
Nonparametric Method

1.

비모수적 방법이란?

2.

비모수적 방법 소개

- 1) Wilcoxon 순위합 검정(Wilcoxon rank sum test)
- 2) Wilcoxon 부호 있는 순위 검정(Wilcoxon signed rank test)
- 3) Kruskal-Wallis test

1. 비모수적 방법이란?

비모수적 방법이란?

■ 모수적 방법의 한계

- 이제까지 설명된 통계적 추론은 모집단이 특정 분포를 따른다는 가정 하에서 분석할 수 있었다.
- 하지만 실제 자료, 특히 의학자료에서는 표본이 정규분포를 따르는 경우는 많지 않다.
- 모집단의 분포를 정규분포, 포아송분포 등 모수(모평균, 모분산 등)를 갖는 함수 형태의 분포로 가정하고 접근하는 통계적 방법을 모수적(parametric) 방법이라 한다.
- 반대로 모집단 분포에 대한 가정 없이 접근하는 통계적 방법을 비모수적(nonparametric) 방법이라 한다.
- 모수적 방법은 비모수적 방법에 비해 다양한 기법들을 활용할 수 있기에 효율적이긴 하나 정규분포의 가정을 따르지 않는 상황에서 정규분포를 따르는 모수적 방법을 사용하게 되면 오류(bias)를 가진 결론을 얻을 수 있다.

비모수적 방법이란?

