ch.4-2 linear_algebra

4. Linear Algebra

- 선형대수학은 벡터 공간을 다루는 수학의 한 분야입니다.
- 많은 데이터 과학 개념과 기술을 뒷받침합니다

```
import re, math, random # regexes, math functions, random numbers
import matplotlib.pyplot as plt # pyplot
from collections import defaultdict, Counter
from functools import partial, reduce
```

Vectors

- Vectors는 어떤 finite-dimensional 공간에 있는 점입니다.
- 데이터를 벡터로 생각합니다
- numeric(숫자) 데이터를 나타내는 좋은 방법
- 3차원 벡터(키, 몸무게, 나이)
- 4차원 벡터로서의 학생성적(시험1, 시험2, 시험3, 시험4)
- 3차원 공간의 벡터에 해당하는 3개의 숫자 목록

```
height_weight_age = [70,  # inches,
                     170, # pounds,
                     40 ] # years

grades = [95,   # exam1
          80,   # exam2
          75,   # exam3
          62 ]  # exam4
```

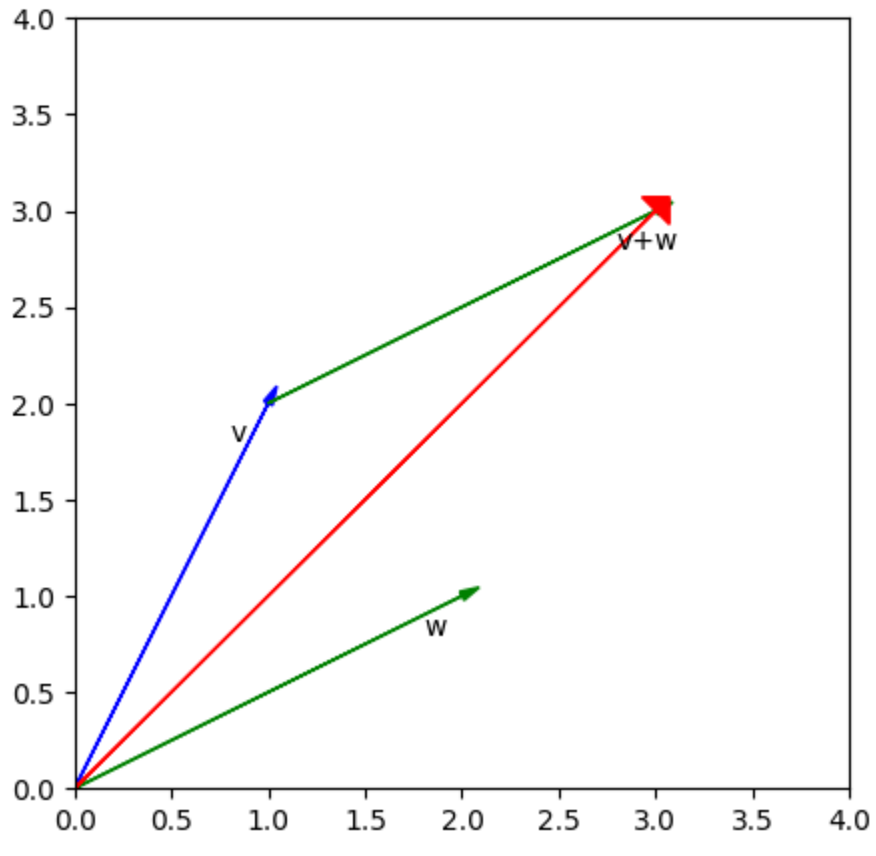
Vector에 관한 Arithmetic(산술)

- 벡터 연산을 정의합니다
- 이 파이썬 코드들을 설명을 위한 수학적 정의로 상상해 보십시오
- 목록의 성능이 형편없습니다
- 대용량 데이터가 있는 실제 애플리케이션에서 numpy 어레이를 사용해야 함

