due punti F_1, F_2, chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante.

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a \tag{25.11}$$

Scegliendo i fuochi $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a\\
&\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2\\
&4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&(cx-a^2)^2=(-a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2\\
&c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x-c)^2+a^2y^2\\
&(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)
\end{aligned} \tag{25.12}$$

Definendo $b^2 := a^2-c^2 > 0$, si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ . \tag{25.13}$$

Coordinate polari. Secgliendo un sistema di coordinate polari, con l'origine nel fuoco $(x,y)=(-c,0)$,

$$\begin{cases} r\cos\theta = x+c\\ r\sin\theta = y\end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} x^2 = r^2\cos^2\theta - 2rc\cos\theta + c^2\\ y^2 = r^2\sin^2\theta\end{cases} \tag{25.14}$$

$$\begin{aligned}
&(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\\
&(r^2\cos^2\theta-2rc\cos\theta+c^2)+\frac{a^2}{a^2-c^2}r^2\sin^2\theta=a^2
\end{aligned} \tag{25.15}$$

$$\begin{aligned}
&\rho+\sqrt{\rho^2\sin^2\theta+(2c-\rho\cos\theta)^2}=2a\\
&\rho^2-4a\rho+4a^2=\underbrace{\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta}_{=\rho^2}-4c\rho\cos\theta+4c^2\\
&\rho\left(1-\frac{c}{a}\cos\theta\right)=a^2-c^2 \qquad\qquad \left(0\le e=\frac{c}{a}<1\right)\\
&\rho\,(1-e\cos\theta)=a(1-e^2)
\end{aligned} \tag{25.16}$$

25.1.4.3 Iperbole

Definizione 25.6 — Iperbole. Insieme dei punti P del piano la cui differenza delle distanze da due punti F_1, F_2, chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante in valore assoluto.

$$|\mathrm{dist}(P,F_1)-\mathrm{dist}(P,F_2)|=2a \tag{25.17}$$

Scegliendo i fuochi $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=\mp 2a\\
&\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\mp 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2\\
&4cx=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&(cx-a^2)^2=(\mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2\\
&c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x-c)^2+a^2y^2\\
&(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)
\end{aligned} \tag{25.18}$$

Definendo $b^2 := c^2 - a^2 > 0$, si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{25.19}$$

Coordinate polari. Secgliendo un sistema di coordinate polari, con l'origine nel fuoco $(x, y) = (-c, 0)$,

$$\begin{aligned}
&\left|\rho - \sqrt{\rho^2 \sin^2\theta + (2c - \rho\cos\theta)^2}\right| = 2a \\
&\rho - \sqrt{\rho^2 \sin^2\theta + (2c - \rho\cos\theta)^2} = \mp 2a \\
&\rho^2 \pm 4a\rho + 4a^2 = \underbrace{\rho^2 \sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta}_{=\rho^2} - 4c\rho\cos\theta + 4c^2 \\
&\pm a\rho + a^2 = -4c\rho\cos\theta + c^2 \\
&\rho\left(1 \pm \frac{c}{a}\cos\theta\right) = \mp a\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \qquad \left(e = \frac{c}{a} > 1\right) \\
&\rho\left(1 \pm e\cos\theta\right) = \mp a\left(1 - e^2\right)
\end{aligned} \tag{25.20}$$

Esistono due soluzioni, corrispondenti ai due rami dell'iperbole. Scegliendo i segni:

- superiori
$$\rho = \frac{a(e^2-1)}{1 + e\cos\theta} \ , \tag{25.21}$$
il raggio è continuo e positivo per i valori di $\theta \in [-\overline{\theta}, \overline{\theta}]$ con $\cos\overline{\theta} = -\frac{1}{e}$
- inferiori
$$\rho = \frac{a(e^2-1)}{e\cos\theta - 1} \ , \tag{25.22}$$
il raggio è continuo e positivo per i valori di $\theta \in [-\overline{\theta}, \overline{\theta}]$ con $\cos\overline{\theta} = \frac{1}{e}$

25.2 Geometria nello spazio

X

Calcolo delle variazioni

26. Calcolo delle variazioni

Definizione 26.1 — Funzionale. Un funzionale può essere definito come una funzione che ha come argomento una funzione.

Definizione 26.2 — Funzionale azione.

$$F = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx \tag{26.1}$$

Ci si può ricondurre sempre a un'espressione di f che dipende unicamente da $x, y(x), y'(x)$, con la funzione $y(x)$ vettoriale.

Definizione 26.3 — Variazione di una funzione. Definiamo variazione di una funzione $y(x)$, la famiglia di funzioni $y(x)+\varepsilon q(x)$, per $\forall q(x)$ in modo tale che $y(x)+\varepsilon q(x)$ soddisfi i vincoli ai quali è soggetta $y(x)$.

