高级数据加密标准AES

清华大学计算机系
于红波

2024年3月20日

提纲

- 高级数据加密标准AES
- AES数学基础
- AES算法介绍

AES History

- AES
  - 1997年，NIST公开征集数据加密算法以取代DES
  - 1998年，共收到15个算法
  - 1999年，从15个中选中5个算法：MARS、RC6、Rijndael、Serpent和Twofish
  - 2000年10月：Rijndael获胜，Vincent Rijmen和Joan Daem
  - 2001年11月： 的数据加密标准AES

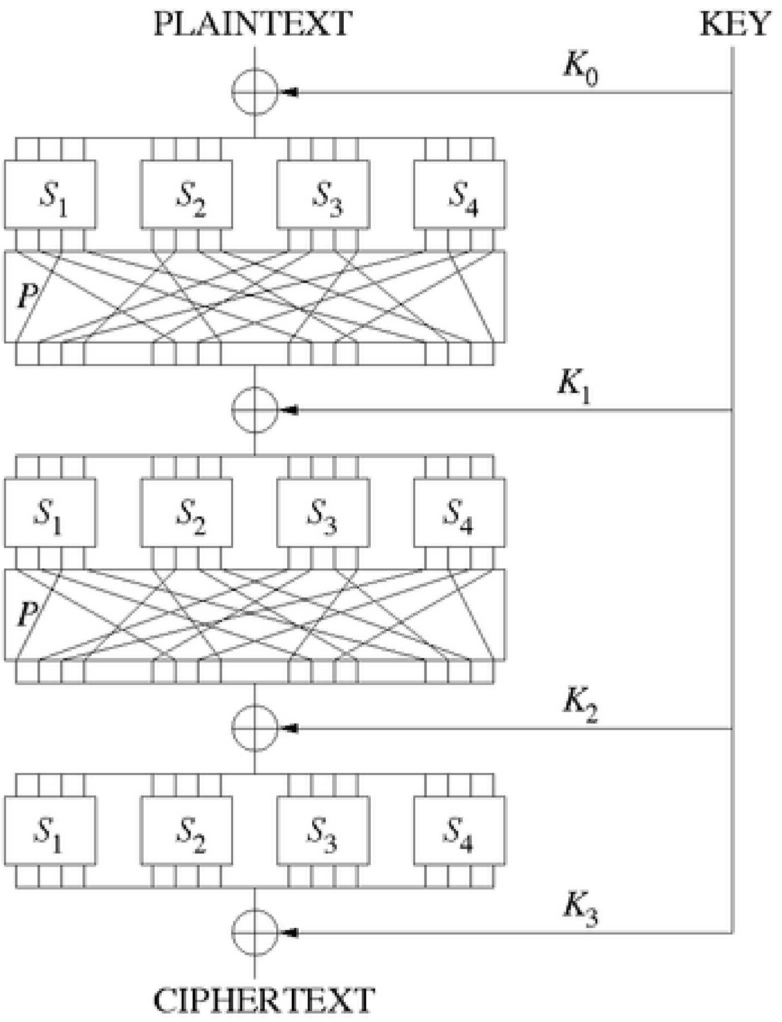
高级数据加密标准AES

- AES
  - 分组密码
  - 分组长度128比特
  - Substitution-Permutation Network (SPN)
  - 三种不同长度的密钥和轮数
    - AES-128：128比特密钥 + 10轮
    - AES-192： 192比特密钥 + 12轮
    - AES-256： 256比特密钥 + 14轮

