数值分析(2)

Numerical Analysis

计算机系 软件所 喻文健

第二章 非线性方程求根

- 引言
- 二分法
- 不动点迭代法
- 牛顿法
- 牛顿法的改进
- 有关的实用技术

非线性方程基本理论

- 何谓非线性方程?

$$f(x) = 0$$ (默认实数域上)

- 一般地，解的存在性和个数很难确定

(1) $e^{x} + 1 = 0$. 此方程无实数解

(2) $e^{-x} - x = 0$. 此方程有一个解.

(3) $\cos x = 0$. 此方程有无穷多个解.

(4) $x^{3} - 6x^{2} + 5x = 0$. 此方程有三个解.

- 特例是n次多项式方程
- 实际问题中，一般求区间$[a, b]$上的实数解

非线性方程基本理论

$f^{(m)}(x^*) \neq 0, m > 1$

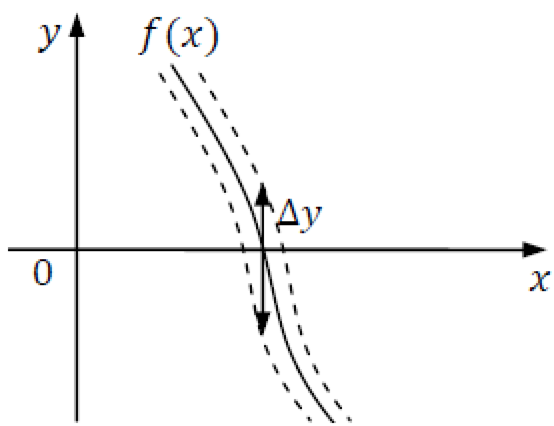
- **m重根**x^*: $f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$
- 问题的敏感性: <u>输入数据</u>扰动对<u>解</u>的误差的影响
- 一种简单情况: 设方程为$f(x)=y$, 求$y=0$对应的x

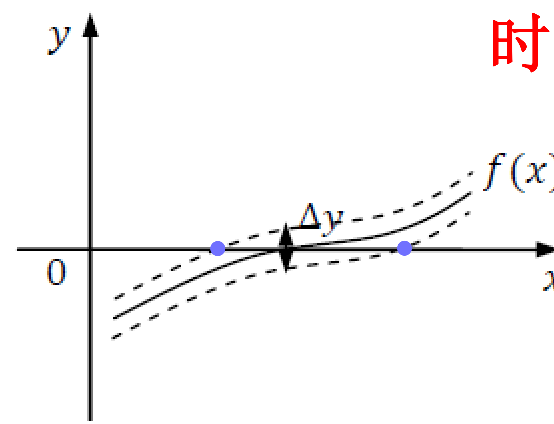
解　输入

绝对条件数 $\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right| \approx \left|\frac{1}{f'(x^*)}\right|$

- $|f'(x^*)|$越小，问题越敏感

当x^*是重根时很敏感





二分法

Wenjian Yu

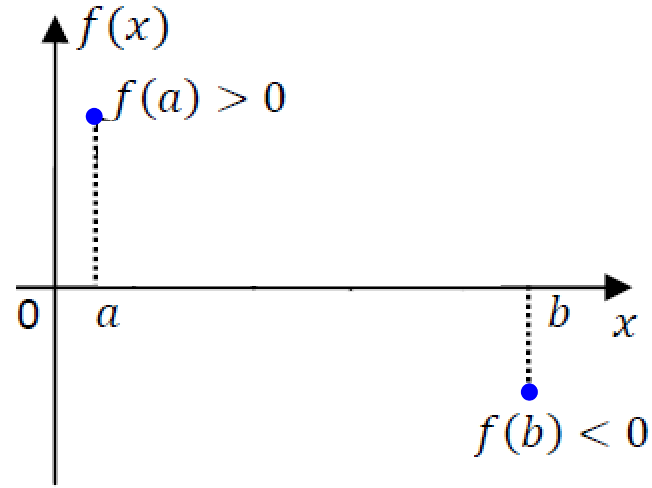
二分法

(连续函数)

- **定理2.1**：若$f(x) \in C[a,b]$，且$f(a)f(b) < 0$，则区间(a,b)内至少有一实根
- **有根区间**, 可以逐渐让它缩小
- **二分法**: 不断将有根区间一分为二，得有根区间序列$\{(a_k,b_k)\}$，近似解$x_k = (a_k + b_k)/2$. 且 (二分*k*次后)

$$|x_k - x^*| < (b_k - a_k)/2 = (b_0 - a_0)/2^{k+1}, k = 0,1,\cdots$$

- 可估计要达到某个<u>误差限</u>所需的<u>二分次数</u>, 也是计算$f(x)$函数值的次数



二分法

算法2.1：二分法

输入：a，b, 函数$f(x)$; **输出**：x.