Adding two vectors

```
# Jupyter Notebook에서 그래프를 인라인 모드로 표시하기 위해 매직 명령어를 사용합니다.
%matplotlib inline

# 필요한 라이브러리 가져오기
import numpy as np  # 숫자 연산을 위한 numpy 라이브러리
import matplotlib.pyplot as plt  # 그래프 작성을 위한 matplotlib.pyplot

# 5x5 크기의 그래프 생성
```

```
plt.figure(figsize=(5, 5))

# x축은 0부터 4까지, y축은 0부터 4까지 설정
plt.axis([0, 4, 0, 4])

# 벡터 v와 w를 배열로 정의
v = np.array([1, 2])
w = np.array([2, 1])

# 벡터 v를 파란색 화살표로 표시
plt.arrow(0, 0, v[0], v[1], head_width=0.05, head_length=0.1, fc='b', ec='b')

# 벡터 w를 녹색 화살표로 표시
plt.arrow(0, 0, w[0], w[1], head_width=0.05, head_length=0.1, fc='g', ec='g')

# 벡터 v + w를 녹색 화살표로 표시
# 시작점은 벡터 v의 끝점이며, 길이는 벡터 w의 값과 동일
plt.arrow(v[0], v[1], w[0], w[1], head_width=0.05, head_length=0.1, fc='g', ec='g')

# 벡터 v + w를 빨간색 화살표로 표시
plt.arrow(0, 0, v[0] + w[0], v[1] + w[1], head_width=0.2, head_length=0.1, fc='r', ec='r')

# 각 벡터의 끝점에 라벨을 추가
offset = np.array([-0.2, -0.2])
plt.annotate('v', xy=v + offset)
plt.annotate('w', xy=w + offset)
plt.annotate('v+w', xy=v + w + offset)

# 그래프 표시
plt.show()
```




```
def vector_add(v, w):
    """두 벡터를 요소별로 더해주는 함수

    매개변수:
    v -- 첫 번째 벡터 (리스트 형태), w -- 두 번째 벡터 (리스트 형태)
```

```
    반환값:
    두 벡터의 각 요소를 더한 결과 벡터 (리스트 형태)
    """
    # zip 함수를 사용하여 두 벡터의 요소를 쌍으로 묶습니다.
    # 각 요소 쌍 v_i, w_i에 대해 요소별로 더한 값을 리스트로 반환합니다.
    return [v_i + w_i for v_i, w_i in zip(v, w)]
```

```
def vector_subtract(v, w):
    """두 벡터를 요소별로 빼주는 함수

    매개변수:
    v -- 첫 번째 벡터 (리스트 형태) w -- 두 번째 벡터 (리스트 형태)

    반환값:
    두 벡터의 각 요소를 뺀 결과 벡터 (리스트 형태)
    """
    # zip 함수를 사용하여 두 벡터의 요소를 쌍으로 묶습니다.
    # 각 요소 쌍 v_i, w_i에 대해 요소별로 빼는 값을 리스트로 반환합니다.
    return [v_i - w_i for v_i, w_i in zip(v, w)]
```

```
def vector_sum(vectors):
    """벡터의 리스트를 입력받아 모든 벡터의 요소별 합을 계산하는 함수

    매개변수:
    vectors -- 벡터의 리스트

    반환값:
    벡터의 요소별 합 (리스트 형태)
    """
    # functools.reduce 함수를 사용하여 `vector_add` 함수를 활용해 벡터를 요소별로 합합니다.
    return reduce(vector_add, vectors)
```

```
def scalar_multiply(c, v):
    """스칼라와 벡터의 요소별 곱을 계산하는 함수

    매개변수:
    c -- 스칼라 (숫자형), v -- 벡터 (리스트 형태)

    반환값:
    스칼라 c와 벡터 v의 각 요소를 곱한 결과 벡터 (리스트 형태)
    """
    # 벡터 v의 각 요소 v_i에 스칼라 c를 곱하여 리스트로 반환합니다.
    return [c * v_i for v_i in v]
```

```
def vector_mean(vectors):
    """입력 벡터의 i번째 요소의 평균을 계산하여 새로운 벡터를 생성하는 함수

    매개변수:
    vectors -- 벡터의 리스트

    반환값:
    각 벡터의 요소별 평균을 계산하여 얻은 새로운 벡터 (리스트 형태)
    """
    n = len(vectors)  # 벡터의 리스트에 있는 벡터의 수
```

```python
    # 벡터들의 요소별 평균을 계산하기 위해 먼저 벡터의 합을 구하고,
    # 스칼라 1/n을 곱하여 평균을 구합니다.
    return scalar_multiply(1/n, vector_sum(vectors))
```

Numpy Version

```python
# numpy 버전의 벡터 연산 함수
import numpy as np

# 세 개의 벡터를 정의합니다.
u = np.array([1,1,1])
v = np.array([1,0,0])
w = np.array([0,1,0])

print(v + w)  # 벡터 v와 w를 더합니다.
print(v - w)  # 벡터 v에서 w를 뺍니다.
vs = np.array([u, v, w])  # u, v, w 세 개의 벡터를 묶은 배열을 만듭니다.

print(np.sum(vs, axis=0))  # vs 배열의 각 열의 합을 계산합니다.
# axis=0을 사용하면 각 벡터의 요소를 합쳐서 하나의 벡터로 반환합니다.

print(10 * v)  # 벡터 v에 스칼라 10을 곱합니다.
print(np.mean(vs, axis=0))  # vs 배열의 각 열의 평균을 계산합니다.
# axis=0을 사용하면 각 벡터의 요소를 합쳐서 하나의 벡터로 반환합니다.
```

```
[1 1 0]
[ 1 -1  0]
[2 2 1]
[10  0  0]
[0.66666667 0.66666667 0.33333333]
```

```python
def dot(v, w):
    """v_1 * w_1 + ... + v_n * w_n 형태의 내적을 계산합니다."""
    return sum(v_i * w_i for v_i, w_i in zip(v, w))

def sum_of_squares(v):
    """v_1 * v_1 + ... + v_n * v_n 형태의 제곱합을 계산합니다."""
    return dot(v, v)

def magnitude(v):
    """벡터의 제곱합을 계산한 후 제곱근을 구합니다."""
    return math.sqrt(sum_of_squares(v))
```