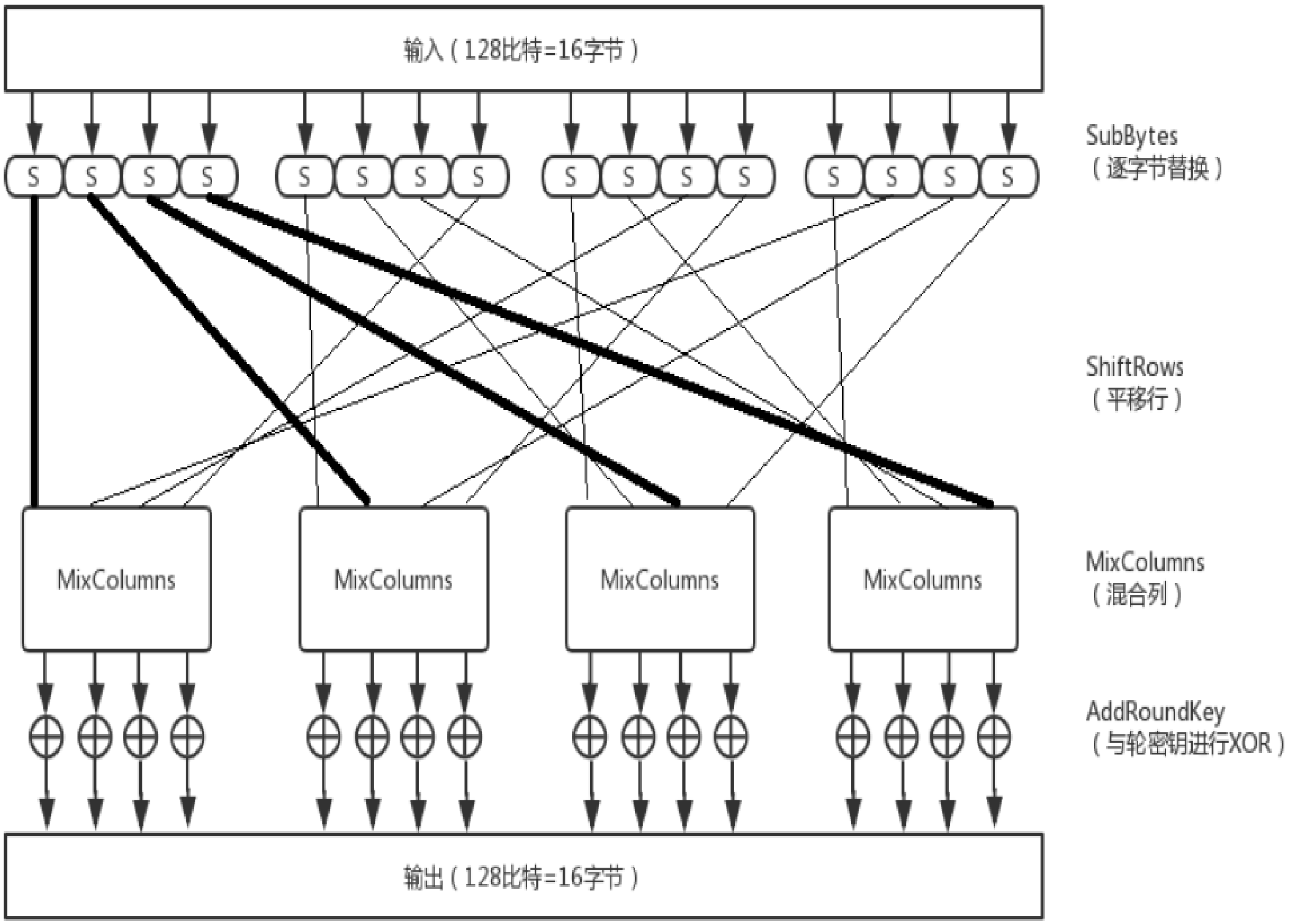
AES 应用

- AES
  - 免费使用
  - 简单漂亮的设计
  - 安全性高
  - 实现效率高
- 美国国家标准
  - AES-128用于SECRET信息
  - AES-192和AES-256用于TOP SECRET 信息
- 商业应用

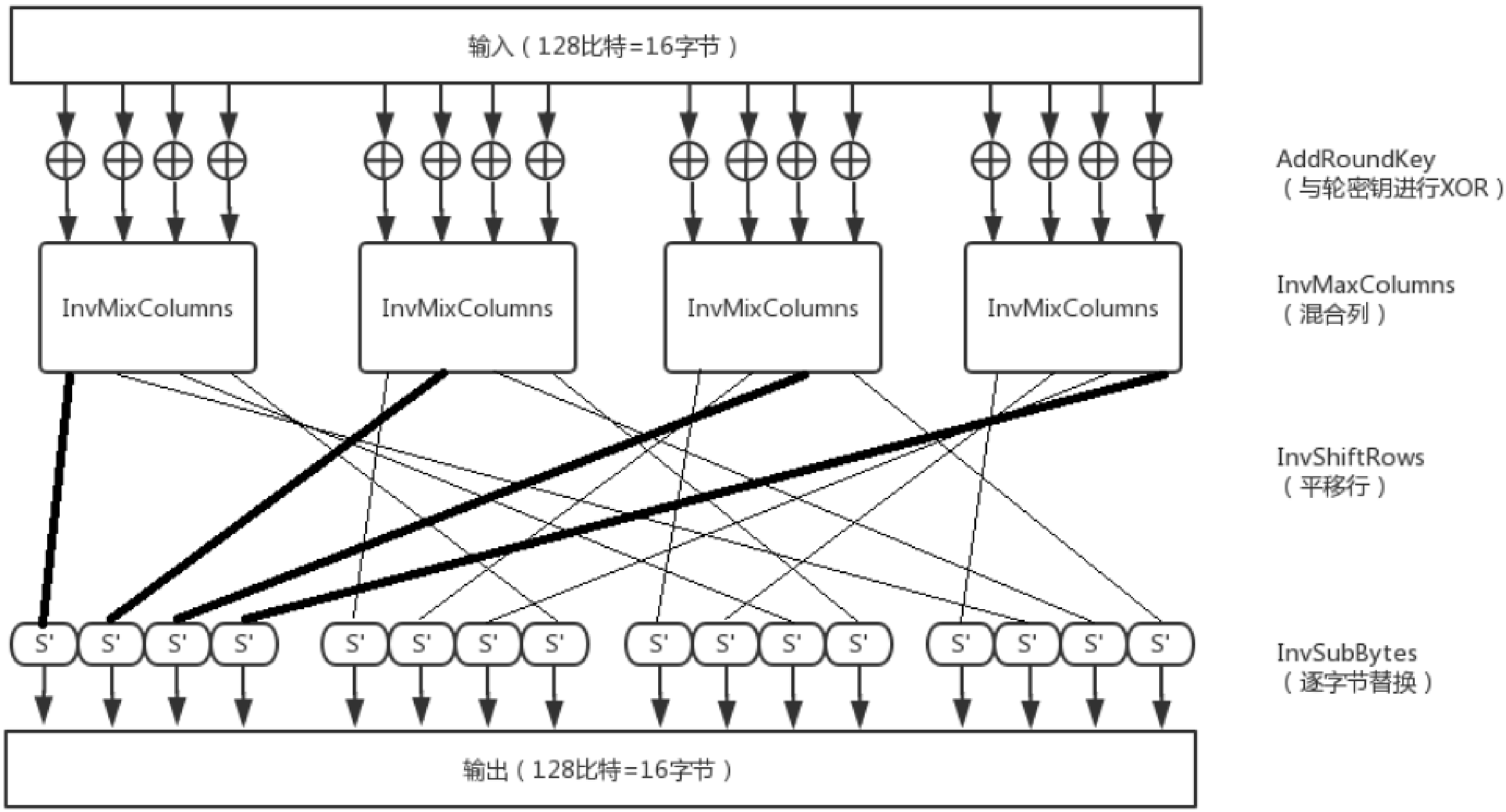
Substitution-Permutation Network(SPN)



Rijndael加密中的一轮



Rijndael解密中的一轮



AES算法：State

- 状态(State): 与消息分组相同，16个字节
- 表示成4乘4的矩阵

input bytes

in_0	in_4	in_8	in_{12}
in_1	in_5	in_9	in_{13}
in_2	in_6	in_{10}	in_{14}
in_3	in_7	in_{11}	in_{15}

→

State array

$s_{0,0}$	$s_{0,1}$	$s_{0,2}$	$s_{0,3}$
$s_{1,0}$	$s_{1,1}$	$s_{1,2}$	$s_{1,3}$
$s_{2,0}$	$s_{2,1}$	$s_{2,2}$	$s_{2,3}$
$s_{3,0}$	$s_{3,1}$	$s_{3,2}$	$s_{3,3}$

→

output bytes

out_0	out_4	out_8	out_{12}
out_1	out_5	out_9	out_{13}
out_2	out_6	out_{10}	out_{14}
out_3	out_7	out_{11}	out_{15}

AES算法：总体

State=Plaintext

AddRoundKey(State, Key_0)

For i=0 to r-1

SubBytes(State)

ShiftRows(State)

MixColumns(State)

