Scuole superiori

Matematica

OSB

Copyright © 2023 OSB

Published by OSB

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 License (the "License"). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an "as is" basis, without warranties or conditions of any kind, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

Latest version 5 ottobre 2023

Indice

I **Storia**

0.1 Cronologia 9

II **Insiemistica e Logica**

III **Algebra in $\mathbb{R}$**

1 Algebra simbolica - Calcolo letterale 15

1.1 Monomi 15

1.1.1 Somma e differenza 15

1.1.2 Prodotto e divisione 15

1.1.3 Potenze e radici 15

1.2 Polinomi 15

1.3 Potenze e radici 16

1.4 Esponenziali e logaritmi 16

1.4.1 Esponenziale 16

1.4.2 Logaritmo 16

1.5 Funzioni armoniche 17

1.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno 17

1.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante . . . 17

1.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze 17

1.6 Funzioni iperboliche 17

2 Equazioni 19

2.1 Equazioni algebriche 19

2.1.1 Equazioni polinomiali 19

2.1.2 Equazioni algebriche razionali 20

2.1.3 Equazioni algebriche irrazionali 20

2.2 Equazioni non algebriche o trascendenti . . . 20
2.2.1 Equazioni con i valori assoluti . . . 20
2.2.2 Equazioni con esponenti e logaritmi . . . 20
2.2.3 Equazioni con le funzioni armoniche . . . 20

3 Disequazioni . . . 21
3.0.1 Disequazioni algebriche . . . 21
3.0.2 Disequazioni algebriche . . . 21

4 Sistemi di equazioni e di disequazioni . . . 23

IV Algebra in $\mathbb{C}$

4.1 Definizione dei numeri complessi . . . 27
4.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss) . . . 27
4.2 Operazioni con i numeri complessi . . . 27
4.2.1 Somma e differenza . . . 27
4.2.2 Prodotto e divisione . . . 27
4.2.3 Potenze e radici . . . 28
4.2.4 Esponenziali e logaritmi . . . 28

V Calcolo infinitesimale

5 Limiti . . . 31
5.1 Infiniti e infinitesimi . . . 31

6 Derivate . . . 33
6.1 Definizioni . . . 33
6.2 Regole di derivazione . . . 33
6.2.1 Regole . . . 33
6.2.2 Dimostrazioni . . . 33
6.3 Teoremi . . . 34
6.3.1 Teorema di de l'Hopital . . . 34
6.4 Tabella di derivate . . . 34
6.5 Espansioni in serie . . . 34
6.6 Applicazioni . . . 35
6.6.1 Studio funzione . . . 35
6.6.2 Approssimazione locale di . . . 35

7 Integrali . . . 37
7.1 Definizioni . . . 37
7.2 Proprietà . . . 37
7.3 Teoremi . . . 37
7.4 Integrali fondamentali . . . 38
7.5 Regole di integrazione . . . 38
7.5.1 Integrazione per parti . . . 38

7.5.2 Integrazione con sostituzione . . . 38

VI Equazioni differenziali ordinarie

8 Introduzione . . . 41
8.1 Applicazioni . . . 41
8.2 Definizioni . . . 41

9 Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti . . . 43
9.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine . . . 43
9.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine 43
9.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine . 43
9.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine 43

10 Metodo di separazione delle variabili . . . 45

VII Vettori

11 Algebra vettoriale . . . 51
11.1 Definizioni . . . 51
11.1.1 Spazi vettoriali con prodotto interno . . . 51
11.2 Applicazioni . . . 51
11.2.1 Geometria . . . 51
11.2.2 Fisica . . . 51

12 Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale . . . 53

VIII Geometria

13 Geomteria nel piano . . . 59
13.1 Geometria euclidea . . . 59
13.1.1 Introduzione . . . 59
13.1.2 Rette e angoli . . . 59
13.1.3 Triangoli . . . 59
13.1.4 Circonferenza . . . 59
13.2 Geometria cartesiana . . . 59
13.2.1 Coordinate cartesiane . . . 59
13.2.2 Punto, retta e distanze . . . 59
13.2.3 Coniche . . . 59

