Scuole superiori

Fisica

OSB

Published by OSB

Latest version 16 ottobre 2023

Indice

Storia

0.1 Personaggi

- Galileo
  -
  -
- Newton
  -
  -
- Snell
- Huygens
  -
  -
- Hooke
- Lagrange: meccanica analitica
- Laplace: meccanica analitica
- Bernoulli
- Cauchy
- Navier
- Stokes
- Young
- Fresnel
- Thompson
- Fourier
- Carnot
- Joule
- Kelvin
- Volta
- Faraday
- Maxwell
- Heaviside
- Boltzmann
- Marie Sklodowska e Pierre Curie
- Thomson
- Rutherford
- Einstein
- Planck
- Bohr
- Heisenberg
- Schrodinger
- Dirac
- Born
- ...

1. Breve storia della fisica

1.1 La fisica prima di Galileo

1.1.1 ...

1.1.2 Le leggi del moto dei piantei: Copernico e Keplero

1.2 XVI e XVII secolo: la meccanica e l'ottica

- studio della dinamica dei corpi: reso difficile sulla Terra dalla presenza dell'aria e dalla resistenza dei corpi in moto
  - Galileo ricava il suo principio di inerzia paragonando la condizione di quiete con la condizione nella stiva di una nave in moto non accelerato (nella stiva non si percepisce la resistenza dell'aria)
  - ci si dedica allo studio dei corpi celesti, che Newton suppone si muovano nel vuoto
- per svolgere lo studio dei corpi celesti servono strumenti ottici, come il cannocchiale
  - nel procedimento di perfezionamento del cannocchiale, gli scienziati si trovano a studiare diversi fenomeni ottici
  - i risultati degli studi che permettono di perfezionare il cannocchiale trovano applicazione anche nel miglioramento dei microscopi

1.2.1 Il metodo scientifico: Galileo

- Il metodo scientifico
- Osservazioni astronomiche
- Il principio di inerzia

1.2.2 La meccanica classica e la legge di gravitazione universale: Newton

Isaac Newton (1642-1727) era studente al Trinity College di Cambridge, quando nel 1665 l'istituto venne chiuso per il diffondersi della peste, costringendo Newton a proseguire in autonomia i propri studi. Il 1666 viene considerato il suo *annus mirabilis* nel quale approfondì i suoi studi, sviluppando il calcolo infinitesimale – sviluppato in maniera indipendente dal tedesco Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) –, formulando i tre principi della dinamica classica e la legge di gravitazione universale.

Al ritorno in università a Cambridge nel 1667, Newton venne nominato membro del Trinity College e professore di matematica nel 1669.

Nel 1679, dopo essersi dedicato agli studi sull'ottica, Newton ritornò agli studi sulla gravità per la determinazione delle orbite dei pianeti e la derivazione rigorosa delle leggi di Keplero. Proprio quest'ultima derivazione forniva la risposta al dubbio che si sarebbero posti nel 1684 tre membri della Royal Society: il matematico e architetto Christopher Wren (1632-1723) – celebre per il suo ruolo nella ricostruzione di Londra dopo il grande incendio del 1666 –, il fisico Robert Hooke (1635-1703) – curatore degli esperimenti presso la Royal Society, da considerarsi il primo sperimentatore professionista retribuito della storia, celebre per i suoi esperimenti di ottica, il perfezionamento di microscopi e telescopi e la formulazione della legge elastica –, ed Edmond Halley (1656-1742) – professore a Oxford, famoso astronomo, matematico e scienziato della Terra, al quale fu intitolata la cometa della quale prevedette correttamente il ritorno dopo le osservazioni del 1532, del 1607 di Keplero, e del 1682.

Nel 1687 vennero dati alla stampa i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, testo nel quale Newton pubblicava molti dei suoi risultati tenuti fino ad allora inediti, tra i quali i principi della dinamica e la legge di gravitazione universale, usati per svolgere alcuni problemi sul moto dei corpi celesti, spiegare le maree come effetto dell'attrazione gravitazionale della Luna e presentare una prima stima della velocità del suono nell'aria: quest'ultima stima era sbagliata, a causa dell'ipotesi sbagliata da parte di Newton sulla propagazione del suono a temperatura costante.

1.2.3 L'ottica

- Newton: prisma e lenti; cannocchiale a riflessione
- Huygens
- Snell e Fresnel?

1.3 XVIII e XIX secolo: la termodinamica e l'elettromagnetismo

1.3.1 La meccanica analitica

- Leonhard Euler ()
- Lagrange ()
- Laplace ()

1.3.2 La meccanica dei mezzi continui: solidi e fluidi

Solidi:

- Hooke: legge costitutiva di solidi elastici
- Euler ()–Bernoulli (): modello di trave elastica
- Navier (): equazioni di governo del comportamento elastico delle strutture

Fluidi:

- Torricelli e Pascal: studi sulla statica dei fluidi
- Newton: studi sulla viscosità
- Bernoulli, D'Alembert, Lagrange, Laplace, Poisson: studio dei fluidi non viscosi
- Hagen, Poiseuille: studio di alcune correnti di fluidi viscosi: correnti in tubi
- Navier, Stokes: equazioni di governo dei fluidi
- Prandtl, von Karman: studio dello strato limite
- Reynolds, Kolmogorov: studio della turbolenza

1.3.3 La termodinamica

- Hooke () e Boyle () compiono studi sui gas, con l'impiego di pompe ad aria
- Black () e Watt () sviluppano i concetti di capacità termica e calore latente all'Università di Glasgow