AddRoundKey(State, $RoundKey_i$)

End for

r-1轮

$s_{0,0}$	$s_{0,1}$	$s_{0,2}$	$s_{0,3}$
$s_{1,0}$	$s_{1,1}$	$s_{1,2}$	$s_{1,3}$
$s_{2,0}$	$s_{2,1}$	$s_{2,2}$	$s_{2,3}$
$s_{3,0}$	$s_{3,1}$	$s_{3,2}$	$s_{3,3}$

SubBytes(State)

~~ShiftRows(State)~~

MixColumns(State)

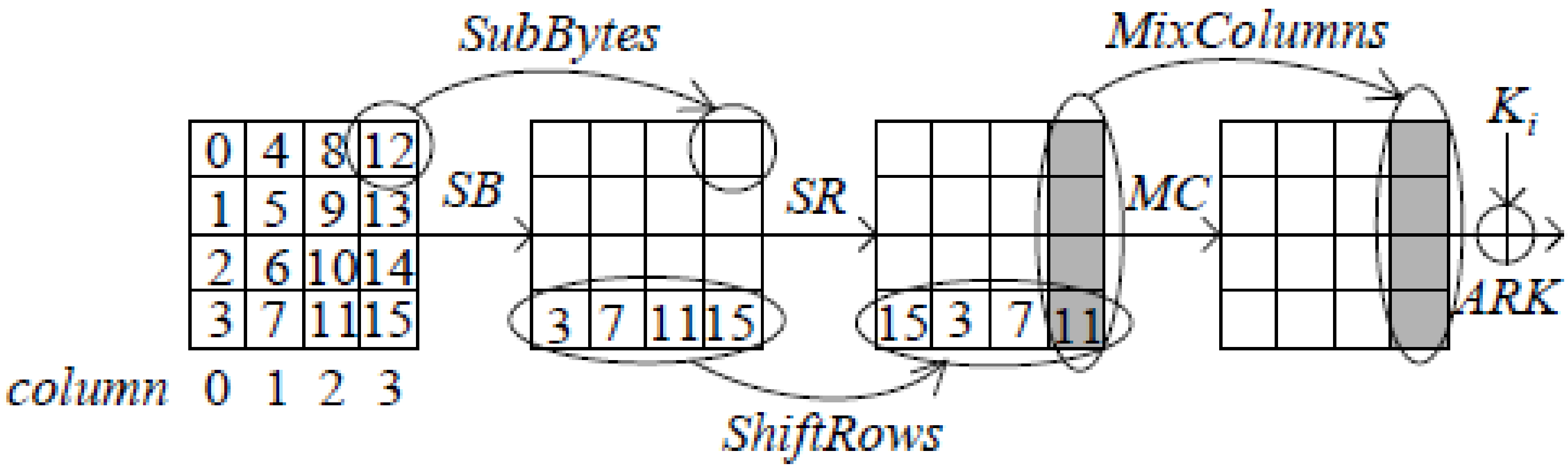
AddRoundKey(State, $RoundKey_r$)

最后轮

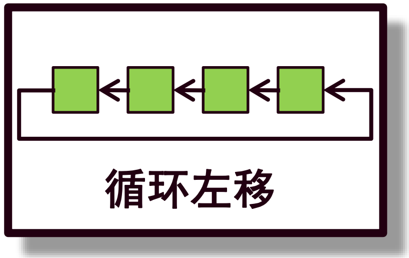
Ciphertext=State

需要r+1个轮密钥

AES算法一轮



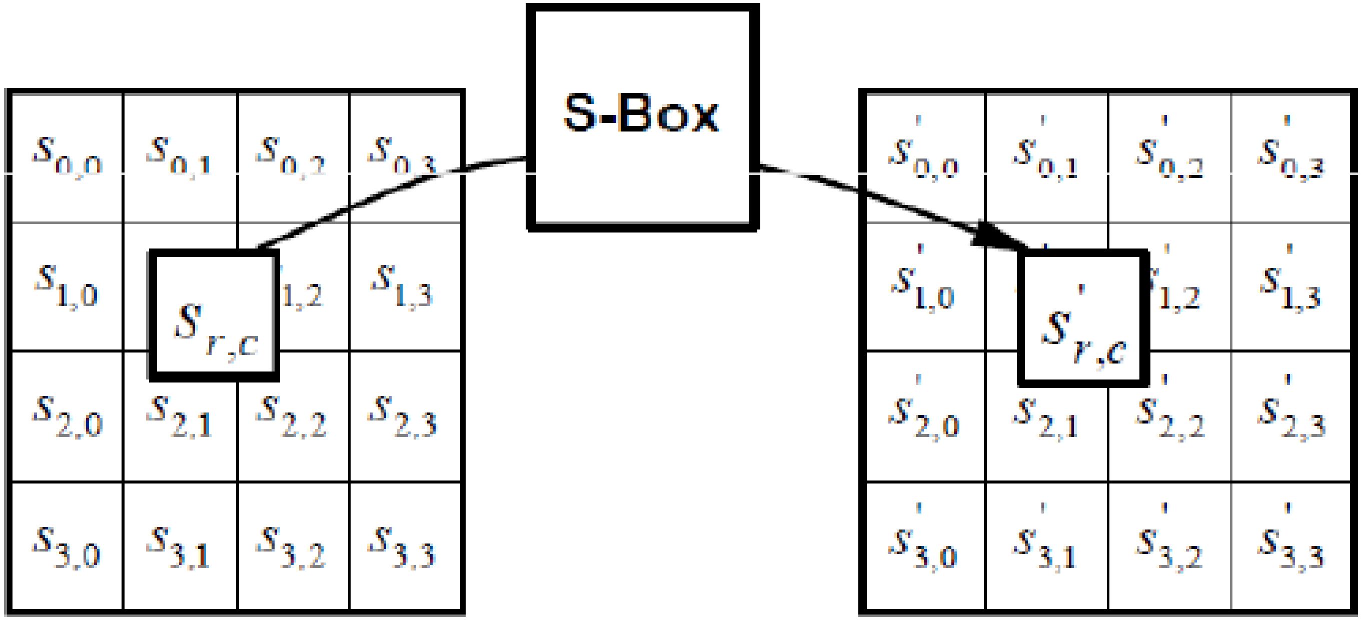
SubBytes
MixColumns
K_i
0 4 8 12
1 5 9 13
2 6 10 14
3 7 11 15
SB
SR
MC
ARK
3 7 11 15
15 3 7 11
column 0 1 2 3
ShiftRows



