Resumen Estadística y Probabilidad

Frank Salas

5 de julio de 2022

Resumen

Síntesis de lo desarrollado en clases durante todo el semestre.

¿Qué es una variable aleatoria?

Es una función que busca etiquetar los resultados de un espacio muestral a través de un número. A través de dicha etiqueta podemos divir el espacio muestral en subconjuntos, más conocidos como eventos.

Ejemplo

Si la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ es el número de caras que resultan al tirar una moneda 3 veces, el rango de $\boldsymbol{X}$ es $R_x = \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$, entonces,

X	**P(X = x)**
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Combinaciones y Permutaciones

Donde n es la cantidad total de la que se puede escojer y r la cantidad que se debe escoger.

Combinaciones

Cuando el orden no es importante,

$$C_r^n = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Permutaciones

Cuando el orden si es importante,

$$P_r^n = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

1. Variable Aleatoria Discreta

1.1. Función de probabilidad y función de distribución acumulada

Sea X una variable aleatoria discreta. Una función de probabilidad de X es $f(X)$ y satisface las siguientes condiciones:

- $f(x) \geq 0$
- $\sum_{x_i \in R_x} f(x_i) = 1$

1.1.1. Media o esperanza matemática de la función y varianza

$$E(X) = \mu = \sum f(x_i)x_i$$

$$V(X) = \sigma^2 = \sum f(x_i)x_i^2 - \mu^2$$

1.2. Función de distribución acumulada de variable aleatoria discreta

Como su nombre lo dice, es la misma pero acumulada, desde el menor valor que puede llegar a tener la variable aleatoria hasta el máximo valor.

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{k \leq x} P[X = k] = \sum_{k \leq x} f(k)$$

Para cualquier valor menor que x puede tener en $f(x)$ el resultado siempre será 0, y si el valor es mayor al que x puede llegar a ser es 1.

1.3. Ensayos de Bernoulii

El espacio muestral esta conformado por exito y fracaso.

1.3.1. Variable aleatoria Binomial

Un número fijo de veces, que se hace el ensayo de Bernoulii. Por ejemplo, sacar bolas de una urna conreemplazo.

Experimento binomial

Condiciones para que sea un experimento binomial:

1. El experimento consta de n ensayos idénticos.
2. Solo hay dos resultados posibles, exito o fracaso.
3. La probabilidad de exito nunca cambia, por lo que la de fracaso tampoco.
4. Los ensayos son independientes.

Formula:
Para un experimento binomial, siendo p la probabilidad de exito, 1 - p la probabilidad de fracaso, n la cantidad de ensayos hechos y x la cantidad de exitos.

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ para\ x\ =\ 0, 1, 2, .., n$$

Media:

$$\mu = np$$

Varianza:

$$\sigma^2 = npq$$

1.3.2. Variable aleatoria Geométrica

Se repite el ensayo de Bernoulii hasta que se consiga un exito.

Ensayo Geométrico

1. Solo hay dos resultados posibles, exito o fracaso.
2. La probabilidad de exito nunca cambia, por lo que la de fracaso tampoco.
3. Los ensayos son independientes.

Formula:
Para un experimento geométrico, siendo p la probabilidad de exito, 1 - p la probabilidad de fracaso y x la cantidad de ensayos necesarios hasta el primer exito.

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-1}p,\ para\ x\ =\ 1, 2, 3, 4, ...$$

Media:

$$\mu = \frac{1}{p}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

1.3.3. Variable aleatoria Pascal

Se repite el ensayo de Bernoulii hasta que salgan r exitos.

Ensayo de Pascal

1. Solo hay dos resultados posibles, exito o fracaso.
2. La probabilidad de exito nunca cambia, por lo que la de fracaso tampoco.
3. Los ensayos son independientes.
4. Similar al ensayo geométrico, la diferencia es la cantidad de exitos.

Formula:
Para un experimento de pascal, siendo p la probabilidad de exito, 1 - p la probabilidad de fracaso, r la cantidad de exitos y x la cantidad de ensayos para llegar a todos los exitos.