❓ 설명.

- `dot(v, w)` 함수는 두 벡터 `v` 와 `w` 의 내적을 계산합니다. 각 요소 `v_i` 와 `w_i` 의 곱을 계산한 후 모두 합합니다.
- `sum_of_squares(v)` 함수는 벡터 `v` 의 제곱합을 계산합니다. 벡터 `v` 와 자신과의 내적을 계산합니다.
- `magnitude(v)` 함수는 벡터 `v` 의 크기를 계산합니다. `sum_of_squares(v)` 함수로 계산한 제곱합의 제곱근을 계산하여 벡터의 크기를 구합니다.

Numpy Version

```
v = np.array([1,0,0])    # 벡터 v를 정의합니다.
w = np.array([0,1,0])    # 벡터 w를 정의합니다.

print(np.dot(v,w))         # 벡터 v와 w의 내적
print(v.dot(w))            # 벡터 v와 w의 내적
print(np.dot(v,v))         # 벡터 v의 제곱합
print(np.sqrt(np.dot(v,v)))  # 벡터 v의 크기
print(np.linalg.norm(v))  # 벡터 v의 크기
```

```
0
0
1
1.0
1.0
```

❓ 설명.

- `np.dot(v, w)` 와 `v.dot(w)` 는 벡터 v와 w의 내적을 계산합니다. 두 벡터는 직교하므로 결과는 0입니다.
- `np.dot(v, v)` 는 벡터 v의 각 요소를 제곱한 후 더하여 벡터 v의 제곱합을 계산합니다. 결과는 1입니다.
- `np.sqrt(np.dot(v, v))` 는 벡터 v의 제곱합을 계산한 후, 제곱근을 구하여 벡터 v의 크기를 계산합니다. 결과는 1.0입니다.
- `np.linalg.norm(v)` 는 `np.linalg.norm()` 함수를 사용하여 벡터 v의 크기를 계산합니다. 결과는 1.0으로 `np.sqrt(np.dot(v, v))` 의 결과와 동일합니다.

Vector Projection으로 Dot Product(점 곱)

Dot product as vector projection

- $\mathbf{v}$'s projection on $\mathbf{w}$: $\mathbf{v}_1$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \times \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\mathbf{w}$$

- Euclidean Distance between two vectors: $\mathbf{p}, \mathbf{q}$

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = d(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + \cdots + (q_n-p_n)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(q_i-p_i)^2}.$$

- Manhattan distance

$$d_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|p_i-q_i|,$$

- Cosine similarity

$$\text{similarity} = \cos(\theta) = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n}A_iB_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}A_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}B_i^2}},$$

Dot Product as Vector Projection

? 설명 → **v**'s projection on **w**: **v**1

- **v1 = v·w / |w|² * w**:
  - **v1**: 벡터 **v**의 벡터 **w**에 대한 투영 벡터입니다. 즉, **v**가 벡터 **w**와 같은 방향으로 투영된 벡터입니다.
  - **v·w**: 벡터 **v**와 **w**의 내적(dot product)입니다. 이는 두 벡터 사이의 각도에 따라 크기를 계산합니다.
  - **|w|²**: 벡터 **w**의 크기(절대값)인 |w|의 제곱입니다.
  - **w**: 벡터 **w** 자체입니다.
- 위 식은 벡터 **v**의 벡터 **w**에 대한 투영을 계산합니다. 투영된 벡터 **v1**는 벡터 **w**와 같은 방향의 벡터이며, 크기는 **v·w / |w|²**입니다.
- 식의 작동 방식은 다음과 같습니다:

1. **v**와 **w**의 내적을 계산하여 두 벡터 사이의 관계를 측정합니다. 이는 벡터 **v**가 벡터 **w**와 어느 정도 방향이 같은지를 나타냅니다.
2. 이 값을 벡터 **w**의 크기의 제곱(즉, |w|²)으로 나누어 정규화합니다.
3. 이 값에 벡터 **w**를 곱하여 벡터 **v1**를 계산합니다.

```
def squared_distance(v, w):
    """두 벡터 v와 w 사이의 제곱 거리(squared distance)를 계산합니다."""
    return sum_of_squares(vector_subtract(v, w))
```

❓ 설명

- `vector_subtract(v, w)` 는 벡터 v에서 벡터 w를 뺀 결과를 반환하는 함수입니다.
- `sum_of_squares(vector_subtract(v, w))` 는 위의 결과 벡터의 각 요소를 제곱하고 모두 합한 값을 반환합니다. 이를 통해 두 벡터 사이의 제곱 거리를 계산합니다.