循环左移

AES：SubBytes

- 字节代替变换(SubBytes( )): 对每个字节进行S盒查表代换



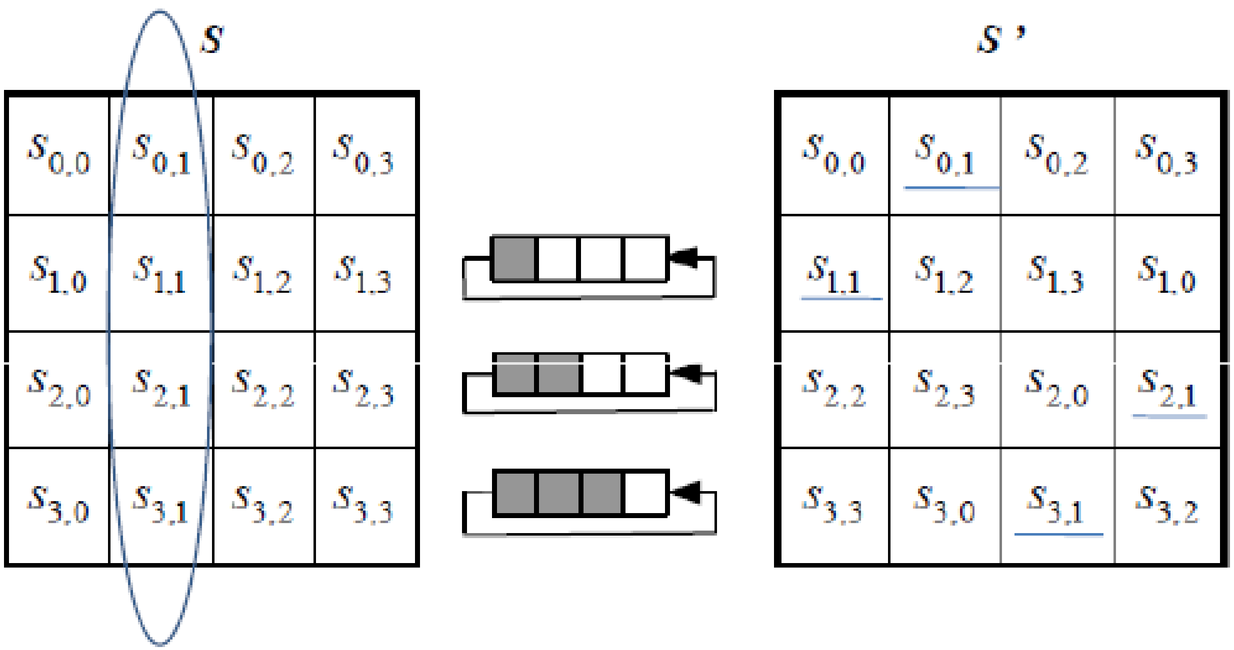
AES：SubBytes(续)

- S-box：8比特输入、8比特输出、可逆
- 由以下两个步骤计算 $b' = S(a)$
  - 在GF(2^8)中求 $b = a^{-1}$ (使用扩展Euclid算法）
  - 对b应用以下仿射变换

$$
\begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \\ b'_5 \\ b'_6 \\ b'_7 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

AES：ShiftRows

行移位变换(ShiftRows)



第1行:不移位

第2行:左移1位

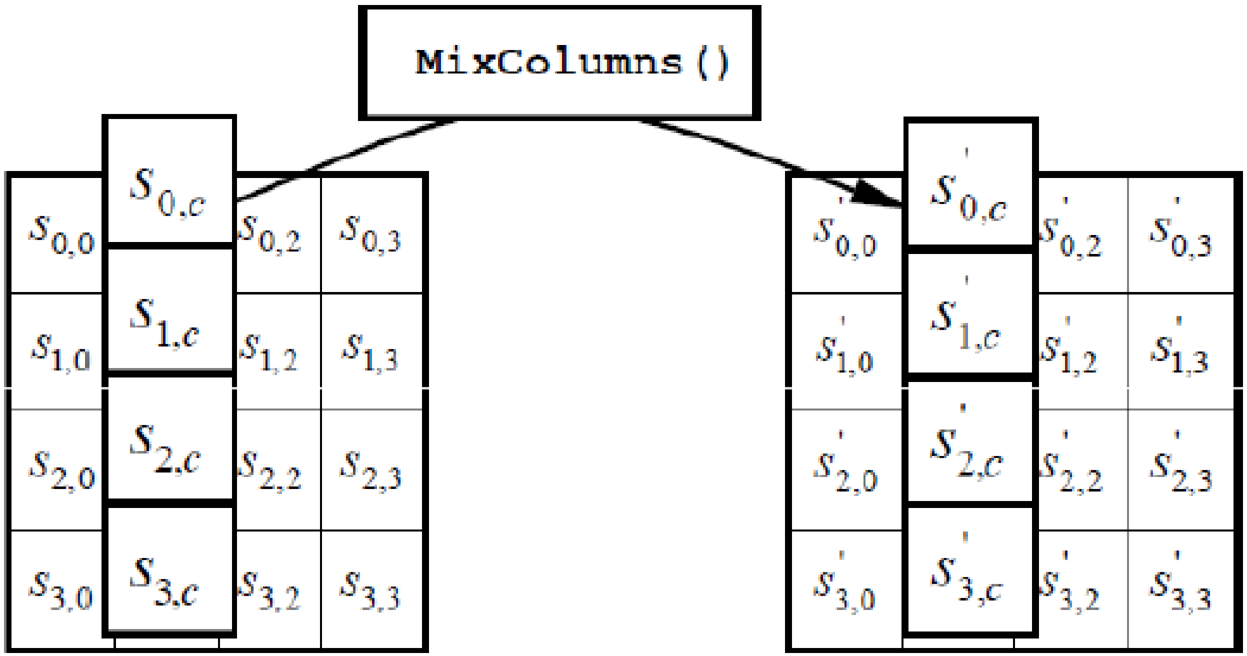
第3行:左移2位

第4行:左移3位

经过行移位后，1列中的4个字节被分布到不同的列中

AES：MixColumns

- 列混合变换(MixColumns( )): 对一个状态逐列进行变换



$$a(x) = \{03\}x^3 + \{01\}x^2 + \{01\}x + \{02\}$$

$$s'(x) = a(x) \otimes s(x)$$

AES：MixColumns

列混合

$$\begin{bmatrix} s'_{0,c} \\ s'_{1,c} \\ s'_{2,c} \\ s'_{3,c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{0,c} \\ s_{1,c} \\ s_{2,c} \\ s_{3,c} \end{bmatrix}$$