Definizione 26.4 — Variazione di un funzionale. Definiamo la variazione del funzionale F, **per ogni funzione** $q(x)$,

$$\delta F := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)+\varepsilon q(x), y'(x)+\varepsilon q'(x))dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx \right] \tag{26.2}$$

$$\begin{aligned}
\delta F &:= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)+\varepsilon q(x), y'(x)+\varepsilon q'(x))dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y(x)+\varepsilon q(x), y'(x)+\varepsilon q'(x)) - f(x, y(x), y'(x))dx] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} \left[f(x, y(x), y'(x)) + \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial y} q(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} q'(x) \right) + o(\varepsilon) - f(x, y(x), y'(x))dx \right] = \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} q(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} q'(x) \right] dx = \\
&= \left[q(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \Bigg|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] q(x)dx \ .
\end{aligned} \tag{26.3}$$

Stazionarietà della variazione, $\delta F = 0$. Se si impone $\delta F = 0$ **per ogni funzione** $q(x)$, seguono le condizioni

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 & , \qquad x \in [x_0, x_1] \\ q(x_0)\dfrac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x=x_0} = 0 & \\ q(x_1)\dfrac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x=x_1} = 0 & \end{cases} \tag{26.4}$$

Se i valori della funzione $y(x)$ negli estremi dell'intervallo $[x_0, x_1]$ sono noti e fissi, la variazione della funzione in quei punti è nulla, e quindi $q(x_0) = q(x_1) = 0$. In questo caso, non ci sono condizioni sui valori di $\frac{\partial f}{\partial y'}$ in quei punti.

Definizione 26.5 — Equazione di Euler–Lagrange. L'equazione

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad , \qquad x \in [x_0, x_1] \tag{26.5}$$

è definita equazione di Euler–Lagrange.

Identità di Beltrami: caso particolare $\partial f/\partial x = 0$. Nel caso in cui la funzione f non dipenda esplicitamente dalla variabile x, si può scrivere

$$\frac{d}{dx}f = \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}y' = \frac{d}{dx}f - \frac{\partial f}{\partial y'}y'' \ . \tag{26.6}$$

Moltiplicando per y' l'equazione di Euler–Lagrange, e sostituendo l'espressione di $\frac{\partial f}{\partial y}y'$

$$\begin{aligned} 0 &= y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx}f + y''\frac{\partial f}{\partial y'} = \\ &= \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{d}{dx}f \qquad = \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx}f\right) \end{aligned} \tag{26.7}$$

e integrando in x si ottiene quella che viene definita identità di Beltrami

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = c \ , \tag{26.8}$$

dove c è una costante di integrazione da determinare con le informazioni specifiche del problema.

■ **Esempio 26.1 — Brachistocrona.** Si vuole determinare l'equazione della curva immersa in un campo gravitazionale uniforme $\mathbf{g}$ che rende minimo il tempo impiegato da un corpo di massa m per raggiungere il punto B a partire dal punto A.
Il tempo impiegato è la somma di tutti i tempi elementari

$$T = \int_0^T dt \ . \tag{26.9}$$

La lunghezza $d\ell = \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ percorsa in un intervallo di tempo elementare dt vale

$$d\ell = |\mathbf{v}|dt \quad \rightarrow \quad dx = \frac{v}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}dt, \tag{26.10}$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità del corpo nell'istante di tempo t. Per mettere in relazione la velocità con la posizione nello spazio del corpo, si fa riferimento al principio di conservazione dell'energia meccanica in assenza di forze conservative,

$$E = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 + mgy = E_0 = mgy_A \tag{26.11}$$

$$\rightarrow \qquad v = \sqrt{2g(y_A - y(x))} \ . \tag{26.12}$$

Si può quindi riscrivere l'integrale del tempo impiegato in funzione della variabile x

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_A - y)}} dx \tag{26.13}$$

Si definisce la variabile $z(x) := y_A - y$, $z'(x) = -y'(x)$ e si riconosce quindi la lagrangiana

$$f(x, z(x), z'(x)) = \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}} \ , \tag{26.14}$$

che non dipende esplicitamente dalla variabile x. Si può usare quindi l'identità di Beltrami per risolvere il problema della minimizzazione del funzionale T che rappresenta il tempo impeigato. Si calcola la derivata parziale,

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{1}{\sqrt{2gz}} \frac{1}{2} \left(1 + z'^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2z' \tag{26.15}$$

per inserirne l'espressione nell'identità di Beltrami

$$\begin{aligned} c &= z' \frac{1}{\sqrt{2gz}} \left(1 + z'^2\right)^{-\frac{1}{2}} z' - \frac{1}{\sqrt{2gz}} \left(1 + z'^2\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2gz}} \left(1 + z'^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(z'^2 - 1 - z'^2\right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2gz}} \left(1 + z'^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{26.16}$$

