Ejercicio 2.1 *Apoyándote en el libro de Mardia et al. (1980), describe razonadamente la demostración del teorema.*

Primero queremos demostrar (**a**), teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{d^2_{rs}} = -\mathbf{2a_{rs}} = (\mathbf{z_r} - \mathbf{z_s})'(\mathbf{z_r} - \mathbf{z_s})$$

Para ello y teniendo en cuenta que $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{11}'$ tenemos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{HAH} = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{AJ} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{JA} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}\mathbf{JAJ}$$

donde siendo $\mathbf{J} = \mathbf{11}'$:

$$\frac{1}{n}\mathbf{AJ} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{1.} & \cdots & \overline{a}_{1.} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{n.} & \cdots & \overline{a}_{n.} \end{bmatrix}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{JA} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{.1} & \cdots & \overline{a}_{.n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{.1} & \cdots & \overline{a}_{.n} \end{bmatrix}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}\mathbf{JAJ} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{..} & \cdots & \overline{a}_{..} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{..} & \cdots & \overline{a}_{..} \end{bmatrix}$$

Pudiendo obtener los terminos de la matriz mediante las siguientes sumatorias

$$\overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}.} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{s=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{a_{rs}}, \overline{\mathbf{a}}_{.\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{r=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{a_{rs}}, \overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}.} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}\sum_{\mathbf{r,s=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{a_{rs}}.$$

Así que teniendo $\mathbf{b_{rs}} = \mathbf{a_{rs}} - \overline{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}.} - \overline{\mathbf{a}}_{.\mathbf{s}} + \overline{\mathbf{a}}_{..}$ y sustituyendo $\mathbf{b_{rs}}$ por $\mathbf{a_{rs}}$ obtenemos la formula simplificada $\mathbf{b_{rs}} = (\mathbf{z_r} - \overline{\mathbf{z}})'(\mathbf{z_s} - \overline{\mathbf{z}})$

Con esto y el hecho de que $\mathbf{d^2_{rs}} = (\mathbf{z_r} - \mathbf{z_s})'(\mathbf{z_r} - \mathbf{z_s})$ queda demostrado (**a**)

En contraposición,para demostrar (**b**) suponemos que $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ y teniendo en cuenta la configuración del teorema,dado $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_\mathbf{1}, ..., \lambda_\mathbf{p})$ y también $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{X\Lambda^{-1/2}}$ por lo que las columnas de $\mathbf{\Gamma}$,$\gamma_{(\mathbf{i})} = \lambda_\mathbf{i}^{-\mathbf{1/2}}\mathbf{x_{(i)}}$ los cuales son vectores propios normalizados de $\mathbf{B}$. Por lo tanto por el teorema de descomposición del espectro.

$$\mathbf{B} = \mathbf{\Gamma\Lambda\Gamma}' = \mathbf{XX}';$$

De esto último sacamos, $\mathbf{b_{rs} = x_r^{'} x_s}$, por lo que $\mathbf{B}$ representa la matriz del producto interior para esta configuración.

Tomamos ahora que $\mathbf{D}$ representa la matriz de distancias entre los punteos para esta configuración.Usando $\mathbf{b_{rs} = a_{rs} - \overline{a}_{r.} - \overline{a}_{.s} + \overline{a}_{..}}$ para escribir $\mathbf{B}$ en términos de $\mathbf{A}$,obtenemos los siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{(x_r - x_s)^{'}(x_r - x_s)} &= \mathbf{x_r^{'}x_r - 2x_r^{'}x_s + x_s^{'}x_s} \\ &= \mathbf{d_{rr} - 2b_{rs} + b_{ss}} \\ & \mathbf{a_{rr} - 2a_{rs} + a_{ss}} \\ &= \mathbf{-2a_{rs} = d_{rs}^2} \end{aligned}$$

Ya que $\mathbf{a_{rr} = \frac{-1}{2} d_{rr}^2 = 0}$ y $\mathbf{-2a_{rs} = d_{rs}^2}$

Finalmente, anotamos que $\mathbf{B1 = HAH1 = 0}$ así que $\mathbf{1}$ es un vector propio de $\mathbf{B}$ correspondiente al valor porpio $\mathbf{0}$. Donde $\mathbf{1}$ es ortogonal para las columnas de $\mathbf{X, x_{(i)}^{'}1 = 0, i = 1, ..., p}$.Por consiguiente:

$$\mathbf{n\overline{x} = \sum_{r=1}^{n} x_i = X^{'}1 = (x_{(1)}^{'}1, ..., x_{(p)}^{'}1)^{'} = 0}$$

Así que le centro de gravedad de dicha configuración recae en el origen.