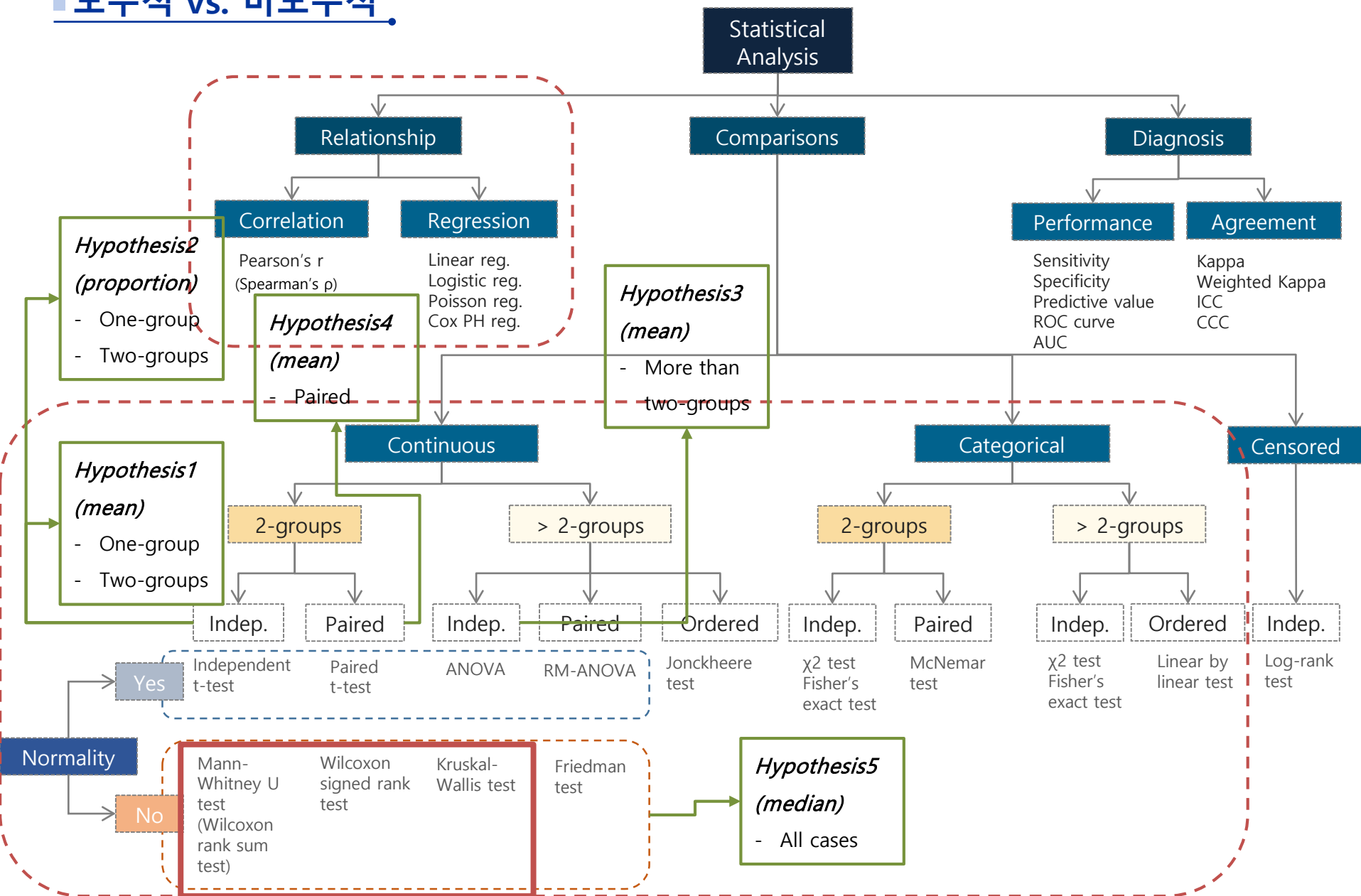
■ 비모수적 방법의 특징

- ① 최소한의 가정만을 사용하므로, 모수적 가정이 잘못되어 생기는 오류의 가능성이 적다.
- ② 범주형 자료와 같은 순위척도 데이터에 적용할 수 있다. – rank 사용
- ③ 적합도 검정과 같이 모수적 가정에 대한 검정 방법을 제공한다.
- ④ 순위(rank)나 부호(sign)에 기초한 방법 위주이기 때문에, 이상치(outlier)의 영향을 덜 받는다. –

median 사용

비모수적 방법이란?

■ 모수적 vs. 비모수적



2. 비모수적 방법 소개

비모수적 방법 소개 - 0) 부호 검정

■ 부호 검정 - 일표본

- 부호 검정(sign test)은 분포의 중앙값(median)에 대하여 검정하는 기법으로, 귀무가설 $H_0: \mu = \mu_0$ 으로 설정한다.
- 표본자료에 대해서 μ_0 보다 큰 자료는 +부호를 작은 자료는 -부호를 부여하고, +부호와 -부호의 개수가 비슷하면 μ_0 에 대해 대칭이므로 귀무가설을 채택하고, 상이하면 귀무가설을 기각한다.
- 귀무가설 $H_0: \mu = \mu_0$ 가 참이면, 중앙값 μ_0 를 중심으로 분포가 절반씩 나뉘어 각각의 확률이 0.5이다. 따라서 n 개의 부호 중 +부호의 개수를 X 라 하면, X 는 이항분포 $B(n, 0.5)$ 을 따른다.

부호 검정(Sign test)

- 모집단 분포의 중앙값 차이에 대한 검정, $H_0: \mu = \mu_0$
- 검정통계량: μ_0 보다 큰 데이터의 개수, $X = x$
- ① $H_1: \mu > \mu_0 \rightarrow p_0 = P(X \geq x | p = 0.5) \leq \alpha$ 이면 귀무가설 기각
- ② $H_1: \mu_1 < \mu_2 \rightarrow p_0 = P(X \leq x | p = 0.5) \leq \alpha$ 이면 귀무가설 기각
- ③ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 인 경우,
 $x < n/2$ 인 경우, $p_0 = 2 \times P(X \leq x | p = 0.5) \leq \alpha$ 이면 귀무가설 기각
 $x \geq n/2$ 인 경우, $p_0 = 2 \times P(X \geq x | p = 0.5) \leq \alpha$ 이면 귀무가설 기각

비모수적 방법 소개 - 0) 부호 검정

■ 부호 검정 - 일표본

- K대학에서는 고학년 학생 20명을 무작위로 선택하여 1점~10점 척도로 대학에 대한 만족도를 조사하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

점수(x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
도수(f_i)	1	1	0	0	1	0	1	7	5	4

- ① ↓
- 1) $H_0: \mu = 7$ vs. $H_1: \mu > 7$
 - 2) 표본 자료 중 7점보다 큰 표본은 총 16개 이고, $\mu_0 = 7$ 인 1개를 제외한 19개가 총 개수로 활용한다.

1) 유의확률 산출 :

$$p_0 = P(X \geq 16 | p = 0.5) = \sum_{x=16}^{19} \frac{19!}{x! (19-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{19-x} \doteq 0.0021$$

→ p_0 는 유의수준 0.05보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 있으며, 만족도가 7을 상회한다는 증거가 있다.

→ But, 위의 자료를 모수적 검정(one-sample t-test)을 통해서 유의확률을 산출하면 0.08127로 귀무가설을 기각하지 못하고 채택하게 된다.

> `t.test(c(1, 2, 5, 7, rep(8, 7), rep(9, 5), rep(10, 4)), alternative="greater", mu=7)`

비모수적 방법 소개 -1) Wilcoxon 순위합 검정

■ 두 집단 간 중심값 비교.