While $(b-a) > \varepsilon$ **do**

    $x := a + (b-a)/2$;

    If $\operatorname{sign}(f(x)) = \operatorname{sign}(f(a))$ **then**

        $a := x$;

    Else

        $b := x$;

    End

End

$x := a + (b-a)/2$.

或者$\varepsilon \cdot |b|$

sign()表示取符号的函数。这里忽略了$f(x)$或$f(a) = 0$的情况 （若成立, 直接退出）

- 算法稳定性: 运算简单, 误差逐渐缩小, 比较稳定

二分法

算法2.1中误差阈值ε不能太小了

- 浮点运算下, 二分法的结果准确度的极限
- 例:求解方程$f(x)=x^2-2=0$，初始区间为[1, 2].
- 程序运行，迭代52次后, 区间不再缩小
- 打印出的最后几个区间端点值

a = 3ff6a09e667f3bc8
a = 3ff6a09e667f3bcc
b = 3ff6a09e667f3bce
b = 3ff6a09e667f3bcd

('>>format hex'按16进制显示)

相邻的两个浮点数

$=\lfloor \log_2|x^*| \rfloor$

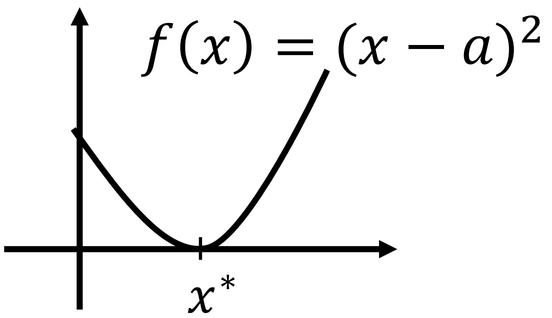
定理2.2

- 最小的有根区间长度为: $2^E \cdot 2\varepsilon_{\text{mach}}$, E为准确解x^*的浮点数指数 双精度下, 解的误差限最小为2^{E-52}

对应的相对误差$\leq 2\varepsilon_{\text{mach}}$

二分法的总结

- 求单变量方程$f(x)=0$的实根的可靠算法，若有$f(x)$函数值变号的初始有根区间，则总能收敛.
- 在实际浮点数系统上，有根区间不能任意小.
- 缺点：收敛速度较慢；初始有根区间有时不方便确定（甚至不存在）
- 常将二分法与其他方法结合起来使用



不动点迭代法

Wenjian Yu

不动点迭代

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = g(x)$$

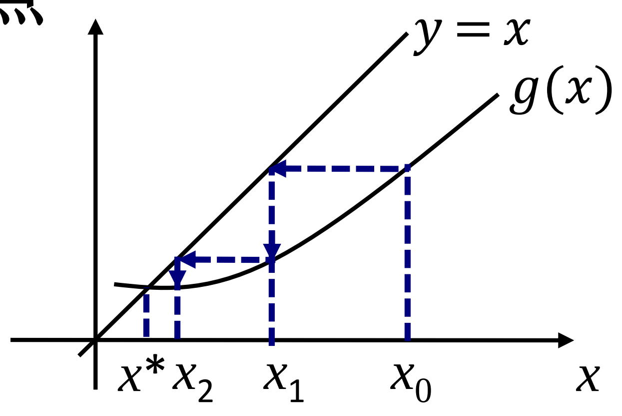
推出迭代法: $\begin{cases} x_{k+1} = g(x_k), & (k = 0, 1, \cdots) \\ \text{给定}x_0 \end{cases}$

- 好处：若$\{x_k\}$序列收敛到x^*，则x^*是原方程的解

为什么？

- 满足$x = g(x)$的x称为$g(x)$的不动点，几何意义是$y = g(x)$与$y = x$的交点
- 上述求解$f(x) = 0$的方法称为不动点迭代法