14 Geometria nello spazio . . . 61
14.1 Geometria euclidea . . . 61
14.2 Geometria cartesiana . . . 61

IX Statistica

X Matematica numerica - cenni

15 Equazioni e sistemi di equazioni 67

15.1 Equazioni 67

15.1.1 Equazioni non lineari 67

15.2 Sistemi di equazioni 68

15.2.1 Sistemi di equazioni lineari 68

15.2.2 Sistemi di equazioni non lineari 68

16 Derivate 69

16.1 69

17 Ricerca dei massimi e ottimizzazione 71

17.1 71

18 Integrali 73

18.1 73

19 Equazioni differenziali ordinarie 75

19.1 Riduzione a sistema di primo ordine 75

19.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy 75

19.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno 75

20 Statistica 77

XI Appendici, indice e bibliografia

Bibilografia 81

Indice 83

Appendices 83

A Prima appendice 83

Storia

0.1 Cronologia 9

0.1 Cronologia

...

XVI secolo

- Nepier (Nepero) introduce i logaritmi

XVII secolo

- Fermat
- Descartes (Cartesio) illustra ne *La Gèometrie* i fondamenti della **geometria analitica**
- Huygens, Pascal
- Newton e Leibniz sviluppano contemporaneamente i fondamenti del **calcolo differenziale** e **integrale**, nell'ambito dello studio della **dinamica**
- fratelli Johann e Jakob Bernoulli
- de l'Hopital, Taylor

XVIII secolo

- Euler (Eulero): analisi matematica; soluzione equazioni differenziali; teoria dei numeri; analisi complessa (estensione di funzioni reali in ambito complesso; identità di Eulero); topologia e teoria dei grafi (problema die 7 ponti di Konigsberg)
- d'Alembert si dedica allo studio del moto dei corpi e lla meccanica razionale
- Legendre
- Bayes: probabilità
- istituzione di scuole scientifiche, Parigi importante centro scientifico del tempo
- Laplace: meccanica razionale e celeste (*Mécanique Céleste*); trasformata; calcolo differenziale: potenziale, laplaciano ed equazione di Laplace
- Lagrange: formulazione lagrangiana della meccanica (*Mécanique analytique*); calcolo delle variazioni; metodo dei moltiplicatori di Lagrange; teoria dei numeri

XIX secolo

- Jacobi: algebra lineare (determinante di matrici)
- Cauchy: algebra lineare; analisi complessa; statistica; teoria dei numeri; meccanica dei solidi
- Fourier: studio della trasmissione del calore; serie e trasformata di Fourier
- Gauss: teorema fondamentale dell'algebra; teoria dei numeri
- Dirichlet:
- Riemann: teoria dei numeri; geometria
- Hamilton: quaternioni; algebra lineare (teorema di Cayley-Hamilton); riformulazione della meccanica lagrangiana nella meccanica hamiltoniana
- Wierestrass: definizione rigorosa dei fondamenti dell'analisi (teorema di Weierstrass su esisteanza di minimi e massimi di funzioni a variabile reale)
- Boole: algebra sugli insiemi, logica, e teoria dell'informazione
- Peano: tentativo di definizione assiomatica della matematica
- Cantor: studio degli insiemi infiniti e la loro dimensione

XX secolo

- la matematica della probabilità e della meccanica quantistica: Lebesgue, Hilbert, von Neumann, Kolmogorov
- la nascita dell'informatica: Turing, Von Neumann
- la teoria dell'informazione: Shannon
- la teoria dei giochi: von Neumann, Morgestern e Nash
- l'incompletezza della matematica: Godel

Insiemistica e Logica

III Algebra in $\mathbb{R}$

1	**Algebra simbolica - Calcolo letterale**	**15**
1.1	Monomi	15
1.2	Polinomi	15
1.3	Potenze e radici	16
1.4	Esponenziali e logaritmi	16
1.5	Funzioni armoniche	17
1.6	Funzioni iperboliche	17
2	**Equazioni**	**19**
2.1	Equazioni algebriche	19
2.2	Equazioni non algebriche o trascendenti	20
3	**Disequazioni**	**21**
4	**Sistemi di equazioni e di disequazioni**	**23**

1. Algebra simbolica - Calcolo letterale

1.1 Monomi

Definizione 1.1 — Monomio. Un monomio è un'espressione matematica costituita dal prodotto di un coefficiente esplicitamente numerico e una parte letterale, nella quale compaiono unicamente moltiplicazioni e potenze intere.

