

Simulation d'oscillateurs couplés. Compléments mathématiques et physiques.

Jean-Cédric Chappelier

version 1.2 (23 mars 2018)

© EPFL 2018

Résumé

Le projet de cette année s'intéresse à la simulation numérique de systèmes à *plusieurs* degrés de liberté (l'aspect intéressant étant justement d'avoir différents cas). Plus précisément, nous nous focaliserons sur la simulation d'oscillateurs couplés (pendules couplés, systèmes masses-ressorts, pendules et ressorts, etc.), lesquels présentent souvent ce que l'on appelle un comportement « chaotique ».

Le présent document ne constitue que le *complément* mathématique de la donnée du projet. Pour plus de détails sur la donnée précise, le cadre du projet lui-même, etc., voir la page Web du projet sur le site du cours.

Révisions

- | | | |
|-------------|---------|---|
| version 1.2 | 23 mars | [mineure] dans la position du pendule, p. 4, \vec{g} doit être remplacé par sa version unitaire $\{\vec{g}\}_1$.
[mineure] la première équation de l'intégrateur d'Euler-Cromer, p. 13, est bien sûr de même nature que celle correspondante dans l'intégrateur d'Euler : la fonction f dépend bien sûr aussi de t et $\dot{\vec{P}}^{(n-1)}$; |
| version 1.1 | 19 mars | [majeure] erreur de signe dans les équations du pendule double p. 10 & 11 (anciennement 9 & 10) : le terme en $\dot{\theta}_1^2$ avait le mauvais signe dans chacune des équations. |
-
-

Table des matières

1	Cadre du projet	2
1.1	Formulation générale	2
2	Systèmes à un seul degré de liberté	3
2.1	Pendule pesant (de longueur fixe)	3
2.2	Ressort	4
2.3	Pendule de torsion	5
3	Systèmes à plusieurs degrés de liberté : cas des oscillateurs couplés	6
3.1	Chariot avec pendule amorti par un ressort	6
3.2	Deux ressorts	8
3.3	Pendule-ressort	9
3.4	Pendule double	10
3.5	Pendules reliés par un ressort	11
4	Intégration numérique	12
4.1	Idée générale : méthode d'Euler	12
4.2	Intégrateur d'Euler-Cromer	13
4.3	Intégrateur de Newmark	14
4.4	Intégrateur Runge-Kutta d'ordre 4	14
5	Exemple (pour les tests)	15
5.1	Conseils pour les tests	15
5.2	Intégration d'Euler-Cromer d'un pendule pesant	16
A	Notations	18
B	Notion de degré de liberté	19
C	Notion d'oscillateur harmonique	20
D	Portrait de phase	22
E	Compléments sur l'intégration numérique	24

1 Cadre du projet

Pour les notations, veuillez vous reporter à l'annexe A, page 18.

1.1 Formulation générale

On s'intéresse ici à la simulation numérique d'objets mobiles à n degrés de liberté¹ ayant des comportements d'oscillateurs² : par exemple un pendule double (comme un bras articulé : épaule-coude ; cf figure 1), deux pendules reliés par un ressort, des masses reliées entre elles par des ressorts, etc.

Un tel système d'oscillateurs à n degrés de liberté sera représenté par son équation d'évolution :

$$\ddot{\vec{P}} = f(t, \vec{P}, \dot{\vec{P}}) \quad (1)$$

où $\vec{P} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de ses paramètres (« degrés de liberté », cf section C, page 20, et annexe B, page 19). f est donc une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n qui représente

1. Pour la notion de degré de liberté, voir l'annexe B, page 19.

2. Pour un bref rappel sur l'oscillateur harmonique, voir l'annexe C, page 20.

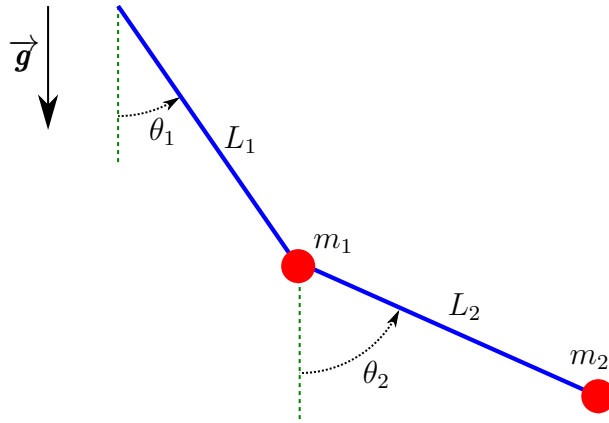


FIGURE 1 – Exemple d'oscillateurs couplés : un pendule double.

l'équation complète du mouvement de tout le système.

Dans la plupart des cas (lorsque f est une fonction non linéaire), un tel système d'équations différentielles est impossible à résoudre dans son ensemble et doit alors être simulé numériquement, mais avec précautions car un tel système est qualifié de « chaotique », ce que l'on pourrait aussi exprimer comme « très fortement non continu » : une petite variation des conditions initiales pouvant entraîner une énorme différence sur la solution.

En plus des paramètres \vec{P} décrivant son évolution, nous aurons besoin pour la représentation géométrique (c.-à-d. son dessin) du système, d'un vecteur \vec{O} représentant sa position de référence (son « origine ») et d'un vecteur unitaire \vec{a} représentant sa « direction principale » utile pour représenter son orientation dans l'espace. Ces deux vecteurs n'interviennent pas dans les équations du mouvement, mais sont utiles pour placer les différents objets dans l'espace.

Dans le cadre de ce projet, un système d'oscillateurs sera donc représenté par $(\vec{P}, \vec{Q}, f, \vec{O}, \vec{a})$, où \vec{Q} est la représentation numérique de $\dot{\vec{P}}$.

2 Systèmes à un seul degré de liberté

Nous décrivons ici quelques oscillateurs simples, à un seul degré de liberté. La section suivante abordera les oscillateurs couplés, à plusieurs degrés de liberté.

2.1 Pendule pesant (de longueur fixe)

Considérons un pendule de longueur L et de masse m soumis à la gravité (cf fig. 2).

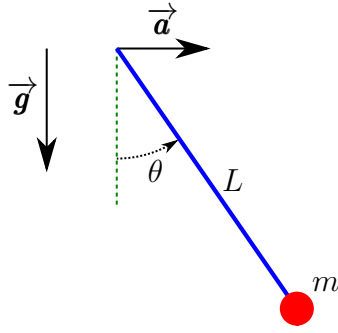


FIGURE 2 – Pendule pesant.