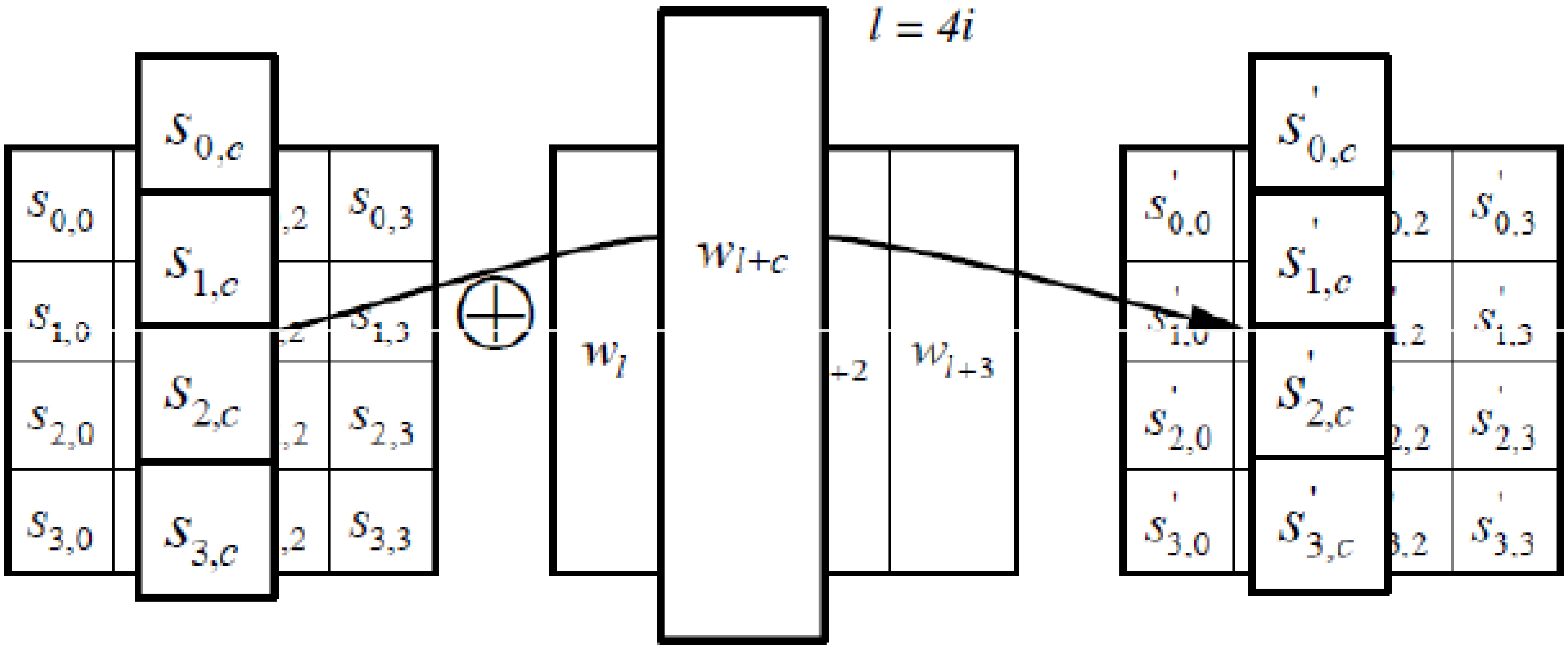
$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$a(x) = \{03\}x^3 + \{01\}x^2 + \{01\}x + \{02\}$$

AES：MixColumns

- 列混和的一些属性
  - 一个输入影响所有的4个输出字节
  - 假设有t_1个非零输入字节，输出有t_2个非零字节，则$t_1+t_2 \geq 5$
  - 最大距离可分码(MDS): 对任意的*x*, 则在GF(2^8)中， (*x*, MixColumns(*x*))至少是5。