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r},\ para\ x\ =\ 1, 2, 3, 4, ...$$

Media:

$$\mu = \frac{r}{p}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1 - p \times r}{p^2}$$

1.3.4. Variable aleatoria Poisson

Es el número de veces que ocurre un evento durante un intervalo definido. El intervalo puede ser de tiempo, área, volumen, etc.

Ensayo de Poisson

1. La probabilidad de ocurrencia es la misma para cualesquiera dos intervalos de igual longitud.
2. Las ocurrencias son independientes.
3. Dos ocurrencias no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Formula:
Para un experimento de poisson, se tiene como parámetro a la media o valor esperado μ ($\mu > 0$), x la cantidad de ocurrencias en el intervalo.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \times \mu^x}{x!},\ para\ x\ =\ 0, 1, 2, 3, ...$$

Media:

$$\mu = \mu$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \mu$$

1.3.5. Variable aleatoria Hipergeométrica

Es como la distribución binomial pero los eventos no son independientes, por lo que las probabilidad varian. Por ejemplo, sacar bolas de una urna sin reemplazar.

1. Las probabilidades de exito o fracaso varian.
2. Los eventos no son independientes.

Formula:
Para un experimento de hipergeométrica, N es la cantidad total entre exitos y fracasos, a es la cantidad de exitos en la población, N - a la cantidad de fracasos en la población, n la muestra y x la cantidad de exitos en la muestra.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ para\ x\ = Max(0, n + a - N), ..., Min(a, n)$$

Media:

$$\mu = n\frac{a}{N}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = npq\frac{N-n}{N-1}$$

2. Variable Aleatoria Continua

Cuando el espacio muestral no esta limitado por los números enteros o son demasiados usamos las variables aleatorias continuas.

Ejemplos

- Estatura
- Peso
- Nivel de hemoglobina
- Nota del promedio ponderado

Estos ejemplos caen en un intervalo, por su naturaleza decimal.

2.1. Función Densidad

Es una función que sirve para ver como se comporta dicha variable aleatoria continua. Esta función puede ser vista como una curva. Además la función densidad debe de ser no negativa.

La integral de la función densidad es igual a 1.

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

Para hallar la probabilidad de que una variable este en un intervalo determinado se halla con la misma formula modificando los valores de a y b. Esto se hace porque hallar $P(X = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\int_c^c f(x)dx = 0$$

Definición

Una función densidad para X es una función real f que cumple con los siguientes requisitos.

1. $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in Rango\ (X)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
   en este caso

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b)$$

Distribución acumulada

La función de distribución acumulada es definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Además

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x), \int f(x)dx = F(x)$$

Esperanza matemática

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Varianza

$$\sigma^2 = V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

Desviación estandar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

2.2. Distribución Uniforme

Definición y Propiedades

- $X \sim Exp(\beta)$ Si su función densidad se define como,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & si\ c \leq x \leq d \\ 0 & en\ caso\ contrario. \end{cases}$$

- $\mu = \frac{c+d}{2}$
- $\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{12}(d-c)^2$
- $F(x) = P(X < x) = f(x)(-\infty)(x)$

2.3. Distribución Exponencial

Definición y Propiedades

- $X \sim Exp(\beta)$ Si su función densidad se define como,

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

- $\mu = E(X) = \frac{1}{\beta}$
- $\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\beta^2} = \mu^2$
- $F(x) = P(X < x) = \int_0^x \beta e^{-\beta x} dx = 1 - e^{-\beta x}$
- $P(X > s + t/X > s) = P(X > t)$

Relación con distribución Poisson

Si X es el número de veces que ocurre un evento en un lapso de tiempo, Con un promedio de ocurrencias λ. Entonces el tiempo que ocurra el primer evento es,

$$t \sim Exp(\beta = \lambda)$$

2.4. Distribución Normal Estándar

Definición y Propiedades

- $Z \sim N(\mu = 0; \sigma^2 = 1)$, si su función densidad es,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

- $\phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(v)dv$
- $\mu = E(Z) = 0$
- $\sigma^2 = V(Z) = 1$

Estandarización

$$z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma}$$