L'équation du mouvement d'un tel système est donné par la relation :

$$m L^2 \ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + m g L \sin(\theta) = 0$$

où λ est la viscosité de l'air et/ou un frottement fluide au point de rotation.

On remarque que le vecteur \vec{a} (cf fig. 2) ne joue aucun rôle dans l'équation précédente. Il sert en effet uniquement à définir le plan dans lequel se déplace le pendule, mais n'intervient pas dans l'évolution de celui-ci.

On peut étendre cette équation à n'importe quel solide indéformable en rotation autour d'un axe en remplaçant L par la distance entre l'axe et le centre de masse du corps.

La paramétrisation de ce système est alors : $\vec{P} = (\theta)$, vecteur à une dimension correspondant à l'écart angulaire à la position de repos ; et ses paramètres propres (internes) sont : m , L et λ . L'équation générale (1) pour ce cas est :

$$f(t, \vec{P}, \vec{Q}) = -\frac{g}{L} \sin(P_1) - \frac{\lambda}{m L^2} Q_1 \quad (2)$$

Géométrie/dessin : le vecteur position (3D) de la masse est donné par $\vec{O} + L \cos(P_1) \{ \vec{g} \}_1 + L \sin(P_1) \vec{a}$ (\vec{a} unitaire et orthogonal à \vec{g}).

2.2 Ressort

Soit une masse m attachée à un ressort idéal de constante de raideur k , placée sur un axe (barre) donné par le vecteur unitaire \vec{a} (cf fig. 3). Tout le système est soumis à la pesanteur.

Il existe une infinité de choix possibles pour représenter la position de la masse m . La plus simple étant certainement de placer l'origine du référentiel à l'endroit où se situe la masse

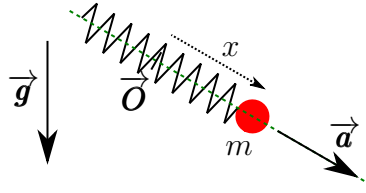


FIGURE 3 – Ressort.

lorsque le système est au repos (cf fig. 3). On positionne de plus l'axe des abscisses du référentiel suivant l'axe \vec{a} du ressort.

La masse subit 3 forces différentes :

1. la force de rappel du ressort : $\vec{F}_r = -k x \vec{a}$;
2. la force de pesanteur $m\vec{g}$, mais dont les contraintes physiques (attachement de la masse à la barre) font que seule la projection sur l'axe \vec{a} influe sur le mouvement : $\vec{F}_p = m(\vec{g} \cdot \vec{a}) \vec{a}$;
3. une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\lambda \dot{x} \vec{a}$.

On obtient ainsi l'équation du mouvement de ce système (projection sur l'axe \vec{a}) :

$$m \ddot{x} + \lambda \dot{x} + k x - m(\vec{g} \cdot \vec{a}) = 0 \quad (3)$$

La paramétrisation de ce système est alors : $\vec{P} = (x)$, vecteur à une dimension correspondant à l'écart à la position de repos du ressort ; et ses paramètres propres (internes) sont : m , k et λ . L'équation générale (1) pour ce cas est :

$$\boxed{f(t, \vec{P}, \vec{Q}) = -\frac{k}{m} P_1 - \frac{\lambda}{m} Q_1 + \vec{g} \cdot \vec{a}}$$

La position dans l'espace (3D) de la masse est donnée par $\vec{O} + P_1 \vec{a}$.

2.3 Pendule de torsion

Soit un pendule de torsion dont le fil a une constante de torsion C et la barre un moment d'inertie I (cf fig. 4).

Ce système est régi par l'équation différentielle :

$$I \ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + C \theta = 0$$

avec λ , le coefficient de friction radiale.

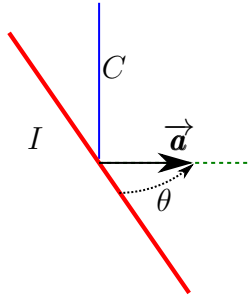


FIGURE 4 – Pendule de torsion.

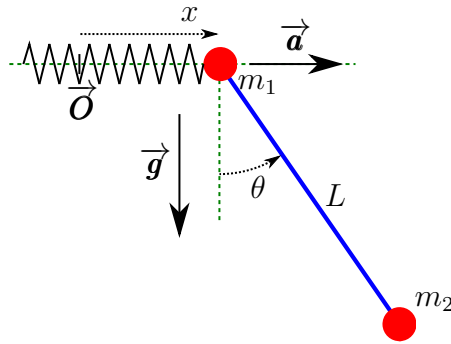


FIGURE 5 – Chariot avec pendule amorti par un ressort.

On remarque que le vecteur \vec{g} n'intervient pas dans cette équation, le fil du pendule étant vertical.

$\vec{P} = (\theta)$, écart angulaire à la position de repos. Paramètres propres (internes) : I, C, λ .

$$f(t, \vec{P}, \vec{Q}) = -\frac{C P_1 + \lambda Q_1}{I}$$

3 Systèmes à plusieurs degrés de liberté : cas des oscillateurs couplés

3.1 Chariot avec pendule amorti par un ressort

Soit le système représenté sur la figure 5.

Si l'on cherche à décrire la position du chariot (masse m_1) et du pendule (masse m_2), il faudrait dans la manière classique deux vecteurs de dimension 3. De manière intuitive, trois

des six composantes seront nulles (toutes les composantes perpendiculaires au plan de la feuille et la composante verticale du chariot). On aurait donc finalement besoin que de trois valeurs.

On peut cependant faire encore mieux en constatant qu'une seule variable suffit pour représenter la position du pendule : un angle. Finalement seules deux variables suffisent pour décrire l'état du système, qui, de fait, a deux degrés de liberté. Ces variables seraient, sur ce dessin, la distance x à la position d'équilibre du chariot et l'angle θ du pendule.

Afin de pouvoir utiliser notre notation générique, on regroupe ces variables dans un vecteur : $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$. On peut alors écrire l'équation différentielle d'un tel système en utilisant ce vecteur à deux composantes, plutôt qu'en utilisant les six coordonnées du système « classique ». Il faut faire attention ici à ne pas confondre les vecteurs « géométriques », représentant le système dans l'espace 3D et le vecteur \vec{P} qui ne représente pas directement des positions dans l'espace usuel, mais simplement les degrés de liberté du système.