R Viene richiesto che le potenze della parte letterale siano intere, per evitare di porre delle condizioni sulle basi delle potenze, essendo le potenze non intere definite solo per numeri reali positivi.

Definizione 1.2 — Monomi simili. I monomi simili sono i monomi che hanno la stessa parte letterale.

1.1.1 Somma e differenza

1.1.2 Prodotto e divisione

1.1.3 Potenze e radici

Definizione 1.3 — Potenze e radici intere. La potenza intera di ordine $n \in \mathbb{N}$ di un monomio x è definita come il prodotto di x per se stesso n volte,

$$p_n(x) := x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} \ . \tag{1.1}$$

L'operazione inversa, quando possibile, è definita come radice di ordine n,

$$x := \sqrt[n]{p_n(x)} = p_n(x)^{\frac{1}{n}} \ . \tag{1.2}$$

R Per una comprensione più completa, bisogna rifarsi all'algebra dei numeri complessi IV.

Definizione 1.4 — Potenze e radici non intere.

1.2 Polinomi

Definizione 1.5 — Polinomio. Un polinomio reale di grado n viene definito come una combinazione lineare dei monomi di grado $\leq n$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{1.3}$$

1.3 Potenze e radici

Definizione 1.6 — Potenze e radici intere.

1.4 Esponenziali e logaritmi

1.4.1 Esponenziale

Definizione 1.7 — Esponenziale. L'elevamento a potenza di un numero a

$$y = a^x \tag{1.4}$$

è un operazione che coinvolge due numeri, a detto base e x detto esponente.

1.4.1.1 Potenze non intere, valori ammissibili

1.4.1.2 Proprietà

Prodotto di potenze con la stessa base

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{1.5}$$

Potenza di potenza

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{1.6}$$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^m b^m = (ab)^m \tag{1.7}$$

1.4.2 Logaritmo

Definizione 1.8 — Logaritmo. Il logaritmo è l'operazione inversa

$$x = \log_a y \qquad \text{se } y = a^x \tag{1.8}$$

1.4.2.1 Potenze non intere, valori ammissibili

1.4.2.2 Proprietà

Somma di logaritmi con la stessa base

$$\log_a m + \log_a n = \log_a(mn) \tag{1.9}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = a^{\log_a m} \\ n = a^{\log_a n} \\ mn = a^{\log_a mn} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} mn = m \cdot n \\ a^{\log_a mn} = a^{\log_a m} a^{\log_a n} = a^{\log_a m + \log_a n} \end{array} \tag{1.10}$$

$$\rightarrow \log_a mn = \log_a m + \log_a n \tag{1.11}$$

Prodotto di un logaritmo per uno scalare

$$b \log_a m = \log_a m^b \tag{1.12}$$

Cambio di base di un logaritmo

$$\log_b m = \log_b a \log_a m \tag{1.13}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} m = b^{\log_b m} \\ a = b^{\log_b a} \\ m = a^{\log_a m} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a m} = b^{\log_b a \, \log_a m} \end{cases} \tag{1.14}$$

e confrontando le due espressioni per m si ottiene

$$\rightarrow \log_b m = \log_b a \, \log_a m \tag{1.15}$$

1.5 Funzioni armoniche

1.5.1 La circonferenza e la definizione delle funzioni seno e coseno

1.5.2 La definizione delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante

1.5.3 Formule del seno e coseno di somme e differenze

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.6 Funzioni iperboliche

2. Equazioni

2.1 Equazioni algebriche

Definizione 2.1 — Equazioni algebriche. ...

2.1.1 Equazioni polinomiali

Definizione 2.2 — Equazione polinomiale. Un'equazione polinomiale ha la forma

$$p(x) = 0 \tag{2.1}$$

dove $p(x)$ è un polinomio. Il **grado** dell'equazione corrisponde al grado del polinomio $p(x)$, cioé alla potenza massima dei monomi. In maniera più esplicita, quindi, si può scrivere un'equazione polinomiale di grado n come

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ , \qquad \text{con } a_n \neq 0 \tag{2.2}$$

Esistenza e numero delle soluzioni. Un'equazione polinomiale di grado n ha **al massimo** n soluzioni reali. L'esistenza di soluzioni reali non è in generale garantita, mentre il **teorema fondamentale dell'algebra** assicura che esistano esattamente n soluzioni complesse di un'equazione polinomiale con coefficienti complessi.