- Sadi Carnot (1796-1832), abbandonata la carriera militare nell'esercito francese, si dedicò agli studi sull'efficienza delle macchine termiche, i cui risultati vengono pubblicati nelle *Riflessioni sulla potenza motrice del fuoco*
- I primi due principi della termodinamica vengono formulati nei lavori del 1850 di William Rankine (1820-1872) tra le università di Glasgow ed Edinburgo, Rudolf Clausius (1822-1888) tra Berlino e Zurigo, e William Thompson (Lord Kelvin, 1824-1907) a Glasgow.
- Clausius introduce il concetto di entropia nel 1865.
- Josiah Willam Gibbs (1839-1903), professore di matematica fisica a Yale, pubblica tre articoli sull'equilibrio e l'evoluzione spontanea dei processi termodinamici, incluse le reazioni chimiche

1.3.4 La meccanica statistica

- Gli studi di Daniel Bernoulli () pubblicati nel 1738 nel volume *Hydrodynamica* fondano le basi della teoria cinetica dei gas: viene data una descrizione molecolare dei gas; la pressione viene messa in relazione con il numero di urti delle molecole, la temperatura con l'energia cinetica media.
- Studi embrionali di termodinamica statistica vengono presentati da Rudolf Clausius e James Clerk Maxwell, che propone la distribuzione delle velocità molecolari
- Ludwig Boltzmann () sviluppa la meccanica statistica, riuscendo a spiegare come le leggi della termodinamica classica (descrizione macroscopica del fenomeno) siano un'evidenza del comportamento microscopico di un sistema costituito da un gran numero di particelle: fornisce una definizione statistica dell'entropia, legandola al numero di microstati di un sistema, che può essere interpretata come una misura del disordine del sistema stesso. Nel 1902 J. Willard Gibbs formalizza la meccanica statistica come approccio generale a ogni sistema – macroscopici o microscopici, gassosi o non gassosi.

1.3.5 L'elettromagnetismo

1.4 XX secolo: la fisica moderna

1.4.1 La relatività di Einstein

La relatività speciale o ristretta.

La relatività generale: una nuova teoria della gravitazione.

1.4.2 La meccanica quantistica

II

Il metodo scientifico

2. Il metodo scientifico

3. La misura

III

Meccanica

Definizione 3.1 — Meccanica. La meccanica è la branca della fisica che studia il moto di corpi e le sue cause.

Argomenti

La modellazione. I corpi vengono rappresentati con **modelli** astratti o semplificati. I principali modelli che si usano in meccanica sono:

- corpo puntiforme
- corpo esteso rigido
- corpo esteso deformabile

Si possono riconoscere diversi aspetti della meccanica.

Cinematica. La cinematica si occupa della descrizione del moto dei corpi, senza indagare le cause del moto. La cinematica dei sistemi meccanici è descritta completamente quando sono note alcune quantità del sistema in funzione del tempo. Per i diversi modelli di sistemi meccanici queste quantità sono:

- punto: posizione
- corpo esteso rigido: posizione di un punto materiale e orientazione del corpo
- corpo esteso deformabile: posizione di tutti i punti del corpo

Calcolando la derivata rispetto al tempo di queste quantità si trovano la velocità e l'accelerazione dei punti, e la velocità e accelerazione angolare dei corpi estesi rigidi.

Proprietà inerziali e quantità dinamiche. La massa può essere definita come quantità di materia. La distribuzione di massa nello spazio determina le proprietà inerziali di un sistema. Le proprietà inerziali per i diversi modelli sono:

- punto: massa
- corpi estesi (inclusi sistemi di punti): massa totale, momento statico e momento di inerzia

Una volta note la cinematica e le proprietà inerziali di un sistema, si possono definire le quantità dinamiche che svolgono un ruolo principale nelle equazioni che governano la dinamica dei corpi. Queste quantità sono:

- quantità di moto, $\mathbf{Q}$
- momento della quantità di moto rispetto al polo H, $\mathbf{\Gamma}_H$
- energia cinetica, K

La loro espressione per un corpo puntiforme è:

- quantità di moto, $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$
- momento della quantità di moto, $\mathbf{\Gamma}_H = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_H) \times m\mathbf{v}$
- energia cinetica, $K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$

Per definizione (si veda come vengono ricavate le equazioni del moto), queste quantità dinamiche sono **additive**. Le quantità dinamiche per corpi estesi possono quindi essere ricavate come la somma (grazie all'integrazione, per corpi continui) delle quantità dinamiche elementari delle loro singole parti

Azioni: forze e momenti. Le forze e i momenti sono il modello delle azioni agenti sui sistemi e delle interazioni tra di essi.

Statica. La statica è caso particolare della dinamica, e si occupa dell'equilibrio dei corpi. Le leggi della statica descrivono le condizioni di equilibrio di un sistema, e si ottengono come caso particolare delle equazioni della dinamica annullando tutte le derivate temporali

- corpo puntiforme:

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}^{ext} \qquad \text{(equilibrio delle forze)} \tag{3.1}$$

- corpo esteso:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{R}^{ext} \qquad &\text{(equilibrio delle forze)} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{M}_H^{ext} \qquad &\text{(equilibrio dei momenti)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dinamica – Formulazione di Newton. La dinamica si occupa della descrizione del moto dei corpi e delle sue cause, legando la cinematica e le quantità dinamiche di un sistema alle azioni agenti su di esso: in generale, le azioni agenti su un sistema causano una variazione delle quantità dinamiche.