Si l'on cherche à représenter la position (géométrique, 3D) du chariot et de la masse, il faut revenir à des coordonnées conventionnelles, c.-à-d., en choisissant \vec{a} unitaire suivant l'axe de déplacement du chariot :

$$\begin{aligned} \text{Position X du chariot} &= P_1 && \text{(suivant } \vec{a} \text{)} \\ \text{Position X de la masse} &= L \sin(P_2) && \text{(suivant } \vec{a} \text{)} \\ \text{Position Y de la masse} &= L \cos(P_2) && \text{(suivant } \vec{g}, \text{ perpendiculaire à } \vec{a} \text{)} \end{aligned}$$

Les équations du mouvement d'un tel système se présentent sous la forme :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 L (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + \lambda \dot{x} + k x = 0 \\ m_2 L \ddot{x} \cos \theta + m_2 L^2 \ddot{\theta} + m_2 L \mu \dot{\theta} + m_2 g L \sin \theta = 0 \end{cases}$$

où λ et μ sont des coefficients de frottement ; soit :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2 \sin^2 \theta) \ddot{x} = -k x - \lambda \dot{x} + m_2 L \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_2 (g \sin \theta + \mu \dot{\theta}) \cos \theta \\ L (m_1 + m_2 \sin^2 \theta) \ddot{\theta} = (k x + \lambda \dot{x}) \cos \theta - m_2 L \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - M (g \sin \theta + \mu \dot{\theta}) \end{cases}$$

avec $M = m_1 + m_2$; ou encore :

$$\ddot{\vec{P}} = \begin{pmatrix} \frac{-k x - \lambda \dot{x} + m_2 L \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_2 (g \sin \theta + \mu \dot{\theta}) \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \\ \frac{\cos \theta (k x + \lambda \dot{x} - m_2 L \dot{\theta}^2 \sin \theta) - M (g \sin \theta + \mu \dot{\theta})}{L (m_1 + m_2 \sin^2 \theta)} \end{pmatrix}$$

soit au final :

$$f(t, \vec{P}, \vec{Q}) = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} -B + m_2 C \cos(P_2) \\ \frac{B \cos(P_2) - M C}{L} \end{pmatrix} \quad (4)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= m_1 + m_2 (\sin(P_2))^2 \\ B &= k P_1 + \lambda Q_1 - m_2 L Q_2^2 \sin(P_2) \\ C &= g \sin(P_2) + \mu Q_2 \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, le système d'équation n'est pas celui d'un oscillateur harmonique³ puisqu'il y a des termes qui lient l'équation du pendule avec celle du chariot ; on parle alors « d'oscillateurs couplés ».

Si l'on a plusieurs oscillateurs qui évoluent indépendamment des autres, par exemple deux ressorts sur des axes différents n'ayant aucun contact entre eux, il est également possible d'utiliser un vecteur \vec{P} où les composantes seraient les distances à l'origine de chaque masse : $\vec{P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. La différence par rapport au cas d'oscillateurs couplés serait que l'équation différentielle de la première composante ne possède pas de terme dépendant de la deuxième composante : les deux systèmes sont totalement indépendants et l'écriture à l'aide d'un même \vec{P} est juste une synthèse, mais l'on peut tout à fait traiter les deux cas (x_1 puis x_2) séparément. Ce n'est pas le cas des oscillateurs couplés.

Pour conclure, les paramètres propres (internes) du système décrit plus haut (chariot+pendule) sont : m_1, m_2, L, k, λ et μ . Le vecteur \vec{P} est le vecteur (2D) avec comme première composante la position du chariot (masse m_1) et comme 2^e composante l'écart à la verticale pour le pendule : $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$; et la fonction d'évolution $f(t, \vec{P}, \dot{\vec{P}})$ est donnée par l'équation (4) ci-dessus.

3.2 Deux ressorts

Soit le système représenté sur la figure 6. Il a pour équation du mouvement le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \lambda \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_3 (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \lambda \dot{x}_2 + k_2 x_2 + k_3 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

3. Voir l'annexe C, page 20, pour un bref rappel sur l'oscillateur harmonique.

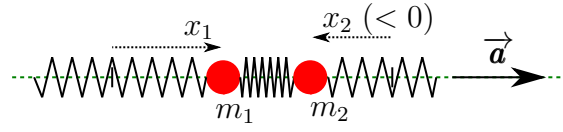


FIGURE 6 – Système couplé.

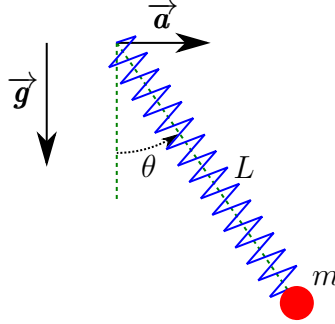


FIGURE 7 – Pendule ressort.

que l'on peut récrire :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= -\frac{\lambda}{m_1} \dot{x}_1 - \frac{k_1+k_3}{m_1} x_1 + \frac{k_3}{m_1} x_2 \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{\lambda}{m_2} \dot{x}_2 - \frac{k_2+k_3}{m_2} x_2 + \frac{k_3}{m_2} x_1 \end{cases}$$

La paramétrisation de ce système est alors : $\vec{P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, vecteur (2D) des écarts à la position de repos ; et ses paramètres propres (internes) sont : $m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, L_1, L_2, L_3$ et λ . L'équation générale (1) pour ce cas est (écriture matricielle ici) :

$$f(t, \vec{P}, \dot{\vec{P}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -k_1 - k_3 & k_3 \\ k_3 & -k_2 - k_3 \end{pmatrix} \vec{P} - \lambda \dot{\vec{P}} \right]$$

3.3 Pendule-ressort

Soit le système représenté sur la figure 7.

Les paramètres propres (internes) de ce système sont : la masse m , la longueur L du ressort au repos, et sa constante de raideur k .

Soit $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur (2D) des positions de la masse dans un repère centré sur \vec{O} et d'axes \vec{a} (orthogonal à \vec{g}) et \vec{g} (c.-à-d. y positif suivant \vec{g}).

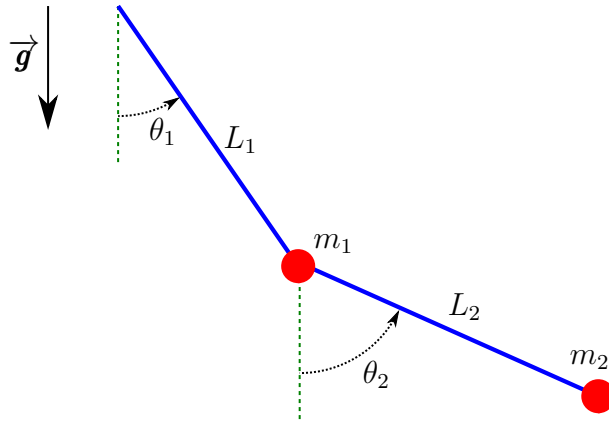


FIGURE 8 – Pendule double

Les équations du mouvement d'un tel système se présentent alors sous la forme :

$$m\ddot{\vec{P}} = m\vec{g} - k(\vec{P} - L\{\vec{P}\}_1)$$

On a donc finalement :

$$f(t, \vec{P}, \vec{Q}) = \vec{g} - \frac{k}{m} \left(1 - \frac{L}{P}\right) \vec{P}$$

(indépendante de \vec{Q}).