2.1.1.1 Equazioni di primo grado

La forma generale delle equazioni di primo grado è

$$ax + b = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{2.3}$$

e la soluzione è

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \ . \tag{2.4}$$

2.1.1.2 Equazioni di secondo grado

La forma generale delle equazioni di secondo grado è

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad \text{con } a \neq 0 \tag{2.5}$$

Un'equazione di secondo grado può ammettere nel campo dei numeri reali 2 soluzioni (distinte o coincidenti) o nessuna soluzione, a seconda del valore dell'espressione definita come **discriminante**, $\Delta := b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$: due soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale

Quando il discriminante è non negativo, le soluzioni dell'equazione sono date dall'espressione

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \ . \tag{2.6}$$

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado. Una dimostrazione della formula risolutiva viene ricavata con la regola di completamento del quadrato

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c = \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \tag{2.8}$$

É ora facile notare come questa equazione ha soluzioni solo quando il discriminante è non negativo. Quando il discriminante è non negativo, è possibile estrarre la radice quadra dell'espressione

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \mp\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \ . \tag{2.9}$$

2.1.2 Equazioni algebriche razionali

2.1.3 Equazioni algebriche irrazionali

2.2 Equazioni non algebriche o trascendenti

2.2.1 Equazioni con i valori assoluti

2.2.2 Equazioni con esponenti e logaritmi

2.2.3 Equazioni con le funzioni armoniche

3. Disequazioni

3.0.1 Disequazioni algebriche

3.0.2 Disequazioni algebriche

4. Sistemi di equazioni e di disequazioni

IV

Algebra in $\mathbb{C}$

4.1 Definizione dei numeri complessi 27
4.2 Operazioni con i numeri complessi 27

4.1 Definizione dei numeri complessi

Definizione 4.1 — Unità immaginaria.

$$i := \sqrt{-1} \tag{4.1}$$

Definizione 4.2 — Numero complesso.

$$z = x + iy \qquad , \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

4.1.1 Rappresentazione del piano complesso (di Argand–Gauss)

Si può definire una relazione biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e il piano $\mathbb{R}^2$.

4.1.1.1 Rappresentazione cartesiana.

4.1.1.2 Rappresentazione polare.

Trasformazione tra coordinate cartesiane e polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(x, y) \end{cases} \tag{4.3}$$

e quindi

$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{4.4}$$

La relazione di Eulero e la rappresentazione polare dei numeri complessi. Usando le espansioni in serie di Taylor delle funzioni $e^{i\theta}$, $\cos\theta$ e $\sin\theta$, Eulero ricavò la formula che da lui prende il nome

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ . \tag{4.5}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!} && = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\
\sin\theta &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} && = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\
e^{i\theta} &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(i\theta)^n}{n!} && = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots = \\
& && = \left[1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] = \\
& && = \cos\theta + i\sin\theta \ .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2 Operazioni con i numeri complessi

4.2.1 Somma e differenza

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \ . \tag{4.7}$$

4.2.2 Prodotto e divisione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \ . \tag{4.8}$$

4.2.3 Potenze e radici

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \tag{4.9}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i(\theta+2\pi m)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{m}{n}2\pi\right)} \tag{4.10}$$

4.2.4 Esponenziali e logaritmi

...

V Calcolo infinitesimale

5 Limiti **31**
5.1 Infiniti e infinitesimi 31

6 Derivate **33**
6.1 Definizioni 33
6.2 Regole di derivazione 33
6.3 Teoremi 34
6.4 Tabella di derivate 34
6.5 Espansioni in serie 34
6.6 Applicazioni 35

7 Integrali **37**
7.1 Definizioni 37
7.2 Proprietà 37
7.3 Teoremi 37
7.4 Integrali fondamentali 38
7.5 Regole di integrazione 38

5. Limiti

5.1 Infiniti e infinitesimi

6. Derivate

6.1 Definizioni

Definizione 6.1 — Derivata.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6.1}$$

Interpretazione geometrica

6.2 Regole di derivazione

6.2.1 Regole

Derivata della somma di due funzioni e il prodotto per uno scalare

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (af(x))' &= af'(x) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Proprietà 6.1 — Operatore lineare. La derivata è un operatore lineare.