La dinamica classica può essere formulata a partire dai tre **principi della dinamica** di Newton:

1. principio di inerzia, che riassume la **relatività di Galileo**: rispetto a un sistema di *riferimento inerziale*, un sistema sul quale non agiscono forze esterne mantiene il suo stato di moto
2. secondo principio della dinamica: la variazione della quantità di moto di un sistema è uguale all'impulso delle forze esterne agenti sul sistema

$$\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{I}^{ext} \ , \tag{3.3}$$

   o per una variazione in un intervallo di tempo infinitesimo, la derivata nel tempo della quantità di moto è uguale alla risultante dele forze esterne,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext} \ , \tag{3.4}$$

3. principio di **azione e reazione**: nell'interazione tra due sistemi i, j, la forza $\mathbf{F}_{ij}$ agente sul sistema i dovuta al sistema j è *uguale e contraria* alla forza agente $\mathbf{F}_{ji}$ sul sistema j dovuta al sistema i,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \ , \tag{3.5}$$

dai quali si possono ricavare le **equazioni cardinali del moto**, che assumono la stessa forma generale per ogni tipo di sistema meccanico

1. l'equazione della quantità di moto coincide con il secondo principio della dinamica

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext} \tag{3.6}$$

2. l'equazione del momento della quantità di moto mette in relazione, a meno di un termine dipendente dall'eventuale moto del polo H, la derivata temporale del momento della quantità di moto con la risultante dei momenti esterni agenti sul sistema

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_H = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext} \tag{3.7}$$

3. il teorema dell'energia cinetica, mette in relazione la derivata temporale dell'energia cinetica con la potenza totale delle forze agenti sul sistema

$$\dot{K} = P^{tot} \tag{3.8}$$

Strumenti matematici

4. Cinematica

La cinematica studia il moto dei corpi senza preoccuparsi delle cause del moto . . .

Definizione 4.1 — Cinematica. La cinemcatica è quel ramo della meccanica che si occupa di descrivere il moto dei corpi, indipendentemente dalle cause del moto.

Il moto dei corpi viene descritto usando i concetti di **tempo** e **spazio**.

4.1 Cinematica del punto materiale

Definizione 4.2 — Posizione. Una volta definito un sistema di riferimento, si può definire la posizione di un punto P con il raggio vettore $\mathbf{r}_P$ che unisce l'origine del sistema di riferimento con la posizione del punto P.

Definizione 4.3 — Velocità. La velocità di un punto P rispetto a un sistema di riferimento viene definita come la derivata nel tempo del raggio vettore $\mathbf{r}_P$,

$$\mathbf{v}_P = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_P =: \dot{\mathbf{r}}_P \ . \tag{4.1}$$

Definizione 4.4 — Accelerazione. L'accelerazione di un punto P rispetto a un sistema di riferimento viene definita come la derivata nel tempo della velocità $\mathbf{v}_P$ del punto, equivalente alla derivata seconda della posizione

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \ddot{\mathbf{r}}_P \ . \tag{4.2}$$

4.2 Cinematica di un sistema esteso rigido

Definizione 4.5 — Vincolo di moto rigido. Un corpo viene definito rigido se la distanza di ogni coppia di suoi punti rimane costante nel moto,

$$d_{PQ} := |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q(t)| = \text{cost} \ . \tag{4.3}$$

Questa definizione, implica che rimangano costanti le distanze e gli angoli tra punti materiali di un corpo che compie un atto di moto rigido.

$$(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) \perp (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|^2 = \\ &= \frac{d}{dt}\left[(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)\right] = \\ &= 2\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q\right) \cdot \left(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q\right) = 2\left(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q\right) \cdot \left(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Definizione 4.6 — Velocità angolare di un corpo rigido. Si può dimostrare che esiste un vettore ω, definito **velocità angolare**, tale che vale la relazione

$$(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \ \ , \tag{4.6}$$

tra la differenze di velocità e di posizione tra ogni coppia di punti P, Q del corpo rigido.

4.2.1 Cinematica nel piano

4.2.2 Cinematica nello spazio – cenni

4.3 Cinematica di un sistema esteso deformabile – cenni

4.4 Vincoli

5. Proprietà inerziali e quantità dinamiche

La massa può essere definita come la quantità di materia ...

5.1 Proprietà inerziali

Definizione 5.1 — Massa. La massa viene definita come la quantità di materia.

Per la definizione operativa della massa in dinamica si rimanda al capitolo (8).

5.1.1 Centro di massa

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \ . \tag{5.1}$$

5.1.2 Momento statico

5.1.3 Momento di inerzia

5.2 Quantità dinamiche

In questa sezione vengono definite alcune quantità dinamiche che risulteranno utili nello studio della dinamica dei corpi nel capitolo 8. In particolare, vengono definiti:
- la quantità di moto
- il momento della quantità di moto
- l'energia cinetica

per i sistemi meccanici modellabili come punto materiale, insieme di punti materiali, e corpi rigidi. Queste quantità sono **grandezze additive**.

5.2.1 Punto materiale

5.2.1.1 Quantità di moto

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v} \tag{5.2}$$

5.2.1.2 Momento della quantità di moto

$$\mathbf{\Gamma}_0 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{Q} \tag{5.3}$$

5.2.1.3 Energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 \tag{5.4}$$

5.2.2 Sistema di punti materiali

5.2.2.1 Quantità di moto

$$\mathbf{Q} = \sum_i \mathbf{Q}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \tag{5.5}$$

5.2.2.2 Momento della quantità di moto

$$\boldsymbol{\Gamma}_O = \sum_i \boldsymbol{\Gamma}_{O,i} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{Q}_i \tag{5.6}$$

5.2.2.3 Energia cinetica

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2 \tag{5.7}$$

5.2.2.4 Corpi rigidi

5.2.2.5 Momento della quantità di moto

5.2.2.6 Energia cinetica

5.2.3 Sistema di punti materiali

6. Azioni

Definizione 6.1 — Forza. Una forza è un'entità fisica vettoriale che è in grado di cambiare lo stato del moto di un sistema.

6.1 Esempi di forza

6.1.1 Forza peso in prossimità della superficie terrestre

In prossimità della superficie terrestre, su un corpo di massa m agisce la sua forza peso,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \ , \tag{6.1}$$

dove $\mathbf{g}$ rappresenta il campo gravitazionale nei pressi della superficie terrestre ed è diretto verso il centro (di massa?) della Terra. La sua intensità nei pressi della superficie terrestre è circa $9.8\frac{m}{s^2}$.

In una regione sufficientemente limitata dello spazio nella quale si può approssimare la superficie terrestre come piatta e piana, il campo di gravità e il peso dei corpi hanno quindi direzione verticale verso il basso.

