



Scuole superiori

# Matematica

**OSB**



Copyright © 2023 OSB

PUBLISHED BY OSB

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*Latest version 5 ottobre 2023*

# Indice

I	<b>Storia</b>	
0.1	Cronologia .....	9
II	<b>Insiemistica e Logica</b>	
III	<b>Algebra in <math>\mathbb{R}</math></b>	
1	<b>Algebra simbolica - Calcolo letterale .....</b>	<b>15</b>
1.1	<b>Monomi .....</b>	<b>15</b>
1.1.1	Somma e differenza .....	15
1.1.2	Prodotto e divisione .....	15
1.1.3	Potenze e radici .....	15
1.2	<b>Polinomi .....</b>	<b>15</b>
1.3	<b>Potenze e radici .....</b>	<b>16</b>
1.4	<b>Esponenziali e logaritmi .....</b>	<b>16</b>
1.4.1	Esponenziale .....	16
1.4.2	Logaritmo .....	16
1.5	<b>Funzioni armoniche .....</b>	<b>17</b>
1.5.1	La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno .....	17
1.5.2	La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante ...	17
1.5.3	Formule del seno e coseno di somme e differenze .....	17
1.6	<b>Funzioni iperboliche .....</b>	<b>17</b>
2	<b>Equazioni .....</b>	<b>19</b>
2.1	<b>Equazioni algebriche .....</b>	<b>19</b>
2.1.1	Equazioni polinomiali .....	19
2.1.2	Equazioni algebriche razionali .....	20
2.1.3	Equazioni algebriche irrazionali .....	20

<b>2.2</b>	<b>Equazioni non algebriche o trascendenti</b>	<b>20</b>
2.2.1	Equazioni con i valori assoluti	20
2.2.2	Equazioni con esponenti e logaritmi	20
2.2.3	Equazioni con le funzioni armoniche	20
<b>3</b>	<b>Disequazioni</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>Disequazioni algebriche</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>Disequazioni non algebriche</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Sistemi di equazioni e di disequazioni</b>	<b>23</b>

## IV

## Algebra in $\mathbb{C}$

<b>4.1</b>	<b>Definizione dei numeri complessi</b>	<b>27</b>
4.1.1	Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)	27
<b>4.2</b>	<b>Operazioni con i numeri complessi</b>	<b>27</b>
4.2.1	Somma e differenza	27
4.2.2	Prodotto e divisione	27
4.2.3	Potenze e radici	28
4.2.4	Esponenziali e logaritmi	28

## V

## Calcolo infinitesimale

<b>5</b>	<b>Limiti</b>	<b>31</b>
<b>5.1</b>	<b>Infiniti e infinitesimi</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Derivate</b>	<b>33</b>
<b>6.1</b>	<b>Definizioni</b>	<b>33</b>
<b>6.2</b>	<b>Regole di derivazione</b>	<b>33</b>
6.2.1	Regole	33
6.2.2	Dimostrazioni	33
<b>6.3</b>	<b>Teoremi</b>	<b>34</b>
6.3.1	Teorema di de l'Hopital	34
<b>6.4</b>	<b>Tabella di derivate</b>	<b>34</b>
<b>6.5</b>	<b>Espansioni in serie</b>	<b>34</b>
<b>6.6</b>	<b>Applicazioni</b>	<b>35</b>
6.6.1	Studio funzione	35
6.6.2	Approssimazione locale di	35
<b>7</b>	<b>Integrali</b>	<b>37</b>
<b>7.1</b>	<b>Definizioni</b>	<b>37</b>
<b>7.2</b>	<b>Proprietà</b>	<b>37</b>
<b>7.3</b>	<b>Teoremi</b>	<b>37</b>
<b>7.4</b>	<b>Integrali fondamentali</b>	<b>38</b>

<b>7.5</b>	<b>Regole di integrazione</b> .....	<b>38</b>
7.5.1	Integrazione per parti .....	38
7.5.2	Integrazione con sostituzione .....	38

## VI

## Equazioni differenziali ordinarie

<b>8</b>	<b>Introduzione</b> .....	<b>41</b>
<b>8.1</b>	<b>Applicazioni</b> .....	<b>41</b>
<b>8.2</b>	<b>Definizioni</b> .....	<b>41</b>
<b>9</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti</b> ....	<b>43</b>
<b>9.1</b>	<b>Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine</b> ...	<b>43</b>
9.1.1	Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine	43
<b>9.2</b>	<b>Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine</b> .	<b>43</b>
9.2.1	Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine	43
<b>10</b>	<b>Metodo di separazione delle variabili</b> .....	<b>45</b>

## VII

## Vettori

<b>11</b>	<b>Algebra vettoriale</b> .....	<b>51</b>
<b>11.1</b>	<b>Definizioni</b> .....	<b>51</b>
11.1.1	Spazi vettoriali con prodotto interno .....	51
<b>11.2</b>	<b>Applicazioni</b> .....	<b>51</b>
11.2.1	Geometria .....	51
11.2.2	Fisica .....	51
<b>12</b>	<b>Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale</b> .....	<b>53</b>