Derivata del prodotto di due funzioni
Derivata del rapporto di due funzioni
Derivata di una funzione composta

6.2.2 Dimostrazioni

Derivata della somma di due funzioni
Derivata del prodotto di due funzioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Derivata del rapporto di due funzioni

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)= \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Derivata di una funzione composta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(g(x)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(g(x+\Delta x))-f(g(x))\right]= \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}= \\
&= \dots \\
&= f'(g(x))\,g'(x)\ .
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

6.3 Teoremi

6.3.1 Teorema di de l'Hopital

6.4 Tabella di derivate

6.5 Espansioni in serie

Definizione 6.2 — Serie di Taylor. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ centrata in $x = x_0$ è la serie polinomiale

$$T[f(x_0)](x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ . \tag{6.6}$$

Theorem 6.1 La serie di Taylor troncata alla n-esima potenza,

$$T^n[f(x_0)](x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\ , \tag{6.7}$$

è un'approssimazione dell'n-esimo ordine della funzione $f(x)$, i.e.

$$f(x) - T^n[f(x_0)](x) \sim o(|x-x_0|^n) \tag{6.8}$$

Definizione 6.3 — Serie di MacLaurin. La serie di MacLaurin di una funzione $f(x)$ è definita come la sua serie di Taylor centrata in $x = 0$.

6.6 Applicazioni

6.6.1 Studio funzione

6.6.2 Approssimazione locale di

7. Integrali

7.1 Definizioni

Definizione 7.1 — Somma di Riemann. Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n | a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$, la somma di Riemann viene definita come

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}) \tag{7.1}$$

con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definizione 7.2 — Integrale di Riemann. Definendo $\Delta x := \max_i(x_i - x_{i-1})$, l'integrale di Riemann viene definito come il limite della somma di Riemann per $\Delta x \to 0$ (e di conseguenza il numero di intervalli della partizione $n \to \infty$), e viene indicato come

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_n \tag{7.2}$$

Definizione 7.3 — Integrale definito.

Interpretazione geometrica

Definizione 7.4 — Integrale indefinito.

7.2 Proprietà

7.3 Teoremi

Theorem 7.1 — Teorema della media.

Theorem 7.2 — Teorema fondmaentale del calcolo infinitesimale.

$$\frac{d}{dx} \int_{t=a}^{x} f(t)dt = f(x) \tag{7.3}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{t=a}^{x} f(t)dt &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t=a}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{t=a}^{x} f(t)dt\right] = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{t=x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Delta x\, f(\xi) = \qquad\qquad (\text{con } \xi\in[x,x+\Delta x]) \\
&= f(x)\ .
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

7.4 Integrali fondamentali

7.5 Regole di integrazione

7.5.1 Integrazione per parti

- Definendo $F(x)$, $G(x)$ le primitive delle funzioni $f(x)$, e $g(x)$
- Integrando in x dalla regola di **derivazione del prodotto** $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$, riscritta isolando il termine $F'(x)G(x) = (F(x)G(x))' - F(x)G'(x)$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int f(x)G(x)dx &= \int (F(x)G(x))'dx - \int F(x)G'(x)dx = \\
&= F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)dx
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

7.5.2 Integrazione con sostituzione

- Definendo la funzione composta $\overline{F}(x) = F(y(x))$ e le derivate

$$
\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) \qquad , \qquad f(y) = \frac{d}{dy}F(y)
\tag{7.6}
$$

- Partendo dalla regola di **derivazione della funzione composta**, $\overline{F}(x) = F(y(x))$

$$
\overline{f}(x) = \frac{d}{dx}\overline{F}(x) = \frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{dF}{dy}(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = f(y(x))y'(x)
\tag{7.7}
$$