Si ottiene quindi l'equazione differenziale

$$z(1 + z'^2) = C^2 \ . \tag{26.17}$$

Questa equazione può essere risolta usando il cambio di variabili

$$\begin{cases} x = A\left[\phi - \sin\phi\right] \\ z = A\left[1 - \cos\phi\right] \end{cases} \tag{26.18}$$

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\phi}\frac{d\phi}{dx} = A \sin\phi \frac{1}{A(1-\cos\phi)} = \frac{\sin\phi}{1-\cos\phi} \tag{26.19}$$

$$C^2 = A\left(1 - \cos\phi\right)\left(1 + \frac{\sin^2\phi}{(1-\cos\phi)^2}\right) = A\frac{1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi}{1-\cos\phi} = A\frac{2(1-\cos\phi)}{(1-\cos\phi)} = 2A \ . \tag{26.20}$$

Punto $A = (0,0) = (x(0), z(0))$ Punto $B = (0,0) = (x_B, z_B)$ La variabile A va determinata imponendo il passaggio per B, insieme al valore ϕ^* ■

XI Calcolo combinatorio

Combinazioni, distribuzioni, permutazioni,. . .

XII Statistica

27. Variabili casuali

Definizione 27.1 — σ-algebra, $\mathcal{F}$.

Definizione 27.2 — Misura di probabilità, ν.

Definizione 27.3 — Spazio misurabile, $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definizione 27.4 — Spazio di probabilità, $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$.

Definizione 27.5 — Variabile casuale, $X : (\Omega, \mathcal{F}, \nu) \to (E, \mathcal{E})$. Una variabile casuale può essere definita come una funzione $X : \Omega \to E$, che ha come:
- dominio l'insieme degli eventi (o spazio campionario), Ω,
- codominio lo spazio dei risultati o delle osservazioni, E

27.1 Statistica univariata

27.1.1 Variabili casuali, discrete e continue

Definizione 27.6 — Variabile casuale discreta. Una variabile aleatoria è discreta, se l'insieme dei suoi possibili valori (discreti) è finito o numerabile, cioé può essere messo in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

■ **Esempio 27.1** La variabile casuale che descrive il lancio di un dado a sei facce può i valori $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e quindi è una variabile casuale discreta. ■

■ **Esempio 27.2** Una variabile casuale che ha come possibili valori i numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ è una variabile discreta, poiché l'insieme dei suoi valori è numerabile. ■

Definizione 27.7 — Variabile casuale continua. Una variabile aleatoria è continua, se l'insieme dei suoi possibili valori ha la potenza del continuo, come i numeri reali.

■ **Esempio 27.3** Una variabile casuale che rappresenta la distanza di un lancio di freccia dal centro di un bersaglio è una variabile casuale continua, poiché può assumere tutti i valori reali non nulli, $X(\omega) \in \mathbb{R}^+$. ■

■ **Esempio 27.4** Una variabile casuale che ha come possibili valori i numeri reali dell'intervallo limitato $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è una variabile continua. ■

27.1.2 Funzioni di probabilità

Definizione 27.8 — Funzione cumulativa di probabilità. La funzione cumulativa di probabilità valuta la probabilità totale che un evento ω abbia un valore osservato $X(\omega)$ appartenente a un sottoinsieme del codominio, $A \subseteq E$

$$P_X(A) = \nu\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = P(X \in A) \tag{27.1}$$

Definizione 27.9 — Distribuzione di probabilità – variabile discreta. Per una variabile discreta X, la funzione distribuzione di probabilità rappresenta la probabilità dei singoli valori osservabili,

$$p(x) = P(X = x) \tag{27.2}$$

Definizione 27.10 — Distribuzione di probabilità – variabile continua. Per una variabile continua X, la funzione cumulativa $P(X \in A)$ può essere rappresentata come l'integrale sull'insieme A della funzione distribuzione di probabilità $p(x)$,

$$P(X \in A) = \int_A p(x) \tag{27.3}$$

Proprietà delle funzioni di probabilità.

- **Non-negatività**: la probabilità di un evento è non negativa. Da questo segue che la distribuzione di probabilità è non negativa,

$$p(x) \geq 0 \; . \tag{27.4}$$

- **Unitarietà**: la probabilità cumulativa su tutti i possibili valori che può assumere la variabile casuale è unitaria, 100%. Questo risultato implica che non si possono verificare eventi che implichino un valore della variabile casuale al di fuori del suo codominio;
  - per una variabile discreta:

$$\sum_k p(x_k) = 1 \tag{27.5}$$

  - per una variabile continua:

$$\int_E p(x)dx = 1 \tag{27.6}$$

■ **Notation 27.1** Indichiamo con $\mathbb{E}[\cdot]$ l'operatore definito come:

- nel caso agisca su una variabile discreta

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_k f(x_k)p(x_k) \tag{27.7}$$