- 귀무가설 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 를 통해 두 집단 간 비교할 때 비모수적 방법은 평균이 아닌 중앙값(median)을 사용하므로, 여기서 μ 는 각 집단에 대한 중앙값을 의미한다.
- 분포의 대한 가정은 없으나 두 모집단은 서로 독립이라는 가정은 필요하다.
- 이러한 성질을 이용한 검정 기법을 Wilcoxon 순위합 검정(Wilcoxon rank sum test) 혹은 Mann-Whitney U test 이라고도 한다.

Wilcoxon 순위합 검정(Wilcoxon rank sum test)

- 두 모집단 분포의 중앙값 차이에 대한 검정, $H_0: \mu_1 = \mu_2$
- 검정통계량: $U_1, U_2, U \equiv \min(U_1, U_2) \rightarrow$ 각 그룹에 따른 순위합 기반 통계량
- ① $H_1: \mu_1 > \mu_2 \rightarrow p_0 = P(U \leq u_2 \mid n_1, n_2) \leq \alpha$ 이면 귀무가설 기각
- ② $H_1: \mu_1 < \mu_2 \rightarrow p_0 = P(U \leq u_1 \mid n_1, n_2) \leq \alpha$ 이면 귀무가설 기각
- ③ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \rightarrow p_0 = 2 \times P(U \leq \min(u_1, u_2) \mid n_1, n_2) \leq \alpha$ 이면 귀무가설 기각

비모수적 방법 소개 -1) Wilcoxon 순위합 검정

■ 두 집단 간 중심값 비교

- 유의수준 5%에서 Wilcoxon 순위합 검정을 시행하여 A, B 두 식이요법 간 체중감소 효과의 차이가 있는지를 확인 하시오.

A요법	7.3	5.7	6.0	5.9	7.6	6.5
B요법	4.9	7.4	5.3	4.6		

- ①
- 1) A와 B의 자료로 나눈다. (크기가 작은 집단의 대상자 수가 n_1 이고 다른 그룹이 n_2 로 정의)
 - 2) 순위는 모든 자료를 기반으로 산출한다.

B	순위
4.6	1
4.9	2
5.3	3
7.4	9

$R_1=15$

A	순위
5.7	4
5.9	5
6.0	6
6.5	7
7.3	8
7.6	10

$R_2=40$

②

1) 통계량 산출 ($n_1 = 4, n_2 = 6$)

$$U_1 = u_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} = 15 - \frac{4 * 5}{2} = 5$$

$$U_2 = u_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} = 40 - \frac{6 * 7}{2} = 19$$

$$u \equiv \min(u_1, u_2) = 5$$

2) P-value 산출(분포 표를 참조해야 함)

$$p_0 = 2 \times P(U \leq 5 | 4, 6) = 2 \times 0.0857 = 0.1714$$

→ p_0 는 유의수준 0.05보다 크므로 귀무가설을 기각할 수 없으며, 두 식이요법 간의 차이가 있다고 말할 수 없다.

비모수적 방법 소개 -1) Wilcoxon 순위합 검정

■ 두 집단 간 중심값 비교.

- n_1 과 n_2 가 모두 충분히 크면 정규분포로 근사할 수 있으며, 이때 평균이 $\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}$, 분산이

$\sigma_U^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$ 이 되므로 표준화 통계량 $Z_0 = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$ 을 이용하여 검정할 수 있다.

- 하지만 '충분히' 라는 명확하지 않은 표현과 large sample인 경우에도 분포가 정규성을 가지기 어렵다면 비모수적 검정을 실시하는 것을 권장합니다.

비모수적 방법 소개 -2) Wilcoxon 부호 있는 순위 검정

■ 대응표본의 중심값 차이 비교.

- 귀무가설 $H_0: d = \mu_1 - \mu_2 = 0$ 이며, 여기서 μ 는 각 집단에 대한 중앙값을 의미한다.
- Wilcoxon 부호 있는 순위 검정(Wilcoxon signed rank test)는 대응표본(pairewise) t-검정에 대응되는 비모수적 방법이다.
- n 개의 자료 쌍의 차이를 절대값을 씌어 순위를 통해 검정하게 된다.
- 차이 값에 대해서 '+'부호를 가지는 쌍의 순위합을 W_+ 로, '-'부호의 순위합은 W_- 로 정의한다.

Wilcoxon 부호 있는 순위 검정(Wilcoxon signed rank test)

- 대응되는 두 모집단 분포의 중앙값 차이에 대한 검정, $H_0: d \equiv \mu_1 - \mu_2 = 0$
- 검정통계량: $W_-, W_+, W \equiv \min(W_-, W_+)$
 - ① $H_1: d > 0 \rightarrow W_- \leq w_{\alpha;n}$ 이면 귀무가설 기각
 - ② $H_1: d < 0 \rightarrow W_+ \leq w_{\alpha;n}$ 이면 귀무가설 기각
 - ③ $H_1: d \neq 0 \rightarrow W \leq w_{\alpha/2;n}$ 이면 귀무가설 기각

비모수적 방법 소개 -2) Wilcoxon 부호 있는 순위 검정

■ 대응표본의 중심값 차이 비교

- 10명의 임상 피실험자들에게 간질환 예방약을 투여하여 얻은 SGOT 결과이다. 이 예방약이 SGOT 수치를 낮추는 효과가 있는지 유의수준 5%에서 검정 하시오.