Usando il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

$$
\begin{aligned}
&F(y) = \int f(y)dy \\
&\overline{F}(x) = \int \overline{f}(x)dx = \int f(y(x))\ y'(x)dx
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Se si introduce la dipendenza $y(x)$ nella prima equazione, si ottiene l'uguaglianza tra le ultime due espressioni, $F(y(x)) = \overline{F}(x)$, e quindi

$$
\int f(y)dy = \int f(y(x))\ y'(x)dx\ .
\tag{7.9}
$$

VI

Equazioni differenziali ordinarie

8 **Introduzione** 41
8.1 Applicazioni 41
8.2 Definizioni 41

9 **Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti** 43
9.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine 43
9.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine 43

10 **Metodo di separazione delle variabili** 45

8. Introduzione

8.1 Applicazioni

8.2 Definizioni

Definizione 8.1 — Equazione differenziale ordinaria. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione che ha come incognita una funzione $y(x)$, nella quale possono comparire la funzione incognita $y(x)$, le sue derivate $y^{(n)}(x)$ e la variabile indipendente x, che può essere scritto nella forma implicita

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega = [a,b]. \tag{8.1}$$

L'**ordine** dell'equazione differenziale viene definito come l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che compaiono nell'equazione.

Definizione 8.2 — Equazione differenziale ordinaria lineare. Un'equazione differenziale è lineare se si può scrivere come l'uguaglianza di una combinazione lineare delle derivate della funzione incognita e una funzione nota, $f(x)$. Ad esempio, la forma generale dell'equazione differenziale ordinaria di ordine n può essere scritta come

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{8.2}$$

Definizione 8.3 — Equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare con coefficienti $a_i(x) = a_i$, numeri che non dipendono dalla variabile indipendente x,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{8.3}$$

Definizione 8.4 — Equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti. Un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti è un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti con $f(x) = 0$,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega. \tag{8.4}$$

In generale, la soluzione dell'equazione (8.1) dipende da n parametri indeterminati. In generale, un problema differenziale è composto da:

- un'equazione differenziale di ordine n
- n condizioni per determinare gli n parametri altrimenti indeterminati

Definizione 8.5 — Problema di Cauchy. Un problema di Cauchy è definito da:

- un'equazione differenziale di ordine n

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots y^{(n)}(x)\right) = 0 \;, \qquad \text{con } x \in \Omega = [a, b]. \tag{8.5}$$

- n condizioni che definiscono il valore della funzione incognita e delle prime $n-1$ derivate nell'estremo inferiore dell'intervallo

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y'(a) &= y_1 \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(a) &= y_{n-1} \end{aligned} \tag{8.6}$$

9. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti

9.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di primo ordine

9.1.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay'(x) + by(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{9.1}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando la derivata e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta + b)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{9.2}$$

Il prodotto di tre fattori si annulla quando si annulla uno dei tre fattori:

- $e^{\beta x}$ non si annulla per nessun valore di x
- se si annulla α, $\alpha = 0$, si otterebbe la soluzione triviale $y(x) = 0$
- $\rightarrow$ deve quindi annullarsi il fattore $a\beta + b$: si ottiene quindi il valore $\beta = -\dfrac{b}{a}$

La forma generale della soluzione dell'equazione (9.1) è quindi

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{a}x} \tag{9.3}$$

Per determinare il coefficiente α è necessaria una condizione che definisca il valore della funzione (o della sua derivata) in un punto del dominio o del suo contorno.

9.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di secondo ordine

9.2.1 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di primo ordine

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \ , \qquad \text{con } x \in \Omega \text{ e } a \neq 0 \tag{9.4}$$

Si cerca la soluzione nella forma $y(x) = \alpha e^{\beta x}$ e, calcolando le derivate e inserendo nell'equazione, si ottiene

$$(a\beta^2 + b\beta + c)\alpha e^{\beta x} = 0 \ . \tag{9.5}$$

I valori di β si ottiengono dalla soluzione dell'equazione di secondo grado in β, $a\beta^2+b\beta+c = 0$ che, a seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, possono essere:

- $\Delta > 0$: esistono due soluzioni reali distinte $\beta_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: esistono due soluzioni reali coincidenti $\beta_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: esistono due soluzioni complesse coniugate $\beta_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \mp j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

La soluzione dell'equazione differenziale assume quindi la forma

- $\Delta > 0$:

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} \tag{9.6}$$

- $\Delta = 0$:

$$y(x) = \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 x e^{\beta x} \tag{9.7}$$

- $\Delta < 0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 e^{\beta x} + \alpha_2 e^{\beta^* x} = \\ &= \alpha_1 e^{(re\{\beta\} + i im\{\beta\})x} + \alpha_2 e^{(re\{\beta\} - i im\{\beta\})x} = \\ &= e^{re\{\beta\}x} \left(\alpha_1 e^{i\ im\{\beta\}x} + \alpha_2 e^{-i\ im\{\beta\}x} \right) \ , \end{aligned} \tag{9.8}$$

  e per avere una soluzione reale, bisogna imporre $\alpha_2 = \alpha_1^*$, per ottenere la somma di due numeri complessi coniugati, uguale al doppio della somma della loro parte reale,

$$y(x) = 2e^{re\{\beta\}x} \left(re\{\alpha_1\} \cos(\beta x) - im\{\alpha_1\} \sin(\beta x) \right) \ , \tag{9.9}$$

  che può essere riscritta come

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{re\{\beta\}x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right) = \\ &= C e^{re\{\beta\}x} \cos(\beta x + \phi) \ . \end{aligned} \tag{9.10}$$

10. Metodo di separazione delle variabili

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x)) \;, \qquad \text{con } x \in \Omega \tag{10.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x)) \tag{10.2}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \tag{10.3}$$

■ **Esempio 10.1** $y'(x) = xy(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx \quad \rightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \rightarrow \quad y(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2} \tag{10.4}$$

Verifica: $y'(x) = K\frac{1}{2}2xe^{\frac{1}{2}x^2} = Kxe^{\frac{1}{2}x^2} = xy(x)$. ■

VII Vettori

11 **Algebra vettoriale** **51**
11.1 Definizioni 51
11.2 Applicazioni 51

12 **Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale** **53**

Motivazione:

- non tutti gli oggetti di interesse della Matematica, della Fisica o delle Scienze in generale possono essere adeguatamente rappresentati da un singolo numero
- esempi: posizione, velocità, forza,...

Storia:

- ...
- da vettori nello spazio fisico a struttura astratta matematica

11. Algebra vettoriale

11.1 Definizioni

Definizione 11.1 — Spazio vettoriale. Uno spazio vettoriale è una struttura matematica composta da:

- un insieme V, i cui elementi $\mathbf{v} \in V$ sono chiamati **vettori**
- un campo F, i cui elementi $a \in F$ sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto a V, cioè il cui risultato è un elemento che appartiene a V, che soddisfano determinate proprietà
  - **somma vettoriale** di due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{11.1}$$

  - **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore $\mathbf{u} \in V$ e uno scalare $a \in F$:

$$a\mathbf{v} = \mathbf{w} \in V \tag{11.2}$$

Proprietà 11.1 — Proprietà delle operazioni.

Definizione 11.2 — Base e dimensione di uno spazio.

11.1.1 Spazi vettoriali con prodotto interno

11.2 Applicazioni

11.2.1 Geometria

11.2.2 Fisica

12. Coordinate in spazi euclidei e cenni di calcolo vettoriale

Definizione 12.1 — Vettore posizione.

Definizione 12.2 — Coordinate.

■ **Esempio 12.1 — Coordinate cartesiane.** ■

■ **Esempio 12.2 — Coordinate polari.** ■

■ **Esempio 12.3 — Coordinate sferiche e superficie terrestre.** ■

VIII

Geometria

13 **Geomteria nel piano** 59
13.1 Geometria euclidea 59
13.2 Geometria cartesiana 59

14 **Geometria nello spazio** 61
14.1 Geometria euclidea 61
14.2 Geometria cartesiana 61

Introduzione storica:

- Euclide
- Cartesio
- Riemann

13. Geomteria nel piano

13.1 Geometria euclidea
13.1.1 Introduzione
13.1.2 Rette e angoli
13.1.3 Triangoli
13.1.4 Circonferenza
13.2 Geometria cartesiana
13.2.1 Coordinate cartesiane
13.2.2 Punto, retta e distanze
13.2.3 Coniche