## VIII

## Geometria

<b>13</b>	<b>Geometria nel piano</b> .....	<b>59</b>
<b>13.1</b>	<b>Geometria euclidea</b> .....	<b>59</b>
13.1.1	Introduzione .....	59
13.1.2	Rette e angoli .....	59
13.1.3	Triangoli .....	59
13.1.4	Circonferenza .....	59
<b>13.2</b>	<b>Geometria cartesiana</b> .....	<b>59</b>
13.2.1	Coordinate cartesiane .....	59
13.2.2	Punto, distanze, retta .....	59
13.2.3	Trasformazioni di coordinate cartesiane e trasformazioni di curve .....	60
13.2.4	Coniche .....	60

<b>14</b>	<b>Geometria nello spazio</b>	<b>63</b>
14.1	Geometria euclidea	63
14.2	Geometria cartesiana	63

**IX****Statistica****X****Matematica numerica - cenni**

<b>15</b>	<b>Equazioni e sistemi di equazioni</b>	<b>69</b>
15.1	Equazioni	69
15.1.1	Equazioni non lineari	69
15.2	Sistemi di equazioni	70
15.2.1	Sistemi di equazioni lineari	70
15.2.2	Sistemi di equazioni non lineari	70
<b>16</b>	<b>Derivate</b>	<b>71</b>
16.1		71
<b>17</b>	<b>Ricerca dei massimi e ottimizzazione</b>	<b>73</b>
17.1		73
<b>18</b>	<b>Integrali</b>	<b>75</b>
18.1		75
<b>19</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>77</b>
19.1	Riduzione a sistema di primo ordine	77
19.2	Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy	77
19.3	Schemi numerici per problemi ai valori al contorno	77
<b>20</b>	<b>Statistica</b>	<b>79</b>

**XI****Appendici, indice e bibliografia**

	<b>Bibilografia</b>	<b>83</b>
	<b>Indice</b>	<b>85</b>
	<b>Appendices</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Prima appendice</b>	<b>85</b>



# Storia

0.1	Cronologia .....	9
-----	------------------	---





## 0.1 Cronologia

...

### XVI secolo

- Nepier (Nepero) introduce i logaritmi

### XVII secolo

- Fermat
- Descartes (Cartesio) illustra ne *La Géométrie* i fondamenti della **geometria analitica**
- Huygens, Pascal
- Newton e Leibniz sviluppano contemporaneamente i fondamenti del **calcolo differenziale** e **integrale**, nell'ambito dello studio della **dinamica**
- fratelli Johann e Jakob Bernoulli
- de l'Hopital, Taylor

### XVIII secolo

- Euler (Eulero): analisi matematica; soluzione equazioni differenziali; teoria dei numeri; analisi complessa (estensione di funzioni reali in ambito complesso; identità di Eulero); topologia e teoria dei grafi (problema dei 7 ponti di Königsberg)
- d'Alembert si dedica allo studio del moto dei corpi e alla meccanica razionale
- Legendre
- Bayes: probabilità
- istituzione di scuole scientifiche, Parigi importante centro scientifico del tempo
- Laplace: meccanica razionale e celeste (*Mécanique Céleste*); trasformata; calcolo differenziale: potenziale, laplaciano ed equazione di Laplace
- Lagrange: formulazione lagrangiana della meccanica (*Mécanique analytique*); calcolo delle variazioni; metodo dei moltiplicatori di Lagrange; teoria dei numeri

### XIX secolo

- Jacobi: algebra lineare (determinante di matrici)
- Cauchy: algebra lineare; analisi complessa; statistica; teoria dei numeri; meccanica dei solidi
- Fourier: studio della trasmissione del calore; serie e trasformata di Fourier
- Gauss: teorema fondamentale dell'algebra; teoria dei numeri
- Dirichlet:
- Riemann: teoria dei numeri; geometria
- Hamilton: quaternioni; algebra lineare (teorema di Cayley-Hamilton); riformulazione della meccanica lagrangiana nella meccanica hamiltoniana
- Weierstrass: definizione rigorosa dei fondamenti dell'analisi (teorema di Weierstrass su esistenza di minimi e massimi di funzioni a variabile reale)
- Boole: algebra sugli insiemi, logica, e teoria dell'informazione
- Peano: tentativo di definizione assiomatica della matematica
- Cantor: studio degli insiemi infiniti e la loro dimensione

### XX secolo

- la matematica della probabilità e della meccanica quantistica: Lebesgue, Hilbert, von Neumann, Kolmogorov
- la nascita dell'informatica: Turing, Von Neumann
- la teoria dell'informazione: Shannon
- la teoria dei giochi: von Neumann, Morgenstern e Nash
- l'incompletezza della matematica: Gödel









# Algebra in $\mathbb{R}$

<b>1</b>	<b>Algebra simbolica - Calcolo letterale</b>	<b>15</b>
1.1	Monomi	15
1.2	Polinomi	15
1.3	Potenze e radici	16
1.4	Esponenziali e logaritmi	16
1.5	Funzioni armoniche	17
1.6	Funzioni iperboliche	17
<b>2</b>	<b>Equazioni</b>	<b>19</b>
2.1	Equazioni algebriche	19
2.2	Equazioni non algebriche o trascendenti	20
<b>3</b>	<b>Disequazioni</b>	<b>21</b>
3.1	Disequazioni algebriche	21
3.2	Disequazioni non algebriche	21
<b>4</b>	<b>Sistemi di equazioni e di disequazioni</b>	<b>23</b>



# 1. Algebra simbolica - Calcolo letterale

## 1.1 Monomi

**Definizione 1.1 — Monomio.** Un monomio è un'espressione matematica costituita dal prodotto di un coefficiente esplicitamente numerico e una parte letterale, nella quale compaiono unicamente moltiplicazioni e potenze intere.