6.1.2 Legge di gravitazione universale di Newton

Secondo la legge di gravitazione universale di Newton, due corpi di massa m_1, m_2 si attraggono con una forza di intensirà proporzionale al prodotto delle masse, inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i centri di massa dei due corpi e con una direzione lungo la congiunngente tra i due centri di massa.

La forza agente sul corpo di massa m_2, dovuta all'attrazione gravitazionale del corpo di massa m_1, è quindi

$$\mathbf{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \ , \tag{6.2}$$

essendo G la **costante di gravitazione universale**,

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2} \ , \tag{6.3}$$

il vettore $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ il vettore che congiunge il corpo 1 con il corpo 2, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ il versore in quella direzione. La formula può quindi essere riscritta con espressioni equivalenti

$$\mathbf{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} = G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \ . \tag{6.4}$$

■ **Esempio 6.1 — Attrazione gravitazionale terrestre nei pressi della superficie terrestre.** Prendendo il raggio e la massa della Terra,

$$R_T = 6.378 \cdot 10^6 \, m \qquad , \qquad m_T = 5.972 \cdot 10^{24} \, kg \tag{6.5}$$

possiamo calcolare l'intensità della forza che percepisce un corpo di massa m nei pressi della superficie terrestre come

$$F = \frac{G\, m_T}{R_T^2} m = \frac{6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24} \, kg}{(6.378 \cdot 10^6 \, m)^2} = m \cdot 9.797 \frac{m}{s^2} \ . \tag{6.6}$$

Abbiamo ritrovato il valore della forza per unità di massa uguale al valore dell'intensità del campo gravitazionale nei pressi della superficie terrestre. ■

■ **Esempio 6.2 — Attrazione gravitazionale terrestre sulla ISS.** ■

6.1.3 Molla lineare e forza elastica

Una molla ideale lineare senza massa ha una **legge costitutiva elastica** che rappresenta un legame proporzionale tra la forza impressa agli estremi della molla e l'allungamento della molla stessa,

$$F = k \, \Delta x \ , \tag{6.7}$$

essendo k la costante elastica della molla, che ha le dimensioni fisiche $\frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$, e il cui valore dipende dalla struttura della molla. . Le forze applicate ai due estremi sono di intensità uguale e verso contrario, e hanno la direzione dell'asse della molla. In forma vettoriale, assumento una lunghezza a riposo nulla, e indicando con $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ le posizioni degli estremi della molla, le forze agenti sugli estremi si possono scrivere come

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = k \, (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \ , \tag{6.8}$$

essendo la forza $\mathbf{F}_{12}$ la forza agente sul punto 1 a causa della molla che la collega al punto 2.

6.1.4 Smorzatore lineare e forza viscosa

Uno smorzatore ideale lineare senza massa ha una **legge costitutiva viscosa** che rappresenta un legame proporzionale tra la forza impressa agli estremi dello smorzatore e la velocità di allungamento dello smorzatore,

$$F = c \, \Delta v = c \, \Delta \dot{x} \ , \tag{6.9}$$

essendo c la costante viscosa (di smorzamento) dello smorzatore, che ha le dimensioni fisiche $\frac{N}{\frac{m}{s}} = \frac{kg}{s}$, e il cui valore dipende dalla struttura dello smorzatore. . Le forze applicate ai due estremi sono di intensità uguale e verso contrario, e hanno la direzione dell'asse dello smorzatore. In forma vettoriale, indicando con $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ le posizioni degli estremi della molla, le forze agenti sugli estremi si possono scrivere come

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = c \, (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = c \, (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) \ , \tag{6.10}$$

essendo la forza $\mathbf{F}_{12}$ la forza agente sul punto 1 a causa dello smorzatore che lo collega al punto 2.

6.1.5 Reazioni vincolari

Fare riferimento alla sezione 4.4 e rimandare a una sezione del capitolo della dinamica dove verrà spiegato il calcolo delle reazioni vincolari

6.1.6 Forza di attrito

6.1.6.1 Attrito statico

La forza di attrito statico agisce tra due corpi tra i quali non c'è moto relativo, in direzione tangenziale alla superficie del vincolo. Il suo valore è determinato dalla condizione di equilibrio

$$\mathbf{F}^s_\mu = F^s_\mu \hat{\mathbf{t}} \ , \qquad \text{con } |\mathbf{F}^s_\mu| \le \mu_s N \ , \tag{6.11}$$

essendo μ_s il coefficiente di attrito statico, tipico delle superfici (e del loro stato: materiale, rugosità e finiture superficiali, lubrificazione, superficie sporche,...) e N il modulo della reazione normale.

6.1.6.2 Attrito dinamico

La forza di attrito dinamico agisce tra due corpi a contatto in moto relativo con velocità $\mathbf{v}^{rel}$, $|\mathbf{v}^{rel}| \neq 0$, in direzione tangenziale alla superficie di contatto. Il modello di attrito di Coulomb prevede l'espressione

$$\mathbf{F}^d_\mu = -\mu_d N \frac{\mathbf{v}^{rel}}{|\mathbf{v}^{rel}|} \tag{6.12}$$

essendo μ_d il coefficiente di attrito dinamico, tipico delle superfici (e del loro stato: materiale, rugosità e finiture superficiali, lubrificazione, superficie sporche,...) e N il modulo della reazione normale.