14. Geometria nello spazio

14.1 Geometria euclidea
14.2 Geometria cartesiana

IX

Statistica

X Matematica numerica - cenni

15 Equazioni e sistemi di equazioni **67**
15.1 Equazioni 67
15.2 Sistemi di equazioni 68

16 Derivate **69**
16.1 69

17 Ricerca dei massimi e ottimizzazione . **71**
17.1 71

18 Integrali **73**
18.1 73

19 Equazioni differenziali ordinarie **75**
19.1 Riduzione a sistema di primo ordine 75
19.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy 75
19.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno 75

20 Statistica **77**

15. Equazioni e sistemi di equazioni

15.1 Equazioni

15.1.1 Equazioni non lineari

$$f(x) = 0 \tag{15.1}$$

15.1.1.1 Metodo della bisezione

Se la funzione $f(x)$ è continua, ed esistono due valori x_1, x_2 tali che $f(x_1)f(x_2) < 0$, allora esiste una soluzione $\overline{x} \in [x_1, x_2]$ dell'equazione $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x_1,\ x_2 \quad \text{ s.t. } f(x_1) < 0 \text{ and } f(x_2) > 0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ x = 0.5(x_1 + x_2),\ f = f(x),\ res = |f| \\
&\text{Bisection loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad if(f < 0): \\
&\qquad\qquad x_1 \leftarrow x \\
&\qquad else: \\
&\qquad\qquad x_2 \leftarrow x \\
&\qquad x = 0.5(x_1 + x_2) \\
&\qquad f = f(x) \\
&\qquad res = |f(x)| \\
&\qquad niter += 1
\end{aligned} \tag{15.2}$$

15.1.1.2 Metodo di Newton

Se la funzione $f(x)$ è "sufficientemente regolare" e il tentativo iniziale x_0 è "sufficientemente vicino" a una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, il metodo di Newton

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } f(x),\ f'(x) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } x = x^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |f(x)| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad f'(x)\Delta x = -f(x) \\
&\qquad x \leftarrow x + \Delta x \\
&\qquad niter += 1,\ res = |f(x)|
\end{aligned} \tag{15.3}$$

converge a una soluzione dell'equazione.

15.2 Sistemi di equazioni

15.2.1 Sistemi di equazioni lineari

Metodo di sostituzione

15.2.2 Sistemi di equazioni non lineari

15.2.2.1 Metodo di Newton per sistemi

$$\begin{aligned}
&\text{Algorithm inputs: } \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \mathbf{f_x}(\mathbf{x}) \\
&\text{Algorithm parameters: } tol,\ max_iter \\
&\text{Initial guess: } \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \\
&\text{Initialization: } niter = 0,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \\
&\text{Newton loop:} \\
&while(res > tol \text{ and } niter < max_iter): \\
&\qquad \mathbf{f_x}(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
&\qquad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \\
&\qquad niter += 1,\ res = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|
\end{aligned} \tag{15.4}$$

16. Derivate

16.1

17. Ricerca dei massimi e ottimizzazione

17.1

18. Integrali

18.1

19. Equazioni differenziali ordinarie

19.1 Riduzione a sistema di primo ordine

É possibile ridurre un'equazione differenziale ordinaria di ordine n, $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$, a un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Definendo le funzioni incognite

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= y(x) \\ y_1(x) &:= y'(x) \\ &\dots \\ y_{n-1}(x) &:= y^{(n-1)}(x) \ , \end{aligned} \tag{19.1}$$

il problema differenziale originale è equivalente al sistema

$$\begin{cases} F(x, y_0(x), y_1(x), y_{n-1}(x), y'_{n-1}(x)) = 0 \\ y'_0(x) = y_1(x) \\ y'_1(x) = y_2(x) \\ \dots \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \end{cases} , \tag{19.2}$$

che può essere scritto in forma sintetica (vettoriale)

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}(x)) = \mathbf{0} \ . \tag{19.3}$$

19.2 Schemi numerici per problemi ai valori iniziali, o di Cauchy

19.3 Schemi numerici per problemi ai valori al contorno

20. Statistica

XI

Appendici, indice e bibliografia

Bibilografia 81

Indice 83

Appendices 83

A Prima appendice 83

Bibiliografia

A. Prima appendice

...