**R** Viene richiesto che le potenze della parte letterale siano intere, per evitare di porre delle condizioni sulle basi delle potenze, essendo le potenze non intere definite solo per numeri reali positivi.

**Definizione 1.2 — Monomi simili.** I monomi simili sono i monomi che hanno la stessa parte letterale.

### 1.1.1 Somma e differenza

### 1.1.2 Prodotto e divisione

### 1.1.3 Potenze e radici

**Definizione 1.3 — Potenze e radici intere.** La potenza intera di ordine  $n \in \mathbb{N}$  di un monomio  $x$  è definita come il prodotto di  $x$  per se stesso  $n$  volte,

$$p_n(x) := x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}. \quad (1.1)$$

L'operazione inversa, quando possibile, è definita come radice di ordine  $n$ ,

$$x := \sqrt[n]{p_n(x)} = p_n(x)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.2)$$

**R** Per una comprensione più completa, bisogna rifarsi all'algebra dei numeri complessi IV.

**Definizione 1.4 — Potenze e radici non intere.**

## 1.2 Polinomi

**Definizione 1.5 — Polinomio.** Un polinomio reale di grado  $n$  viene definito come una

combinazione lineare dei monomi di grado  $\leq n$ ,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i \quad (1.3)$$

### 1.3 Potenze e radici

■ **Definizione 1.6 — Potenze e radici intere.**

### 1.4 Esponenziali e logaritmi

#### 1.4.1 Esponenziale

■ **Definizione 1.7 — Esponenziale.** L'elevamento a potenza di un numero  $a$

$$y = a^x \quad (1.4)$$

è un'operazione che coinvolge due numeri,  $a$  detto base e  $x$  detto esponente.

##### 1.4.1.1 Potenze non intere, valori ammissibili

##### 1.4.1.2 Proprietà

**Prodotto di potenze con la stessa base**

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (1.5)$$

**Potenza di potenza**

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.6)$$

**Prodotto di potenze con lo stesso esponente**

$$a^m b^m = (ab)^m \quad (1.7)$$

#### 1.4.2 Logaritmo

■ **Definizione 1.8 — Logaritmo.** Il logaritmo è l'operazione inversa

$$x = \log_a y \quad \text{se } y = a^x \quad (1.8)$$

##### 1.4.2.1 Potenze non intere, valori ammissibili

##### 1.4.2.2 Proprietà

**Somma di logaritmi con la stessa base**

$$\log_a m + \log_a n = \log_a(mn) \quad (1.9)$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = a^{\log_a m} \\ n = a^{\log_a n} \\ mn = a^{\log_a mn} \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} mn &= m \cdot n \\ a^{\log_a mn} &= a^{\log_a m} a^{\log_a n} = a^{\log_a m + \log_a n} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\rightarrow \log_a mn = \log_a m + \log_a n \quad (1.11)$$



**Prodotto di un logaritmo per uno scalare**

$$b \log_a m = \log_a m^b \quad (1.12)$$

**Cambio di base di un logaritmo**

$$\log_b m = \log_b a \log_a m \quad (1.13)$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = b^{\log_b m} \\ a = b^{\log_b a} \\ m = a^{\log_a m} = (b^{\log_b a})^{\log_a m} = b^{\log_b a \log_a m} \end{cases} \quad (1.14)$$

e confrontando le due espressioni per  $m$  si ottiene

$$\rightarrow \log_b m = \log_b a \log_a m \quad (1.15)$$

**1.5 Funzioni armoniche****1.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno****1.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante****1.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze**

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned} \quad (1.17)$$

**1.6 Funzioni iperboliche**



## 2. Equazioni

### 2.1 Equazioni algebriche

■ **Definizione 2.1 — Equazioni algebriche.** ...

#### 2.1.1 Equazioni polinomiali

**Definizione 2.2 — Equazione polinomiale.** Un'equazione polinomiale ha la forma

$$p(x) = 0 \quad (2.1)$$

dove  $p(x)$  è un polinomio. Il **grado** dell'equazione corrisponde al grado del polinomio  $p(x)$ , cioè alla potenza massima dei monomi. In maniera più esplicita, quindi, si può scrivere un'equazione polinomiale di grado  $n$  come

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{con } a_n \neq 0 \quad (2.2)$$

**Esistenza e numero delle soluzioni.** Un'equazione polinomiale di grado  $n$  ha **al massimo**  $n$  soluzioni reali. L'esistenza di soluzioni reali non è in generale garantita, mentre il **teorema fondamentale dell'algebra** assicura che esistano esattamente  $n$  soluzioni complesse di un'equazione polinomiale con coefficienti complessi.