3.4 Pendule double

Soit le système représenté sur la figure 8.

Les équations du mouvement d'un tel système se présentent sous la forme :

$$\begin{cases} ML_1\ddot{\theta}_1 + m_2L_2\ddot{\theta}_2 \cos \Delta\theta + m_2L_2\dot{\theta}_2^2 \sin \Delta\theta + Mg \sin \theta_1 = 0 \\ L_2\ddot{\theta}_2 + L_1\ddot{\theta}_1 \cos \Delta\theta - L_1\dot{\theta}_1^2 \sin \Delta\theta + g \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

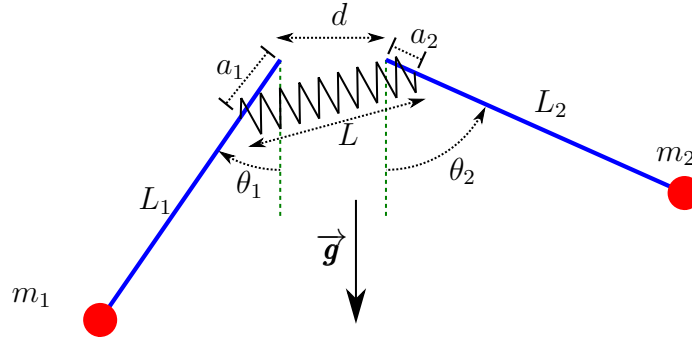


FIGURE 9 – Pendules couplés par un ressort.

avec $M = m_1 + m_2$ et $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 g \cos \Delta\theta \sin \theta_2 - M g \sin \theta_1 - m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta \sin \Delta\theta - m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \Delta\theta}{(m_1 + m_2 \sin^2 \Delta\theta) L_1} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{M g \cos \Delta\theta \sin \theta_1 - M g \sin \theta_2 + m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta \sin \Delta\theta + M L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \Delta\theta}{(m_1 + m_2 \sin^2 \Delta\theta) L_2} \end{array} \right.$$

Paramètres propres (internes) : m_1, m_2, L_1 et L_2 .

3.5 Pendules reliés par un ressort

Soit le système décrit par la figure 9 (on suppose que la position au repos du ressort correspond à l'écart d entre les axes des pendules).

Ce système est régi par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g L_1 \sin \theta_1 + k a_1 \frac{L-d}{L} (d \cos \theta_1 - a_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) = 0 \\ m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g L_2 \sin \theta_2 + k a_2 \frac{L-d}{L} (d \cos \theta_2 + a_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)) = 0 \end{array} \right.$$

avec d la distance entre les axes des pendules (égale à la distance au repos du ressort de couplage), a_1 et a_2 les distances entre les points d'accroche des pendules et les points d'accroche du ressort, et L donné par :

$$L = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + d^2 + 2a_1 d \sin \theta_1 + 2a_2 d \sin \theta_2 + 2a_1 a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Paramètres propres (internes) : $m_1, m_2, k, d, L_1, L_2, a_1, a_2$

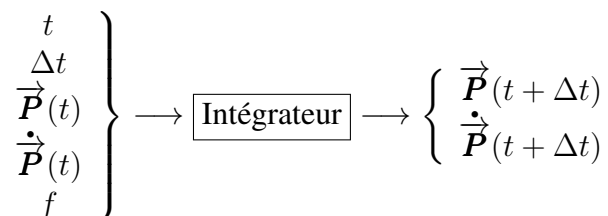
4 Intégration numérique

La résolution mathématique exacte d'une équation telle que (1) page 2 est impossible dans la plupart des cas réels non triviaux. En fait, peu d'équations différentielles possèdent une solution calculable analytiquement. Pour les résoudre, il faut alors passer par l'analyse numérique, c.-à-d. le calcul approché, numérique, d'une solution particulière à l'équation différentielle pour des conditions initiales données. On parle d'« *intégration numérique* ». C'est un sujet délicat dont nous ne présentons ici que quelques solutions possibles, assez simples.⁴

Pour une équation différentielle du second ordre écrite sous la forme générale :

$$\ddot{\vec{P}} = f(t, \vec{P}, \dot{\vec{P}})$$

(qui en Physique représente typiquement les équations du mouvement), le schéma général est le suivant :



c.-à-d. que l'on fait appel à un module, l'« intégrateur », qui à partir de l'état courant et de l'équation d'évolution f calcule le nouvel état, un temps Δt plus tard.

Il existe de nombreux moyens d'intégrer numériquement une équation différentielle. Le moyen le plus simple, dont nous allons nous servir ici pour illustrer les principes, est la méthode dite « d'Euler ». Dans ce projet, vous implémenterez dans un premier temps l'intégrateur d'Euler-Cromer (section 4.2, page 13), et ensuite un autre intégrateur parmi ceux présentés plus loin. Mais commençons par le plus simple...

4.1 Idée générale : méthode d'Euler

Imaginons que nous connaissions des conditions initiales, c.-à-d. les valeurs $\vec{P}(T_0)$ et $\dot{\vec{P}}(T_0)$ de \vec{P} et $\dot{\vec{P}}$ au temps T_0 . On peut alors utiliser un développement limité au premier ordre pour trouver la valeur de \vec{P} à un temps $t + \Delta t$:

$$\vec{P}(T_0 + \Delta t) \simeq \vec{P}(T_0) + \Delta t \cdot \dot{\vec{P}}(T_0)$$

4. Pour ceux que cela intéresse, l'annexe E, page 24, présente quelques compléments, non nécessaires à ce projet.

Par le même raisonnement, on peut écrire pour la dérivée :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}}(T_0 + \Delta t) &\simeq \dot{\vec{P}}(T_0) + \Delta t \cdot \ddot{\vec{P}}(T_0) \\ &= \dot{\vec{P}}(T_0) + \Delta t \cdot f(T_0, \vec{P}(T_0), \dot{\vec{P}}(T_0))\end{aligned}$$

On peut alors, ainsi de suite, en répétant les approximations précédentes de proche en proche, déterminer de cette manière la valeur de \vec{P} et $\dot{\vec{P}}$ pour tout temps t de la forme $T_0 + n\Delta t$.