计算过程的几何含义



不动点迭代

$$\boxed{f(x)=0 \Longleftrightarrow x=g(x)} \Longrightarrow x_{k+1}=g(x_k)$$

- **例2.4**：求$x^4-x-2=0$在$x_0=1.5$附近的根
- 一种变形(A): $x=\sqrt[4]{x+2} \Longrightarrow \begin{cases} x_{k+1}=\sqrt[4]{x_k+2} \\ x_0=1.5 \end{cases}$

  x_1=1.3678, x_2=1.3547, … … , x_4=1.3532, x_5=1.3532

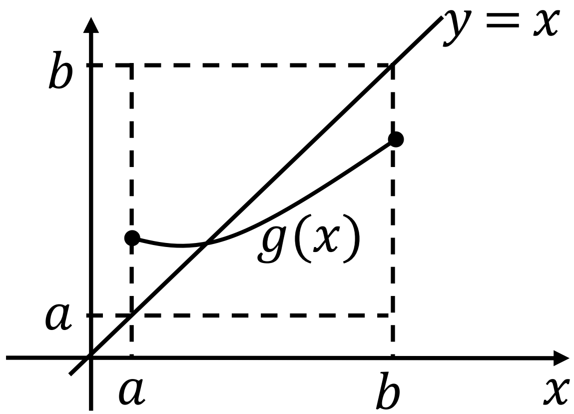
  (5位有效数字不变)
- 还有其他变形吗？
- (B): $x=x^4-2 \Longrightarrow \begin{cases} x_{k+1}=x_k^4-2 \\ x_0=1.5 \end{cases}$ **(计算量较小)**

  x_1=1.5^4-2= 3.1, x_2=3.1^4-2≈ 85, …, 越来越大，发散了！

关键问题：如何判断收敛性？

全局收敛的充分条件

- **定理2.3** $g(x) \in C[a,b]$, 若
  可改为$<|x_1-x_2|$
  (1) 对$\forall x \in [a,b]$，有$a \le g(x) \le b$
  (2) $\exists L \in (0,\ 1)$, $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$有 $|g(x_1)-g(x_2)| \le L|x_1-x_2|$
  则$g(x)$在$[a,b]$上存在不动点，且唯一
- 详细证明请自己看书pp. 37~38
- **说明:** 实际上条件(1)即保证存在不动点，如图



$g(x)$曲线在虚线正方形内, 水平方向横跨$[a,b]$, 则必与对角线相交, 这是连续函数的性质

唯一性的证明用反证法

$g(x)$定义域改为$\mathbb{R}$也成立

全局收敛的充分条件

$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

- **定理2.4** (充分条件) 若$g(x)$满足定理**2.3**中的两个条件
  (1) 对$\forall x \in [a,b]$，有$a \le g(x) \le b$
  (2) $\exists L \in (0,\ 1)$, $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$有 $|g(x_1)-g(x_2)| \le L|x_1-x_2|$
  则对$\forall x_0 \in [a,b]$, 不动点迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$都收敛到不动点x^*, 且 $|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$
- **证明**: 考察误差序列 (条件(1)是算法执行的前提)

$$|x_k - x^*| = |g(x_{k-1}) - g(x^*)| \le L|x_{k-1} - x^*| \le \cdots \le L^k|x_0 - x^*|$$

则 $\lim\limits_{k\to\infty} L^k|x_0-x^*| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

后面的不等式实际意义不大

全局收敛的充分条件

$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

- **定理2.4** (充分条件) 若$g(x)$满足两个条件
  (1) 对$\forall x\in[a,b]$，有$a\le g(x)\le b$
  (2) $\exists L\in(0,\ 1)$, $\forall x_1,x_2\in[a,b]$有 $|g(x_1)-g(x_2)|\le L|x_1-x_2|$
  则对$\forall x_0\in[a,b]$, 不动点迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$都收敛, …
- **说明**: 可用于判断不动点迭代法的全局收敛, 但条件(2)常替换为 (2)' $\forall x\in[a,b]$, $|g'(x)|<1$, 且$g(x)\in C^1[a,b]$
  这就是**定理2.5**　　为什么可以换?　　便于使用

$$|g(x_1)-g(x_2)|=|g'(\xi)(x_1-x_2)|$$

$$\because\ |g'(x)|\le L \Rightarrow |g(x_1)-g(x_2)|\le L|x_1-x_2|$$

定义域为$\mathbb{R}$时定理也成立

L是$|g'(x)|$的最大值 (闭区间上有界连续函数一定有)

局部收敛

$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

- **定义2.2** 若$g(x)$有不动点x^*, $\exists x^*$的邻域D: $[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使$\forall x_0 \in$D, 迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$都收敛到x^*, 则称该方法局部收敛 (强调存在某个邻域)
- **定理2.6** 设x^*是$g(x)$的不动点, 若$|g'(x^*)|<1$, 且$g'(x)$在x^*的某邻域上连续, 则迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$局部收敛
- **证明**: 即证明$\exists x^*$的邻域D, 在它上迭代法全局收敛.