Euclidean Distance between two vectors

❓ 설명 → Euclidean Distance between two vectors: $\mathbf{p}$,$\mathbf{q}$

벡터 **p**와 **q**가 각각 다음과 같은 좌표를 가진다고 가정합니다:

- **p** = [*p*1,*p*2,…,*pn*]

  $[p1,p2,\ldots,pn]$
- **q** = [*q*1,*q*2,…,*qn*]

  $[q1,q2,\ldots,qn]$

이 때, **p**와 **q** 사이의 유클리드 거리는 다음과 같이 계산할 수 있습니다:

$$\text{distance} = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \ldots + (p_n - q_n)^2}$$

이는 두 벡터 사이의 각 좌표 차이의 제곱을 모두 더한 후, 그 값의 제곱근을 취한 것입니다.

다른 표현으로, 두 벡터 사이의 유클리드 거리는 두 벡터 **p**와 **q**의 차이 벡터를 구한 후, 그 차이 벡터의 크기를 계산한 값이라고도 볼 수 있습니다:

distance = $\|p-q\|$

```
def distance(v, w):
    """두 벡터 v와 w 사이의 유클리드 거리를 계산합니다."""
    return math.sqrt(squared_distance(v, w))
```

❓ 설명

- `squared_distance(v, w)` 함수는 `v` 와 `w` 사이의 제곱 거리를 계산합니다.
- `math.sqrt` 는 위에서 계산된 제곱 거리를 제곱근을 구하여 유클리드 거리를 반환합니다.
- 이 함수를 사용하여 두 벡터 사이의 거리를 측정할 수 있습니다.

Manhattan distance

❓ 설명.

맨해튼 거리(Manhattan distance)는 두 벡터 또는 두 점 사이의 거리를 계산하는 방법 중 하나입니다. 이 거리는 각 좌표 차이의 절대값을 합하여 계산합니다. 맨해튼 거리는 직선으로만 이동할 수 있는 도심(Manhattan) 거리에서 비롯된 이름으로, 축방향 거리(axis-aligned distance)라고도 합니다.

두 벡터 **p**와 **q**가 다음과 같은 좌표를 가진다고 가정합니다:

- **p** = [*p*1,*p*2,...,*pn*]

  $[p1,p2,...,pn]$
- **q** = [*q*1,*q*2,...,*qn*]

  $[q1,q2,...,qn]$

이 때, **p**와 **q** 사이의 맨해튼 거리는 다음과 같이 계산할 수 있습니다:

$$\text{distance} = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + \ldots + |p_n - q_n|$$

이는 두 벡터 사이의 각 좌표 차이의 절대값을 모두 합한 것입니다.

```
def manhattan_distance(v, w):
    """두 벡터 v와 w 사이의 맨해튼 거리를 계산합니다."""
    return sum(math.fabs(v_i - w_i) for v_i, w_i in zip(v, w))
```

❓ 설명

- `zip(v, w)` 를 사용하여 두 벡터 `v` 와 `w` 의 요소를 쌍으로 짝지어 순회합니다.
- `v_i` 와 `w_i` 의 절대값 차이를 계산하고, 이러한 차이들의 합을 반환합니다.
- 맨해튼 거리는 각 차원에서 두 벡터 사이의 절대 차이의 합을 의미합니다.
- 이 함수를 사용하여 두 벡터 사이의 맨해튼 거리를 측정할 수 있습니다.

Cosine similarity

? 설명

코사인 유사도(Cosine similarity)는 두 벡터 사이의 방향성을 비교하는 척도입니다. 이 척도는 두 벡터 사이의 코사인 각도(cosine of the angle)를 사용하여 두 벡터의 유사도를 측정합니다. 유사도는 두 벡터가 서로 얼마나 비슷한 방향을 가지고 있는지 나타내며, -1에서 1 사이의 값을 가집니다.