- nel caso agisca su variabili continue F che assume valori $f(x)$

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_E f(x)p(x)dx \tag{27.8}$$

27.1.3 Indicatori statistici

Definizione 27.11 — Valore atteso. Il valore atteso di una variabile casuale X è definita come

$$\overline{X} := \mathbb{E}[X] \tag{27.9}$$

Definizione 27.12 — Varianza. La varianza di una variabile casuale X è definita come

$$\sigma_X^2 := \mathbb{E}\left[(X - \overline{X})^2\right] \tag{27.10}$$

27.1.4 Distribuzioni di probabilità notevoli

27.1.4.1 Distribuzioni discrete

Definizione 27.13 — Variabile uniforme. La densità di probabilità uniforme sull' insieme dei valore $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ che può assumere una variabile casuale discreta, è definita come

$$p(x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \ , & x_i \in \{x_1, \dots, x_N\} \\ 0 \ , & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{27.11}$$

Definizione 27.14 — Variabile di Bernoulli. La densità di probabilità di Bernoulli è una variabile casuale discreta che può assumere due valori, qui chiamati $\{0, 1\}$, con probabilità

$$p(x) = \begin{cases} 1-p \ , & x = 0 \\ p \ , & x = 1 \end{cases} \tag{27.12}$$

Definizione 27.15 — Variabile binomiale. La variabile binomiale rappresenta la probabilità che, in un processo di Bernoulli di dimensione n, si verifichino k successi. La distribuzione di probabilità è quindi

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ , \qquad \text{per } k \in \{0, 1, \dots, n\} \tag{27.13}$$

Definizione 27.16 — Variabile di Poisson.

27.1.4.2 Distribuzioni continue

Definizione 27.17 — Variabile uniforme. La densità di probabilità uniforme in un intervallo limitato $E \in [a, b]$ è definita come

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \ , & x \in [a, b] \\ 0 \ , & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{27.14}$$

Definizione 27.18 — Variabile normale.

$$\mathcal{N}[\mu, \sigma^2](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-\frac{x-\mu}{2\sigma^2}} \tag{27.15}$$

Definizione 27.19 — Variabile Gamma.

Definizione 27.20 — Variabile t di Student.

27.1.5 Trasformazioni di funzioni di probabilità

27.2 Statistica multivariata

La statistica multivariata o multivariabile si occupa dello studio di più variabili casuali e delle loro relazioni. Le N variabili di interesse possono essere raccolte in un vettore N-dimensionale di variabili casuali,

$$\mathbf{X}(\omega) = \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ \dots \\ X_N(\omega) \end{bmatrix} . \tag{27.16}$$

27.2.1 Variabili casuali discrete e continue

27.2.2 Funzioni di probabilità

Per semplicità, vengono fornite le definizioni di una varaibile casuale bidimensionale,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{27.17}$$

Definizione 27.21 — Funzione cumulativa di probabilità.

$$P_{\mathbf{X}}(A) = P(\mathbf{X} \in A) = P((X,Y) \in A) \tag{27.18}$$

Definizione 27.22 — Distribuzione di probabilità congiunta – variabile discreta.

$$p(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \quad , \qquad p(x,y) = P(X = x, Y = y) \tag{27.19}$$

Definizione 27.23 — Distribuzione di probabilità congiunta – variabile continua.

$$P(\mathbf{X} \in A) = \int_A p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A p(x,y) dx dy \tag{27.20}$$

Proprietà: positività e normalizzazione

Definizione 27.24 — Distribuzione di probabilità marginale, p(x) – variabile discreta. Rappresenta la densità di probabilità che si osservi il valore della varabile $X = x$, indipendentemente dal valore della variabile Y, e si ottiene sommando la probabilità congiunta su tutti i valori di Y per il valore di X dato,

$$p(x) = \sum_y p(x,y) . \tag{27.21}$$

Definizione 27.25 — Distribuzione di probabilità marginale – variabile continua. Rappresenta la densità di probabilità che si osservi il valore della varabile $X = x$, indipendentemente dal valore della variabile Y, e si ottiene integrando (l'integrale è la somma per valori continui) la probabilità congiunta su tutti i valori di Y per il valore di X dato,

$$p(x) = \int p(x,y) dy . \tag{27.22}$$

Definizione 27.26 — Distribuzione di probabilità condizionale, $p(x|y)$. La distribuzione di probabilità condizionale $p(x|y)$ rappresenta la densità di probabilità di osservare il valore $X = x$, una volta che si è osservato l'evento $Y = y$. La probabilità condizionale

$p(x|y)$ è definita per valori $Y = y$ che avvengono con probabilità marginale non nulla, come

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} \ . \qquad (27.23)$$

Giustificazione della definizione

■ **Esempio 27.5** ■

■ **Esempio 27.6** ■

27.2.3 Teorema di Bayes

Utilizzando l'eq.(27.23), è possibile esprimere la probabilità congiunta in termini della probabilità condizionale $p(y|x)$,

$$p(x,y) = p(y|x)p(x) \qquad (27.24)$$

o alternativamente in funzione della probabilità condizionale $p(x|y)$

$$p(x,y) = p(x|y)p(y) \ . \qquad (27.25)$$

Da queste relazioni segue immediatamente il teorema di Bayes.