AES：AddRoundKey

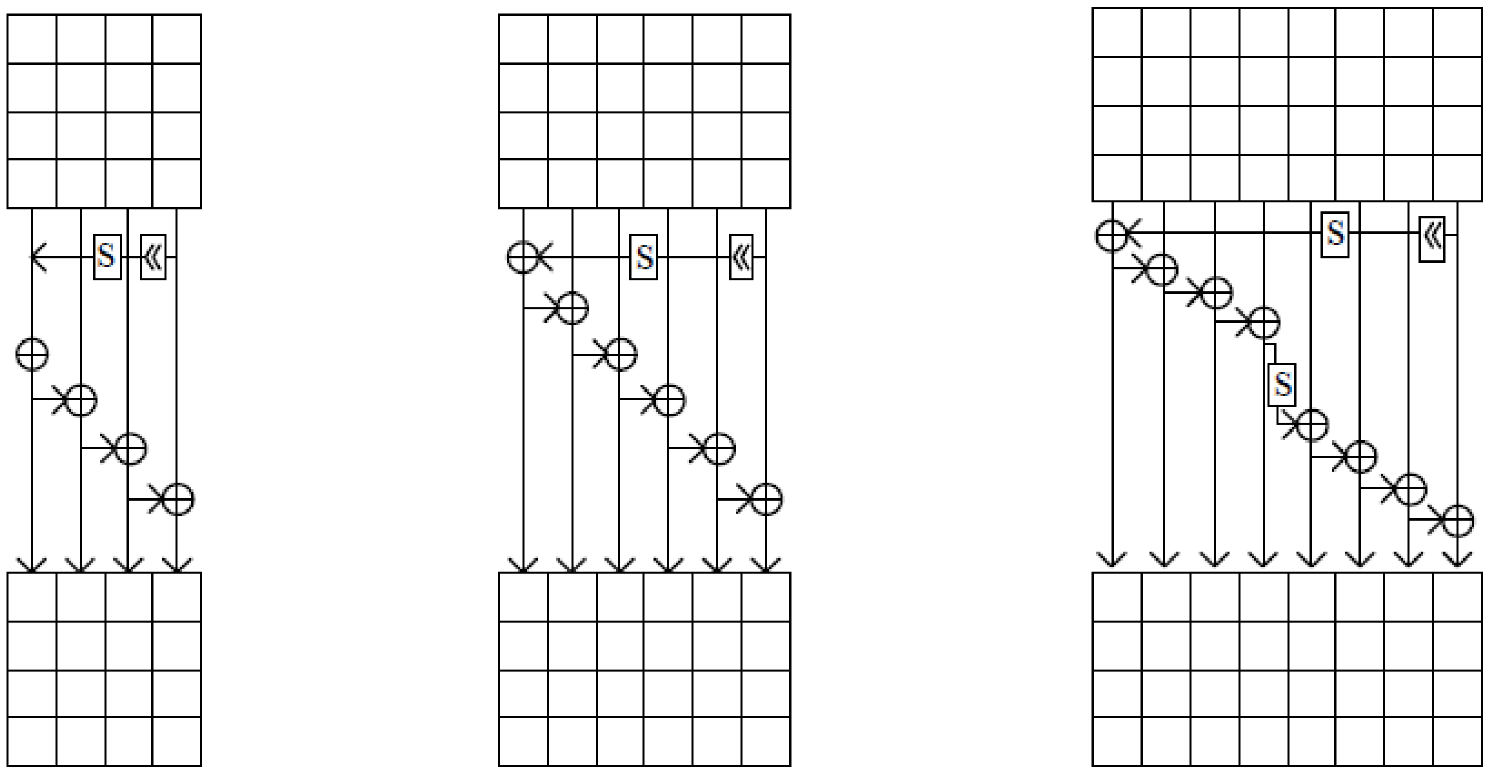


AES:密钥生成方案

- 每个轮密钥128比特
- 轮密钥用32比特字的数组来表示 w[i]
  - 第一轮： w[0],w[1],w[2],w[3]
  - 第二轮：w[4],w[5],w[6],w[7]
  - ……

AES算法密钥生成

▫密钥调度



$AES-128$ $AES-192$ $AES-256$

AES:密钥生成方案

- Example: AES-128

W[0] = (K[0],K[1],K[2],K[3])
W[1] = (K[4],K[5],K[6],K[7])
W[2] = (K[8],K[9],K[10],K[11])
W[3] = (K[12],K[13],K[14],K[15])

$$\left.\begin{array}{l} RCon[1] \leftarrow \texttt{01000000} \\ RCon[2] \leftarrow \texttt{02000000} \\ RCon[3] \leftarrow \texttt{04000000} \\ RCon[4] \leftarrow \texttt{08000000} \\ RCon[5] \leftarrow \texttt{10000000} \\ RCon[6] \leftarrow \texttt{20000000} \\ RCon[7] \leftarrow \texttt{40000000} \\ RCon[8] \leftarrow \texttt{80000000} \\ RCon[9] \leftarrow \texttt{1B000000} \\ RCon[10] \leftarrow \texttt{36000000} \end{array}\right\} \text{Round constants}$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } 3 \\ \quad \textbf{do } w[i] \leftarrow (key[4i], key[4i+1], key[4i+2], key[4i+3]) \end{array}\right\} \text{Load the key into w[ ]}$$

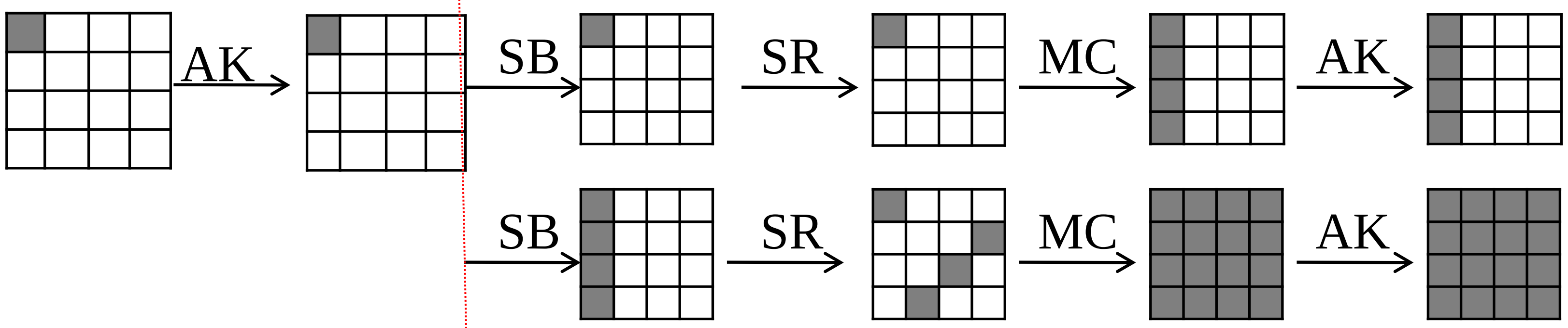
$$\begin{array}{l} \textbf{for } i \leftarrow 4 \textbf{ to } 43 \\ \quad \textbf{do} \begin{cases} temp \leftarrow w[i-1] \\ \textbf{if } i \equiv 0 \pmod 4 \\ \quad \textbf{then } temp \leftarrow \text{SUBWORD}(\text{ROTWORD}(temp)) \oplus RCon[i/4] \\ w[i] \leftarrow w[i-4] \oplus temp \end{cases} \end{array}$$

S盒变换

循环左移1个字节

return (w[0],w[1],…,w[43])

AES两轮



AES加解密

State=Plaintext

AddRoundKey(State, Key_0)

For i=0 to r-1

Subbytes(State)

ShiftRows(State)

MixColumns(State)

AddRoundKey(State, $RoundKey_i$)

End for

Subbytes(State)

ShiftRows(State)

~~MixColumns(State)~~

AddRoundKey(State, $RoundKey_r$)

Ciphertext=State

State=Ciphertext

AddRoundKey(State, $RoundKey_r$)

For i=0 to r-1

InvShiftRows(State)

InvSubBytes(State)

AddRoundKey(State, $RoundKey_{r-i}$)

InvMixColumns(State)

End for

InvShiftRows(State)

InvSubBytes(State)

AddRoundKey(State, $RoundKey_{r-i}$)