(利用定理2.5) 首先, $|g'(x^*)|<1$且局部连续, 则存在x^*的某个邻域D使$\forall x \in$D, $|g'(x)| \le L < 1$, 这个L是介于$g'(x^*)$与1之间的数. 因此满足条件(2)'.

又$\forall x \in$D, $|g(x)-x^*| \le L|x-x^*| < |x-x^*|$, $\therefore g(x) \in$D 满足条件(1). 根据定理2.5, 收敛！

$|g'(x^*)|$越小收敛越快

局部收敛

$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

- **定理2.6** 设x^*是$g(x)$的不动点，若$|g'(x^*)|<1$，且$g'(x)$在x^*的某个邻域上连续，则迭代法$x_{k+1}=g(x_k)$局部收敛
- **注意:** **1.**只需看$g'(x^*)$，因此局部收敛易判断

  2.$|g'(x^*)|<1$是充分条件，某种程度上有一定的必要性.

  因为若$|g'(x^*)|>1$，则在x^*附近局部$|g'(x)|$**>1.**

  $$|x_{k+1}-x^*|=|g(x_k)-x^*|=|g'(\xi)(x_k-x^*)|\overset{\text{可能}}{>}|x_k-x^*|$$

  误差有放大的趋势

$|g'(x^*)|=1$的例子: $x_{k+1}=b-x_k$ 不收敛

$$x_{k+1}=\frac{x_k^3}{3}-x_k$$ 收敛 (在0附近的区间上)

稳定性与收敛阶

$f(x) = 0 \Rightarrow x_{k+1} = g(x_k)$

- 与二分法类似, 只要解收敛, 误差即越来越小, 计算过程是稳定的. (每步迭代计算后都通过判停准则来检测解的准确度)

  (合理设置判停准则, 稍后讲牛顿法时介绍)

  所以, 只需关心收敛性
- 收敛阶 (评估收敛快慢)
- 例: 误差$e_k = x_k - x^*, k = 1, 2, \ldots$ 为如下3种情形

  情形1: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \cdots$

  情形2: $10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}, \cdots$

  $\Big\}$ 线性收敛

  情形3: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, \cdots$ 平方(超线性)收敛

关注: 是$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}$趋于常数，还是$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2}$趋于常数?

稳定性与收敛阶

$f(x) = 0 \Rightarrow x_{k+1} = g(x_k)$

- **定义2.3**: 迭代解序列$\{x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots\}$收敛. 若误差

  $$e(x_k) = x_k - x^* \text{满足} \lim_{k\to\infty} \frac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|^p} = c, \qquad (c \neq 0)$$

  则称p阶收敛 (<u>收敛阶</u>为p) (不考虑舍入误差)
- **注意**: 对一个收敛的迭代法(过程), 上述数值p是唯一的
- **例:** 二分法的收敛阶？ 大体上是线性(**1**阶)收敛, $c = 0.5$
- **定理2.7** 迭代法$x_{k+1} = g(x_k)$, 若$g^{(p)}(x)$在不动点x^*附近连续, 整数p≥2, 则该方法在x^*的<u>邻域上</u>p阶收敛$\Leftrightarrow$

  $$g'(x^*) = g''(x^*) = \cdots = g^{(p-1)}(x^*) = 0, \text{且} g^{(p)}(x^*) \neq 0.$$

推论: $g'(x^*)= 0 \Leftrightarrow$ 至少2阶局部收敛

先证明充分性: 易知局部收敛, 然后看$e(x_{k+1}) =$?

注: 可证明局部收敛的不动点迭代法至少是线性收敛

稳定性与收敛阶

$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

- **定理2.7** $x_{k+1}=g(x_k)$, 若$g^{(p)}(x)$在不动点x^*附近连续, 整数p≥2, 则该迭代法在x^*邻域上p阶收敛 $\Leftrightarrow$ $g'(x^*)=g''(x^*)=\cdots=g^{(p-1)}(x^*)=0$, 且$g^{(p)}(x^*)\neq 0$.

- 证明: 充分性. $e(x_{k+1})=g(x_k)-g(x^*)$

在x^*处做Taylor展开 $=\cancel{g'(x^*)(x_k-x^*)}+\cancel{\frac{g''(x^*)}{2}(x_k-x^*)^2+\cdots}$

$$+\cancel{\frac{g^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}}(x_k-x^*)^{p-1}+\frac{g^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

$$\boxed{e(x_{k+1})=\frac{g^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{|g^{(p)}(\xi_k)|}{p!}=\frac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!}\neq 0$$

矛盾!