Teorema 27.1 — Teorema di Bayes. Per un osservazione $Y = y$ con probabilità marginale non nulla, vale la relazione

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \ . \qquad (27.26)$$

Dimostrazione. Usando le eq.(27.24-27.25),

$$p(x,y) = p(y|x)p(x) = p(x|y)p(y) \ , \qquad (27.27)$$

è possibile scrivere

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \ . \qquad (27.28)$$

■

■ **Esempio 27.7 — Falsi positivi e falsi negativi.** Si vuole studiare l'accuratezza di un test nella verifica di un'ipotesi. Il problema può essere impostato come un problema con due variabili casuali discrete,

- X variabile che rappresenta l'esito del test, che può assumere due valori $X(\omega) \in \{\text{Positivo}, \text{Negativo}\}$
- Y variabile che rappresenta la validità dell'ipotesi, che può assumere due valori $Y(\omega) \in \{\text{Vero}, \text{Falso}\}$

In totale si possono quindi verificare quattro condizioni.

	Ipotesi vera	**Ipotesi falsa**
Test positivo	Vero positivo	Falso positivo
Test negativo	Falso negativo	Vero negativo

Vengono definiti alcuni indicatori che misurano la bontà del test:

- **specificità**: $\text{Sp} = \frac{VN}{VN+FP}$

- **predittività**: $\mathrm{Pr} = \frac{VP}{VP+FN}$
- **significatività**: $\mathrm{Si} = \frac{FN}{FN+VP}$

■

■ **Esempio 27.8** ■

27.2.4 Indicatori statistici

Definizione 27.27 — Valore atteso (volgarmente chiamato media). Il valore atteso di una variabile casuale multivariata (o multidimensionale) viene definita come la media pesata di tutti i possibili valori $\mathbf{x}_I$ della variabile casuale $\mathbf{X}_I$, pesati per il valore corrispondente della densità di probabilità

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] := \overline{\mathbf{X}} := \boldsymbol{\mu}_X = \sum_I f(\mathbf{x}_I)\mathbf{x}_I \ . \tag{27.29}$$

Definizione 27.28 — Covarianza. La covarianza viene definita come il valore atteso del "prodotto tensoriale" della deviazione della media con sé stesso, cioé

$$\mathbf{C}_{XX} := \mathbb{E}[(\mathbf{X}-\overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}-\overline{\mathbf{X}})^T] \ . \tag{27.30}$$

■ **Esempio 27.9** ■

Usando le proprietà della media, si può riscrivere la covarianza come

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{XX} &= \mathbb{E}[(\mathbf{X}-\overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}-\overline{\mathbf{X}})^T] = \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - \mathbb{E}[\mathbf{X}\overline{\mathbf{X}}^T] - \mathbb{E}[\overline{\mathbf{X}}\mathbf{X}^T] + \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T = \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - \underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{X}]}_{=\overline{\mathbf{X}}}\overline{\mathbf{X}}^T - \overline{\mathbf{X}}\underbrace{\mathbb{E}[\mathbf{X}^T]}_{=\overline{\mathbf{X}}} + \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T = \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - \overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}^T\end{aligned} \tag{27.31}$$

27.2.5 Distribuzione di probabilità notevoli

27.2.6 Trasformazioni di funzioni di probabilità

28. Variabili indipendenti identicamente distribuite e campionamento

28.1 Variabili indipendenti identicamente distribuite

Definizione 28.1 — Variabili indipendenti identicamente distribuite.

$$\overline{X}_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \tag{28.1}$$

28.1.1 Teorema dei grandi numeri

Teorema 28.1 — Teorema dei grandi numeri (legge debole). Per ogni epsilon,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1 \ , \tag{28.2}$$

ossia la media $\overline{X}_n$ **converge in probabilità** al valore atteso $\mu = \mathbb{E}[X_k]$ delle variabili i.i.d. X_k.

28.1.2 Teorema del limite centrale

Teorema 28.2 — Teorema del limite centrale. La media $\overline{X}_n$ **converge in distribuzione** alla distribuzione normale $\mathcal{N}[\mu, \sigma^2/N]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{X}_n \sim \mathcal{N}[\mu, \sigma^2/N] \ . \tag{28.3}$$

■ **Esempio 28.1** ■

28.2 Campionamento e stimatori

Definizione 28.2 — Stimatore statistico corretto *(Unbiased estimator)*.