~~InvMixColumns(State)~~

Plaintext=State

AES数学基础

Euclid算法(辗转相除法）：设a和b是给定的两个整数，$b\neq 0$, b不能整除a, 重复应用带余除法得到下列k个等式：

$a=q_0b+r_0,\quad 0<r_0<|b|$

$b=q_1r_0+r_1,\ 0<r_1<r_0$

$r_0=q_2r_1+r_2,\ 0<r_2<r_1,$

…… ……

$r_{k-5}=q_{k-3}r_{k-4}+r_{k-3},\qquad 0<r_{k-3}<r_{k-4}$

$r_{k-4}=q_{k-2}r_{k-3}+r_{k-2},\qquad 0<r_{k-2}<r_{k-3}$

$r_{k-3}=q_{k-1}r_{k-2}$

则$r_{k-2}=GCD(a,b)$。复杂度 $O(\log_2^2 a)$

AES数学基础（续）

1. 欧几里德算法(Euclid)，辗转相除法

- 用于计算a和b的最大公因子 GCD(a,b)
  - 使用GCD(a,b)=GCD(b, a mod b)

$$
\begin{aligned}
&a = q_0 b + r_0, \quad 0 < r_0 < |b| \\
&b = q_1 r_0 + r_1, \quad 0 < r_1 < r_0 \\
&r_0 = q_2 r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \\
&\ldots\ldots \\
&r_{k-3} = q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, \quad 0 < r_{k-1} < r_{k-2} \\
&r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k, \quad 0 < r_k < r_{k-1} \\
&r_{k-1} = q_{k+1} \boxed{r_k.}
\end{aligned}
$$

2. 扩展的欧基里德算法

- 用于寻找x和y, 满足$ax+by$=GCD(a,b)
  - 基本思想：在欧几里德算法的第i步，寻找 $r_i=ax_i+by_i$.

AES数学基础（续）

- 例：求42823和6409的最大公因子，并将它表示成42823和6409的整系数线形组合形式。

  $42823=6\cdot 6409+4369$

  $6409=1\cdot 4369+2040$

  $4369=2\cdot 2040+289$

  $2040=7\cdot 289+17$

  $289=7\cdot 17$

$(42823,6409)$
$=(6409,4369)$
$=(4369,2040)$
$=(2040,289)$
$=(289,17)=17$

- 上面过程的逆过程

$17 = 2040 - 7\cdot 289$

$17 = 2040-7\cdot(4369-2\cdot 2040)$

$\quad = -7\cdot 4369 + 15\cdot 2040$

$17 = -7\cdot 4369 + 15\cdot(6409-4369)$

$\quad = 15\cdot 6409-22\cdot 4369$

$17 = 15\cdot 6409-22\cdot(42823-6\cdot 6409)$

$\quad = -22\cdot 42823 + 147\cdot 6409$

即$(42823, 6409)$

$\quad = -22\cdot 42823 + 147\cdot 6409.$

AES数学基础（续）

- 群：设G是一个非空集合，在G中定义了一个二元运算。，若∘满足下面条件，则G称为一个群。

1. 任意 $a,b\in G$, 则 $a\circ b\in G$
2. 对于任意的 $a,b,c\in G$, $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

半群

3. 在G中存在一个元素e, 它对G中任何一个元素g, 有

$$e\circ g=g\circ e=g$$

4. 对G中任何一个元素g，都存在一个元素g’，使得

$$g\circ g'=g'\circ g=e$$

e唯一，称为单位元

g’唯一，称为g的逆元

AES数学基础（续）

例：

如整数集合Z对 数的加法 构成一个群；

全体不等于0的有理数对普通数的乘法构成一个群

设 $n \in Z$ ， 模n剩余类 $Z_n = \{[k] \mid k \in Z\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ 对模n 加法构成一个群

交换群：

一个群，如果对所有的$a \circ b \in G$, 都有$a \circ b = b \circ a$, 则称G是一个交换群（Abel）如加群

AES数学基础（续）

环

设R是一个非空集合，在其上定义两种运算加法(+)和乘法(•), 如果这些运算满足

1. (R, +) 是一个加群， 即(R, +) 对叫加法做成一个交换群
2. $(R,\bullet)$ 对另一个叫乘法的运算做成一个半群
3. 加法对乘法的左右分配律成立：对任意的 $a,b,c \in R$,

$$a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$$

$$(b+c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$$

则称$(R,+,\bullet)$ 是一个环。 记为R

AES数学基础（续）

环 例子：

1. 整数Z对数的加法和乘法做成一个环， 称为整数环

2. 模n剩余类对模加法和模n乘法成为一个环。

交换环：一个环R成为一个交换环，若

$$\forall a,b \in R, a \bullet b = b \bullet a$$

单位元：一个环R的一个元素e叫做一个单位元，若

$$\forall a \in R, e \bullet a = a \bullet e = a$$

逆元：一个有单位元环的一个元b称为a的一个逆元，假如

$$a \bullet b = b \bullet a = e$$

AES数学基础（续）

定义：一个至少含有两个元素的环R叫做域，假如

1. R是交换环。
2. R有一个单位元。
3. R的每一个不等于0的元有一个逆元。

则R为域， 记R 为F

等价定义： 一个至少含有两个元素的集合F定义了两种运算+和*，如果

1. (F, +) 为一个可换加群。
2. (F*, ●) 为一个可换乘群， F*表示F中所有的非零元，

则F为域。

3. 加法对乘法满足分配律。

如全体有理数的集合、全体实数、全体复数按普通意义下的加、乘构成域： 有理数域、实数域和复数域

AES数学基础（续）

- 有限域(Galois Field)
- 一个只含有有限个元素的域
- 一个阶为m的有限域存在，当且仅当存在一个素数p和一个正整数n, 使得$m=p^n$
- 例如：GF(7)={0,1,2,3,4,5,6}
  - 模7整数加
  - 模7整数乘
- $GF(p^n)$: 系数在p上的次数为n-1的多项式的集合

Évariste Galois
(1811-1832)