方法q阶收敛.

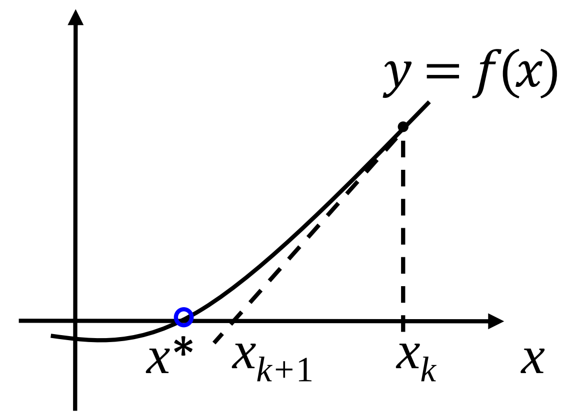
必要性用反证法: 设x^*处直到$g(x)$的q阶导数才≠0, ($q\neq p$)

牛顿法

牛顿法 解$f(x)=0$

- 也叫Newton-Raphson方法
- 优点: **1.**减少不动点迭代法构造的盲目性

  2.较好的收敛性 (收敛阶)
- 原理: 用切线近似曲线$f(x)$



切线方程$P(x)=f(x_k)+(x-x_k)f'(x_k)$=0

$$\Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ (假设$f'(x_k)\neq 0$)

也是不动点迭代法

- 考察局部收敛性

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

设$f'(x^*)\neq 0$, 即单根 $\Rightarrow g'(x^*)=0$

牛顿法

解$f(x)=0$, $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

- 迭代函数$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, $g'(x^*)=0 \Rightarrow$ 至少**2**阶收敛

  又$g''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$, (自行推导) ∴对非重根, 一般为**2**阶收敛

- **定理2.9** 设x^*是方程$f(x)=0$的单根，且$f(x)$在x^*附近有连续的**3**阶导数，则牛顿法至少局部二阶收敛.

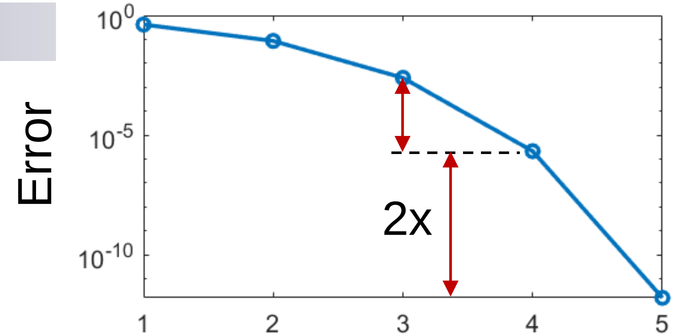
  $g(x)$的**2**阶导连续

- **例2.7** 求方程$f(x)=x^4-x-2=0$在1.5附近的根
- 解: 牛顿法公式 $x_{k+1}=$ $k=0,1,2\ldots$

  将$x_0=1.5$代入, 课本**2.4.1**小节的表2-2列出了计算结果

  收敛速度比二分法、不动点迭代法都快. (4步, 5位精度)

牛顿法



- **例2.8** 求方程$f(x)=x^2-c=0, (c>0)$ 的正根
- 解: 牛顿法公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k}),\ k=0,1,2\ ...$

  由于是单根, 此迭代法局部2阶收敛

  事实上, 上述公式在(0, +∞)上全局收敛， 是计算$\sqrt{c}$稳定、有效的方法(计算机中使用).

- 说明: 它不满足定理**2.4, 2.5**的全局收敛条件, 需从别的角度证明其全局收敛性 (请大家自己看书)
- 方程$f(x)=0$有重根的情况
  - 结论是只有<u>线性阶</u>的收敛速度
  - 并不比二分法(若可行)收敛快

(课本2.4.2小节)