28.2.1 Stimatore della media corretto

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_n \tag{28.4}$$

Unbiased average estimator.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{\mu}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_n\right] = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[x_n\right] = \\
&= \frac{1}{n} n \underbrace{\mathbb{E}\left[x_n\right]}_{=\mu} = \mu
\end{aligned} \tag{28.5}$$

■

28.2.2 Stimatore della varianza corretto

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_n - \hat{\mu})^2 \tag{28.6}$$

Unbiased variance estimator.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widehat{\sigma^2}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{\mu})^2\right] = \\
&= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{\mu})^2\right] = \\
&= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_n\widehat{\mu} + \widehat{\mu}^2\right] = \\
&= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\widehat{\mu}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k}_{n\widehat{\mu}} + n\widehat{\mu}^2\right] = \\
&= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\widehat{\mu}^2\right] = \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[x_k^2] - n\mathbb{E}[\widehat{\mu}^2]\right) = \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\mathbb{E}[x_1^2] - n\mathbb{E}[\widehat{\mu}^2]\right) = \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 + \underbrace{\mathbb{E}[x_1]}_{=\mu}{}^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \underbrace{\mathbb{E}[\widehat{\mu}]}_{=\mu}{}^2\right) = \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2\ .
\end{aligned} \tag{28.7}$$

■

29. Approcci alla statistica

29.1 Statistica descrittiva

Definizione 29.1 — Statistica descrittiva. La statistica descrittiva si occupa principalmente di una **rappresentazione riassuntiva**, tramite indicatori statistici o grafici. La statistica descrittiva non si preoccupa di costruire un modello del fenomeno che si sta osservando, ma piuttosto di rappresentare i dati in forma non parametrica.

Di solito, un approccio descrittivo al problema costituisce una fase preliminare a un approccio inferenziale: prima di scegliere un tipo di modello adatto a rappresentare il problema, è meglio dare un'occhiata ai dati disponibili.

Variabili aleatorie univariate. La rappresentazione descrittiva delle osservazioni di una variabile casuale prevede:

- la rappresentazione grafica della distribuzione della probabilità (istogrammi,...)
- indicatori statistici sintetici di:
  - di tendenza: media, mediana, moda
  - di dispersione: varianza, deviazione standard, intervalli e quartili
  - di forma: simmetria (skewness), curtosi (kurtosis)

Variabili aleatorie multivariate. La rappresentazione simultanea di più variabili casuali prevede anch'essa

- la rappresentazione grafica delle probabilità congiunte, condizionali o marginali, in forma tabulare o grafica
- indicatori statistici sintetici
  - indicatori di tendenza, dispersione e forma
  - indicatori di relazione tra le variabili: dipendenza, correlazione e covarianza

29.2 Statistica inferenziale

Definizione 29.2 — Statistica inferenziale. L'approccio inferenziale alla statistica prevede l'uso dei dati per la **costruzione di un modello** del fenomeno osservato, che permetta di formulare delle proposizioni sul fenomeno osservato, come:

- la stima di valori, con un certo intervallo di confidenza, ad esempio tramite regressione
- la classificazione, o il raggruppamento di osservazioni in gruppi
- la conferma o la confutazione di un'ipotesi

29.2.1 Modelli statistici

Un modello statistico del fenomeno osservato spesso si riduce a un modello matematico della distribuzione di probabilità, e il problema di allenamento/taratura del modello si riduce a un problema di approssimazione di una funzione. A seconda del numero di parametri liberi (gradi di libertà) del modello da tarare, e dalla rigidità delle ipotesi sul modello si possono distinguere:

- **modelli parametrici**: modelli costruiti su ipotesi che possono essere stringenti, e che hanno un numero finito di parametri liberi di cui calcolare il valore. Ad esempio, si può assumere che la funzione densità di probabilità possa essere stimata con una combinazione di funzioni appartenenti a una famiglia di funzioni. Il valore dei parametri del modello viene calcolato risolvendo il problema di approssimazione di una funzione, che meglio rappresenti i dati disponibili. Esempi molto comuni di questo tipo di modelli sono:
  - i modelli lineari generalizzati
  - le reti neurali, che permettono una combinazione non lineare di funzioni
- **modelli non parametrici**: modelli costruiti senza alcuna ipotesi particolare, che spesso si basano su stimatori non parametrici dei valori di tendenza e dispersione
- **modelli semi-parametrici**: una via di mezzo tra i due

Quando si progetta e si calcolano i parametri di un modello, bisogna prestare attenzione a:

- modello sufficientemente generale da poter rappresentare il fenomeno
- modello che permetta degli adeguati livelli di **accuratezza** e **generalizzazione**: **tradeoff bias-variance**
- valutazione della bontà del modello

30. Esempi di applicazioni

30.1 Campionamento e stime

30.2 Regressione

Lo scopo della regressione è trovare un'approssimazione di una funzione, noti un insieme di valori di variabili indipendenti e valore della funzione. Dato un *training set* $D = \{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i=1:N}$ si vuole trovare una funzione $\hat{y}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}$ che sia una buona approssimazione della funzione che ha prodotto i dati del training set D. La funzione cercata è una funzione parametrica, rispetto ai parametri $\boldsymbol{\theta}$: il valore di questi parametri viene calcolato tramite un processo di ottimizzazione che spesso coincide con la ricerca del minimo di una funzione di perdita, *loss function*.
Un esempio di loss function da ottimizzare è l'errore quadratico medio,

$$E := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_i - \hat{y}(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}))^2 \tag{30.1}$$