Cette méthode utilise un « *pas de temps* » Δt qu'il faut choisir suffisamment petit pour que l'approximation faite dans le développement limité soit « raisonnable ». Ceci peut faire l'objet de nombreuses études qui seront le sujet de votre cours d'analyse numérique. Dans notre cas, un choix arbitraire fixe (donné le moment voulu dans la donnée hebdomadaire) sera suffisant.

Pour ceux que ça intéresse, les aspects (avancés) concernant la conservation de l'énergie des systèmes physiques ainsi simulés sont présentés en annexe E.

Nous présentons maintenant trois méthodes différentes, de la plus simple à la plus compliquée pour résoudre numériquement les équations différentielles du second ordre qui nous intéressent dans ce projet.

En cas de doute sur les notations, reportez-vous à l'annexe A, page 18.

4.2 Intégrateur d'Euler-Cromer

Dans la méthode d'Euler-Cromer, on calcule $\vec{P}^{(n)}$ et $\dot{\vec{P}}^{(n)}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}}^{(n)} &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \Delta t \cdot f(T_{n-1}, \vec{P}^{(n-1)}, \dot{\vec{P}}^{(n-1)}) \\ \vec{P}^{(n)} &= \vec{P}^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{\vec{P}}^{(n)}\end{aligned}$$

À noter la différence avec la méthode d'Euler classique présentée plus haut, laquelle utilise l'*ancienne* version $\dot{\vec{P}}^{(n-1)}$ de la vitesse dans la seconde équation.

La méthode d'Euler-Cromer est meilleure que la méthode d'Euler classique car elle garantit la conservation de l'énergie (on parle d'« *intégrateur symplectique* », cf section E pour ceux que cela intéresse).

4.3 Intégrateur de Newmark

Les intégrateurs précédents utilisent un calcul *direct* des nouvelles valeurs $\vec{P}^{(n)}$ et $\dot{\vec{P}}^{(n)}$ à partir des anciennes. Ce n'est pas le cas de la méthode d'intégration de Newmark qui fait une *boucle* de calcul itérative pour trouver ces valeurs.⁵

Elle nécessite pour cela l'emploi de variables supplémentaires afin de mémoriser les calculs *intermédiaires* : q , r et s . Elle utilise aussi un paramètre ε pour contrôler la convergence de sa propre boucle de calcul.

Comme pour les méthodes précédentes, nous décrivons ici les pas de calculs pour passer de l'étape $n - 1$ à l'étape n de l'intégration (on ne parle donc pas ici de la boucle en n elle-même ; n en tant que tel est *fixe* ici). En particulier, toutes les grandeurs en « $(n-1)$ » sont donc constantes pour les calculs présentés ici.

Initialisation :

$$\begin{aligned} & \text{— } \dot{\vec{P}}^{(n)} \leftarrow \dot{\vec{P}}^{(n-1)} \\ & \text{— } \vec{P}^{(n)} \leftarrow \vec{P}^{(n-1)} \\ & \text{— } s \leftarrow f(T_{n-1}, \vec{P}^{(n-1)}, \dot{\vec{P}}^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Répéter les quatre calculs suivants⁶ :

$$\begin{aligned} & \text{— } q \leftarrow \vec{P}^{(n)} \\ & \text{— } r \leftarrow f(T_n, \vec{P}^{(n)}, \dot{\vec{P}}^{(n)}) \\ & \text{— } \dot{\vec{P}}^{(n)} \leftarrow \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2}(r + s) \\ & \text{— } \vec{P}^{(n)} \leftarrow \vec{P}^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t^2}{3}(\frac{1}{2}r + s) \end{aligned}$$

tant que $\|\vec{P}^{(n)} - q\| \geq \varepsilon$

4.4 Intégrateur Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode d'intégration numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 nécessite huit variables intermédiaires : $k_1, k_2, k_3, k_4, k'_1, k'_2, k'_3$ et k'_4 .

On calcule $\vec{P}^{(n)}$ et $\dot{\vec{P}}^{(n)}$ comme suit :

5. On parle de méthode « *implicite* » : elle n'utilise pas une formule explicite pour calculer les nouvelles valeurs, mais un algorithme itératif ; cf section E, page 24, pour plus de détails.

6. J'insiste : ce n'est pas une boucle en n ici !

$$\begin{aligned}\vec{P}^{(n)} &= \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \dot{\vec{P}}^{(n)} &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6} (k'_1 + 2k'_2 + 2k'_3 + k'_4)\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}k_1 &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} \\ k'_1 &= f(T_{n-1}, \quad \vec{P}^{(n-1)}, \quad \dot{\vec{P}}^{(n-1)}) \\ k_2 &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_1 \\ k'_2 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \quad \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_1, \quad \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_1) \\ k_3 &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_2 \\ k'_3 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \quad \vec{P}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_2, \quad \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_2) \\ k_4 &= \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \Delta t k'_3 \\ k'_4 &= f(T_{n-1} + \Delta t, \quad \vec{P}^{(n-1)} + \Delta t k_3, \quad \dot{\vec{P}}^{(n-1)} + \Delta t k'_3)\end{aligned}$$

Note : $T_n = T_{n-1} + \Delta t$.

5 Exemple (pour les tests)

Nous présentons ici un exemple complet que nous vous conseillons d'utiliser pour vos tests.

5.1 Conseils pour les tests

Avant tout, commencez par vérifier chaque fonction/méthode importante indépendamment du reste du programme au fur et à mesure que vous avancez dans le projet; choisissez à chaque fois des cas où la solution analytique est connue (voir votre cours de Physique si nécessaire); par exemple (en général, pas spécifiquement pour ce projet-ci) :

1. chute libre sans frottement (vérification gravitation et intégrateur);
2. chute libre avec frottements (vérification du code des frottements);
3. deux masses reliées par un ressort ($l_0 = 0$), sans gravitation ni frottement : mouvement oscillatoire harmonique (vérification des forces de rappel); essayer également un test à l'arrêt ($l = l_0$).

Passer ensuite à des tests combinés plus généraux, dans le but de vérifier les boucles et la cohérence des données : vérifier que les objets oscillent autour de leur position d'équilibre avant de s'y stabiliser à cause des frottements ; vérifier avec plusieurs valeurs en débutant avec toutes les données à 0 ou à 1 pour pouvoir faire les pas d'intégration sur papier si besoin, etc.

Lors d'un débogage, il est important manière générale d'utiliser des valeurs simples qui permettent de calculer facilement pas à pas ce que devrait faire le code afin de repérer les éventuelles erreurs.

5.2 Intégration d'Euler-Cromer d'un pendule pesant

Considérons un pendule pesant (cf section 2.1, page 3) que l'on intègre numériquement à l'aide d'un intégrateur d'Euler-Cromer (cf section 4.2, page 13).