코사인 유사도는 다음과 같이 계산할 수 있습니다:

$$\text{Cosine similarity} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \times \|\mathbf{w}\|}$$

- **v·w**: 벡터 **v**와 **w**의 내적(dot product)입니다. 이는 두 벡터의 각 좌표를 곱한 후 모두 더한 값입니다.
- $\|v\|$ $\|\mathbf{v}\|$ 와 $\|w\|$: 각각 벡터 **v**와 **w**의 크기(절대값)입니다. 벡터의 크기는 각 좌표의 제곱합의 제곱근으로 계산합니다.
- 분모는 두 벡터의 크기를 곱한 값이며, 분자는 두 벡터의 내적입니다.

코사인 유사도는 -1에서 1 사이의 값을 가집니다:

- 1: 두 벡터가 완전히 같은 방향을 가지고 있습니다.
- 0: 두 벡터가 수직(직각) 방향입니다.
- 1: 두 벡터가 완전히 반대 방향입니다.

```
def cosine_similarity(v, w):
    """두 벡터 v와 w 사이의 코사인 유사도를 계산합니다."""
    return dot(v, w) / (magnitude(v) * magnitude(w))

v = [0,1,1,0]
w = [0,100,100,0]
u = [1,0,0,1]
y = [-1,0,0,-1]

print(cosine_similarity(v, w))
print(cosine_similarity(u, v))
print(cosine_similarity(u,y))
```

```
0.9999999999999999
0.0
-0.9999999999999998
```

? 설명

- `dot(v, w)` 는 `v` 와 `w` 의 내적을 계산합니다.
- `magnitude(v)` 와 `magnitude(w)` 는 각각 `v` 와 `w` 의 크기를 계산합니다.
- 코사인 유사도는 두 벡터의 내적을 각 벡터의 크기를 곱한 값으로 나눈 값입니다.
- 이 값은 두 벡터의 방향이 얼마나 유사한지(각도가 얼마나 작은지)를 나타냅니다.
- 코사인 유사도의 값은 -1에서 1까지의 범위를 가지며, 1에 가까울수록 두 벡터의 방향이 유사함을 의미합니다.

Numpy Version

```
import numpy as np

v = np.array([1,1])
w = np.array([10,10])

print(np.dot(v - w, v - w)) # 제곱 거리
print(np.sqrt(np.dot(v - w, v - w))) # 유클리드 거리
print(np.sum(np.fabs(v - w))) # 맨해튼 거리
print(np.dot(v, w) / (np.sqrt(np.dot(v, v)) * np.sqrt(np.dot(w, w)))) # 코사인 유사도
```

```
162
12.727922061357855
18.0
0.9999999999999998
```

❓ 문서 벡터에서 모든 구성 요소가 음수가 아니므로 코사인 유사도는 0과 1 사이이며 코사인_거리는

```
cosine_distance(v, w) = 1 - cosine_similarity(v, w)
```

```
def cosine_distance(v, w):
    """벡터 v와 w 사이의 코사인 거리를 계산합니다."""
    return 1 - cosine_similarity(v, w)
```

Matrics

- 행렬은 2차원 숫자 집합입니다.
- 행렬을 목록으로 표시합니다
- A가 행렬이면 A[i][j]는 i번째 행과 j번째 열에 있는 원소입니다.

```
A = [[1, 2, 3],
     [4, 5, 6]] # A has 2 rows and 3 columns

B = [[1, 2],
     [3, 4],
     [5, 6]] # B has 3 rows and 2 columns
```

- 만약 당신이 1,000명의 키, 몸무게, 그리고 나이를 가지고 있다면, 당신은 그것들을 행렬에 넣을 수 있습니다:

```
data = [[70, 170, 40],
        [65, 120, 26],
        [77, 250, 19],
        # ....
       ]
```

```
def shape(A):
    # 행렬 A의 행과 열 수를 반환
    num_rows = len(A)
```

```
    num_cols = len(A[0]) if A else 0
    return num_rows, num_cols

def get_row(A, i):
    # 행렬 A의 i번째 행을 반환
    return A[i]

def get_column(A, j):
    # 행렬 A의 j번째 열을 반환
    return [A_i[j] for A_i in A]

def make_matrix(num_rows, num_cols, entry_fn):
    # 주어진 크기의 행렬을 생성하고 entry_fn에 따라 채움
    return [[entry_fn(i, j) for j in range(num_cols)]
            for i in range(num_rows)]

def is_diagonal(i, j):
    # 대각선에 해당하는 경우 1, 그 외에는 0을 반환
    return 1 if i == j else 0

identity_matrix = make_matrix(5, 5, is_diagonal)  # 5x5 항등 행렬 생성

import random
random_matrix = make_matrix(5, 5, lambda i, j: random.choice([0, 1]))  # 5x5 랜덤 행렬 생성
random_matrix
```

```
[[0, 1, 1, 1, 0],
 [0, 0, 1, 0, 1],
 [0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0],
 [1, 0, 0, 0, 1]]
```

❓ 설명.