6.1.6.3 Attrito volvente

- Modello dell'azione che fa rallentare il moto di una corpo circolare in rotolamento puro su una superficie piana.Perché no, non è l'attrito statico
- Rimandare a esercizio su rotolamento puro di un disco, con e senza attrito volvente

6.2 Momento di una forza

Definizione 6.2 — Momento di una forza. Il momento di una forza rispetto a un **polo** O, $\mathbf{M}_O$, viene definito coem il prodotto vettoriale tra il raggio $\Delta \mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O$ tra il polo e il punto di applicazione e la forza $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{M}_O = \Delta \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} \ . \tag{6.13}$$

6.3 Impulso di una forza

Definizione 6.3 — Impulso elementare di una forza. L'impulso elementare $\delta \mathbf{I}$ di una forza $\mathbf{F}$ viene definito come il prodotto della forza e l'intervallo elementare di tempo dt per il quale agisce la forza,

$$\delta \mathbf{I} = \mathbf{F} dt \ . \tag{6.14}$$

Definizione 6.4 — Impulso di una forza. Viene definito come la somma di tutti gli impulsi elementari tra due istanti desiderati, $t \in [t_0, t_1]$, e al limite si riduce all'integrale di Riemann

$$\mathbf{I} = \int_{t=t_0}^{t_1} \delta \mathbf{I} = \int_{t=t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \ . \tag{6.15}$$

6.4 Lavoro di una forza

Definizione 6.5 — Lavoro elementare di una forza. Il lavoro elementare δL di una forza $\mathbf{F}$ è il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento elementare $d\mathbf{r}$,

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \ . \tag{6.16}$$

Il lavoro di una forza è la somma dei lavori elementari. Se si suddivide la storia degli spostamenti in una somma di spostamenti incrementali,

$$\Delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \mathbf{r}_i \ , \tag{6.17}$$

e si considera la forza applicata costante (in intensità e direzione) a tratti su ogni spostamento incrementale $\Delta \mathbf{r}_i$, il lavoro della forza viene definito come la somma dei lavori incrementali, $\Delta L_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i \ . \tag{6.18}$$

Definizione 6.6 — Lavoro di una forza. Se si fa tendere a zero la lunghezza degli spostamenti incrementali, il lavoro di una forza viene definito come l'integrale (di linea) di Riemann

$$L = \int_{\gamma(\mathbf{r})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma(\mathbf{r})} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} \ , \tag{6.19}$$

avendo indicato con $\gamma(\mathbf{r})$ la curva nello spazio percorsa dal corpo, sulla quale avvengono gli spostamenti elementari.

6.5 Campo di forze

Definizione 6.7 — Campo di forze - definizione operativa.

6.5.1 Campi di forze centrali

Definizione 6.8 — Campo di forza centrale. Un campo di forza centrale è un campo di forze che ha direzione radiale rispetto a un punto, il centro.
Ponendo l'origine del sistema di riferimento nel centro, è possibile scrivere l'espressione di un campo centrale come

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} \ . \tag{6.20}$$

■ **Esempio 6.3 — Legge di gravitazione universale.** La forza gravitazionale agente su un corpo puntiforme di massa m con posizione $\mathbf{r}$ dovuta a un corpo di massa M in corrispondenza del quale viene posto l'origine delle coordinate, ha l'espressione

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G\frac{m\,M}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \ . \tag{6.21}$$

■

■ **Esempio 6.4 — Forza elastica da una molla lineare.** La forza elastica agente sul punto $\mathbf{r}$ collegato all'origine con una molla lineare di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, ha l'espressione

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\,\mathbf{r} \tag{6.22}$$

■

6.5.2 Campi di forze conservativi

Definizione 6.9 — Campo di forza conservativo. Un campo di forza è conservativo in una regione dello spazio Ω se l'integrale del lavoro lungo un percorso γ qualsiasi in quella regione non dipende dal percorso ma solo dai suoi estremi.

In questo caso, se il percorso γ va dal punto $\mathbf{r}_A$ al punto $\mathbf{r}_B$, si può scrivere

$$L = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} =: L_{A\to B} \tag{6.23}$$

Definizione 6.10 — Energia potenziale. Per un campo di forze conservative è possibile definire una funzione scalare dello spazio, $V(\mathbf{r})$, chiamata **energia potenziale**, che permette di calcolare il lavoro del campo di forze conservative come

$$L_{A\to B} = -\Delta V_{A\to B} = -\left[V(\mathbf{r}_B) - V(\mathbf{r}_A)\right] \tag{6.24}$$

EXTRA?

- dall'indipendendza del lavoro dal percorso, è possibile scrivere il campo di forze come (meno) il gradiente della funzione energia potenziale, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

$$\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = L = -\left[V(\mathbf{r}_B) - V(\mathbf{r}_A)\right] = -\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} dV = -\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \nabla V \cdot d\mathbf{r} \tag{6.25}$$

$$\rightarrow \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \ . \tag{6.26}$$

- poiché si può scrivere il campo di forze come un gradiente, per le identità vettoriali ($\nabla \times \nabla f \equiv 0$, $\forall f(\mathbf{r})$), si può dire che i campi di forze conservativi sono irrotazionali, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

■ **Esempio 6.5 — Energia potenziale di campi uniformi.**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \qquad \rightarrow \qquad V(\mathbf{r}) = -\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + V_0 \tag{6.27}$$

■

■ **Esempio 6.6 — Energia potenziale di campi centrali.**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} \tag{6.28}$$

Se il campo di forze ha simmetria radiale, il campo di forze e l'energia potenziale dipende solo dalla distanza dall'origine r, e vale

$$v'(r) = -F(r) \qquad \rightarrow \qquad V(r) - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} F(t)dt \ , \tag{6.29}$$

dove r_0, $V(r_0)$ si usano per fissare il valore della funzione potenziale; **la funzione potenziale è definita a meno di costanti additive** ■

■ **Esempio 6.7 — Energia potenziale del campo gravitazionale uniforme.** Definendo la direzione verticale con il versore $\hat{\mathbf{z}}$ diretto verso l'alto, la forza peso su un corpo di massa m vale $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{z}}$, e quindi l'energia potenziale gravitazionale in prossimità della superficie terrestre vale

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = mg\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = mg(z - z_0) \ . \tag{6.30}$$

■

■ **Esempio 6.8 — Energia potenziale del campo gravitazionale centrale.** Per la legge di gravitazione universale, $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$, l'energia potenziale vale

$$V(r) - V(r_0) = GMm \int_{r_0}^{r} t^{-2} dt = GMm \left[-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right] \ . \tag{6.31}$$