En suivant la démarche générale présentée ci-dessus, commençons par considérer $\lambda = 0$ et $L = 1$. L'équation (2), page 4, devient alors :

$$f(t, \vec{P}, \vec{Q}) = -g \sin(P_1)$$

.

Toujours dans ce même esprit, partons de $\vec{P}^{(0)} = \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\vec{P}}^{(0)} = 0$ (pendule lâché sans vitesse initiale depuis l'horizontale ; rappel : ici le vecteur de paramètre est réduit à un scalaire (vecteur à une seule dimension)), et prenons $\Delta t = 0.1$ (trop grand pour une simulation réaliste mais utile pour debugger/tester).

Le premier pas de la méthode d'Euler-Cromer nous donne alors :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}}^{(1)} &= 0 + 0.1 \cdot \left(-g \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -0.981 \\ \vec{P}^{(1)} &= \frac{\pi}{2} + 0.01 \cdot (-0.981) = \frac{\pi}{2} - 0.0981 \simeq 1.4726963267949\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}}^{(2)} &\simeq -0.981 + 0.1 \cdot (-g \sin(1.4726963267949)) \simeq -1.95728340367275 \\ \vec{P}^{(2)} &\simeq 1.4726963267949 + 0.01 \cdot (-1.95728340367275) \simeq 1.27696798642762\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}}^{(3)} &\simeq -1.95728340367275 + 0.1 \cdot (-g \sin(1.27696798642762)) \simeq -2.8962398367802 \\ \vec{P}^{(3)} &\simeq 1.27696798642762 + 0.01 \cdot (-2.8962398367802) \simeq 0.987344002749602\end{aligned}$$

et ainsi de suite...

D'autres exemples de calculs vous seront donnés avec les sujets hebdomadaires, mais n'hésitez pas à créer par vous-mêmes vos propres exemples en suivant l'esprit illustré ici, puis en testant avec d'autres paramètres. Il faudrait par exemple continuer par :

- voir l'impact de la position et de la vitesse initiales (en principe ça devrait être bon, vu l'aspect itératif des calculs précédents, mais il faut toujours vérifier son code sur *tous* les points) ;
- puis l'impact de L (en introduisant une valeur différente de 1),
- puis λ , etc.

Enfin, il faudrait tester l'évolution à long terme (avec des graphes de valeurs).

Bibliographie

- [1] *Mécanique*, Jean-Philippe Ansermet, PPUR 2009.

A Notations

On note par des lettres simples les grandeurs scalaires (p.ex. x) et en **gras** surligné d'une flèche les grandeurs vectorielles (p.ex. \vec{x}).

Par convention, on note x la norme du vecteur \vec{x} (p.ex. $v = \|\vec{v}\|$) et les composantes sont notées par un indice (et sont des scalaires) : x_1 est ainsi la première composante du vecteur \vec{x} .

On note par ailleurs $\{\vec{x}\}_1$ le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que \vec{x} , c.-à-d. :

$$\{\vec{x}\}_1 = \frac{1}{x} \vec{x}$$

La dérivée temporelle de x est notée \dot{x} .

La notation « \leftarrow » est une notation algorithmique signifiant « mise à jour », « devient ». Par exemple pour dire que la grandeur x augmente d'une valeur a , on note : $x \leftarrow x + a$.

Dans les sections concernant les intégrateurs, on note $T_n = T_0 + n\Delta t$ et $\vec{P}^{(n)}$ le vecteur $\vec{P}(T_n)$.

Résumé de quelques notations fréquentes :

- \vec{P} : vecteur des degrés de liberté du système ;
- x : écart à la position de repos ;
- θ : écart angulaire par rapport à la position de repos ;
- m : masse ;
- I : moment d'inertie ;
- L : longueur ;
- λ : coefficient de frottement fluide : $-\lambda \vec{v}$;
- \vec{a} : vecteur de direction, typiquement axe d'un ressort ;
- k : constante de raideur d'un ressort ;
- Δt : « pas de temps » (« *timestep* » en anglais) pour l'intégration numérique ;
- $T_n = T_0 + n\Delta t$;
- $\vec{P}^{(n)} = \vec{P}(T_n)$.

B Notion de degré de liberté

En Physique, le nombre de degrés de liberté d'un système correspond au nombre de déplacements *indépendants* qu'il peut effectuer :

- pour un point matériel libre de se déplacer dans tout l'espace, on compte 3 degrés de liberté, car il peut aller dans chacune des directions indépendamment ;
- le centre de masse d'une boule qui reste sur un billard (c.-à-d. qu'on ne considère pas ici les rotations de la boule sur elle-même, et on suppose qu'elle ne saute pas) ne possède que deux degrés de liberté, car la boule est astreinte à se déplacer dans un plan ; la boule elle-même a cinq degrés de liberté (on ajoute 3 degrés de liberté de rotation), voire 6 si on autorise la boule à sauter ;
- un wagonnet de « grand-huit » ne possède qu'un seul degré de liberté car il est obligé de suivre les rails et ne peut aller qu'« en avant » ou « en arrière », même si en réalité il se déplace dans un espace à 3 dimensions.

Le nombre de degrés de liberté d'un système correspond ainsi au nombre de variables *indépendantes* qu'il faut pour décrire l'état de ce système. L'état d'un système à un seul degré de liberté peut se représenter à l'aide d'une seule variable réelle. Par exemple, pour décrire la position d'un wagonnet de « grand-huit », il suffit d'une seule variable, qui serait par exemple, la distance parcourue (suivant les rails) depuis la station de départ (abscisse curviligne).

Une telle variable n'est pas forcément une distance, il peut également s'agir d'un angle ou de tout autre moyen permettant de représenter de manière univoque toutes les positions que peut prendre l'objet étudié.

Au premier abord, on peut penser que l'on a inutilement compliqué la chose et perdu de l'information concernant la position « réelle » de l'objet dans l'espace. On n'a cependant rien perdu comme information vu qu'on peut toujours facilement reconstruire la position dans l'espace à partir des degrés de liberté et d'une position de référence ; mais on a par contre gagné en simplicité puisque nous n'avons plus besoin de manipuler tous les vecteurs de toutes les composantes dans les équations du mouvement, mais uniquement ceux qui sont nécessaires, *a priori* en nombre plus réduit. Le gain ne paraît pas important dans le cas d'un simple pendule, mais il l'est plus dans le cas de systèmes composés complexes ayant plusieurs degrés de liberté mais nettement moins que de composantes.