##### 2.1.1.1 Equazioni di primo grado

La forma generale delle equazioni di primo grado è

$$ax + b = 0, \quad \text{con } a \neq 0 \quad (2.3)$$

e la soluzione è

$$x = -\frac{a_0}{a_1}. \quad (2.4)$$

##### 2.1.1.2 Equazioni di secondo grado

La forma generale delle equazioni di secondo grado è

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0 \quad (2.5)$$

Un'equazione di secondo grado può ammettere nel campo dei numeri reali 2 soluzioni (distinte o coincidenti) o nessuna soluzione, a seconda del valore dell'espressione definita come **discriminante**,  $\Delta := b^2 - 4ac$ :

- $\Delta > 0$ : due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$ : due soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0$ : nessuna soluzione reale

Quando il discriminante è non negativo, le soluzioni dell'equazione sono date dall'espressione

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} . \quad (2.6)$$

**Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado.** Una dimostrazione della formula risolutiva viene ricavata con la regola di completamento del quadrato

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c = \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\rightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (2.8)$$

È ora facile notare come questa equazione ha soluzioni solo quando il discriminante è non negativo. Quando il discriminante è non negativo, è possibile estrarre la radice quadra dell'espressione

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} . \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Equazioni algebriche razionali

### 2.1.3 Equazioni algebriche irrazionali

## 2.2 Equazioni non algebriche o trascendenti

### 2.2.1 Equazioni con i valori assoluti

### 2.2.2 Equazioni con esponenti e logaritmi

### 2.2.3 Equazioni con le funzioni armoniche

## 3. Disequazioni

3.1 Disequazioni algebriche

3.2 Disequazioni non algebriche



## **4. Sistemi di equazioni e di disequazioni**





# IV

## Algebra in $\mathbb{C}$

4.1	Definizione dei numeri complessi . . . . .	27
4.2	Operazioni con i numeri complessi . . . . .	27



## 4.1 Definizione dei numeri complessi

**Definizione 4.1 — Unità immaginaria.**

$$i := \sqrt{-1} \quad (4.1)$$

**Definizione 4.2 — Numero complesso.**

$$z = x + iy \quad , \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

### 4.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)

Si può definire una relazione biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  e il piano  $\mathbb{R}^2$ .

#### 4.1.1.1 Rappresentazione cartesiana.

#### 4.1.1.2 Rappresentazione polare.

Trasformazione tra coordinate cartesiane e polari

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{atan2}(x, y) \end{cases} \quad (4.3)$$

e quindi

$$z = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (4.4)$$

**La relazione di Eulero e la rappresentazione polare dei numeri complessi.** Usando le espansioni in serie di Taylor delle funzioni  $e^{i\theta}$ ,  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ , Eulero ricavò la formula che da lui prende il nome

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta . \quad (4.5)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ \sin \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots = \\ & &= \left[ 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right] + i \left[ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right] = \\ & &= \cos \theta + i \sin \theta . \end{aligned} \quad (4.6)$$

## 4.2 Operazioni con i numeri complessi

### 4.2.1 Somma e differenza

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) . \quad (4.7)$$

### 4.2.2 Prodotto e divisione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} . \quad (4.8)$$

### 4.2.3 Potenze e radici

$$z^n = \left( r e^{i\theta} \right)^n = r^n e^{in\theta} \quad (4.9)$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \left( r e^{i(\theta+2\pi m)} \right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{m}{n} 2\pi\right)} \quad (4.10)$$

### 4.2.4 Esponenziali e logaritmi

...

# V

# Calcolo infinitesimale

<b>5</b>	<b>Limiti</b>	<b>31</b>
5.1	Infiniti e infinitesimi	31
<b>6</b>	<b>Derivate</b>	<b>33</b>
6.1	Definizioni	33
6.2	Regole di derivazione	33
6.3	Teoremi	34
6.4	Tabella di derivate	34
6.5	Espansioni in serie	34
6.6	Applicazioni	35
<b>7</b>	<b>Integrali</b>	<b>37</b>
7.1	Definizioni	37
7.2	Proprietà	37
7.3	Teoremi	37
7.4	Integrali fondamentali	38
7.5	Regole di integrazione	38



## 5. Limiti

### 5.1 Infiniti e infinitesimi





## 6. Derivate

### 6.1 Definizioni

**Definizione 6.1 — Derivata.**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (6.1)$$

Interpretazione geometrica

### 6.2 Regole di derivazione

#### 6.2.1 Regole

**Derivata della somma di due funzioni e il prodotto per uno scalare**

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (af(x))' &= af'(x) \end{aligned} \quad (6.2)$$

**Proprietà 6.1 — Operatore lineare.** La derivata è un operatore lineare.

**Derivata del prodotto di due funzioni**

**Derivata del rapporto di due funzioni**

**Derivata di una funzione composta**

#### 6.2.2 Dimostrazioni

**Derivata della somma di due funzioni**

**Derivata del prodotto di due funzioni**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned} \quad (6.3)$$

### Derivata del rapporto di due funzioni

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x + \Delta x)g(x)} \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x + \Delta x)g(x)} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x + \Delta x)g(x)} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x) = \\
 &= \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

### Derivata di una funzione composta

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} f(g(x)) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))] = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\
 &= \dots \\
 &= f'(g(x)) g'(x) .
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

## 6.3 Teoremi

### 6.3.1 Teorema di de l'Hopital

## 6.4 Tabella di derivate

## 6.5 Espansioni in serie

**Definizione 6.2 — Serie di Taylor.** La serie di Taylor di una funzione  $f(x)$  centrata in  $x = x_0$  è la serie polinomiale

$$T[f(x_0)](x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n . \tag{6.6}$$

**Theorem 6.1** La serie di Taylor troncata alla  $n$ -esima potenza,

$$T^n[f(x_0)](x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i , \tag{6.7}$$

è un'approssimazione dell' $n$ -esimo ordine della funzione  $f(x)$ , i.e.

$$f(x) - T^n[f(x_0)](x) \sim o(|x - x_0|^n) \tag{6.8}$$

**Definizione 6.3 — Serie di MacLaurin.** La serie di MacLaurin di una funzione  $f(x)$  è definita come la sua serie di Taylor centrata in  $x = 0$ .