- `shape(A)` :
    - **역할**: 행렬 A의 행과 열의 수를 반환합니다.
    - **사용**: 행렬의 크기를 알고 싶을 때 사용합니다.
- `get_row(A, i)` :
    - **역할**: 행렬 A의 i번째 행을 반환합니다.
    - **사용**: 행렬의 특정 행을 추출하고자 할 때 사용합니다.
- `get_column(A, j)` :
    - **역할**: 행렬 A의 j번째 열을 반환합니다.
    - **사용**: 행렬의 특정 열을 추출하고자 할 때 사용합니다.
- `make_matrix(num_rows, num_cols, entry_fn)` :
    - **역할**: `num_rows` x `num_cols` 크기의 행렬을 생성합니다. 행렬의 각 요소는 `entry_fn` 함수에 의해 채워집니다.
    - **사용**: 주어진 크기의 행렬을 특정한 규칙에 따라 생성하고자 할 때 사용합니다.
- `is_diagonal(i, j)` :
    - **역할**: 인덱스 `i` 와 `j` 가 같은 경우 1을 반환하고, 다르면 0을 반환합니다. 대각선에 있는지를 확인합니다.
    - **사용**: 행렬의 대각선 부분을 채우는 데 사용됩니다.
- `identity_matrix` :
    - **역할**: `make_matrix` 함수를 이용하여 5x5 크기의 항등 행렬을 생성합니다.
    - **사용**: 항등 행렬을 생성하고자 할 때 사용됩니다.
- `random_matrix` :
    - **역할**: `make_matrix` 함수를 이용하여 5x5 크기의 랜덤 행렬을 생성합니다. 각 요소는 0 또는 1로 무작위로 채워집니다.
    - **사용**: 랜덤 행렬을 생성하고자 할 때 사용됩니다.

Numpy Version

```
A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6]])

B = np.array([[1, 2],
              [3, 4],
              [5, 6]])
```

```
A.shape     # 행과 열의 개수를 나타냅니다.
A[1, :]     # 행 1의 모든 열 요소를 가져옵니다.
A[:, 1]     # 열 1의 모든 행 요소를 가져옵니다.
np.eye(5, 5) # 5x5 단위행렬을 생성합니다.

# 5x5 크기의 행렬을 [0,1] 중에서 무작위로 선택하여 생성합니다.
np.array([np.random.choice([0, 1]) for _ in np.arange(25)]).reshape(5, 5)

# 5x5 크기의 행렬을 무작위로 생성하고, 각 요소를 0.5 이상인지를 판단하여 0 또는 1로 변환합니다.
np.vectorize(np.int)(np.random.rand(25) >= 0.5).reshape(5, 5)
```

```
array([[1, 1, 0, 0, 0],
       [0, 0, 1, 0, 1],
       [1, 1, 0, 0, 0],
       [0, 0, 1, 1, 0],
       [1, 0, 0, 1, 1]])
```

❓ 설명

- `dot(v, w)` 는 `v` 와 `w` 의 내적을 계산합니다.
- `magnitude(v)` 와 `magnitude(w)` 는 각각 `v` 와 `w` 의 크기를 계산합니다.
- 코사인 유사도는 두 벡터의 내적을 각 벡터의 크기를 곱한 값으로 나눈 값입니다.
- 이 값은 두 벡터의 방향이 얼마나 유사한지(각도가 얼마나 작은지)를 나타냅니다.
- 코사인 유사도의 값은 -1에서 1까지의 범위를 가지며, 1에 가까울수록 두 벡터의 방향이 유사함을 의미합니다.

Two representations for friendships

- Representation in Chapter 1

```
friendships = [(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4),
               (4, 5), (5, 6), (5, 7), (6, 8), (7, 8), (8, 9)]
```

- Alternative notation

```
#          user 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
#
friendships = [[0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # user 0
               [1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # user 1
               [1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # user 2
               [0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], # user 3
               [0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], # user 4
               [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0], # user 5
               [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0], # user 6
               [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0], # user 7
               [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1], # user 8
               [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]] # user 9
```

```
friendships[0][2] == 1     # True, 0과 2는 친구입니다
friendships[0][8] == 1     # False, 0, 8은 친구가 아닙니다
```

```
False
```

```
friends_of_five = [i                                              # only need
                   for i, is_friend in enumerate(friendships[5])  # to look at
                   if is_friend]                                  # one row

print(friends_of_five)
```

```
[4, 6, 7]
```