AES数学基础（续）

- 有限域GF(2^8)：一个GF(2^8)中的元素的两种表示方式
  - 二进制表示： $b = b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$
  - 多项式表示

$$b_7x^7 + b_6x^6 + b_5x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

- 例如16进制数0x57的二进制表示01010111，对应的多项式为

$$x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$$

AES数学基础（续）

- 有限域GF(2^8)中两个元素的加

$$(x^6+x^4+x^2+x+1)\oplus(x^7+x+1)=x^7+x^6+x^4+x^2$$

$$\{01010111\}\oplus\{10000011\}=\{11010100\}$$

$$\{57\}\oplus\{83\}=\{64\}$$

- 有限域GF(2^8)中两个元素的乘法
  - 用●表示
  - 模二元域GF(2)上一个8次不可约多项式的乘积
  - AES选择不可约多项式为

$$m(x)=x^8+x^4+x^3+x+1$$

AES数学基础（续）

- 有限域GF(2^8)上两个元素的乘法，例

$$
\begin{aligned}
(x^6+x^4+x^2+x+1)\bullet(x^7+x+1) &= x^{13}+x^{11}+x^9+x^8+x^7+ \\
&\quad x^7+x^5+x^3+x^2+x+ \\
&\quad x^6+x^4+x^2+x+1 \\
&= x^{13}+x^{11}+x^9+x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+1
\end{aligned}
$$

$$x^{13}+x^{11}+x^9+x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+1 \bmod (x^8+x^4+x^3+x+1)$$

$$=x^7+x^6+1$$

$$\{57\}\bullet\{83\}=\{c1\}$$

AES数学基础（续）

- x与多项式$b(x)$的乘积

$$b_7x^8+b_6x^7+b_5x^6+b_4x^5+b_3x^4+b_2x^3+b_1x^2+b_0x$$

- 计算 $x \bullet b(x) \bmod m(x)$

$$\mathrm{xtime}(b)='02'\bullet b=\begin{cases} b \ll 1, & if\ \ b_7=0 \\ (b \ll 1)\oplus 1B, & if\ \ b_7=1 \end{cases}$$

- 例： $'57'\bullet'13'='FE'$ $'13'='01'\oplus'02'\oplus'10'$

$$'57'\bullet'02'=\mathrm{xtime}('57')='AE'$$

$$'57'\bullet'04'=\mathrm{xtime}('AE')='47'$$

$$'57'\bullet'08'=\mathrm{xtime}('47')='8E'$$

$$'57'\bullet'10'=\mathrm{xtime}('8E')='07'$$

$$\begin{aligned}'57'\bullet'13'&='57'\bullet('01'\oplus'02'\oplus'10')\\&='57'\oplus'AE'\oplus'07'\\&='FE'\end{aligned}$$

AES数学基础（续）

- 有限域GF(2^8)中乘法逆元的求解：使用扩展欧几里德算法
  - 给定a和b, 寻找x和y，满足

$$ax + by = \gcd(a,b)$$

  - 若 $\gcd(a,b)=1$，则$ax \bmod b = 1$

    即x是a mod b的乘法逆元

AES数学基础（续）

- 系数在GF(2^8)中的多项式
  - 设 $[a_0, a_1, a_2, a_2]$ 是4个字节(bytes), 对应着一个系数在GF(2^8)，次数小于4的多项式

$$a(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

  - 上面的多项式与GF(2^8)中的多项式是不同的
    - 系数在GF(2^8)
    - 使用一个不同的模多项式：$M(x) = x^4 + 1$
      - x^4+1不是GF(2^8)上的一个不可约多项式
      - 一个固定多项式模M(x)不一定有乘法逆元
      - AES中选择了一个有乘法逆元的固定多项式

AES数学基础（续）

- 系数在GF(2^8)中的多项式的加法运算

$$a(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$b(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$a(x) + b(x) = (a_3 \oplus b_3)x^3 + (a_2 \oplus b_2)x^2 + (a_1 \oplus b_1)x + (a_0 \oplus b_0)$$

AES数学基础（续）

- 系数在GF(2^8)中的多项式的乘法运算： $\otimes$

$$a(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$b(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$c(x) = a(x) \bullet b(x)$$

$$= c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

$$c_0 = a_0 \bullet b_0$$

$$c_1 = a_1 \bullet b_0 \oplus a_0 \bullet b_1$$

$$c_2 = a_2 \bullet b_0 \oplus a_1 \bullet b_1 \oplus a_0 \bullet b_2$$

$$c_3 = a_3 \bullet b_0 \oplus a_2 \bullet b_1 \oplus a_1 \bullet b_2 \oplus a_0 b_3$$

$$c_4 = a_3 \bullet b_1 \oplus a_2 \bullet b_2 \oplus a_1 \bullet b_3$$

$$c_5 = a_3 \bullet b_2 \oplus a_2 \bullet b_3$$

$$c_6 = a_3 \bullet b_3$$

AES数学基础（续）

系数在GF(2^8)中的多项式的乘法运算（续）

$$d(x) = a(x) \otimes b(x)$$
$$= a(x) \bullet b(x) \bmod (x^4 + 1)$$

由于$x^i \bmod (x^4 + 1) = x^{i \bmod 4}$

故$d(x) = c_3 x^3 + (c_6 \oplus c_2) x^2 + (c_5 \oplus c_1) x + (c_4 \oplus c_0)$

AES数学基础（续）

- 系数在GF(2^8)中的多项式的乘法运算（续）

设

$$d(x) = d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0$$

则

$$d_0 = a_0 \bullet b_0 \oplus a_3 \bullet b_1 \oplus a_2 \bullet b_2 \oplus a_1 \bullet b_3$$

$$d_1 = a_1 \bullet b_0 \oplus a_0 \bullet b_1 \oplus a_3 \bullet b_2 \oplus a_2 \bullet b_3$$

$$d_2 = a_2 \bullet b_0 \oplus a_1 \bullet b_1 \oplus a_0 \bullet b_2 \oplus a_3 \bullet b_3$$

$$d_3 = a_3 \bullet b_0 \oplus a_2 \bullet b_1 \oplus a_1 \bullet b_2 \oplus a_0 \bullet b_3$$

AES数学基础（续）

□系数在GF(2^8)中的多项式的乘法运算（续）

对一个固定的多项式 $a(x), d(x) = a(x) \otimes b(x)$ 能够表示成下列矩阵形式

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

AES数学基础（续）

- 系数在GF(2^8)中的多项式的乘法运算 （续）

  由于x^4+1不是GF(2^8)中的不可约多项式，一个固定的多项式模M(x)不一定有乘法逆元，AES选择了一个有逆元的固定多项式

$$a(x) = \{03\}x^3 + \{01\}x^2 + \{01\}x + \{02\}$$

$$a^{-1}(x) = \{0b\}x^3 + \{0d\}x^2 + \{09\}x + \{0e\}$$

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

谢谢！