## **6.6 Applicazioni**

### **6.6.1 Studio funzione**

### **6.6.2 Approssimazione locale di**



## 7. Integrali

### 7.1 Definizioni

**Definizione 7.1 — Somma di Riemann.** Data una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , e una partizione  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n | a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  dell'intervallo  $[a, b]$ , la somma di Riemann viene definita come

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \quad (7.1)$$

con  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

**Definizione 7.2 — Integrale di Riemann.** Definendo  $\Delta x := \max_i (x_i - x_{i-1})$ , l'integrale di Riemann viene definito come il limite della somma di Riemann per  $\Delta x \rightarrow 0$  (e di conseguenza il numero di intervalli della partizione  $n \rightarrow \infty$ ), e viene indicato come

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma_n \quad (7.2)$$

**Definizione 7.3 — Integrale definito.**

**Interpretazione geometrica**

**Definizione 7.4 — Integrale indefinito.**

### 7.2 Proprietà

### 7.3 Teoremi

**Theorem 7.1 — Teorema della media.**

**Theorem 7.2 — Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale.**

$$\frac{d}{dx} \int_{t=a}^x f(t) dt = f(x) \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_{t=a}^x f(t) dt &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{t=a}^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_{t=a}^x f(t) dt \right] = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{t=x}^{x+\Delta x} f(t) dt = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \Delta x f(\xi) = \quad (\text{con } \xi \in [x, x + \Delta x]) \\
&= f(x) .
\end{aligned} \tag{7.4}$$

## 7.4 Integrali fondamentali

## 7.5 Regole di integrazione

### 7.5.1 Integrazione per parti

- Definendo  $F(x)$ ,  $G(x)$  le primitive delle funzioni  $f(x)$ , e  $g(x)$
- Integrando in  $x$  dalla regola di **derivazione del prodotto**  $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$ , riscritta isolando il termine  $F'(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)G'(x)$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int f(x)G(x)dx &= \int (F(x)G(x))' dx - \int F(x)G'(x)dx = \\
&= F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx
\end{aligned} \tag{7.5}$$

### 7.5.2 Integrazione con sostituzione

- Definendo la funzione composta  $\bar{F}(x) = F(y(x))$  e le derivate

$$\bar{f}(x) = \frac{d}{dx} \bar{F}(x) \quad , \quad f(y) = \frac{d}{dy} F(y) \tag{7.6}$$

- Partendo dalla regola di **derivazione della funzione composta**,  $\bar{F}(x) = F(y(x))$

$$\bar{f}(x) = \frac{d}{dx} \bar{F}(x) = \frac{d}{dx} F(y(x)) = \frac{dF}{dy}(y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = f(y(x)) y'(x) \tag{7.7}$$

Usando il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int f(y) dy \\
\bar{F}(x) &= \int \bar{f}(x) dx = \int f(y(x)) y'(x) dx
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Se si introduce la dipendenza  $y(x)$  nella prima equazione, si ottiene l'uguaglianza tra le ultime due espressioni,  $F(y(x)) = \bar{F}(x)$ , e quindi

$$\int f(y) dy = \int f(y(x)) y'(x) dx . \tag{7.9}$$

# Equazioni differenziali ordinarie

<b>8</b>	<b>Introduzione</b>	<b>41</b>
8.1	Applicazioni	41
8.2	Definizioni	41
<b>9</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti</b>	<b>43</b>
9.1	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine	43
9.2	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine	43
<b>10</b>	<b>Metodo di separazione delle variabili</b>	<b>45</b>





## 8. Introduzione

### 8.1 Applicazioni

### 8.2 Definizioni

**Definizione 8.1 — Equazione differenziale ordinaria.** Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che ha come incognita una funzione  $y(x)$ , nella quale possono comparire la funzione incognita  $y(x)$ , le sue derivate  $y^{(n)}(x)$  e la variabile indipendente  $x$ , che può essere scritto nella forma implicita

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0, \quad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \quad (8.1)$$

L'**ordine** dell'equazione differenziale viene definito come l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che compaiono nell'equazione.