迭代法的判停准则

- 算法2.2 不动点迭代法

  $k:=\ 0\,;$

  While $|f(x_k)|>\ \varepsilon_1$ 或 $|x_k-x_{k-1}|>\ \varepsilon_2$ **do**

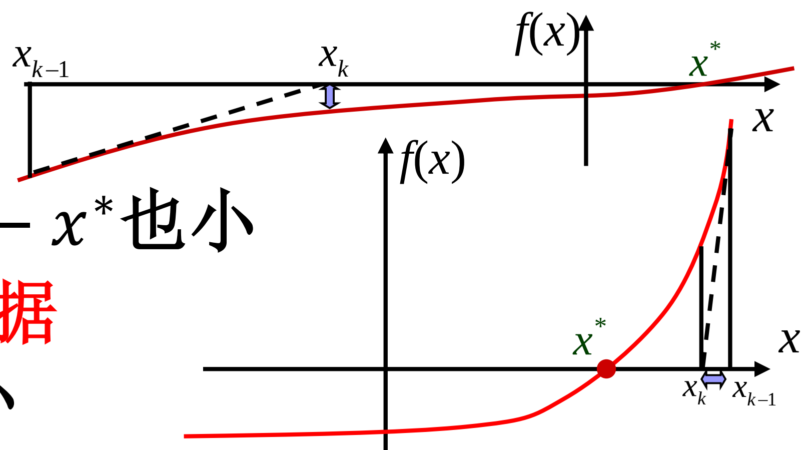
  $\quad x_{k+1}:=g(x_k)\,;$

  $\quad k:=\ k+1\,;$

  End

判停准则决定了解的准确度、及迭代步数(计算量)

相比二分法, 较难设置



- $|f(x_k)|\le\varepsilon_1$, 称为残差判据

  缺点: $f(x_k)$小并不意味着x_k-x^*也小
- $|x_k-x_{k-1}|\le\varepsilon_2$, 称为误差判据

  缺点: 并不意味着x_k-x^*很小
- $|x_k-x_{k-1}|\le\varepsilon_3|x_k|$, 称为相对误差判据

  特点: 阈值为相对量

有时可能需要三种组合起来

牛顿法的问题

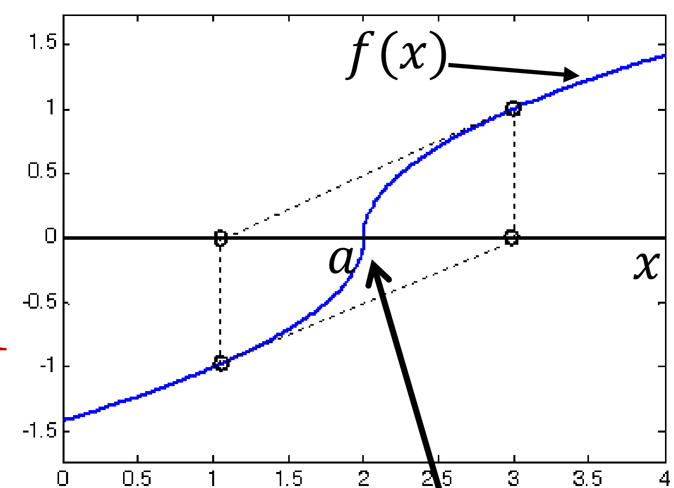
- 局部收敛, 依赖于初始解的设定　(**Java演示**)
- 对$f(x)$的连续性要求高
  - 由于连续性不好，对任意初值都不收敛的例子

$$f(x) = \mathrm{sign}(x-a)\sqrt{|x-a|} = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - 2(x_k - a)$$
$$\Longrightarrow x_{k+1} - a = -(x_k - a)$$

$g'(x^*) = -1$

迭代解围绕$x = a$点来回跳动



一阶导数不连续!

- 需要计算导数$f'(x)$

割线法与抛物线法

Wenjian Yu

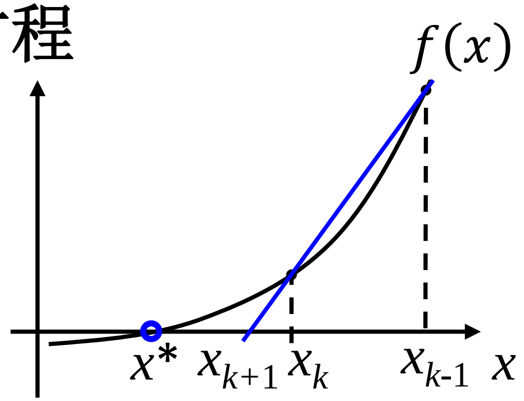
割线法与抛物线法

- 割线法 (secant method)
  - 为避免导数计算，用割线$P(x)$近似$f(x)$
  - 过x_k, x_{k-1}对应函数曲线上点的割线方程