Si è soliti definire la costante additiva arbitraria nell'energia potenziale gravitazionale con la condizione $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$, e quindi

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \ . \tag{6.32}$$

■

■ **Esempio 6.9 — Energia potenziale del campo elastico centrale.** Per la forza elastica dovuta a una molla lineare con lunghezza a riposo nulla, $F(r) = -kr$, l'energia potenziale vale

$$V(r) - V(r_0) = k \int_{r_0}^{r} t \, dt = \frac{1}{2} k \left(r^2 - r_0^2 \right) \ . \tag{6.33}$$

Si è soliti definire la costante additiva arbitraria nell'energia elastica con la condizione $V(0) = 0$, e quindi

$$V(r) = \frac{1}{2} k \, r^2 \ . \tag{6.34}$$

■

7. Statica

7.1 Condizioni di equilibrio

Definizione 7.1 — Condizioni di equilibrio per un punto materiale.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \tag{7.1}$$

Definizione 7.2 — Condizioni di equilibrio per un corpo esteso.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i &= \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{H,i} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.2 Esempi

8. Dinamica

La dinamica studia il moto dei corpi e le sue cause ...

8.1 Principi della dinamica di Newton

1. principio di inerzia
2. secondo principio della dinamica
3. principio di azione e reazione

8.1.1 Primo principio della dinamica

Un corpo imperturbato, sul quale agisce un sistema di forza dalla risultante nulla, rimane nello stato di quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di **riferimento inerziale**.
Cosa intendiamo per sistema di riferimento inerziale?

8.1.2 Secondo principio della dinamica

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{I}^{ext} \ , \tag{8.1}$$

o in forma differenziale

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{ext} \tag{8.2}$$

8.1.3 Terzo principio della dinamica

8.2 Equazioni cardinali della dinamica

8.2.1 Moto di un punto materiale

Prima equazione cardinale – quantità di moto

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{ext} \tag{8.3}$$

Seconda equazione cardinale – momento della quantità di moto

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{Q} \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{\Gamma}_O = & \frac{d}{dt}\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}_O)\times\mathbf{Q}\right) = \\
& = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{Q} - \dot{\mathbf{r}}_O\times\mathbf{Q} + \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{Q}} = \\
& = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}\times m\dot{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{0}} - \dot{\mathbf{r}}_O\times\mathbf{Q} + \mathbf{r}\times\mathbf{R}^{ext} = -\dot{\mathbf{r}}_O\times\mathbf{Q} + \mathbf{M}_O^{ext} \ .
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Terza equazione cardinale – energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \ . \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}K = & \underbrace{m\dot{\mathbf{v}}}_{=\dot{\mathbf{Q}}}\cdot\mathbf{v} = \\
& = \dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{v} = \\
& = \mathbf{R}^{ext}\cdot\mathbf{v} = P^{ext} = P^{tot}
\end{aligned} \tag{8.7}$$

8.2.2 Moto di un sistema di punti materiali

Prima equazione cardinale L'equazione cardinale per il punto i-esimo,

$$\begin{aligned}
m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = & \mathbf{R}_i^{ext,i} = \\
& = \mathbf{R}_i^{ext} + \mathbf{R}_i^{int} = \\
& = \mathbf{R}_i^{ext} + \sum_{j\neq i}\mathbf{F}_{ij}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Sommando le equazioni di tutti i punti, si ottiene

$$\underbrace{\sum_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i}_{m\ddot{\mathbf{r}}_G=\dot{\mathbf{Q}}} = \underbrace{\sum_i \mathbf{R}_i^{ext}}_{\mathbf{R}^{ext}} + \underbrace{\sum_i\sum_{j\neq i}\mathbf{F}_{ij}}_{=\mathbf{0}} \tag{8.9}$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext} \tag{8.10}$$

Seconda equazione cardinale

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left((\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_O)\times m_i\dot{\mathbf{r}}_i\right) = (\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_O)\times\mathbf{R}_i^{ext,i} \\
& (\dot{\mathbf{r}}_i-\dot{\mathbf{r}}_O)\times m_i\dot{\mathbf{r}}_i + (\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_O)\times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = (\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_O)\times\left(\mathbf{R}_i^{ext}+\sum_{j\neq i}\mathbf{F}_{ij}\right) \\
& \sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_O)\times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_O\times\mathbf{Q} + \mathbf{M}_O^{ext}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Per sistemi rigidi, per i quali vale $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_O &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times m_i \mathbf{v}_i = \\
&= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O) \times m_i \left[\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)\right] = \\
&= \underbrace{\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)}_{m\mathbf{r}_G - m\mathbf{r}_G = \mathbf{0}} \times \mathbf{v}_G + \underbrace{\sum_i m_i}_{=m}(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{v}_G + \\
&\quad + (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_0) \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times \underbrace{\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)}_{m\mathbf{r}_G - m\mathbf{r}_G = \mathbf{0}}\right) \underbrace{- \sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}]}_{=\mathbb{I}_G}
\end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_O = (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{Q} + \mathbb{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left((\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{Q}\right) &= (\mathbf{v}_G - \dot{\mathbf{r}}_O) \times \mathbf{Q} + (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O) \times \dot{\mathbf{Q}} = \\
&= -\dot{\mathbf{r}}_O \times \mathbf{Q} + (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O) \times \dot{\mathbf{Q}}
\end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}\right) = \frac{d}{dt}&\left(-\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}]\right) = \\
&= -\sum_i m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] + \\
&\quad -\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] + \\
&\quad -\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}\right] = \\
&= -\sum_i m_i \underbrace{[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}]}_{=\mathbf{0}} + \\
&\quad -\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \times \boldsymbol{\Omega}] + \\
&\quad + \mathbb{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} \\
&= +\sum_i m_i \boldsymbol{\Omega} \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \underbrace{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G)}_{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)}] + \\
&\quad + \sum_i m_i \underbrace{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)]}_{=\mathbf{0}} + \\
&\quad + \mathbb{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} \\
&= \boldsymbol{\Omega} \times \left(-\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times \boldsymbol{\Omega}]\right) + \mathbb{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \\
&= \mathbb{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbb{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Terza equazione cardinale