**Definizione 8.2 — Equazione differenziale ordinaria lineare.** Un'equazione differenziale è lineare se si può scrivere come l'uguaglianza di una combinazione lineare delle derivate della funzione incognita e una funzione nota,  $f(x)$ . Ad esempio, la forma generale dell'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  può essere scritta come

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad \text{con } x \in \Omega. \quad (8.2)$$

**Definizione 8.3 — Equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti.** Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare con coefficienti  $a_i(x) = a_i$ , numeri che non dipendono dalla variabile indipendente  $x$ ,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad \text{con } x \in \Omega. \quad (8.3)$$

**Definizione 8.4 — Equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti.** Un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti con  $f(x) = 0$ ,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad \text{con } x \in \Omega. \quad (8.4)$$

In generale, la soluzione dell'equazione (8.1) dipende da  $n$  parametri indeterminati. In generale, un problema differenziale è composto da:

- un'equazione differenziale di ordine  $n$
- $n$  condizioni per determinare gli  $n$  parametri altrimenti indeterminati

**Definizione 8.5 — Problema di Cauchy.** Un problema di Cauchy è definito da:

- un'equazione differenziale di ordine  $n$

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0, \quad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \quad (8.5)$$

- $n$  condizioni che definiscono il valore della funzione incognita e delle prime  $n - 1$  derivate nell'estremo inferiore dell'intervallo

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y'(a) &= y_1 \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(a) &= y_{n-1} \end{aligned} \quad (8.6)$$

## 9. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti

### 9.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine

#### 9.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay'(x) + by(x) = 0, \quad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \quad (9.1)$$

Si cerca la soluzione nella forma  $y(x) = \alpha e^{\beta x}$  e, calcolando la derivata e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta + b)\alpha e^{\beta x} = 0. \quad (9.2)$$

Il prodotto di tre fattori si annulla quando si annulla uno dei tre fattori:

- $e^{\beta x}$  non si annulla per nessun valore di  $x$
- se si annulla  $\alpha$ ,  $\alpha = 0$ , si otterrebbe la soluzione triviale  $y(x) = 0$
- $\rightarrow$  deve quindi annullarsi il fattore  $a\beta + b$ : si ottiene quindi il valore  $\beta = -\frac{b}{a}$

La forma generale della soluzione dell'equazione (9.1) è quindi

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{a}x} \quad (9.3)$$

Per determinare il coefficiente  $\alpha$  è necessaria una condizione che definisca il valore della funzione (o della sua derivata) in un punto del dominio o del suo contorno.

### 9.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine

#### 9.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \quad (9.4)$$

Si cerca la soluzione nella forma  $y(x) = \alpha e^{\beta x}$  e, calcolando le derivate e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta^2 + b\beta + c)\alpha e^{\beta x} = 0. \quad (9.5)$$

I valori di  $\beta$  si ottengono dalla soluzione dell'equazione di secondo grado in  $\beta$ ,  $a\beta^2 + b\beta + c = 0$  che, a seconda del segno del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ , possono essere:

- $\Delta > 0$ : esistono due soluzioni reali distinte  $\beta_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- $\Delta = 0$ : esistono due soluzioni reali coincidenti  $\beta_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ .
- $\Delta < 0$ : esistono due soluzioni complesse coniugate  $\beta_{1,2} = \frac{-b}{2a} \mp j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

La soluzione dell'equazione differenziale assume quindi la forma

- $\Delta > 0$ :

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} \quad (9.6)$$

- $\Delta = 0$ :

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 x e^{\beta x} \quad (9.7)$$

- $\Delta < 0$ :

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 e^{\beta^* x} = \\ &= \alpha_1 e^{(re\{\beta\} + i im\{\beta\})x} + \alpha_2 e^{(re\{\beta\} - i im\{\beta\})x} = \\ &= e^{re\{\beta\}x} \left( \alpha_1 e^{i im\{\beta\}x} + \alpha_2 e^{-i im\{\beta\}x} \right), \end{aligned} \quad (9.8)$$

e per avere una soluzione reale, bisogna imporre  $\alpha_2 = \alpha_1^*$ , per ottenere la somma di due numeri complessi coniugati, uguale al doppio della somma della loro parte reale,

$$y(x) = 2e^{re\{\beta\}x} (re\{\alpha_1\} \cos(\beta x) - im\{\alpha_1\} \sin(\beta x)) , \quad (9.9)$$

che può essere riscritta come

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{re\{\beta\}x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) = \\ &= C e^{re\{\beta\}x} \cos(\beta x + \phi) . \end{aligned} \quad (9.10)$$

## 10. Metodo di separazione delle variabili

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) , \quad \text{con } x \in \Omega \quad (10.1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x)) \quad (10.2)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad (10.3)$$

■ **Esempio 10.1**  $y'(x) = xy(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \rightarrow \quad \ln |y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \rightarrow \quad y(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2} \quad (10.4)$$

Verifica:  $y'(x) = K\frac{1}{2}2xe^{\frac{1}{2}x^2} = Kxe^{\frac{1}{2}x^2} = xy(x)$ . ■





# Vettori

<b>11</b>	<b>Algebra vettoriale</b> .....	<b>51</b>
11.1	Definizioni .....	51
11.2	Applicazioni .....	51
<b>12</b>	<b>Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale</b> .....	<b>53</b>





Motivazione:

- non tutti gli oggetti di interesse della Matematica, della Fisica o delle Scienze in generale possono essere adeguatamente rappresentati da un singolo numero
- esempi: posizione, velocità, forza,...