Numpy Version

```
friendships = np.array(friendships)  # 친구 관계를 나타내는 2D 배열을 만듭니다.

# 0과 2가 친구인지 확인합니다. (0행, 2열 값이 1이면 True)
print(friendships[0, 2] == 1)

# 0과 8이 친구인지 확인합니다. (0행, 8열 값이 1이면 True)
print(friendships[0, 8] == 1)

# 5의 친구 목록을 가져옵니다. (5행의 값 중 1인 요소들의 인덱스를 반환합니다.)
print(np.argwhere(friendships[5] == 1))
```

```
array([[4],
       [6],
       [7]], dtype=int64)
```

Matrix Addition

```
def matrix_add(A, B):
    # 두 행렬의 크기가 다른 경우 예외를 발생시킵니다.
    if shape(A) != shape(B):
        raise ArithmeticError("cannot add matrices with different shapes")

    # 행렬 A와 B의 크기를 가져옵니다.
    num_rows, num_cols = shape(A)

    # 각 위치의 요소들을 더하여 새로운 행렬을 생성합니다.
    def entry_fn(i, j): return A[i][j] + B[i][j]

    # `make_matrix` 함수를 사용하여 결과 행렬을 생성합니다.
    return make_matrix(num_rows, num_cols, entry_fn)
```

❓ 설명

- `shape(A) != shape(B)`: 행렬 `A`와 `B`의 크기를 비교합니다. 크기가 다르면 예외를 발생시킵니다.
- `num_rows, num_cols = shape(A)`: 행렬 `A`의 행과 열의 수를 가져옵니다.
- `def entry_fn(i, j): return A[i][j] + B[i][j]`: 각 위치 `(i, j)`에서 `A`와 `B`의 요소를 더하는 함수입니다.
- `return make_matrix(num_rows, num_cols, entry_fn)`: `make_matrix` 함수를 사용하여 결과 행렬을 생성합니다.

Numpy Version

```
A = np.array([[1,1],[2,2]])
B = np.array([[3,3],[4,4]])
print(A + B)     # 행렬 A와 B의 요소별 덧셈 (원소별 덧셈)
print(A * B)     # 행렬 A와 B의 요소별 곱셈 (원소별 곱셈)
print(np.transpose(A))             # 행렬 A의 전치 (행과 열을 뒤집은 형태)
print(A.T)                         # 행렬 A의 전치 (np.transpose(A)와 동일)
print(A.dot(B))                    # 행렬 A와 B의 행렬 곱셈
print(np.matmul(A, B))             # 행렬 A와 B의 행렬 곱셈 (A.dot(B)와 동일)
C = np.array([[1., 2.], [3., 4.]])
print(np.linalg.det(C))            # 행렬 C의 행렬식 (determinant)
```

```
print(np.linalg.inv(C))            # 행렬 C의 역행렬 (inverse)
print(C.dot(np.linalg.inv(C)))     # 행렬 C와 C의 역행렬의 곱셈 (결과는 단위 행렬)
print(np.linalg.eig(C))            # 행렬 C의 고유값과 고유벡터 (eigenvalues and eigenvectors)
```

```
[[4 4]
 [6 6]]
[[3 3]
 [8 8]]
[[1 2]
 [1 2]]
[[1 2]
 [1 2]]
[[ 7  7]
 [14 14]]
[[ 7  7]
 [14 14]]
-2.0000000000000004
[[-2.   1. ]
 [ 1.5 -0.5]]
[[1.00000000e+00 1.11022302e-16]
 [0.00000000e+00 1.00000000e+00]]
(array([-0.37228132,  5.37228132]), array([[-0.82456484, -0.41597356],
       [ 0.56576746, -0.90937671]]))
```

More on types of attributes

1. **명목(Nominal) 속성**:
    - 속성 값 간에 우선순위나 순위가 없습니다. 즉, 모든 값은 동등합니다.
    - 예: ID 번호, 눈 색깔, 우편번호 등. 이들은 서로 구별되지만 순위나 크기가 없습니다.
2. **서열(Ordinal) 속성**:
    - 속성 값 간에 우선순위나 순위가 있습니다. 그러나 값 사이의 차이가 일정하지 않습니다.
    - 예: 순위 (예: 감자 칩의 맛을 1~10까지 평가), 학년, 키 (예: 키가 큰, 중간, 작은) 등이 있습니다.
3. **구간(Interval) 속성**:
    - 속성 값 간의 차이를 비교할 수 있지만, 절대적인 영점(0)이 없습니다.
    - 예: 달력 날짜, 섭씨나 화씨 온도 등. 온도의 경우 차이는 비교할 수 있지만, 섭씨나 화씨는 절대적인 영점이 없습니다.
4. **비율(Ratio) 속성**:
    - 절대적인 영점(0)이 있으며 속성 값 간의 비율을 비교할 수 있습니다.
    - 예: 켈빈 온도, 길이, 시간, 개수 등. 이러한 속성은 0이 의미 있는 값을 가지므로 값 간의 비율을 비교할 수 있습니다.