$$P_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x - x_k)$$

  - 求$P_1(x) = 0$的解，令其为x_{k+1}

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$



  - 是一种广义的不动点迭代法. 关于其收敛性, 有

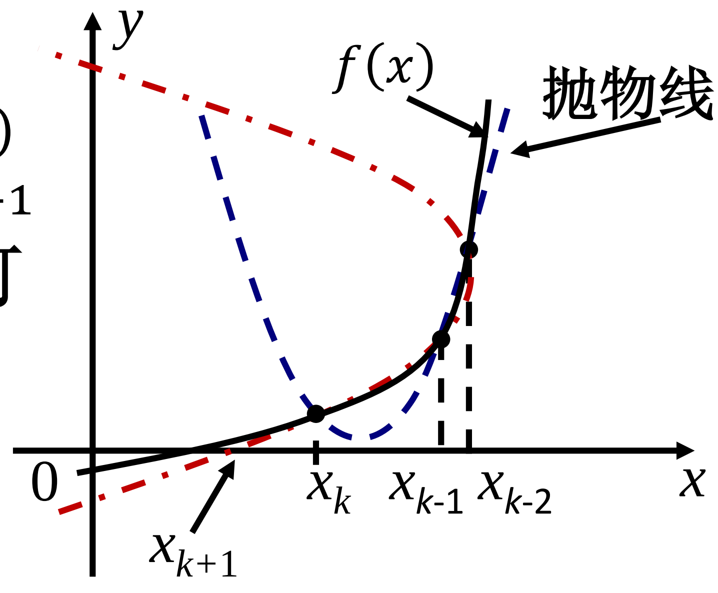
- **定理2.9** 若$f(x)$在根x^*某邻域内二阶连续可导且$f'(x) \neq 0$, 当x_0, x_1充分接近x^*时, 割线法按$p \approx 1.618$阶收敛 (超线性)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k| \cdot |e_{k-1}|} = c$$

割线法与抛物线法

- 割线法
  - 将牛顿法中的导数计算替换成近似导数
  - 属于一种拟牛顿法 (quasi-Newton method)
- 抛物线法
  - $x_k, x_{k-1}, x_{k-2} \xrightarrow{\text{二次多项式近似}f(x)} x_{k+1}$
  - y看成x的抛物线函数，它可能与横轴无交点
  - x看成是y的二次函数(侧向抛物线), 一定能得到x_{k+1}
  - 这个方法叫逆二次插值法，局部收敛阶 $p \approx 1.839$

3个y值各不相同



实用的求根技术

Wenjian Yu

实用的方程求根技术

- 牛顿下山法
- 多项式方程求根 **(2.6.2**小节不要求**)**
- 通用求根算法**zeroin** (简介)

牛顿下山法

是一种阻尼牛顿法

- 防止牛顿法迭代过程发散
  - 一系列比例因子$\lambda_i \in (0,1]$, 令$x_{k+1} = x_k - \lambda_i f(x_k)/f'(x_k)$
  - 保证$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$.

算法2.5：阻尼牛顿法

$k := 0$;
While 不满足收敛判据 **do**
  $s := f(x_k)/f'(x_k)$;
  $x_{k+1} := x_k - s$;
  $i := 0$;
  While $|f(x_{k+1})| \geq |f(x_k)|$ **do**
    $x_{k+1} := x_k - \lambda_i s$; {使用因子序列$\{\lambda_i\}$}
    $i := i + 1$;
  End
  $k := k + 1$;
End
$x := x_k$.