Storia:

- ...
- da vettori nello spazio fisico a struttura astratta matematica



# 11. Algebra vettoriale

## 11.1 Definizioni

**Definizione 11.1 — Spazio vettoriale.** Uno spazio vettoriale è una struttura matematica composta da:

- un insieme  $V$ , i cui elementi  $\mathbf{v} \in V$  sono chiamati **vettori**
- un campo  $F$ , i cui elementi  $a \in F$  sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto a  $V$ , cioè il cui risultato è un elemento che appartiene a  $V$ , che soddisfano determinate proprietà
  - **somma vettoriale** di due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \quad (11.1)$$

- **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore  $\mathbf{u} \in V$  e uno scalare  $a \in F$ :

$$a\mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \quad (11.2)$$

■ **Proprietà 11.1 — Proprietà delle operazioni.**

■ **Definizione 11.2 — Base e dimensione di uno spazio.**

### 11.1.1 Spazi vettoriali con prodotto interno

## 11.2 Applicazioni

### 11.2.1 Geometria

### 11.2.2 Fisica



## 12. Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale

■ Definizione 12.1 — Vettore posizione.

■ Definizione 12.2 — Coordinate.

■ Esempio 12.1 — Coordinate cartesiane.

■ Esempio 12.2 — Coordinate polari.

■ Esempio 12.3 — Coordinate sferiche e superficie terrestre.

■  
■  
■



# VIII Geometria

<b>13</b>	<b>Geometria nel piano</b>	<b>59</b>
13.1	Geometria euclidea	59
13.2	Geometria cartesiana	59
<b>14</b>	<b>Geometria nello spazio</b>	<b>63</b>
14.1	Geometria euclidea	63
14.2	Geometria cartesiana	63





Introduzione storica:

- Euclide
- Cartesio
- Riemann



## 13. Geometria nel piano

### 13.1 Geometria euclidea

#### 13.1.1 Introduzione

#### 13.1.2 Rette e angoli

#### 13.1.3 Triangoli

#### 13.1.4 Circonferenza

### 13.2 Geometria cartesiana

#### 13.2.1 Coordinate cartesiane

#### 13.2.2 Punto, distanze, retta

**Definizione 13.1 — Punto.** Dato un sistema di coordinate cartesiane, un punto  $P$  nel piano è individuato dalle sue due coordinate  $(x, y)$ .

**Definizione 13.2 — Distanza tra due punti.** La distanza tra due punti nel piano viene calcolata usando il teorema di Pitagora

$$d_{PQ}^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 . \quad (13.1)$$

Perchè la distanza è data come una definizione? Geometria di Riemann: la distanza definisce tutte le proprietà di una geometria

**Definizione 13.3 — Retta.** La retta può essere definita come l'insieme di punti  $(x, y)$  equidistanti da due punti dati  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ .

Partendo dalla definizione

$$\begin{aligned} d_1^2 &= d_2^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\ x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 &= x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \end{aligned} \quad (13.2)$$

$$\rightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0 . \quad (13.3)$$

Quindi l'equazione generale della retta può essere riscritta nella forma

$$Ax + By + C = 0 . \quad (13.4)$$

### 13.2.3 Trasformazioni di coordinate cartesiane e trasformazioni di curve

#### 13.2.3.1 Traslazione dell'origine

Sistema di coordinate  $O'x'y'$  con assi paralleli al sistema di coordinate  $Oxy$  e coordinate dell'origine  $x_{O'}, y_{O'}$

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' + x_{O'} \\ y = y' + y_{O'} \end{cases} \quad (13.5)$$

#### 13.2.3.2 Rotazione attorno all'origine

Sistema di coordinate  $O'x'y'$  origine coincidente con quella del sistema di coordinate  $Oxy$  e assi rotati di un angolo  $\theta$

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (13.6)$$

### 13.2.4 Coniche

#### 13.2.4.1 Parabola

**Definizione 13.4 — Parabola.** Insieme dei punti  $P$  del piano equidistanti da un punto  $F$ , chiamato **fuoco**, e una retta  $r$  chiamata **direttrice**.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r) \quad (13.7)$$

Scegliendo il fuoco  $F(0, d)$  e la retta  $r: y = -d$ , si ricava l'equazione della parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse  $y$  degli assi cartesiani.

$$\begin{aligned} d_{PF}^2 &= d_{Pr}^2 \\ (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 &= (y - y_r)^2 \\ x^2 + (y - d)^2 &= (y + d)^2 \\ x^2 + y^2 - 2dy + d^2 &= y^2 + 2dy + d^2 \end{aligned} \quad (13.8)$$

$$\rightarrow 4dy = x^2 \quad \rightarrow y = \frac{1}{4d}x^2. \quad (13.9)$$

#### 13.2.4.2 Ellisse

**Definizione 13.5 — Ellisse.** Insieme dei punti  $P$  del piano la cui somma delle distanze da due punti  $F_1, F_2$ , chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante.

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a \quad (13.10)$$

Scegliendo i fuochi  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ 4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ (cx - a^2)^2 &= (-a\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x - c)^2 + a^2y^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned} \quad (13.11)$$

Definendo  $b^2 := a^2 - c^2 > 0$ , si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (13.12)$$

### 13.2.4.3 Iperbole

**Definizione 13.6 — Iperbole.** Insieme dei punti  $P$  del piano la cui differenza delle distanze da due punti  $F_1, F_2$ , chiamati **fuochi** dell'ellisse, è costante in valore assoluto.