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_i \cdot m_i \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{R}_i^{ext,i} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2\right) &= \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{R}_i^{ext} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{R}_i^{int} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{R}_i^{ext} + \mathbf{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \\
\frac{d}{dt} K_i &= P_i^{ext} + P_i^{int}
\end{aligned} \tag{8.16}$$

e sommando su tutti i punti,

$$\frac{d}{dt} K = P^{ext} + P^{int} \tag{8.17}$$

dove la potenza delle forze interne in generale non è nulla

$$P^{int} = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\{i,j\}} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{F}_{ij} \ . \tag{8.18}$$

Nel caso di corpo rigido, si ottiene ...

8.2.3 Moto di un corpo rigido

Prima equazione cardinale

Seconda equazione cardinale

Terza equazione cardinale

9. Moti notevoli ed esempi

In questo capitolo vengono indagati alcuni moti notevoli, espicitando le espressioni della quantità di moto, del momento angolare, le azioni esterne, e le condizioni iniziali proprie di ogni moto. Ogni moto verrà indagato dopo aver introdotto il **sistema di coordinate** più **adeguato** allo studio del sistema.

9.1 Moti di punti materiali

9.1.1 Moto rettilineo uniforme

Se la risultante delle forze esterne è nulla, la derivata nel tempo della quantità di moto è nulla. Il secondo principio della dinamica si riduce a

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \qquad \begin{cases} \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \tag{9.1}$$

Introducendo un sistema di coordinate cartesiane Oxy, si può scrivere

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \quad , \qquad \dot{x}(0) = v_{x,0} \\ y(0) = y_0 \quad , \qquad \dot{y}(0) = v_{y,0} \end{cases} \tag{9.2}$$

Legge del moto

$$\begin{cases} x(t) = v_{x,0}t + x_0 \\ y(t) = v_{y,0}t + y_0 \end{cases} \tag{9.3}$$

9.1.2 Moto di un proiettile in prossimità della superficie terrestre

Introducendo un sistema di coordinate cartesiane Oxy, con l'asse x diretto in direzione orizzontale, l'asse y in direzione verticale verso l'alto, si può scrivere

- la posizione del punto come $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$
- il campo di gravità come $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} \qquad \begin{cases} \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \tag{9.4}$$

Utilizzando questo sistema di coordinate, si possono scrivere le coordinate dell'equazione della quantità di moto e delle condizioni iniziali,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \quad , \qquad \dot{x}(0) = v_{x,0} \\ y(0) = y_0 \quad , \qquad \dot{y}(0) = v_{y,0} \end{cases} \tag{9.5}$$

Legge del moto

$$\begin{cases} x(t) = v_{x,0}t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y,0}t + y_0 \end{cases} \tag{9.6}$$

9.1.3 Moto sul piano inclinato

■ **Esempio 9.1 — Statica sul piano inclinato.** Disegno e diagramma delle forze

$$\begin{cases} 0 &= mg\sin\alpha - \mu_s N \\ 0 &= -mg\cos\alpha + N \end{cases} \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\alpha \tag{9.7}$$

La condizione di equilibrio può esistere solo se $\mu_{s,max} \geq \mu_s = \tan\alpha$ ■

■ **Esempio 9.2 — Moto sul piano inclinato scabro.** Disegno e diagramma delle forze

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext} \tag{9.8}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha R - \mu_d N\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \\ 0 = m\ddot{y} &= -mg\cos\alpha + N \end{cases} \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\alpha \tag{9.9}$$

$$m\ddot{x} = mg\left(\sin\alpha - \mu_d\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\cos\alpha\right) \tag{9.10}$$

■

■ **Esempio 9.3 — Moto sul piano inclinato con carrucola.** Disegno e diagramma delle forze
■

■ **Esempio 9.4 — Moto sul piano inclinato libero di muoversi.** Disegno e diagramma delle forze ■

9.1.4 Sistema massa-molla-smorzatore

Usando il secondo principio della dinamica

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \\ &x(0) = x_0 \\ &\dot{x}(0) = v_0 \end{aligned} \tag{9.11}$$

9.1.5 Moto circolare

9.1.6 Moto del pendolo

Usando la seconda equazione cardinale della dinamica

$$mL^2\ddot{\theta}(t) = -mgL\sin\theta(t) \ . \tag{9.12}$$

9.1.7 Moti impulsivi

9.1.7.1 Collisioni tra punti materiali

9.1.7.2 Collisioni tra punti materiali e superfici fisse

9.2 Moto di corpi estesi

9.2.1 Rotolamento di un disco

■ **Esempio 9.5 — Rotolamento puro su superficie orizzontale, in assenza di attrito volvente.**
Disegno e diagramma delle forze
Gradi di libertà e di vincolo. Studiando un corpo esteso nel piano, il problema ha al massimo 3 gradi di libertà. I vincoli in questo problema introducono 2 gradi di vincolo: la superficie orizzontale impone che il punto inferiore del disco sia sempre a contatto con la superficie, mentre l'ipotesi di puro rotolamento puro (senza strisciamento) impone che non ci sia velocità relativa tra il punto di contatto e la superficie.
Vincolli cinematici.

$$x_G(t) = R\theta(t) \tag{9.13}$$

Equazioni del moto – approccio con equazione cardinale del momento angolare.