Properties of Attribute Values

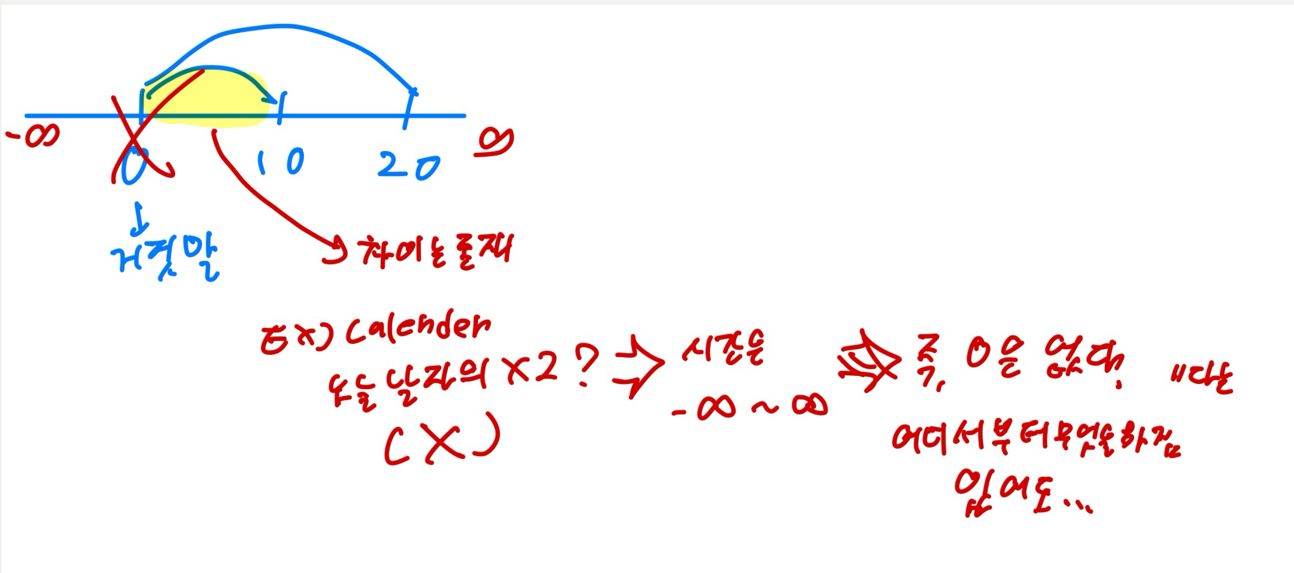
- 속성의 유형은 다음 속성/작업 중 어느 것을 소유하는지에 따라 달라집니다:
- **구별성(Distinctness): =**
    - 속성 값이 서로 다른지 여부를 확인하는 연산입니다. 속성 값 사이에 구별성이 있다면 해당 속성은 서로 다른 값을 가질 수 있습니다. 이는 **명목(Nominal)**, **서열(Ordinal)**, **구간(Interval)**, **비율(Ratio)** 속성 모두에 해당됩니다.
- **순서(Order): < >**

    - 속성 값 간의 순서를 비교하는 연산입니다. 예를 들어, 어느 값이 다른 값보다 작은지, 큰지 등을 비교할 수 있습니다. 이는 **서열(Ordinal)**, **구간(Interval)**, **비율(Ratio)** 속성에 해당합니다.
- **차이(Differences): + -**
    - 속성 값 간의 차이를 계산할 수 있는 연산입니다. 예를 들어, 속성 값 사이의 차이를 계산하여 의미 있는 정보를 얻을 수 있습니다. 이는 **구간(Interval)**, **비율(Ratio)** 속성에 해당합니다.
- **비율(Ratios): * /**
    - 속성 값 간의 비율을 계산할 수 있는 연산입니다. 예를 들어, 한 속성 값이 다른 속성 값의 몇 배인지를 계산할 수 있습니다. 이는 **비율(Ratio)** 속성에 해당합니다.

각 속성 유형은 이러한 속성/연산 중 일부 또는 모든 것을 갖고 있습니다:

- **명목(Nominal) 속성:** 구별성(Distinctness)
- **서열(Ordinal) 속성:** 구별성(Distinctness)과 순서(Order)
- **구간(Interval) 속성:** 구별성(Distinctness), 순서(Order), 의미 있는 차이(Differences)

❓ Inverval 속성



- **비율(Ratio) 속성:** 구별성(Distinctness), 순서(Order), 의미 있는 차이(Differences), 비율(Ratios)