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a \quad (13.13)$$

Scegliendo i fuochi  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} &= \mp 2a \\ \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= \mp 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ 4cx &= 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ (cx - a^2)^2 &= (\mp a\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x - c)^2 + a^2y^2 \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned} \quad (13.14)$$

Definendo  $b^2 := c^2 - a^2 > 0$ , si può riscrivere l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi coincidenti con gli assi cartesiani come

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (13.15)$$



## **14. Geometria nello spazio**

**14.1** Geometria euclidea

**14.2** Geometria cartesiana









# Matematica numerica - cenni



<b>15</b>	<b>Equazioni e sistemi di equazioni</b>	<b>69</b>
15.1	Equazioni	69
15.2	Sistemi di equazioni	70
<b>16</b>	<b>Derivate</b>	<b>71</b>
16.1		71
<b>17</b>	<b>Ricerca dei massimi e ottimizzazione</b>	<b>73</b>
17.1		73
<b>18</b>	<b>Integrali</b>	<b>75</b>
18.1		75
<b>19</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>77</b>
19.1	Riduzione a sistema di primo ordine	77
19.2	Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy	77
19.3	Schemi numerici per problemi ai valori al contorno	77
<b>20</b>	<b>Statistica</b>	<b>79</b>



## 15. Equazioni e sistemi di equazioni

### 15.1 Equazioni

#### 15.1.1 Equazioni non lineari

$$f(x) = 0 \tag{15.1}$$

##### 15.1.1.1 Metodo della bisezione

Se la funzione  $f(x)$  è continua, ed esistono due valori  $x_1, x_2$  tali che  $f(x_1)f(x_2) < 0$ , allora esiste una soluzione  $\bar{x} \in [x_1, x_2]$  dell'equazione  $f(x) = 0$ .

Algorithm parameters:  $tol, max\_iter$

Initial guess:  $x_1, x_2$  s.t.  $f(x_1) < 0$  and  $f(x_2) > 0$

Initialization:  $niter = 0, x = 0.5(x_1 + x_2), f = f(x), res = |f|$

Bisection loop:

*while*( $res > tol$  and  $niter < max\_iter$ ) :

*if*( $f < 0$ ) :

$x_1 \leftarrow x$

*else* :

$x_2 \leftarrow x$

$x = 0.5(x_1 + x_2)$

$f = f(x)$

$res = |f(x)|$

$niter+ = 1$

(15.2)

### 15.1.1.2 Metodo di Newton

Se la funzione  $f(x)$  è “sufficientemente regolare” e il tentativo iniziale  $x_0$  è “sufficientemente vicino” a una soluzione dell’equazione  $f(x) = 0$ , il metodo di Newton

Algorithm inputs:  $f(x)$ ,  $f'(x)$   
 Algorithm parameters:  $tol$ ,  $max\_iter$   
 Initial guess:  $x = x^0$   
 Initialization:  $niter = 0$ ,  $res = |f(x)|$   
 Newton loop: (15.3)  
 $while(res > tol \text{ and } niter < max\_iter) :$   
 $\quad f'(x)\Delta x = -f(x)$   
 $\quad x \leftarrow x + \Delta x$   
 $\quad niter+ = 1, \text{ } res = |f(x)|$

converge a una soluzione dell’equazione.

## 15.2 Sistemi di equazioni

### 15.2.1 Sistemi di equazioni lineari

Metodo di sostituzione

### 15.2.2 Sistemi di equazioni non lineari

#### 15.2.2.1 Metodo di Newton per sistemi

Algorithm inputs:  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$   
 Algorithm parameters:  $tol$ ,  $max\_iter$   
 Initial guess:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$   
 Initialization:  $niter = 0$ ,  $res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|$   
 Newton loop: (15.4)  
 $while(res > tol \text{ and } niter < max\_iter) :$   
 $\quad \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$   
 $\quad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$   
 $\quad niter+ = 1, \text{ } res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|$

## 16. Derivate

### 16.1





## **17. Ricerca dei massimi e ottimizzazione**

### **17.1**



## 18. Integrali

### 18.1



## 19. Equazioni differenziali ordinarie

### 19.1 Riduzione a sistema di primo ordine

È possibile ridurre un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$ ,  $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$ , a un sistema di  $n$  equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Definendo le funzioni incognite

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= y(x) \\ y_1(x) &:= y'(x) \\ &\dots \\ y_{n-1}(x) &:= y^{(n-1)}(x) , \end{aligned} \tag{19.1}$$

il problema differenziale originale è equivalente al sistema

$$\begin{cases} F(x, y_0(x), y_1(x), y_{n-1}(x), y'_{n-1}(x)) = 0 \\ y'_0(x) = y_1(x) \\ y'_1(x) = y_2(x) \\ \dots \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \end{cases} , \tag{19.2}$$

che può essere scritto in forma sintetica (vettoriale)

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}(x)) = \mathbf{0} . \tag{19.3}$$

### 19.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy

### 19.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno



## 20. Statistica





# Appendici, indice e bibliografia

# XI

	Bibilografia .....	83
	Indice .....	85
	Appendices .....	85
A	Prima appendice .....	85



## Bibiliografia



## A. Prima appendice

...