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_H = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext} \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_H &= I_H\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{z}} = \left(I_G + mR^2\right)\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{x}_H &= R\theta\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{Q} &= m\mathbf{v}_G = mR\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{M}_H^{ext} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{9.15}$$

$$\begin{cases} I_H\ddot{\theta} = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \Omega \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \dot{\theta}(t) = \Omega \\ \theta(t) = \Omega t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x}_G(t) = 0 \\ \dot{x}_G(t) = R\Omega \\ x_G(t) = R\Omega t \end{cases} \tag{9.16}$$

■

■ **Esempio 9.6 — Rotolamento puro su superficie orizzontale, con attrito volvente.** Disegno e diagramma delle forze

■

■ **Esempio 9.7 — Rotolamento puro su suferficie inclinata.** Disegno e diagramma delle forze

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_H = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext} \tag{9.17}$$

$$\mathbf{M}_H^{ext} = (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_H) \times m\mathbf{g} = R\,\hat{\mathbf{y}} \times (-mg\sin(\alpha)\hat{\mathbf{x}} - mg\cos(\alpha)\hat{\mathbf{y}}) = mgR\sin(\alpha)\,\hat{\mathbf{z}} \tag{9.18}$$

$$\begin{cases} I_H\ddot{\theta} = mgR\sin\alpha \\ \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \Omega \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \dfrac{mgR}{I_H}\sin(\alpha) \\ \dot{\theta}(t) = \dfrac{mgR}{I_H}\sin(\alpha)\,t + \Omega \\ \theta(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{mgR}{I_H}\sin(\alpha)\,t^2 + \Omega\,t \end{cases} \tag{9.19}$$

■

■ **Esempio 9.8 — Attrito statico e attrito dinamico in frenata – ossia, perché non bloccare le ruote quando si frena.** ■

9.3 Moto dei corpi celesti

Per ragioni di importanza storica, e per la rilevanza che ha avuto la *dinamica celeste* negli sviluppi della dinamica, viene riservata un'intera sezione al moto dei corpi celesti.

- legge di gravitazione universale di Newton
- moto dei due corpi
- moto dei tre corpi – cenni: punti lagrangiani, telescopio Webb

IV

Termodinamica

10. Principi della termodinamica

10.1 Primo principio

Il primo principio della termodinamica è il bilancio di energia totale del sistema: la variazione di energia totale di un sistema è uguale alla somma del calore entrante nel sistema dall'ambiente e del lavoro delle forze esterne agenti sul sistema. In forma incrementale

$$\Delta E^{tot} = Q^{ext} + L^{ext} \ , \tag{10.1}$$

$$\dot{E}^{tot} = \dot{Q}^{ext} + P^{ext} \ . \tag{10.2}$$

Usando il teorema dell'energia cinetica della meccanica,

$$\dot{K} = P^{tot} = P^{ext} + P^{int} \ , \tag{10.3}$$

e definendo l'energia interna U del sistema come differenza tra l'energia totale e l'energia cinetica,

$$U := E^{tot} - K \ , \tag{10.4}$$

si può ricavare un'equazione per il bilancio dell'energia interna

$$\dot{U} = \dot{Q}^{ext} - P^{int} \ . \tag{10.5}$$

10.2 Secondo principio

Il secondo principio della termodinamica introduce Il secondo principio della termodinamica ha diversi enunciati equivalenti, formulati da Clausis, Kelvin e Planck. L'enunciato più generale è quello di Clasius, mentre gli enunciati di Kelvin e Planck coinvolgono macchine termiche e quindi, per questi due enunciati, si rimanda al capitolo 12 sulle macchine termiche.

Si assume di poter separare il contributo della potenza delle forze interne P^{int} nella somma della potenza delle forze reversibili e in quella delle forze irreversibili, definita dissipazione, $P^{int} = P^{int,rev} + D$

$$\begin{aligned} dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_S dx + \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_x dS \\ dU &= \delta Q^{ext} - \delta L^{int} = \\ &= \delta Q^{ext} - \delta^r L^{int,r} + \underbrace{\delta^+ D}_{\geq 0} = \\ &= -\delta^r L^{int,r} + \delta Q^{ext} + \delta^+ D \end{aligned} \tag{10.6}$$

$$-\delta^r L^{int,r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_S dx \qquad , \qquad \delta Q^{ext} + \delta^+ D = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_x dS \ . \tag{10.7}$$

Definendo la temperatura $T := \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_x > 0$, per il terzo principio, si può riscrivere

$$TdS = \delta Q^{ext} + \delta^+ D \geq \delta Q^{ext} \qquad \rightarrow \qquad dS \geq \frac{\delta Q^{ext}}{T} \ . \tag{10.8}$$

10.3 Terzo principio

Il terzo principio della termodinamica postula la positività della temperatura

$$T := \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_x > 0 \tag{10.9}$$

10.4 Principio zero - Equilibrio termico

11. Stati della materia e leggi costitutive

11.1 Gas

11.1.1 Legge dei gas perfetti

11.2 Solidi

12. Macchine termiche

13. Trasmissione del calore

V Elettromagnetismo

14. Introduzione

- carica e corrente elettrica, magneti:
  - esperimenti fondamentali
  - definizioni operative di campi elettrico e magnetico con cariche e bussole di prova
- definizioni di flusso e circuitazione
- principi
  - Equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \Phi_{\partial V^*}(\mathbf{d}^*) = Q^{int}_{V^*} \\ \Gamma_{\partial S^*}(\mathbf{e}^*) + \dfrac{d}{dt}\Phi_{S^*}(\mathbf{b}^*) = 0 \\ \Phi_{\partial V^*}(\mathbf{b}^*) = 0 \\ \Gamma_{\partial S^*}(\mathbf{h}^*) - \dfrac{d}{dt}\Phi_{S^*}(\mathbf{d}^*) = \Phi_{S^*}(\mathbf{j}) \end{cases} \tag{14.1}$$

  - continuità della carica elettrica

$$\frac{d}{dt}Q^{int}_{V^*} + \Phi_{\partial V^*}(\mathbf{j}^*) = 0 \tag{14.2}$$

- approssimazione circuitale

VI

Relatività di Einstein - cenni

VII

Meccanica quantistica - cenni

Bibiliografia

A. Prima appendice

...