투여 전	38	26	34	5	68	30	35	19	33	69
투여 후	28	21	31	11	59	28	28	23	32	38

①

- 1) 투여 전 - 투여 후 산출 (크기 집단의 대상자 수가 n으로 고정)
- 2) 차이에 절대(absolute) 값을 씌운 후 순위를 구한다.

차이	10	5	3	-6	9	2	7	-4	1	31
절대순위	9	5	3	6	8	2	7	4	1	10

②

가설: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

- 1) 통계량 산출 ($n = 10$): $W_- = 6 + 4 = 10$
- 2) 임계점 산출(분포 표를 참조해야 함)

$$W_- \leq 11$$

→ W_- 는 유의수준 0.05에서의 임계점(=11)보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 있으며, 이 예방약이 SGOT 수치를 낮추는 효과가 있다고 할 수 있다.

비모수적 방법 소개 -3) Kruskal-Wallis 검정

■ 3개 이상의 모집단 중앙값 비교

- 귀무가설 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ 이며, 여기서 μ 는 각 집단에 대한 중앙값을 의미한다.
- Kruskal-Wallis 검정은 F-통계량을 사용하는 ANOVA의 비모수적 방법이다.
- 표본의 크기는 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 이며, 전체 표본을 크기 순으로 나열한다.
- 각 모집단 i 의 표본에 대응하는 순위의 합을 R_i 라고 정의한다.

Kruskal-Wallis 검정(test)

- 3개 이상의 모집단 중앙값 차이에 대한 검정,
- $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ vs. $H_1: \text{Not } H_0$
- 검정통계량:

$$H \equiv \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

- 검정통계량 $H \geq \chi_{1-\alpha; k-1}^2$ 이면 귀무가설 기각

비모수적 방법 소개 -3) Kruskal-Wallis 검정

■ 3개 이상의 모집단 중앙값 비교.

- 네 곳의 회사에서 납품한 의료기기의 수명(year)이 다음과 같이 측정되었다. 네 회사의 의료기기 수명분포가 동일한지 유의수준 5%에서 Kruskal-Wallis 방법으로 검정 하시오.

A	4.6	10.6	8.0	25.0	7.1
B	2.9	10.1	3.2	3.8	6.6
C	6.8	9.4	26.5	12.8	8.3
D	3.4	3.9	6.0	8.6	5.0



A	6	17	12	19	11	$R_1 = 65$
B	1	16	2	4	9	$R_2 = 32$
C	10	15	20	18	13	$R_3 = 76$
D	3	5	8	14	7	$R_4 = 37$

②

가설: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ vs. $H_1: \text{Not } H_0$

1) 통계량 산출 ($n = 20$):

$$H = \frac{12}{20(20+1)} \left(\frac{65^2}{5} + \frac{32^2}{5} + \frac{76^2}{5} + \frac{37^2}{5} \right) - 3(20+1) \doteq 7.823$$

2) 기각치 산출(분포 표를 참조해야 함): $\chi_{0.95;3}^2 \doteq 7.815$

→ H 는 유의수준 0.05에서의 기각치(=7.815)보다 크므로 귀무가설을 기각할 수 있으며, 네 회사 전자부품의 수명분포가 다르다는 증거가 있다.

비모수적 방법 소개

■ Remarks

- 3개 집단 이상의 검정인 경우 사후(post-hoc) 분석을 진행하게 된다.
- 피어슨(Pearson)의 상관계수의 비모수적 방법인 스피어만(Spearman)의 순위상관계수가 있다.
- 3개 집단 이상의 검정에서 집단 간 순서를 고려해야 하는 경우에는 존키어(Jonckheere) 검정을 사용한다.
- 분포의 동일성 여부를 판단할 때에는 콜모고르프-스미르노프 검정(Kolmogorov-Smirnov test)를 사용한다.
- 비모수적 기법은 추정/검정의 분야 뿐 아니라 다양한 통계 분석 방법에 활용되고 있다.
- 분포의 특성을 기존 알려진 분포 대신 여러 번 표본의 무작위 복원 추출(resampling with replacement; bootstrapping)을 통해서도 확인하는 기법도 있다. Bayesian 방법이 대표적이다.

Thank you!