30.2.1 Compromesso bias–varianza

Dato il training set $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1:N}$, si suppone che esista una funzione $y = f(x) + \varepsilon$, dove ε è un disturbo che ha media nulla e varianza σ^2. Lo scopo della regressione è quello di trovare una funzione $\hat{f}(x; D)$ che approssimi la funzione che ha prodotto i dati del training set nel migliore modo possibile. Di solito il concetto di "miglior modo possibile" coincide nella minimizzazione dell'errore quadratico medio

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{D,\varepsilon}\left[\left(y - \hat{f}(x; D)\right)^2\right] = \\
&= \mathbb{E}_D\left[\left(f(x) + \varepsilon - \hat{f}(x; D)\right)^2\right] = \\
&= \mathbb{E}_D\left[\left(f(x) - \hat{f}(x; D)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\varepsilon\right]
\end{aligned} \tag{30.2}$$

30.3 Classificazione

30.4 Teoria della decisione

- valutazione di una policy

- ottimizzazione di una policy

30.5 Conferma o confutazione di ipotesi

30.5.1 Test di Fisher

Definizione 30.1 — Ipotesi nulla, H_0. L'ipotesi nulla è l'ipotesi di cui si vuole verificare la validità tramite le osservazioni di una variabile casuale, X.

Il metodo di Fisher prevede che:

- sia nota la distribuzione di probabilità della variabile casuale X sotto l'ipotesi H_0, che può essere scritta sinteticamente come la probabilità condizionale, $p(X|H_0)$
- sia noto il **valore di significatività** α

■ **Esempio 30.1 — Progettazione di un esperimento.** ■

30.5.2 Test di Neyman–Pearson

Il metodo di Neyman–Pearson prevede la formulazione di due ipotesi, l'ipotesi nulla H_0 e un'ipotesi alternativa H_1, e la scelta di un valore di significatività del test α.

■ **Esempio 30.2 — Test medico per malattie.** ■

30.6 Progetto di esperimenti

31. Processi casuali

- ragioni storiche: **random walk** e moto browniano, oggetto di studio di uno degli articoli pubblicati da Einstein nel 1905, suo *annus mirabilis*, per il legame tra questi processi casuali e i processi di diffusione
- ragioni pratiche contemporanee: **Markov process** (MP) e Markov decision process (MDP) nella formulazione di problemi di machine learning

Definizione 31.1 — Processo causale o stocastico. Un processo stocastico è una famiglia di variabili casuali,

$$\{X_t(\omega) : \Omega \to E,\ t \in T\} \tag{31.1}$$

parammetrizzate dalla variabile tempo $t \in T$, definite sullo spazio campione Ω e che assumono valori nello spazio degli stati E.

I processi casuali possono essere:

- discreti o continui, a seconda che le variabili $X_t(\omega)$ possano assumere valori discreti o continui
- a tempo discreto o continuo, a seconda che la famiglia di variabili sia definita su un insieme discreto di instanti temporali $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ o continuo $t \in T = \{t|\ t \in \mathbb{R} \wedge t \in [t_0, t_{fin}]\}$

31.1 Esempi di processi stocastici

31.1.1 Random walk

31.1.2 Markov process

32. Introduzione all'intelligenza artificiale

- introduzione intelligenza artificiale
- machine learning:
  - supervised learning: regressione, classificazione
  - unsupervised learning: clustering, riduzione della dimensionalità
  - reinforcement learning
- deep learning: neural networks

32.1 Introduzione

Cosa si intende per intelligenza artificiale.
Nessun pasto è gratis – compromesso bias-varianza. https://it.wikipedia.org/wiki/Compromesso_bias-varianza
La maledizione della dimensionalità.
Deep learning.

32.2 Machine learning

32.2.1 Supervised learning

Il supervised learning (o apprendimento supervisionato) è un paradigma che permette di allenare un modello.

32.2.1.1 Regressione

La regressione consiste nell'approssimazione di funzioni continue.
Regressione lineare.
Regressione lineare generalizzata.

32.2.1.2 Classificazione

La classificazione consiste nell'identificazione di una categoria alla quale appartiene un oggetto.

32.2.2 Unsupervised learning

32.2.2.1 Dimensionality reduction

La riduzione delle dimensioni di un problema consente di:

- ridurre la complessità del problema

- mantenendo solo le informazioni principali

■ **Esempio 32.1 — Compressione immagini.** ■

32.2.2.2 Clustering

Il clustering è il raggruppamento di oggetti in insiemi che dimostrano caratteristiche simili.

32.2.3 Reinforcement learning

32.3 Deep learning

...