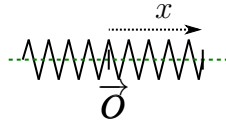


FIGURE 10 – Exemple d’oscillateur harmonique : un ressort.

C Notion d’oscillateur harmonique

Considérons un système physique ayant une position d’équilibre stable (position de repos) et un seul degré de liberté. Notons x l’écart par rapport à la position d’équilibre (cf fig. 10).

En Physique, un oscillateur harmonique mécanique est un système qui, si il est écarté de sa position d’équilibre, subit une force de rappel $F = -k x$. Les mouvements d’un tel système sont alors entièrement décrits par une équation de type :

$$m \ddot{x} = -k x$$

avec m la masse (ou l’inertie) du système.

En réalité, il existe très peu de systèmes régis exactement par cette équation et l’on doit souvent ajouter un terme proportionnel à la vitesse pour rendre compte des effets dus aux frottements fluides (viscosité de l’air, d’eau, d’huile, ...) :

$$m \ddot{x} + \lambda \dot{x} + k x = 0$$

Il arrive parfois que l’oscillateur soit excité par une force externe, par exemple la gravitation ou une secousse régulière. On parle dans ce cas d’*oscillateur forcé*. Il faut alors rajouter un second membre à l’équation précédente. Ce second membre peut potentiellement dépendre du temps et l’on a donc :

$$m \ddot{x} + \lambda \dot{x} + k x = h(t) \quad (5)$$

Par extension, on appelle oscillateur harmonique tout système se comportant plus ou moins comme un oscillateur harmonique, c’est-à-dire dont l’équation différentielle « ressemble » à l’équation (5). Par exemple dans le cas d’un pendule pesant (cf section 2.1, page 3), on a un terme en $\sin(x)$ au lieu du terme linéaire ($k x$) ; mais en première approximation ce pendule se comporte comme un oscillateur harmonique (pour x petit : $\sin(x) \simeq x$).

Pour faire le lien avec la forme générale de l’équation d’évolution donnée en introduction (équation (1), page 2), réécrivons l’équation (5) ci-dessus :

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m} (\lambda \dot{x} + k x - h(t))$$

que l’on peut donc écrire sous la forme de l’équation (1) en posant :

- $\vec{P} = (x)$, vecteur à une seule dimension ;
- et $f(t, \vec{P}, \vec{Q}) = -\frac{1}{m} (k P_1 + \lambda Q_1 - h(t))$.

D Portrait de phase

En Physique, des grandeurs importantes pour la description de l'évolution d'un système peuvent être déduites d'un graphique appelé « *portrait de phase* ». Il s'agit simplement de représenter l'évolution de la vitesse en fonction de la position (ou de la dérivée d'un degré de liberté en fonction de ce degré de liberté) lorsque le système évolue. Dans le cas d'un système à un seul degré de liberté, cela donne des dessins dans le plan 2D (P, \dot{P}). Pour les cas plus compliqués à N degrés de libertés, le portrait de phase est un « dessin » dans un espace à $2N$ dimensions; mais on ne s'intéressera dans ce projet qu'à une de ses projections dans un des plan 2D concernant une seule des composantes de \vec{P} lorsque celui-ci est à plusieurs dimensions.

Un exemple de deux portraits de phase pour deux situations initiales différentes du pendule simple est représenté sur la figure 11.

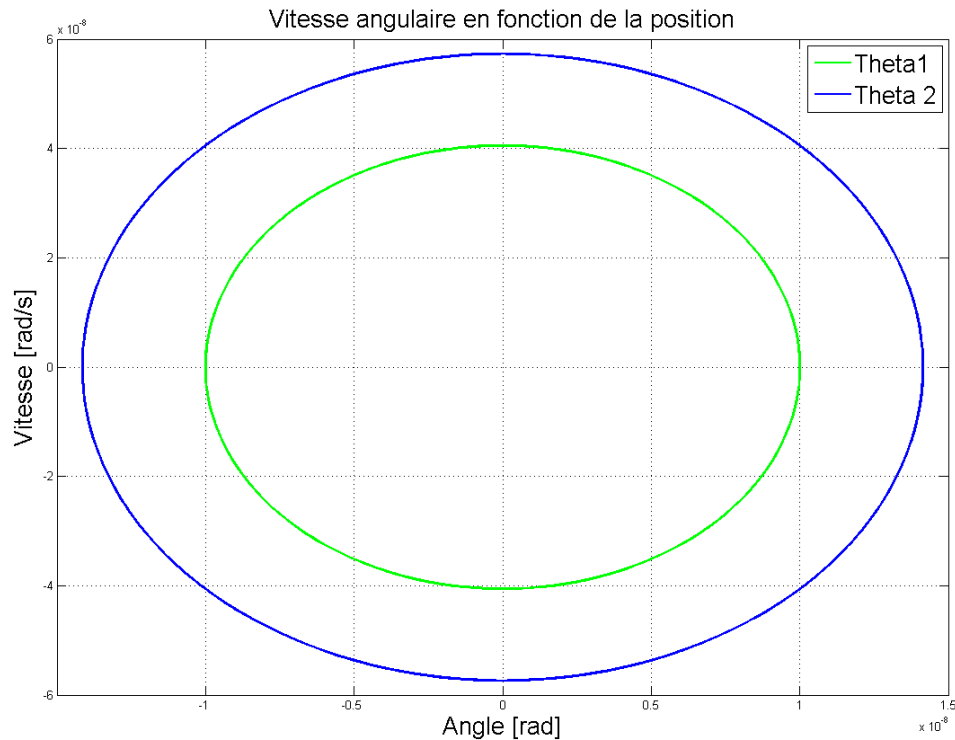


FIGURE 11 – Portrait de phase de deux pendules pour des petits angles.

Sur ce graphique, on a représenté la vitesse angulaire ($\dot{\theta}$) du pendule en fonction de son angle (θ). Ce graphique correspond à deux choix de conditions initiales différentes, l'une ayant plus d'énergie que l'autre (soit par un $\theta(T_0)$ plus grand, soit par un $\dot{\theta}(T_0)$ plus grand, soit les deux).

Dans le cas d'un oscillateur harmonique « parfait » sans frottement, on obtient effectivement des ellipses. Si on ajoute du frottement, on obtient alors une spirale qui tend vers l'origine (laquelle représente le système au repos). Dans les cas plus compliqués, et si l'on choisit des conditions initiales trop éloignées de la position d'équilibre, on peut obtenir plus ou moins n'importe quoi ; c'est ce que l'on appelle du « chaos déterministe ».

E Compléments sur l'intégration numérique

E.1 Généralités

Cette section est totalement hors programme et certainement difficile pour des 1^{re} années ⁷. Je l'ai néanmoins ajoutée pour information pour ceux que le sujet intéresse et qui aimeraient en savoir un peu plus.