Ejercicio 2.2 *La siguiente tabla recoge las distancias entre las siguientes 10 ciudades Europeas: Londres, Estocolmo, Lisboa, Madrid, París, Amsterdam, Berlin, Praga, Roma y Dublin. Escribe el código necesario usando R o MatLab, para obtener los vectores propios normalizados* $(\mathbf{v_i^{'}v_i} = \lambda_\mathbf{i})$ *para la matriz B de productos escalares centrados asociada.*

c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10
0	569	667	530	141	140	357	396	569	190
569	0	1212	1043	617	446	325	423	787	648
667	1212	0	201	596	768	923	882	714	714
530	1043	201	0	431	608	740	690	516	622
141	617	596	431	0	177	340	337	436	320
140	446	768	608	177	0	218	272	519	302
357	325	923	740	340	218	0	114	472	514
396	423	882	690	337	272	114	0	364	573
569	787	714	516	436	519	472	364	0	755
190	648	714	622	320	302	514	573	755	0

Lo primero que hacemos es definir la matriz como x:

```
x<-read.csv('Ejercicio2.csv',
header=T,sep=",")
x<-as.matrix(x)
```

para proseguir hallamos la **n** dimesión de la matriz

```
n=dim(as.matrix(x))[1]
```

con lo que podremos hallar **H**

```
H<-diag(n)
-n^-1*rep(1,n) % *% t(rep(1,n))
```

a continuación obtenemos **A**

```
A<-(-2^-1)*x^2
```

con esto ya tenemos los valores de la constante aditiva necesarios para poder tener la matriz **B**

```
B<-H % *% A% *% H
```

mediante las siguientes ordenes obtenemos los valores de la constante aditiva y el mínimo de dichos valores.

```
eigen(B)
m<-min(eigen(B)$values)
```

Seguimos volviendo a calculas **x** pero rectandole la mínima constante aditiva a todos los valores menos la diagonal

```
x<-(x-2*m)+2*m*diag(n)
```

volvemos a repetir lo de antes hallando la **A** y **B**

```
A<-(-2^-1)*x^2
B<-H % * % A % * % H
```

y para terminar con este apartado obtenemos los vectores propios normalizados de **B** mediante:

```
eigen(B)
```

Ejercicio 2.3 *Usando R o MatLab, construye un fichero de sintaxis mediante el cual se efectúe MDS clásico sobre los datos de las ciudades de la Tabla 1, determinando la dimensión adecuada para la representación. Compara los resultados con los obtenidos en el Ejemplo anterior.*

Para este ejercicio empezamos obteniendo $\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{H}, \mathbf{AyB}$ igual que en el anterior.

```
x<-read.csv('Ejercicio2.csv',
header=T,sep=",")
x<-as.matrix(x)
n=dim(as.matrix(x))[1]
H<-diag(n)
-n^-1*rep(1,n) % * % t(rep(1,n))
A<-(-2^-1)*x^2
B<-H % * % A % * % H
eigen(B)
```

entonces la funcióne siguiente calcula la representatividad de la matriz con dos variables

```
X=cmdscale(x, k = 2, eig = TRUE,
 add = FALSE, x.ret = FALSE)
```

dando que explica un 99 por ciento.
Ahora teneos lo del ejemplo anterior.

```
Cargamos los datos.
library(stats)
eurodist
datos=eurodist
#Se comprueba que B no es
semidefinida positiva.
Xfull=cmdscale(datos, k = 20,
eig = TRUE, add = FALSE
, x.ret = FALSE)
#La solucion en dos dimensiones
explica aproximadamente el 87%.
X=cmdscale(datos, k = 2,
eig = TRUE, add = FALSE,
x.ret = FALSE)
X
```

La cual representa un 87 por ciento, por lo que la representavilidad que tenemos nosotros es mejor.

Ejercicio 2.4 *Sobre los datos de eurodist, construir un fichero de sintaxis en R o MatLab que permita realizar MDS clásico después de transformar las distancias mediante el procedimiento de la constante aditiva. Construye la representación en dos dimensiones y compárala con la anterior. ¿Cuántas dimensiones resultan necesarias para explicar los datos?*

Para este ejercicio primero nombramos eurodist para dibujar dicha matriz.

```
eurodist
x<-as.matrix(eurodist)
```

Después al igual que en el primer ejercicio calculamos la dimensión de la matriz y obtenemos $\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{H}, \mathbf{AyB}$ igual que en los anteriores.

```
n=dim(as.matrix(x))[1]
H<-diag(n)
-n^-1*rep(1,n) % *% t(rep(1,n))
A<-(-2^-1)*x^2
```

```
B<-H % *% A% *% H
eigen(B)
```

Ahora calculamos la constante aditiva mínima para que la matriz sea semidefinida positiva.

```
m<-cmdscale(x,k=n-1,add=T,eig=T)
$AC
```

Por último calculamos la nueva x y volvemos a calcular la $\mathbf{A}, \mathbf{Byeigen}(\mathbf{B})$

```
x<-x-*m+*m*diag(n)
A<-(-2^-1)*x^2
B<-H %* %A %* %H
eigen(B)
```

Para terminar con la siguiente función calculamos lo que nos pide el ejercicio.

```
m<-cmdscale(x,k=16,add=T,eig=T)
$GOF
m
```

Como resultado tenemos que con 16 dimensiones ya se explica un 97 por ciento de la matriz con lo que seria suficiente.