λ_i的值从1开始递减，也叫“下山”因子

只在有些情况下有用

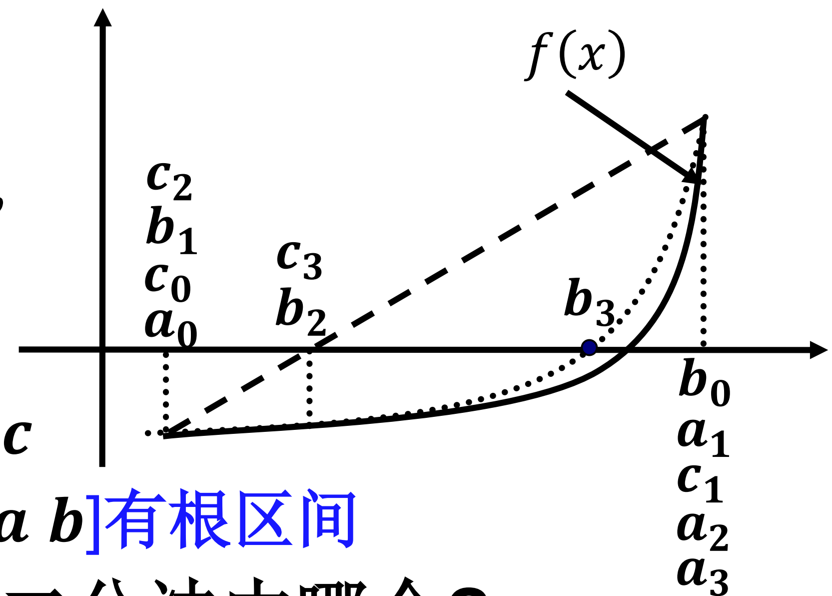
通用求根算法zeroin

- 求解$f(x) = 0$的方法比较 (无法算导数$f'(x)$的情况)
  - 割线法/抛物线法: 需要局部收敛性、函数的光滑性，但收敛速度快
  - 二分法: 全局收敛、只需函数连续，但收敛较慢
  - 将两者结合, 得稳定快速的**Brent**方法(1973)
- **Zeroin**算法主要步骤
  - 输入有根区间$[a, b]$
  - 用b表示最优解, 与a构成有根区间，而c为次优解
  - 重复下面的步骤, 直到$|f(b)|$足够小或$|a - b|$足够小
  - 调整a, b, c的值；执行逆二次插值法/割线法/二分法

通用求根算法zeroin

纠正上一步解的偏离

- 迭代步中如何调整a, b, c?
  - 若$f(a)$的正负号与$f(b)$相同，将c的值(前一个b)赋给a
  - 若$|f(a)|<|f(b)|$，则对调a, b的值，然后将a的值赋给c
  - 保证: b是最优解, c次优解, $[a\ b]$有根区间



- 执行逆二次插值法/割线法/二分法中哪个?
  - 若$c \neq a$，利用a, b, c以及它们的函数值作逆二次插值法的一步迭代，否则执行一步割线法
  - 若逆二次插值法/割线法得到的近似解<u>足够满意</u>(相邻解之差的缩小程度、在有根区间内)，用它更新b，否则执行一步二分法更新b的值; 改变之前b的值赋给c

通用求根算法zeroin

- 算法的特点/优点
  - 本身不要求函数$f(x)$具有光滑性
  - 不需要计算导数$f'(x)$
  - 初始解为有根区间，不需要接近准确解
  - 按“逆二次插值, 割线法, 二分法”的优先顺序生成下一步解，保证较快的收敛速度
- 二分法的改进, 改善了收敛慢的缺点(Matlab中fzero)

详细的Matlab算法程序见课本: fzerotx.m

应用实例

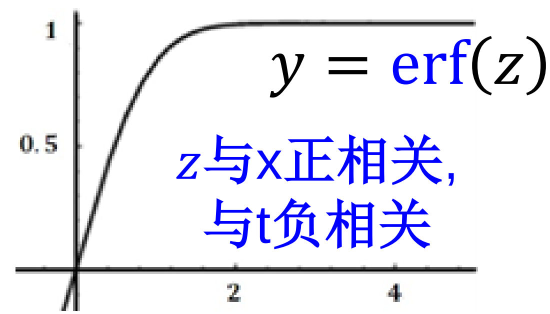
- **Matlab中有关命令**
  - **fzero:** 单变量非线性方程求根
  - **fsolve:** 非线性方程组的求解
  - **roots:** 求多项式方程的所有根　(与矩阵特征值有关!)
  - 定义函数$f(x)$, 并作为输入参数的方法：匿名函数"@"，复杂的函数需要用**.m**文件定义
- 实例
  - 解多项式方程: $x^4 - x - 2 = 0$
  - 牛顿法不收敛的问题: $f(x) = \mathrm{sign}(x-a)\sqrt{|x-a|} = 0$
  - "应用实例": 城市水管干线埋入地下的深度

应用实例

- 城市水管干线埋入地下的深度
  - 在保证水管不冻结的前提下，尽量将其埋得浅一点
  - 土壤温度$T(x,t)$, x离地面的距离, t寒流持续时间

x ↗ , t ↘ $\frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s}$ ↗ 最大值**1**

x ↘ , t ↗ ↘ 最小值**0**



  - T_s是寒流来后的(地上)气温(-10º)
  - T_i是寒流到来前的土壤的常温(20º)
  - 可以设 $\frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s} = \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
  - 寒流最长持续时间为t_m, 求温度$T(x,t_m)$=0对应的x

见*Tpipe.m*