Les intégrateurs numériques sont par essence inexacts et calculent des valeurs approchées des solutions. Ils sont en cela caractérisés de trois façons :

- l'ordre de l'intégrateur, qui caractérise l'évolution (en fonction du temps de calcul) de l'erreur entre la solution calculée fournie et la solution exacte ;
à ne pas confondre avec l'ordre de l'équation différentielle intégrée !
- l'aspect symplectique ou non de l'intégrateur, qui caractérise grosso-modo « les frottements numériques », c.-à-d. la perte d'énergie subie par le système simulé par rapport au vrai système en raison des approximations de calcul ;
vous verrez plus tard en Physique que l'énergie d'un système est liée à ce que l'on appelle « l'hamiltonien » du système ; un intégrateur symplectique garde invariant l'hamiltonien du système simulé ;
- l'aspect « explicite » ou « implicite » : un intégrateur est « explicite » lorsque les calculs du pas suivant se font directement et il est « implicite » lorsque le calcul de chaque pas d'intégration est lui-même indirect, par approximations, et non pas exact, introduisant donc un deuxième niveau d'approximation dans le calcul.

Avant de détailler l'aspect symplectique des intégrateurs du premier ordre, donnons un résumé synthétique des résultats connus :

- l'intégrateur d'Euler « classique » (section 4.1) est un intégrateur explicite du premier ordre non symplectique ;
- l'intégrateur d'Euler-Cromer (section 4.2) est également du premier ordre ; il est symplectique et explicite pour les hamiltoniens séparables ;
- une version d'Euler-Cromer existe pour les hamiltoniens non séparables, mais est implicite ;
- les méthodes de Runge-Kutta (section 4.4) sont non symplectiques, explicites pour les hamiltoniens séparables et existent en version implicite (non symplectique) pour les hamiltoniens non séparables ;
- la méthode de Newmark (section 4.3) est symplectique mais implicite.

7. On y parle notamment d'hamiltonien, de hessien, et autres joyeusetés que vous découvrirez plus tard dans votre scolarité.

E.2 De l'aspect symplectique des intégrateurs « eulériens »

Soit une particule de masse m dans un potentiel $V = V(\vec{x})$ ne dépendant que de la position ; l'accélération subie est $\ddot{\vec{x}} = -\frac{1}{m} \vec{\nabla} V$, où $\vec{\nabla} V$ est le gradient de V .⁸

Considérons alors le schéma d'évolution suivant :

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta t \vec{v}_n - \alpha \frac{\Delta t^2}{m} \vec{\nabla} V_n, \quad \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n - \frac{\Delta t}{m} \vec{\nabla} V_n$$

où α est une constante qui vaut soit 0 (intégrateur d'Euler « classique »), soit 1/2 (développement de Taylor négligeant les dérivées de l'accélération), soit 1 (intégrateur d'Euler-Cromer).

E.2.1 Approche « à la main » sur l'énergie

Considérons alors l'évolution de l'énergie au second ordre :

$$E_{n+1} = E_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\vec{v}_n^T \nabla^2 V \vec{v}_n + (1 - 2\alpha) \frac{1}{m} (\vec{\nabla} V_n)^2 \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

où $\nabla^2 V$ est le hessien du potentiel V .

On voit bien que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ l'énergie ne fait qu'*augmenter*. Pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$ l'intégrateur ne peut pas être symplectique (et donc ni Euler, ni « Taylor » ne sont symplectiques).

Illustrons cela de façon concrète sur l'oscillateur harmonique à une dimension. On a $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$, et on connaît la solution analytique $x = x_0 \cos(\omega t)$ et $v = -x_0 \omega \sin(\omega t)$ où $\omega = \sqrt{k/m}$.

La variation d'énergie entre deux pas de calcul de l'intégrateur devient :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\Delta t^2}{2} \left(k v^2 + (1 - 2\alpha) \frac{1}{m} k^2 x^2 \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} \frac{x_0 k^2}{m} (\sin^2(\omega t) + (1 - 2\alpha) \cos^2(\omega t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

En intégrant sur une période entière de l'oscillation, on trouve $\Delta E \propto \pi(2 - 2\alpha)$, ce qui nous amène à conclure qu'il faut $\alpha = 1$ pour que l'énergie de l'oscillateur harmonique soit stable en moyenne.

8. Toute la suite peut en fait s'appliquer à un hamiltonien séparable $H(\vec{p}, \vec{q}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q})$. Ici $\vec{p} = m \vec{v}$ et $\vec{q} = \vec{x}$.

E.2.2 Preuve formelle de symplecticité

La définition d'un intégrateur symplectique est l'orthogonalité du déplacement dans l'espace des phases par rapport au gradient de l'hamiltonien, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)^T J \left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right) = J$$

avec $\vec{z} = (\vec{v}, \vec{x})$ (point de l'espace des phases), $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_3 \\ -\mathbf{1}_3 & 0 \end{pmatrix}$, où $\mathbf{1}_3$ est la matrice identité de dimension 3, et $\left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)$ la matrice jacobienne de \vec{z}_{n+1} (en tant que fonction de \vec{z}_n).

Pour les schémas d'évolution considérés ici, on a :

$$\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 & -\frac{\Delta t}{m} \nabla^2 \mathbf{V} \\ \Delta t \mathbf{1}_3 & \mathbf{1}_3 - \alpha \frac{\Delta t^2}{m} \nabla^2 \mathbf{V} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)^T J \left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right) = J + (1 - \alpha) \frac{\Delta t^2}{m} \begin{pmatrix} 0 & \nabla^2 \mathbf{V} \\ -\nabla^2 \mathbf{V} & 0 \end{pmatrix} .$$

Le schéma proposé n'est donc symplectique que pour $\alpha = 1$ (c.-à-d. Euler-Cromer).

E.2.3 Euler-Cromer pour les hamiltoniens non séparables

En fait, l'intégrateur d'Euler-Cromer se généralise aux hamiltoniens non séparables, tout en restant symplectique. La généralisation est :

$$\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n - \Delta t \overrightarrow{\nabla_{\vec{q}}} H(\vec{p}_{n+1}, \vec{q}_n) , \quad \vec{q}_{n+1} = \vec{q}_n + \Delta t \overrightarrow{\nabla_{\vec{p}}} H(\vec{p}_{n+1}, \vec{q}_n) .$$

Le problème avec cet intégrateur est que la première équation est *implicite* et nécessite alors souvent, en elle-même, une résolution numérique approchée (type « point fixe ») en \vec{p}_{n+1} .