XIII

Matematica numerica - cenni

33. Equazioni e sistemi di equazioni

33.1 Equazioni

33.1.1 Equazioni non lineari

$$f(x) = 0 \tag{33.1}$$

33.1.1.1 Metodo della bisezione

Se la funzione $f(x)$ è continua, ed esistono due valori x_1, x_2 tali che $f(x_1)f(x_2) < 0$, allora esiste una soluzione $\overline{x} \in [x_1, x_2]$ dell'equazione $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x_1,\ x_2 \quad \text{ s.t. } f(x_1) < 0 \text{ and } f(x_2) > 0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ x = 0.5(x_1 + x_2),\ f = f(x),\ res = |f| \\
&\text{Bisection loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad if(f < 0): \\
&\qquad\qquad x_1 \leftarrow x \\
&\qquad else: \\
&\qquad\qquad x_2 \leftarrow x \\
&\qquad x = 0.5(x_1 + x_2) \\
&\qquad f = f(x) \\
&\qquad res = |f(x)| \\
&\qquad niter += 1
\end{aligned} \tag{33.2}$$

33.1.1.2 Metodo di Newton

Se la funzione $f(x)$ è "sufficientemente regolare" e il tentativo iniziale x_0 è "sufficientemente vicino" a una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, il metodo di Newton

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } f(x),\ f'(x) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x = x^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |f(x)| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad f'(x)\Delta x = -f(x) \\
&\qquad x \leftarrow x + \Delta x \\
&\qquad niter += 1,\ res = |f(x)|
\end{aligned} \tag{33.3}$$

converge a una soluzione dell'equazione.

33.2 Sistemi di equazioni

33.2.1 Sistemi di equazioni lineari

Metodo di sostituzione

33.2.2 Sistemi di equazioni non lineari

33.2.2.1 Metodo di Newton per sistemi

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
&\qquad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \\
&\qquad niter += 1,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|
\end{aligned} \tag{33.4}$$

34. Approssimazione di funzioni

34.1

35. Derivate

35.1

36. Ricerca dei massimi e ottimizzazione

36.1 Ottimizzazione libera

Un problema di ottimizzazione libera può essere formulato come il problema di ricerca del massimo di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cioè il punto $\mathbf{x}^*$ tale che

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \ , \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ . \tag{36.1}$$

36.1.1 Algoritmi

Discesa lungo il gradiente.

$$\begin{aligned}
&\text{Tentativo iniziale } \mathbf{x}^{(\mathbf{0})} \\
&\text{while} \quad (\quad \text{not stopping} \quad): \\
&\qquad \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - \alpha \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^{(n)})
\end{aligned} \tag{36.2}$$

36.2 Ottimizzazione vincolata

Un problema di ottimizzazione può essere soggetto ad alcuni vincoli, come:

- vincoli esprimibili con un'equazione, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- vincoli sul valore delle variabili indipendenti, $x_{i,min} \leq x_i \leq x_{i,max}$
- altri vincoli esprimibili con una disequazione, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$

■ **Esempio 36.1** Data la funzione $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, e l'equazione $g(x, y) = -2x + y - 1 = 0$ viene chiesto di

$$\text{Trovare } \max_{x,y} f(x, y) \qquad s.t. \qquad g(x, y) = 0 \tag{36.3}$$

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si definisce la funzione $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ e si cercano i valori delle variabili indipendenti e del moltiplicatore di Lagrange che ne annullano il gradiente,

$$\begin{cases}
0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = -2x + 2\lambda \\
0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = -2y - \lambda \\
0 = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = 2x - y + 1
\end{cases} \tag{36.4}$$

In questo problema si è ottenuto un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, la cui soluzione è

$$x^* = -\frac{2}{5}\ , \quad y^* = \frac{1}{5}\ , \quad \lambda^* = -\frac{2}{5}\ . \tag{36.5}$$

■

■ **Esempio 36.2** ■

■ **Esempio 36.3** ■

37. Integrali

37.1

38. Equazioni differenziali ordinarie

38.1 Riduzione a sistema di primo ordine

É possibile ridurre un'equazione differenziale ordinaria di ordine n, $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$, a un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Definendo le funzioni incognite

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= y(x) \\ y_1(x) &:= y'(x) \\ &\dots \\ y_{n-1}(x) &:= y^{(n-1)}(x) \ , \end{aligned} \tag{38.1}$$

il problema differenziale originale è equivalente al sistema

$$\begin{cases} F(x, y_0(x), y_1(x), y_{n-1}(x), y'_{n-1}(x)) = 0 \\ y'_0(x) = y_1(x) \\ y'_1(x) = y_2(x) \\ \dots \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \end{cases} \ , \tag{38.2}$$

che può essere scritto in forma sintetica (vettoriale)

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}(x)) = \mathbf{0} \ . \tag{38.3}$$

38.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy

38.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno

39. Statistica

XIV

Appendici, indice e bibliografia

Bibiliografia

Indice analitico

A. Prima appendice

. . .